

**Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

***Выпуск 68
Июль 2017***

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл. №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2017

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

**УПРАВЛЕНИЕ
БОЛЬШИМИ
СИСТЕМАМИ**

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 68

Москва – 2017

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Дорофеев А.А., Кузнецов О.П., Кульба В.В., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: член-корр. РАН Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. физ.-мат. наук Шевляков А.А. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИПМ РАН), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), Галаев А.А. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук Зоркальцев В.И. (ИСЭМ СО РАН), проф. Калашников А.О. (ИПУ РАН), проф. Калянов Г.Н. (ГУ ВШЭ), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ключков В.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук, Коргин Н.А. (ИПУ РАН), проф. Курдюков А.П. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук, проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (МФТИ), д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р биол. наук проф. Михальский А.И., д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н. (ИПС РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Орлов А.И. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), проф. Райгородский А.М. (МГУ), проф. Савватеев А.В. (РЭШ), д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), Совлуков А.С. (ИПУ РАН) д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ), проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Арзамас – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – академик РАН Бычков И.В., д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в интернете: ubs.mtas.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

Системный анализ

Буре В.М., Парилина Е.М. <i>Стохастические модели передачи данных в сетях с различными топологиями</i>	6
Подиновский В.В. <i>Реперные функции</i>	30

Анализ и синтез систем управления

Быков А.В., Щербаков П.С. <i>Аппроксимации матричной l_0-квазинормы при синтезе разреженных регуляторов: численные исследования эффективности</i>	47
--	----

Управление в социально-экономических системах

Авдеева З.К., Коврига С.В. <i>О постановке задач управления ситуацией со многими активными субъектами с использованием когнитивных карт</i>	74
Белов М.В., Новиков Д.А. <i>Модели адаптации в динамических контрактах в условиях вероятностной неопределенности</i>	100
Романов Б.А. <i>Об использовании концепции «затраты-выпуск» для моделирования взаимодействия предприятий</i>	137

*Управление подвижными объектами
и навигация*

Белов Р.В., Огородников К.О.

*Реализация модифицированного алгоритма
рекуррентно-поискового оценивания корреляционно-
экстремальной навигационной системы
по рельефу местности*

162

УДК 519.7
ББК 22.18

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ В СЕТЯХ С РАЗЛИЧНЫМИ ТОПОЛОГИЯМИ¹

Буре В. М.², Парилина Е. М.³

(Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург)

Представлены теоретико-игровые модели передачи данных в сетях с различными топологиями. Вершины сети, в которых появляются пакеты данных для передачи в пункты назначения, представляются игроками, цель которых – доставить как можно больше пакетов. Для определения игр вводится система вознаграждений и издержек, которые игроки получают или платят при пересылке пакетов. Предполагается, что мультипакетная передача данных запрещена, и все пакеты имеют единичную длину. Для решения игр используется некооперативный и кооперативный подходы. При некооперативном подходе в качестве принципа оптимальности рассматривается равновесие по Нэшу, при кооперативном – игроки максимизируют суммарный ожидаемый выигрыш. Найдены оптимальные стратегии игроков для каждого подхода. Делаются выводы о целесообразности координации стратегий игроков для увеличения пропускной способности сетей.

Ключевые слова: сетевая игра, стохастическая игра, кооперация, передача данных.

¹ Работа второго автора поддержана грантом Российского научного фонда, проект №17-11-01079.

² Владимир Мансурович Буре, доктор технических наук, профессор (v.bure@spbu.ru).

³ Елена Михайловна Парилина, кандидат физико-математических наук, доцент (e.parilina@spbu.ru).

Введение

Сложную телекоммуникационную систему можно изучать путем разбиения ее на небольшие подсистемы простой топологии и решением задачи оптимизации работы таких подсистем. Моделируемые нами сети имеют простую структуру. Теоретико-игровое моделирование динамической передачи данных предполагает, что устройства передачи данных являются игроками, производящими некоторые действия в игре. Конечно, данное представление технических устройств является условным и делается для того, чтобы определить правила передачи данных для максимизации пропускной способности сети. Можно использовать как динамические, так и нединамические модели. Также обычно рассматривается один из двух сценариев — некооперативный, когда игроки ведут себя независимо, и кооперативный, когда между игроками возможно взаимодействие и производится координация их действий.

Нединамические игровые модели передачи данных в простых сетях подробно изложены в книге [4]. Широкий круг игровых моделей, применяемых для решения сетевых задач, представлен в обзоре [13]. Одна динамическая стохастическая модель передачи данных для сети специальной топологии была предложена в [16], а в статье [2] был построен кооперативный вариант этой игры и изучено свойство динамической устойчивости вектора Шепли. В нашей статье топология сети задана изначально и не меняется во времени. Однако, большой интерес представляют задачи формирования сети. Например, процесс формирования сети может моделироваться как некооперативная игра, в которой игроки используют правило двойного наилучшего ответа [3]. Из последних работ, предлагающих динамические теоретико-игровые модели передачи данных в беспроводных сетях, хотелось бы отметить статьи [6, 9, 12].

Мы моделируем передачу данных в динамике с помощью стохастической игры [17, 11], где в качестве игроков выступают устройства передачи данных (например, роутеры). Идея тако-

го моделирования близка идеям теории массового обслуживания, где детерминированные и стохастические модели используются для представления работы динамических систем массового обслуживания с различными предположениями о свойствах очереди [1, 7].

Состоянием в стохастической игре будет вектор, определяющий наличие пакета для передачи в каждой вершине сети. Стратегиями игроков (устройств) являются действия, которые они могут выполнять в том или ином состоянии, например, пересылать пакет напрямую в пункт назначения или передавать его другому игроку для последующей пересылки. Некооперативный сценарий предполагает индивидуально-рациональное поведение игроков. При таком сценарии мы используем равновесие по Нэшу в качестве принципа оптимальности. В случае кооперативного сценария мы находим оптимальные стратегии игроков, максимизирующих суммарный выигрыш. Нами рассмотрены три сети различных топологий, широко применяемые при моделировании беспроводных сетей. Также мы проводим анализ кооперативного и некооперативного решений, чтобы сделать вывод о том, имеется ли необходимость координации стратегий игроков (устройств) с целью достижения кооперативного решения поведения, которое, как известно, всегда дает не меньший суммарный выигрыш игрокам, чем равновесие по Нэшу. Отметим, что в работе мы формально не строим кооперативную игру, то есть, не задаем характеристическую функцию, ее определяющую. Мы только находим ситуацию в игре, максимизирующую суммарный выигрыш игроков. Построение кооперативной стохастической игры на основе некооперативной можно найти в статьях [14, 15].

Статья имеет следующую структуру. Разделы 1–3 посвящены трем моделям передачи данных: «Дилемма пересылки», «Совместная пересылка пакета», «Множественный доступ». При решении всех игр используется одна и та же схема: строится модель передачи данных в виде стохастической игры, в некооперативной игре находится равновесие по Нэшу, в кооперативной игре — ситуация в стационарных стратегиях, при которой достигается мак-

симальный суммарный выигрыш. После этого проводится сравнение выигрышей игроков при кооперации и ее отсутствии, и делается вывод о необходимости координации стратегий игроков. В разделе 1 результаты сформулированы для численного примера дилеммы пересылки, в разделах 2 и 3 доказаны теоремы о равновесиях в играх «Совместная пересылка» и «Множественный доступ».

1 Игра «Дилемма пересылки»

Рассмотрим первую схему передачи данных, широко используемую при моделировании беспроводных сетей, – «Дилемму пересылки» или Forwarder's dilemma. Устройства передачи данных (например, роутеры) обозначены на рис. 1 вершинами 1 и 2. При теоретико-игровом моделировании предполагается, что в вершинах 1 и 2 находятся игроки 1 и 2 соответственно. В этих вершинах в начале каждого периода времени, часто называемого в литературе как «time slot», появляются пакеты данных единичной длины (принимается для простоты) с вероятностями $a_1 \in (0, 1)$ и $a_2 \in (0, 1)$ соответственно, если в начале периода у игроков нет пакетов. Цель игрока 1 – переслать пакет в вершину d_1 , что, как видно из схемы передачи данных, он может сделать только через игрока 2. Аналогично, цель игрока 2 – переслать пакет в вершину d_2 , что он может сделать только через игрока 1. Для успешной передачи данных игроки должны пересылать пакеты в пункты назначения друг через друга.

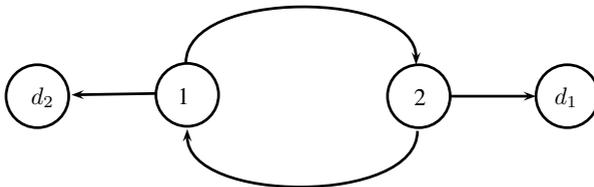


Рис. 1. Схема передачи данных для игры «Дилемма пересылки»

Введем систему вознаграждения за успешную пересылку пакета и наказания за его задержку, применяемую к игрокам:

- $c \in (0, 1)$ – издержки, которые несет игрок при пересылке одного пакета данных;
- 1 – вознаграждение игроку за успешную пересылку пакета.

Заметим, что при пересылке «чужого» пакета именно игрок, его пересылающий, несет издержки в размере c , вознаграждение за успешную пересылку пакета в размере 1 получает игрок, у которого этот пакет изначально появился. В случае отказа игроком переслать пакет другому игроку этот пакет остается у игрока, у которого этот пакет изначально появился, и на следующем шаге новый пакет данных у него не появляется.

Состояние стохастической игры определяет наличие или отсутствие пакета данных у игроков 1 и 2. Множество состояний игры есть $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$, где первый элемент вектора обозначает число пакетов у игрока 1, а второй элемент – число пакетов у игрока 2.

Рассмотрим последовательно каждое состояние игры, определим стратегии, выигрыши игроков в этих состояниях, а также вероятности перехода в другие состояния игры.

- Состояние $(0, 0)$.

Стратегия игрока 1 и 2 – W («ждать»). Выигрыши игроков – $(0, 0)$. Вероятности перехода из состояния $(0, 0)$ в состояния $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ обозначим через $p_{1,1}$, $p_{1,2}$, $p_{1,3}$ и $p_{1,4}$ соответственно. Эти вероятности формируют вектор $p_1 = (p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4})$, который равен $((1 - a_1)(1 - a_2), (1 - a_1)a_2, a_1(1 - a_2), a_1a_2)$.

- Состояние $(0, 1)$.

Стратегия игрока 2 – T («посылать»). Игрок 1 имеет две стратегии: F («переслать») и D («не переслать»). Выиг-

рыши игроков представлены в матрице:

$$(1) \quad \begin{array}{c} T \\ F \left(\begin{array}{c} (-c, 1) \\ (0, -c) \end{array} \right) \\ D \end{array}$$

Вероятности перехода из состояния $(0, 1)$ в состояния $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ при условии, что в игре реализовалась ситуация (F, T) , обозначим через $p_{2,1}(F, T)$, $p_{2,2}(F, T)$, $p_{2,3}(F, T)$ и $p_{2,4}(F, T)$ соответственно. Эти вероятности задают вектор переходных вероятностей $p_2(F, T) = (p_{2,1}(F, T), p_{2,2}(F, T), p_{2,3}(F, T), p_{2,4}(F, T))$, который равен $((1 - a_1)(1 - a_2), (1 - a_1)a_2, a_1(1 - a_2), a_1a_2)$.

Вероятности перехода из состояния $(0, 1)$ в состояния $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ при условии, что в игре реализовалась ситуация (D, T) , обозначим через $p_{2,1}(D, T)$, $p_{2,2}(D, T)$, $p_{2,3}(D, T)$ и $p_{2,4}(D, T)$ соответственно. Эти вероятности задают вектор переходных вероятностей $p_2(D, T) = (p_{2,1}(D, T), p_{2,2}(D, T), p_{2,3}(D, T), p_{2,4}(D, T))$, который равен $(0, 1 - a_1, 0, a_1)$.

- Состояние $(1, 0)$.

Стратегия игрока 1 – T («посылать»). Игрок 2 имеет две стратегии: F («пересылать») и D («не пересылать»). Выигрыши игроков представлены в матрице:

$$(2) \quad \begin{array}{cc} & F & D \\ T & ((1, -c) & (-c, 0)) \end{array}$$

Вектор вероятностей перехода из состояния $(1, 0)$ в состояния $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ при условии, что в игре реализовалась ситуация (T, F) , обозначим через $p_3(T, F) = (p_{3,1}(T, F), p_{3,2}(T, F), p_{3,3}(T, F), p_{3,4}(T, F))$, который равен $((1 - a_1)(1 - a_2), (1 - a_1)a_2, a_1(1 - a_2), a_1a_2)$.

Вектор вероятностей перехода из состояния $(1, 0)$ в состояния $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ при условии, что в игре реализовалась ситуация (T, D) , обозначим через $p_3(T, D) =$

$(p_{3,1}(T, D), p_{3,2}(T, D), p_{3,3}(T, D), p_{3,4}(T, D))$, который равен $(0, 0, 1 - a_2, a_2)$.

- Состояние $(1, 1)$.

В этом состоянии у каждого игрока в начале периода появился пакет данных для передачи. Стратегии любого игрока 1 или 2: F («пересылать») и D («не пересылать»). Таким образом, если каждый игрок пересылает пакет другому игроку, то пакеты считаются успешно доставленными, и каждый из игроков получает выигрыш, равный единице за вычетом издержек по пересылке пакета другого игрока. Таким образом, выигрыши игроков будут следующими:

$$(3) \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} F \\ D \end{array} \\ \begin{array}{c} F \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} (1 - c, 1 - c) & (-c, 1) \\ (1, -c) & (0, 0) \end{pmatrix} \end{array}$$

В этом состоянии есть четыре ситуации в чистых стратегиях, запишем вероятностей перехода из состояния $(1, 1)$ в состояния $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ в таблице 1.

Таблица 1. Вероятности перехода из состояния $(1, 1)$ в игре «Дилемма пересылки»

Ситуация	$p_4(\cdot) = (p_{4,1}(\cdot), p_{4,2}(\cdot), p_{4,3}(\cdot), p_{4,4}(\cdot))$
(F, F)	$((1 - a_1)(1 - a_2), (1 - a_1)a_2, a_1(1 - a_2), a_1a_2)$
(F, D)	$(0, 0, 1 - a_2, a_2)$
(D, F)	$(0, 1 - a_1, 0, a_1)$
(D, D)	$(0, 0, 0, 1)$

Будем предполагать, что игроки используют стационарные стратегии, которые зависят только от текущего состояния и не зависят от периода времени и его истории⁴. Обозначим через

⁴ Стационарные стратегии являются подклассом стратегий поведения, которые зависят также и от истории текущего периода. Использование стационарных стратегий оправдано для моделирования

$\eta_i \in H_i$ стратегию игрока $i = 1, 2$ в игре Γ . Стратегия η_i есть функция от состояния, которая отображает его в множество вероятностных распределений на множестве чистых стратегий игрока i в этом состоянии. Пара стационарных стратегий (η_1, η_2) формируют ситуацию в игре Γ , которую обозначим через η .

В качестве выигрыша игрока i в стохастической игре будем рассматривать ожидаемую дисконтированную сумму пошаговых выигрышей игроков:

$$(4) \quad E_i(\eta) = \pi_0(\mathbb{I} - \delta\Pi(\eta))^{-1}K_i(\eta),$$

где π_0 – вектор начального распределения по состояниям; \mathbb{I} – единичная матрица, размерность которой равна количеству состояний в игре; δ – дисконтирующий фактор; $\Pi(\eta)$ – матрица переходных вероятностей, строками которой являются строки p_1, \dots, p_4 , определенные выше; $K_i(\eta)$ – вектор выигрышей в каждом состоянии игры при условии, что игроки реализуют ситуацию η .

Определение 1. Ситуация $\eta^N = (\eta_1^N, \eta_2^N)$ называется равновесием по Нэшу в стохастической игре Γ , если справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} E_1(\eta_1^N, \eta_2^N) &\geq E_1(\eta_1, \eta_2^N) \text{ для } \forall \eta_1 \in H_1, \\ E_2(\eta_1^N, \eta_2^N) &\geq E_2(\eta_1^N, \eta_2) \text{ для } \forall \eta_2 \in H_2. \end{aligned}$$

Определение 2. Ситуация $\eta^* = (\eta_1^*, \eta_2^*)$ называется кооперативным равновесием в стохастической игре Γ , если справедливо неравенство:

$$\sum_{i=1}^2 E_i(\eta^*) \geq \sum_{i=1}^2 E_i(\eta) \text{ для } \forall \eta \in H_1 \times H_2.$$

Будем использовать теорему существования равновесия по Нэшу в стохастической игре с конечным множеством стратегий каждого игрока.

многошаговой передачи данных в беспроводных сетях, поскольку в качестве периода времени обычно берется 1 мс и хранение истории текущего периода требует большой объем памяти.

Теорема 1 [5, 18]. *Любая стохастическая игра многих лиц с ненулевой суммой с дисконт-фактором $\delta \in (0, 1)$ с конечными множествами состояний и стратегий имеет ситуацию равновесия по Нэшу, причем эта ситуация является ситуацией в стационарных стратегиях.*

При вычислении выигрышей игроков по формуле (4) мы оцениваем ожидаемое число доставленных игроком пакетов данных при условии дисконтирования. Вычисление выигрышей игроков по формуле (4) позволит оценить эффективность работы протокола передачи данных (правила передачи данных в сети) при заданной топологии. Ситуация в игре определяет протокол передачи данных, поэтому сравнение эффективностей протоколов можно производить, сравнивая выигрыши игроков в ситуациях, определяющих эти протоколы.

Можно использовать следующий способ сравнения кооперативного и некооперативного поведений игроков. То есть мы будем находить ситуации, оптимальные при кооперации и ее отсутствии, и делать вывод об эффективности кооперации, при возможности вычисляя значение некоторого коэффициента. В качестве меры выгоды кооперативного поведения игроков по сравнению с некооперативным в игре Γ выберем отношение разности суммы выигрышей игроков при кооперации и при ее отсутствии к сумме выигрышей при отсутствии кооперации, или так называемую *стоимость отказа от кооперации*:

$$(5) \quad \Delta(\Gamma) = \frac{\sum_{i=1}^2 E_i(\eta^*) - \sum_{i=1}^2 E_i(\eta^N)}{\sum_{i=1}^2 E_i(\eta^N)},$$

где η^* — ситуация в стационарных стратегиях, максимизирующая сумму $E_1(\eta) + E_2(\eta)$ на множестве $\eta \in H_1 \times H_2$; η^N — равновесие по Нэшу в стационарных стратегиях⁵. Коэффициент не может быть вычислен, если $E_1(\eta^N) + E_2(\eta^N) = 0$.

Замечание 1. Стоимость отказа от кооперации является преобразованной *ценой анархии* [8], которая равна отношению суммарного выигрыша игроков в кооперативном равновесии к их

⁵ Если существует несколько равновесий, то условно будем выбирать равновесие по Нэшу с наименьшим суммарным выигрышем.

суммарному выигрышу в наихудшей ситуации равновесия по Нэшу. Мы посчитали использование стоимости отказа от кооперации вида (5), которая меньше цены анархии на единицу, более удобным в контексте рассматриваемой задачи.

Замечание 2. В данной работе мы не строим кооперативную игру, а именно, не определяем значения характеристической функции, позволяющей вычислять дележи или перераспределения совместно полученных выигрышей. Подробное описание построения кооперативной стохастической игры, а именно, характеристической функции и дележей, определяющих перераспределение выигрышей между игроками на основе тех или иных «правил», а также проверку их динамической устойчивости, можно найти в статье [14]. Для модели передачи данных в одной беспроводной сети в статье [2] была построена кооперативная игра, найден вектор Шепли для перераспределения выигрышей игроков, а также построена процедура распределения дележа, позволяющая достичь динамической устойчивости вектора Шепли.

В силу сложности вычисления обратной матрицы в формуле (4) в игре «Дилемма пересылки» в общем виде, найдем некооперативное и кооперативное решения игры при заданных значениях параметров игры: $a_1 = 0,8$, $a_2 = 0,2$, $c = 0,1$, $\delta = 0,99$.

Запишем выигрыши игроков, вычисленные по формуле (4), в матрицу (6), строки соответствуют чистым стратегиям $WFTF$, $WFTD$, $WDTF$, $WDTD$ первого игрока. Столбцы соответствуют чистым стратегиям $WTF F$, $WTF D$, $WTF D$, $WTF D$ второго игрока. Стратегия игрока состоит из четырех элементов — стратегий игрока во всех состояниях в следующем порядке $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.

$$(6) \begin{pmatrix} (77,67; 12,33) & (64,23; 13,67) & (9,49; 18,39) & (-9,97; 20,30) \\ (78,58; 3,19) & (3,03; 0,12) & (43,20; 5,47) & (-0,34; 0,27) \\ (71,77; 10,79) & (62,16; 12,63) & (10,54; 17,84) & (-9,94; 20,20) \\ (79,70; -9,94) & (1,77; -0,22) & (77,80; -9,76) & (-0,21; 0,29) \end{pmatrix}$$

В игре Forwarder's dilemma существует равновесие по Нэшу в чистых стационарных стратегиях $(WDTD, WTF D)$, которое предписывает обоим игрокам «ждать» в состоянии $(0, 0)$; «не пересылать» – игроку 1 и «посылать» – игроку 2 в состоя-

нии $(0, 1)$; «посылать» – игроку 1 и «не пересылать» – игроку 2 в состоянии $(1, 0)$; «не пересылать» – обоим игрокам в состоянии $(1, 1)$. Таким образом, игроки не пересылают пакеты друг друга ни в каком состоянии. Выигрыши игроков позволяют сделать вывод о том, сколько пакетов игроков будет доставлено. Выигрыши игроков 1 и 2 во всей игре при реализации ситуации $(WDTD, WTDD)$ равны $-0,21$ и $0,29$ соответственно, сумма выигрышей равна $0,08$. Если учесть, что выигрыш игрока при пересылке пакета данных равен единице, то можно сказать, что реализация оптимального в смысле равновесия по Нэшу поведения игроков приведет к практически полному «простою» системы.

Кооперативным равновесием в игре «Дилемма пересылки» является ситуация $(WFTF, WFTF)$, которая предписывает обоим игрокам «ждать» в состоянии $(0, 0)$; «пересылать» – игроку 1 и «посылать» – игроку 2 в состоянии $(0, 1)$; «посылать» – игроку 1 и «пересылать» – игроку 2 в состоянии $(1, 0)$; «пересылать» – обоим игрокам в состоянии $(1, 1)$. В этой ситуации игроки пересылают пакеты друг друга, при наличии таковых, во всех состояниях. Выигрыши игроков 1 и 2 во всей игре при реализации ситуации $(WFTF, WFTF)$ равны $77,67$ и $12,33$ соответственно, сумма выигрышей равна 90 . Если учесть, что выигрыш игрока при пересылке пакета данных равен единице, то очевидно, что система не «простаивает», т.е. всегда, когда появляются пакеты, они доставляются в конечные вершины.

Стоимость отказа от кооперации в игре «Дилемма пересылки» вычислим по формуле (5): она равна 1124 . Это число показывает во сколько раз прибыль игроков от перехода к кооперативному поведению превосходит их выигрыш при некооперативном оптимальном поведении. Решение игры демонстрирует необходимость координации действий передающих устройств с целью увеличения пропускной способности системы с топологией, представленной на рис. 1.

2 Игра «Совместная пересылка пакета»

Рассмотрим вторую схему передачи данных, используемую при моделировании беспроводных сетей. Устройства передачи данных (игроки) обозначены на рис. 2 вершинами 1 и 2. В вершине s в начале каждого периода времени появляется пакет данных единичной длины в вероятностью $a_1 \in (0, 1)$. Цель обоих игроков – переслать пакет в вершину d . Как видно из схемы передачи данных, пакет дойдет до вершины d , только если оба игрока его пересылают. В случае успешной доставки пакета оба игрока получают выигрыш 1 за вычетом издержек по пересылке пакета. Если игрок 1 будет пересылать пакет, а игрок 2 не будет этого делать, то только игрок 1 несет издержки по пересылке пакета, а недоставленный пакет возвращается в вершину s . Если же игрок 1 не пересылает пакет, то ни один из игроков не несет издержки, при этом пакет возвращается в вершину s .

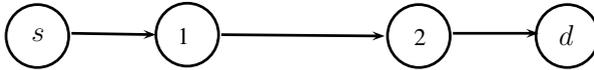


Рис. 2. Схема передачи данных для игры «Совместная пересылка пакета»

Состояние стохастической игры «Совместная пересылка пакета» (или Joint Packet Forwarding) определяет наличие или отсутствие пакета данных в вершине s в начале каждого периода. Множество состояний игры есть $\{0, 1\}$, равное количеству пакетов в вершине s .

Рассмотрим каждое состояние игры, определим стратегии и выигрыши игроков в этих состояниях, а также вероятности перехода в другие состояния игры.

- Состояние 0.

Стратегия игрока 1 и 2 – W («ждать»). Выигрыши игроков – $(0, 0)$. Вероятности перехода из состояния 0 в состояния 0, 1 обозначим через $p'_{1,1}$, $p'_{1,2}$ соответственно. Эти

вероятности формируют вектор $p'_1 = (p'_{1,1}, p'_{1,2})$, который равен $(1 - a_1, a_1)$.

• Состояние 1.

В этом состоянии в вершине s в начале периода появился пакет данных для передачи. Стратегии любого игрока 1 или 2: F («пересылать») и D («не пересылать»). Таким образом, если каждый игрок пересылает пакет, то пакет считается успешно доставленным, и каждый из игроков получает выигрыш, равный единице за вычетом издержек по пересылке пакета. Таким образом, выигрыши игроков будут следующими:

$$(7) \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} F \\ D \end{array} \\ \begin{array}{c} F \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} (1 - c, 1 - c) & (-c, 0) \\ (0, 0) & (0, 0) \end{pmatrix} \end{array}$$

В этом состоянии есть четыре ситуации в чистых стратегиях, запишем вероятности перехода из состояния 1 в состояния 0 и 1 в таблице 2.

Таблица 2. Вероятности перехода из состояния 1 в игре «Совместная пересылка пакета»

Ситуация	$p'_2(\cdot) = (p'_{2,1}(\cdot), p'_{2,2}(\cdot))$
(F, F)	$(1 - a_1, a_1)$
(F, D)	$(0, 1)$
(D, F)	$(0, 1)$
(D, D)	$(0, 1)$

У каждого игрока в этой стохастической игре по две чистые стационарные стратегии. Пусть $\eta_{i,j}$ — j -я стратегия игрока $i = 1, 2$, при этом $j = 1, 2$. Тогда стратегия $\eta_{i,1}$ такова, что $\eta_{i,1}(1) = W$ и $\eta_{i,1}(2) = F$ для любого i . Стратегия $\eta_{i,2}$ такова, что $\eta_{i,2}(1) = W$ и $\eta_{i,2}(2) = D$ для любого i .

Пусть $\pi_0 = (\pi_{0,1}; 1 - \pi_{0,1})$. Вычислим выигрыши игроков в ситуациях, которые образуют эти стационарные стратегии,

используя формулу (4):

$$E_i(\eta_{1,1}, \eta_{2,1}) = \frac{(1-c)((1-\delta)(1-\pi_{0,1}) + a_1\delta)}{1-\delta}, \quad i = 1, 2,$$

$$E_1(\eta_{1,1}, \eta_{2,2}) = -\frac{c((1-\delta)(1-\pi_{0,1}) + a_1\delta)}{(1-\delta)(1-\delta(1-a_1))},$$

$$E_2(\eta_{1,1}, \eta_{2,2}) = E_i(\eta_{1,2}, \eta_{2,1}) = E_i(\eta_{1,2}, \eta_{2,2}) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Теорема 2. В игре «Совместная пересылка пакета» ситуации $(\eta_{1,1}, \eta_{2,1})$ и $(\eta_{1,2}, \eta_{2,2})$ являются равновесиями по Нэшу с выигрышами игроков $E_i(\eta_{1,1}, \eta_{2,1}) = (1-c)((1-\delta)(1-\pi_{0,1}) + a_1\delta)/(1-\delta)$, $i = 1, 2$, и $E_i(\eta_{1,2}, \eta_{2,2}) = 0$, $i = 1, 2$, соответственно для любого вектора начального распределения по состояниям π_0 . Ситуация $(\eta_{1,1}, \eta_{2,1})$ также является ситуацией кооперативного равновесия для любого π_0 .

Доказательство. Заметим, что выигрыши обоих игроков в ситуации $(\eta_{1,1}, \eta_{2,1})$ положительны, а выигрыш игрока 1 в ситуации $(\eta_{1,1}, \eta_{2,2})$ отрицателен. В остальных ситуациях выигрыши игроков равны нулю. Сначала покажем, что ситуация $(\eta_{1,1}, \eta_{2,1})$ – равновесие по Нэшу, а потом – что сумма выигрышей игроков в этой ситуации максимальна. Выигрыши игроков равны и положительны, при индивидуальном отклонении от этой ситуации игроки могут разве что уменьшить свои выигрыши: игрок 1 при индивидуальном отклонении на стратегию $\eta_{1,2}$ получит выигрыш ноль, и второй игрок при индивидуальном отклонении на стратегию $\eta_{2,2}$ получит выигрыш ноль. В этой же ситуации сумма выигрышей игроков больше суммы их выигрышей в любой другой ситуации. Таким образом, ситуация $(\eta_{1,1}, \eta_{2,1})$ – равновесие по Нэшу и кооперативное равновесие.

Очевидно, что ситуация $(\eta_{1,2}, \eta_{2,2})$ также является равновесием по Нэшу с выигрышами игроков, равными нулю. Первый игрок при отклонении от стратегии $\eta_{1,2}$ на стратегию $\eta_{1,1}$ получит отрицательный выигрыш $-c((1-\delta)(1-\pi_{0,1}) + a_1\delta)/\{(1-\delta)(1-\delta(1-a_1))\}$, а второй игрок при индивидуальном отклонении на стратегию $\eta_{2,1}$ получит такой же выигрыш ноль. Сле-

довательно, $(\eta_{1,2}, \eta_{2,2})$ – равновесие по Нэшу. Теорема доказана.

Теорема 2 позволяет оценить необходимость кооперативного поведения игроков в игре «Совместная пересылка пакета». Так как в наихудшем равновесии по Нэшу сумма выигрышей игроков равна нулю, то стоимость отказа от кооперации вычислить невозможно. Конечно, при возможности воздействия на игроков, рекомендация реализовывать в игре равновесие $(\eta_{1,1}, \eta_{2,1})$ позволит реализовать кооперативное равновесие (социально-оптимальное поведение). Игра «Совместная пересылка пакета» является представителем такого класса игр, в котором кооперативное равновесие совпадает с равновесием по Нэшу, что на практике встречается нечасто.

3 Игра «Множественный доступ»

Рассмотрим третью схему передачи данных в беспроводных сетях. Устройства передачи данных (игроки) обозначены на рис. 3 вершинами 1 и 2. В каждой из этих вершинах в начале каждого периода времени может появиться пакет данных единичной длины в вероятностью $a_1 \in (0, 1)$ и $a_2 \in (0, 1)$ соответственно. Цель игрока $i = 1, 2$ – переслать пакет в вершину r_i . При этом, как видно из схемы передачи данных, пакет должен пройти общую для обоих игроков вершину единичной емкости. В случае если оба игрока одновременно пересылают пакет, эти пакеты возвращаются в начальные вершины. Для успешной доставки пакета необходимо, чтобы один из игроков пересылал пакет, а другой выбирал бы стратегию «ждать». При успешной доставке своего пакета данных, игрок получает выигрыш 1 за вычетом издержек (как и ранее, издержки равны $c \in (0, 1)$) по пересылке пакета. Состояние стохастической игры «Множественный доступ» (или Multiple access) определяет наличие или отсутствие пакета данных у игроков 1 и 2. Множество состояний игры – $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$, где первый элемент вектора обозначает число пакетов у игрока 1, а второй элемент – число пакетов у игрока 2.

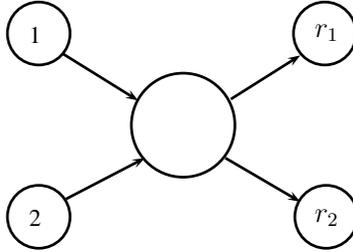


Рис. 3. Схема передачи данных для игры
«Множественный доступ»

Рассмотрим все состояния игры, определим стратегии, выигрыши игроков в этих состояниях, а также вероятности перехода во все состояния игры.

- Состояние $(0, 0)$.

Стратегия игрока 1 и 2 – W («ждать»). Выигрыши игроков – $(0, 0)$. Вероятности перехода из состояния $(0, 0)$ в состояния $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ обозначим через $p''_{1,1}$, $p''_{1,2}$, $p''_{1,3}$ и $p''_{1,4}$ соответственно. Эти вероятности образуют вектор $p''_1 = (p''_{1,1}, p''_{1,2}, p''_{1,3}, p''_{1,4})$, который равен $((1 - a_1)(1 - a_2), (1 - a_1)a_2, a_1(1 - a_2), a_1a_2)$.

- Состояние $(0, 1)$.

Стратегия игрока 1 – W («ждать»). Стратегия игрока 2 – T («посылать»). В этом состоянии игрок 2 пересылает пакет, который успешно доставляется в конечную вершину r_2 . Выигрыши игроков – $(0, 1 - c)$.

Вероятности перехода из состояния $(0, 1)$ в состояния $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ обозначим через $p''_{2,1}$, $p''_{2,2}$, $p''_{2,3}$ и $p''_{2,4}$ соответственно. Эти вероятности задают вектор переходных вероятностей $p''_2 = (p''_{2,1}, p''_{2,2}, p''_{2,3}, p''_{2,4})$, который равен $((1 - a_1)(1 - a_2), (1 - a_1)a_2, a_1(1 - a_2), a_1a_2)$.

- Состояние $(1, 0)$.

Стратегия игрока 1 – T («посылать»). Стратегия игрока 2 – W («ждать»). В этом состоянии игрок 1 пересылает пакет, который успешно доставляется в конечную вершину r_1 . Выигрыши игроков – $(1 - c, 0)$.

Вероятности перехода из состояния $(1, 0)$ в состояния $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ образуют вектор переходных вероятностей $p_3'' = (p_{3,1}'', p_{3,2}'', p_{3,3}'', p_{3,4}'')$, который равен $((1 - a_1)(1 - a_2), (1 - a_1)a_2, a_1(1 - a_2), a_1a_2)$.

- Состояние $(1, 1)$.

В этом состоянии у каждого игрока в начале периода появился пакет данных для передачи. Стратегии игрока 1 или 2: T («посылать») и W («ждать»). Выигрыши игроков будут следующими:

$$(8) \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} W & T \end{array} \\ \begin{array}{c} W \\ T \end{array} & \left(\begin{array}{cc} (0, 0) & (0, 1 - c) \\ (1 - c, 0) & (-c, -c) \end{array} \right) \end{array}$$

Здесь мы пренебрегаем издержками игрока за «простой» пакета данных, т.е. за то, что пакет не был отправлен в текущий период времени.

В этом состоянии есть четыре ситуации в чистых стратегиях, запишем вероятности перехода из состояния $(1, 1)$ в состояния $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ в таблице 3.

Таблица 3. Вероятности перехода из состояния $(1, 1)$ в игре «Множественный доступ»

Ситуация	$p_4''(\cdot) = (p_{4,1}'', p_{4,2}'', p_{4,3}'', p_{4,4}'')$
(W, W)	$(0, 0, 0, 1)$
(W, T)	$(0, 0, 1 - a_2, a_2)$
(T, W)	$(0, 1 - a_1, 0, a_1)$
(T, T)	$((1 - a_1)(1 - a_2), (1 - a_1)a_2, a_1(1 - a_2), a_1a_2)$

У игрока $i = 1, 2$ в этой стохастической игре две чистые стационарные стратегии: $\eta_{i,1}$ и $\eta_{i,2}$, они представлены в таблице 4.

Таблица 4. Чистые стационарные стратегии игроков в игре «Множественный доступ»

Состояние	Игрок 1		Игрок 2	
	$\eta_{1,1}$	$\eta_{1,2}$	$\eta_{2,1}$	$\eta_{2,2}$
(0, 0)	W	W	W	W
(0, 1)	W	W	T	T
(1, 0)	T	T	W	W
(1, 1)	W	T	W	T

Пусть $\pi_0 = (0,25, 0,25, 0,25, 0,25)$. Вычислим выигрыши игроков в ситуациях, которые образуют стационарные стратегии, описанные в таблице 4, используя формулу (4), где

$$E_1(\eta_{1,1}, \eta_{2,1}) = \frac{(1-c)(0,5(1-\delta) + a_1\delta(1,5-a_2))}{2(1-\delta(1-a_1a_2))},$$

$$E_2(\eta_{1,1}, \eta_{2,1}) = \frac{(1-c)(0,5(1-\delta) + a_2\delta(1,5-a_1))}{2(1-\delta(1-a_1a_2))},$$

$$E_1(\eta_{1,1}, \eta_{2,2}) = (0,5(1-c)[0,5 + ((1-a_1)a_2 - 0,5(1-a_1))\delta^2 + (1,5a_1 - a_1a_2 - a_2)\delta]) / ((1-\delta)(1-\delta a_2(1-a_1))),$$

$$E_2(\eta_{1,1}, \eta_{2,2}) = \frac{(1-c)(0,5(1-\delta) + a_2\delta)}{1-\delta},$$

$$E_1(\eta_{1,2}, \eta_{2,1}) = \frac{(1-c)(0,5(1-\delta) + a_1\delta)}{1-\delta},$$

$$E_2(\eta_{1,2}, \eta_{2,1}) = (0,5(1-c)[0,5 + ((1-a_2)a_1 - 0,5(1-a_2))\delta^2 + (1,5a_2 - a_1a_2 - a_1)\delta]) / ((1-\delta)(1-\delta a_1(1-a_2))),$$

$$E_1(\eta_{1,2}, \eta_{2,2}) = \frac{(1-\delta)(0,25 - 0,5c) + a_1\delta(1-c-a_2)}{1-\delta},$$

$$E_2(\eta_{1,2}, \eta_{2,2}) = \frac{(1-\delta)(0,25 - 0,5c) + a_2\delta(1-c-a_1)}{1-\delta}.$$

Теорема 3. Пусть $\pi_0 = (0,25, 0,25, 0,25, 0,25)$. В игре «Множественный доступ» ситуации $(\eta_{1,1}, \eta_{2,2})$ и $(\eta_{1,2}, \eta_{2,1})$ являются равновесиями по Нэшу с выигрышами игроков:

$$E_1(\eta_{1,1}, \eta_{2,2}) = (0,5(1 - c)[0,5 + (1 - a_1)(a_2 - 0,5)\delta^2 + (1,5a_1 - a_1a_2 - a_2)\delta]) / ((1 - \delta)(1 - \delta a_2(1 - a_1))),$$

$$E_2(\eta_{1,1}, \eta_{2,2}) = ((1 - c)(a_2\delta + 0,5(1 - \delta))) / (1 - \delta)$$

и

$$E_1(\eta_{1,2}, \eta_{2,1}) = (1 - c)(a_1\delta + 0,5(1 - \delta)) / (1 - \delta),$$

$$E_2(\eta_{1,2}, \eta_{2,1}) = (0,5(1 - c)[0,5 + (1 - a_1)(a_2 - 0,5)\delta^2 + (1,5a_1 - a_1a_2 - a_2)\delta]) / ((1 - \delta)(1 - \delta a_2(1 - a_1))).$$

Кооперативным равновесием является ситуация $(\eta_{1,1}, \eta_{2,2})$, если $a_2 > a_1$, и ситуация $(\eta_{1,2}, \eta_{2,1})$, если $a_2 < a_1$. В случае $a_1 = a_2$ обе ситуации $(\eta_{1,1}, \eta_{2,2})$, $(\eta_{1,2}, \eta_{2,1})$ являются кооперативными равновесиями.

Доказательство. Так как разность $E_1(\eta_{1,1}, \eta_{2,1}) - E_1(\eta_{1,2}, \eta_{2,1})$ равна

$$\frac{(1 - c) \{-0,5(1 - \delta)^2 - a_1\delta(1 - \delta)(0,5 + 2a_2) - 2a_1^2a_2\delta^2\}}{2(1 - \delta(1 - a_1a_2))(1 - \delta)} < 0,$$

то $E_1(\eta_{1,1}, \eta_{2,1}) < E_1(\eta_{1,2}, \eta_{2,1})$. Аналогично, $E_2(\eta_{1,1}, \eta_{2,1}) < E_2(\eta_{1,1}, \eta_{2,2})$, так как разность $E_2(\eta_{1,1}, \eta_{2,1}) - E_2(\eta_{1,1}, \eta_{2,2})$ равна

$$\frac{(1 - c) \{-0,5(1 - \delta)^2 - a_2\delta(1 - \delta)(0,5 + 2a_1) - 2a_2^2a_1\delta^2\}}{2(1 - \delta(1 - a_1a_2))(1 - \delta)} < 0.$$

Разность $E_1(\eta_{1,1}, \eta_{2,2}) - E_1(\eta_{1,2}, \eta_{2,2})$ положительна тогда и только тогда, когда

$$c > -\frac{\delta(1 - a_1)(1 - a_2)}{1 - \delta + a_1\delta},$$

что всегда верно, поскольку выражение в правой части неравенства отрицательно, а $c \in (0, 1)$.

Аналогично, разность $E_2(\eta_{1,2}, \eta_{2,1}) - E_2(\eta_{1,2}, \eta_{2,2})$ положительна тогда и только тогда, когда

$$c > -\frac{\delta(1-a_2)(1-a_1)}{1-\delta+a_2\delta},$$

что всегда верно, поскольку выражение в правой части неравенства отрицательно, а $c \in (0, 1)$.

Следовательно, ситуации $(\eta_{1,2}, \eta_{2,1})$ и $(\eta_{1,1}, \eta_{2,2})$ являются равновесиями по Нэшу. Выигрыши игроков могут быть вычислены по формуле (4), результат представлен в формулировке теоремы.

Теперь проверим, какая ситуация является кооперативным равновесием. Очевидно, что сумма выигрышей игроков во всей игре в ситуациях $(\eta_{1,1}, \eta_{2,2})$ и $(\eta_{1,2}, \eta_{2,1})$ больше, чем сумма выигрышей в ситуациях $(\eta_{1,1}, \eta_{2,1})$ и $(\eta_{1,2}, \eta_{2,2})$. Определим, при каких условиях кооперативным решением будет ситуация $(\eta_{1,1}, \eta_{2,2})$ и при каких условиях — $(\eta_{1,2}, \eta_{2,1})$. Для этого вычислим и преобразуем разность сумм выигрышей игроков в этих ситуациях:

$$(9) \quad E_1(\eta_{1,1}, \eta_{2,2}) + E_2(\eta_{1,1}, \eta_{2,2}) - (E_1(\eta_{1,2}, \eta_{2,1}) + E_2(\eta_{1,2}, \eta_{2,1})) = \\ = \frac{(a_2 - a_1)(1 - a_1)(1 - a_2)(\delta a_1 a_2 + 0,25(1 - \delta))\delta^2}{(1 - \delta)(1 - (1 - a_1)a_2\delta)(1 - (1 - a_2)a_1\delta)}.$$

Эта разность положительна тогда и только тогда, когда $a_2 > a_1$. В этом случае ситуация $(\eta_{1,1}, \eta_{2,2})$ является кооперативным равновесием. Разность (9) отрицательна тогда и только тогда, когда $a_2 < a_1$, и в этом случае ситуация $(\eta_{1,2}, \eta_{2,1})$ является кооперативным равновесием. В случае равенства нулю разности (9) ($a_1 = a_2$) обе ситуации $(\eta_{1,1}, \eta_{2,2})$, $(\eta_{1,2}, \eta_{2,1})$ являются кооперативными равновесиями. Теорема доказана.

Из теоремы 3 следует, что кооперативное равновесие является и равновесием по Нэшу. Таким образом, игроки, максимизируя суммарный выигрыш, действуют индивидуально-рационально, т.е. реализуют равновесные по Нэшу стратегии.

Но поскольку в игре «Множественный доступ» кооперативное равновесие является равновесием по Нэшу с большим суммарным выигрышем, то стоимость отказа от кооперации вида (5)

равна 0 только в случае, когда $a_1 = a_2$. Это говорит об отсутствии необходимости координации действий передающих устройств, находящихся в вершинах 1 и 2, когда $a_1 = a_2$. Если же $a_1 > a_2$ или $a_1 < a_2$, то стоимость отказа от кооперации больше нуля. В этих случаях координация действий передающих устройств принесет увеличение прибыли.

4 Заключение

В работе представлены три модели передачи данных в сетях различных топологий. Передача данных является конкурентной и имеет стохастическую природу, поэтому при моделировании использовались стохастические игры. Были рассмотрены кооперативный и некооперативный сценарии игры. Получены оптимальные стратегии игроков для обоих сценариев и для каждой из трех игр. Для двух игр удалось получить теоретические результаты для игры общего вида, тогда как для одной игры найдено решение задачи для некоторого набора параметров. В двух из трех игр координация действий передающих устройств позволит увеличить выигрыши игроков, тем самым увеличив производительность сети. В одной игре кооперативное поведение игроков является индивидуально рациональным (при равных вероятностях появления пакетов у игроков), поэтому необходимости в осуществлении управления такой сетью нет. Поэтому мы можем сделать вывод о том, что прежде чем начать управление стратегиями участников сети, необходимо построить математическую модель, чтобы понять, нужно ли это управление. Но может получиться так, что даже если координация действий участников сети может привести к увеличению суммарного выигрыша, то это увеличение выигрыша может быть мало по сравнению с затратами на координацию действий игроков. Для того чтобы понять, есть ли экономический смысл в управлении сетью, мы и предлагаем вычислять *стоимость отказа от кооперации*, которая позволит произвести стоимостную оценку координации действий участников сети.

Литература

1. БУРЕ В.М., КАРЕЛИН В.В., ЕЛФИМОВ А.Н. *Об одной задаче управления детерминированной системой обслуживания* // Вестник С.-Петербургского университета. Сер. 10: Прикл. матем. Информ. Проц. упр. – 2015. – №4. – С. 100–112.
2. ПАРИЛИНА Е.М. *Кооперативная игра передачи данных в беспроводной сети* // Управление большими системами. – 2010. – №31.1. – С. 191–209.
3. VAZENKOV N.I. *Double best response dynamics in topology formation game for ad hoc networks* // Automation and Remote Control. – 2015. – Vol. 76, Iss. 2. – P. 323–335.
4. BUTTYAN L., HUBAUX J.-P. *Security and Cooperation in Wireless Networks: Thwarting Malicious and Selfish Behavior in the Age of Ubiquitous Computing*. – Cambridge University Press New York, NY, USA, 2007.
5. FINK A.M. *Equilibrium in a stochastic n-person game* // Journal of Science of the Hiroshima University. – 1964. – Vol. A-I 28. – P. 89–93.
6. KAMHOUA C., PISSINOU N. *Mitigating selfish misbehavior in multi-hop networks using stochastic game theory* // In Proc. of the IEEE 35th Conference on Local Computer Networks (LCN '10), IEEE Computer Society, Washington, DC, USA. – 2010. – P. 232–235.
7. KARELIN V.V., BURE V.M., POLYAKOVA L.N., ELFIMOV A.N. *Control problem of a deterministic queuing system* // Applied Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 10, No. 21. – P. 1023–1030.
8. KOUTSOPIAS E., PAPADIMITRIOU C. *Worst-case equilibria* // Proc. of the 16th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science. – 1999. – P. 404–413.

9. LIU Y., GARNAEV A., TRAPPE W. *Maintaining throughput network connectivity in ad hoc networks* // Proc. of ICASSP, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. – 2016. – Art. No. 7472905. – P. 6380–6384.
10. MICHIARDI P., MOLVA R. *A game-theoretical approach to evaluate cooperation enforcement mechanisms in mobile ad hoc networks* // Proc. WiOpt'03: Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc and Wireless Networks. – 2003. – Sophia-Antipolis, France.
11. NEYMAN A., SORIN S. *Stochastic Games and Applications* // NATO Science Series C, Mathematical and Physical Sciences. – 2003. – Vol. 570. – Kluwer Academic Publishers Dordrecht.
12. NJILLA L.Y., PISSINOU N. *Dynamics of data delivery in mobile ad-hoc networks: A bargaining game approach* // Proc. of 2015 IEEE Symposium on Computational Intelligence for Security and Defense Applications, CISDA'2015. – 2015. – Art. No. 7208634. – P. 98–103.
13. NOVIKOV D.A. *Games and networks* // Automation and Remote Control. – 2014. – Vol. 75, Iss. 6. – P. 1145–1154.
14. PARILINA E.M. *Stable cooperation in stochastic games* // Automation and Remote Control. – 2015. – Vol. 76. – P. 1111–1122.
15. PETROSJAN L.A., BARANOVA E.M. *Cooperative Stochastic Games in Stationary Strategies* // Game Theory and Applications. – 2006. – Vol. 11. – P. 7–17.
16. SAGDUYU Y.E., EPHREMIDES A. *A game-theoretic look at simple relay channel* // Wireless Networks. – 2006. – Vol. 12, No. 5. – P. 545–560.
17. SHAPLEY L.S. *Stochastic games* // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 1953. – Vol. 39. – P. 1095–1100.
18. TAKAHASHI M. *Stochastic games with infinitely many strategies* // J. of Science of the Hiroshima University. – 1964. – Vol. A-I 28. – P. 95–99.

STOCHASTIC MODELS OF DATA TRANSMISSION IN NETWORKS WITH DIFFERENT TOPOLOGIES

Vladimir Bure, Saint Petersburg State University, Saint Petersburg,
Doctor of Science, Professor (v.bure@spbu.ru).

Elena Parilina, Saint Petersburg State University, Saint Petersburg,
Cand.Sc., Associate professor (e.parilina@spbu.ru).

Abstract: The game theoretic models of data transmission in networks with different topologies are presented and discussed in the paper. The nodes of the network in which data packages appear for transmission to the destination nodes are interpreted as the players whose aim is to deliver as many packages as possible. To determine the game a system of payoffs and costs that players receive or pay sending packages is proposed. We model dynamic data transmission as a stochastic game. It is assumed that multi-package data transmission is prohibited and all packages have a unit length. We use both non-cooperative and cooperative approaches to solve the game. In noncooperative approach, the Nash equilibrium is considered as an optimality principle. In cooperative approach, players maximize the summarized expected payoff. The optimal player strategies for each approach are obtained. We make conclusions about necessity of the coordination of the players' strategies to increase the network throughput.

Keywords: network game, stochastic game, cooperation, data transmission.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Р.М. Нижегородцевым.*

Поступила в редакцию 16.02.2017.

Дата опубликования 31.07.2017.

РЕПЕРНЫЕ ФУНКЦИИ¹

Подиновский В. В.²

(Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва)

Введено понятие реперной функции. Она оцифровывает все элементы конечного упорядоченного множества так, что для тех его элементов, которые могут играть роль реперных уровней (полезности, ценности, предпочтительности, качества, эффективности, или, напротив, вредности, опасности и т.п.) и, в частности, быть охарактеризованы содержательными оценками (например, словесными оценками «отлично», «хорошо» и т.д.), назначаются соответствующие числовые оценки (например, 5, 4 и т.д.). Рассмотрено несколько примеров таких функций, представляющих прикладной интерес.

Ключевые слова: упорядоченное множество, функция перечисления, функция полезности (ценности), лексимин, лексимакс, рейтинг.

1. Введение

Функции ценности, или полезности, широко используются для моделирования предпочтений, в том числе в задачах управления (см., например, [3, 6]). Они могут вводиться либо изначально (известный пример – взвешенная сумма частных крите-

¹ Статья подготовлена в ходе работы в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ) и с использованием средств субсидии из государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "«5-100"».

² Владислав Владимирович Подиновский, доктор технических наук, профессор (podinovski@mail.ru).

риев в многокритериальных задачах принятия решений [14]), либо использоваться для представления полученного упорядочения объектов (управлений, стратегий, планов, вариантов решений и т.п.) по предпочтительности. Далее будет рассматриваться второй из указанных случаев. Кроме упорядочения по предпочтительности, или полезности¹, будут рассматриваться и упорядочения по обратной предпочтительности, или по вредности².

Пусть на непустом множестве A произвольной природы задан *строгий порядок* P . Он может иметь смысл предпочтения, или превосходства в полезности, и тогда aPb означает, что элемент a предпочтительнее, или полезнее элемента b . Но может иметь и смысл обратного предпочтения, или превосходства во вредности, и тогда aPb означает, что элемент a вреднее элемента b , или что элемент a менее предпочтителен, чем элемент b .

По определению, строгий порядок P – это иррефлексивное и транзитивное (а потому и асимметричное) бинарное отношение: для любых $a, b, c \in A$ неверно aPa и из aPb и bPc следует aPc (и поэтому если верно aPb , то bPa неверно). Кроме того, будем полагать, что строгий порядок P является *линейным*: для любых неравных элементов $a, b \in A$ верно либо aPb , либо bPa . Таким образом, все множество A оказывается упорядоченным (по полезности или же вредности). Упорядоченное множество, полученное из A при помощи P , будем обозначать A_P .

Определенная на A и принимающая числовые значения функция ψ называется *представляющей* на A строгий линейный порядок P , если $\psi(a) > \psi(b)$ верно тогда и только тогда, когда верно aPb . Если P – отношение предпочтения (превосходства в

¹ Как отмечалось в экономической теории, бывают случаи, когда вместо слова «полезность» больше подходит слово «желаемость» (например, при сравнении удовольствий, которые могут и не быть полезными) или слово «желательность».

² Слово «вредность» употребляется нами как антоним к слову «полезность».

полезности), то ψ называется *функцией полезности* (или ценности), или предпочтения, и обозначается буквой u (или v). Для этой функции более предпочтительному (более полезному) элементу соответствует большее ее значение. Если же P – отношение обратного предпочтения (превосходства во вредности), то ψ назовем *функцией вредности* и обозначим буквой h . Большее значение этой функции приписывается менее предпочтительному (более вредному) элементу.

Далее будем полагать, что конечное множество A содержит $n \geq 3$ элементов. Среди них существует один наибольший a^* и один наименьший a_* элементы: для любого $a \neq a^*$ верно a^*Pa и для любого $a \neq a_*$ верно aPa_* . Если P – отношение полезности, то a_* – наихудший, наименее полезной элемент, а a^* – наилучший, наиболее полезный. Если P – отношение вредности, то a_* –наименее вредный элемент, a^* – наиболее вредный.

Поскольку множество A конечно, то представляющая функция ψ существует. Однако она не является единственной: если φ – возрастающая числовая функция, то $\varphi(\psi)$ также является представляющей функцией. Используя язык теории измерений [15], можно сказать, что представляющая функция «измеряет» полезность или же вредность в порядковой шкале.

Среди всех представляющих функций выделяют *функцию перечисления* ψ^e , которая приписывает n элементам множества A натуральные значения от 1 до n так, что $\psi^e(a_*) = 1$ и $\psi^e(a^*) = n$. Значения этой функции получаются в результате последовательного перечисления элементов множества от наименьшего к наибольшему. Во многих отношениях такая функция ценности является достаточно привлекательной. Однако ей присущи и недостатки. Например, при большом числе элементов n ее значения оказываются тоже большими, что не всегда удобно, так как, например, затрудняет их содержательную интерпретацию (см. примеры ниже). С другой стороны, все элементы получают номера «на равных основаниях» в соответствии с их местом в упорядоченном множестве A_\uparrow , хотя среди них могут быть такие, которые, с точки зрения выраженности полезности или вредности, явно выделяются (или могут быть

выделены) среди всех остальных. Для устранения этих недостатков предлагается новый класс представляющих функций, которые имеют также и свои привлекательные свойства.

2. Реперные функции

Пусть среди элементов множества A выделено $r < n$ реперных элементов $a^1 = a^*$, a^2 , ..., $a^r = a^*$, занумерованных в порядке упорядочения согласно строгому линейному порядку P , т.е. верно a^2Pa^1 , a^3Pa^2 , ..., a^rPa^{r-1} . В конкретных задачах в роли реперных могут выступать элементы, полезность или вредность которых имеет содержательную интерпретацию, и поэтому им можно приписать некоторые характеристические значения конструируемой функции ψ . Для упрощения записи далее будем полагать, что $\psi(a^1) = 1$, $\psi(a^2) = 2$, ..., $\psi(a^r) = r$. Для элементов, находящихся в упорядоченном множестве $A \uparrow$ между соседними реперными элементами a^j и a^{j+1} (обозначим их число через t_j), значения функции ψ назовем следующим образом: элементам приписываются, в порядке возрастания полезности или вредности, значения, выражаемые простыми дробями

$$j \frac{1}{t_j+1}, j \frac{2}{t_j+1}, \dots, j \frac{t_j}{t_j+1}.$$

Эти дроби показывают, на каком «расстоянии», выражаемом числом «шагов» длиной $1/(t_j+1)$, находится полезность или вредность рассматриваемого элемента от «реперной» полезности или вредности j . Назначение указанных дробных значений можно считать результатом своеобразной линейной интерполяции. Разумеется, вместо простых дробей можно использовать и десятичные (с приемлемым числом значащих цифр), однако при этом наглядность, по-видимому, уменьшится.

Введенные указанным способом представляющие функции будем называть *реперными* и в общем случае обозначать ψ^r . Значения реперной функции ψ^r называют *рейтинговыми индексами* элементов.

Если P – отношение превосходства в полезности, то будем говорить о *реперной функции полезности* и использовать обозначение u^r . А если P – отношение превосходства во вредности,

то будем использовать наименование *реперная функция вредности* и обозначение h^r .

3. Реперные функции в многокритериальных задачах

В многокритериальных задачах считаются заданными множество объектов X и определенный на нем векторный критерий $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, состоящий из $m \geq 2$ частных критериев f_i . Под частным критерием f_i понимается функция с областью задания X и числовой областью значений Z_i . Объект x полностью характеризуется его векторной оценкой $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$, так что сравнение объектов по полезности или вредности сводится к сопоставлению их векторных оценок. Множество всех векторных оценок (область значений векторного критерия) есть $Z = Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_m$.

На множестве Z задано отношение нестрогого порядка R_* , которое является квазипорядком (оно рефлексивно и транзитивно). Это отношение имеет смысл нестрогого превосходства в полезности или же вредности: запись yR_*z означает, что векторная оценка не менее полезна (не менее предпочтительна) или же не менее вредна (не более предпочтительна), чем векторная оценка z . Отношение R_* считается полным: для любых векторных оценок $y, z \in Z$ верно yR_*z или zR_*y . Это отношение порождает на Z отношения строгого превосходства P_* и безразличия I_* следующим образом: yP_*z верно, когда верно yR_*z и неверно zR_*y , а yI_*z верно, когда верны оба соотношения yR_*z и zR_*y . Отношение I_* есть отношение эквивалентности (оно рефлексивно, транзитивно и симметрично). Оно разбивает множество Z на классы эквивалентности (классы безразличия), состоящие из эквивалентных (связанных отношением I_*) векторных оценок. Далее множество классов эквивалентности будем обозначать буквой A . На множестве A отношение P_* порождает отношение строгого предпочтения – строгий линейный порядок P – следующим образом: для разных классов $a, b \in A$ верно aPb , когда для любых векторных оценок y из a и z из b верно yP_*z .

Будем считать, что множество A конечно и содержит $n \geq 3$ элементов. Теперь для введенного множества A с определенным

на нем отношением P можно использовать введенные выше понятия реперной функции и реперных оценок. Конкретизация введенных конструкций для нескольких типов многокритериальных задач рассматривается ниже. При этом будем полагать, что все критерии имеют общую область определения – конечное множество Z_0 , так что область значений векторного критерия является множеством Z_0^m .

Пусть критерии имеют равную важность, причем уменьшение значений одних критериев не компенсируется увеличением значений других критериев (точные определения см. в [7]). В этом случае возникает семейство отношений предпочтения, названных в [7, 9] симметрически-лексикографическими, или SL -отношениями. Такие отношения используются для описания предпочтений в различных задачах оптимизации и принятия решений (см., например, [8, 12, 18, 19]).

Далее будем рассматривать случай, когда область значений критериев – множество Z_0 – состоит из первых q натуральных чисел: $Z_0 = \{1, 2, \dots, q\}$, $q \geq 2$. Этот случай реализуется, например, когда шкала критериев q -балльная. Он возникает и после нумерации словесных оценок в порядке возрастания их полезности или вредности.

4. Реперные функции при лексиминном отношении превосходства в полезности

Будем полагать, что отношение превосходства на Z имеет смысл отношения предпочтения, или превосходства в полезности, и использовать в роли представляющей реперную функцию полезности u^r . Будем считать также, что большие значения критериев предпочтительнее меньших.

Здесь будем рассматривать случай, когда уменьшение меньших значений одних критериев не компенсируется увеличением больших значений других критериев. Соответствующее SL -отношение известно под названием лексиминного. Примеры использования лексиминного отношения в прикладных задачах можно найти в [1, 4, 5, 16].

Пусть $y_{\uparrow} = (y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(m)})$ – вектор, полученный из вектора $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ упорядочением его компонент по неубыванию: $y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq \dots \leq y_{(m)}$. Например, $(5, 1, 1, 4)_{\uparrow} = (1, 1, 4, 5)$ и $y_{(3)} = 4$. Лексиминное отношение нестрогого предпочтения – полный квазипорядок R_*^u – определяется так: $yR_*^u z$ верно, если выполнено одно из следующих $m + 1$ условий: 1) $y_{(1)} > z_{(1)}$; 2) $y_{(1)} = z_{(1)}$, $y_{(2)} > z_{(2)}$; ...; m) $y_{(i)} = z_{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, m - 1$, $y_{(m)} > z_{(m)}$; $m + 1$) $y_{(i)} = z_{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Соотношение $yP_*^u z$ верно, если выполнено одно указанных условий, кроме последнего, а $yI_*^u z$ верно, если выполнено условие $m + 1$, т.е. если $y_{\uparrow} = z_{\uparrow}$. Поэтому, например, при $m = 3$ один из классов эквивалентности I_*^u составляют векторные оценки $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$ и $(1, 1, 2)$. Каждый такой класс, содержащий векторную оценку y , можно представлять вектором y_{\uparrow} . Для упорядоченного множества классов эквивалентности I_*^u используем обозначение Z_{\uparrow}^u : это упорядочение задается отношением P^u , которое порождается отношением P_*^u .

Обозначим количество оценок $k \in Z_0$ в векторной оценке y через $e_k(y)$; понятно, что $\sum_{k=1}^q e_k(y) = m$. Пусть $e^k(y) = e_1(y) + e_2(y) + \dots + e_k(y)$. Количество классов эквивалентности t^u – число элементов множества Z_{\uparrow}^u – определяется по формуле [16]:

$$(1) \quad t^u = (m + q - 1)! / [m! (q - 1)!].$$

Для иллюстрации в таблице 1 перечислены и занумерованы элементы множества Z_{\uparrow}^u при $m = 3$ и $q = 5$; число этих элементов $t^u = 7! / (3! 4!) = 35$.

Функция перечисления u^e в рассматриваемом случае задается формулой [2]:

$$(2) \quad u^e(y) = \sum_{k=1}^{q-2} C_{m-e^k(y)+q-k-1}^{q-k} + e_q(y) + 1,$$

где C_m^k – биномиальные коэффициенты: согласно определению, $C_m^k = m! / [k!(m-k)!]$ при $m \geq k$ и $C_m^k = 0$ при $m < k$. Так, $u^e(1,3,4) = C_{3-1+5-1-1}^{5-1} + C_{3-1+5-2-1}^{5-2} + C_{3-2+5-3-1}^{5-3} + 0 + 1 = 11$. Для $m = 3$ и $q = 5$ значения функции перечисления u^e равны номерам элементов u^\uparrow множества Z_\uparrow^u , указанным в таблице 1.

Таблица 1. Элементы u^\uparrow множества Z_\uparrow^u , их порядковые номера и значения реперной функции u^r при $m = 3, q = 5$

№	u^\uparrow	u^r									
1	(1,1,1)	1	2	(1,1,2)	$1\frac{1}{15}$	3	(1,1,3)	$1\frac{2}{15}$	4	(1,1,4)	$1\frac{3}{15}$
5	(1,1,5)	$1\frac{4}{15}$	6	(1,2,2)	$1\frac{5}{15}$	7	(1,2,3)	$1\frac{6}{15}$	8	(1,2,4)	$1\frac{7}{15}$
9	(1,2,5)	$1\frac{8}{15}$	10	(1,3,3)	$1\frac{9}{15}$	11	(1,3,4)	$1\frac{10}{15}$	12	(1,3,5)	$1\frac{11}{15}$
13	(1,4,4)	$1\frac{12}{15}$	14	(1,4,5)	$1\frac{13}{15}$	15	(1,5,5)	$1\frac{14}{15}$	16	(2,2,2)	2
17	(2,2,3)	$2\frac{1}{10}$	18	(2,2,4)	$2\frac{2}{10}$	19	(2,2,5)	$2\frac{3}{10}$	20	(2,3,3)	$2\frac{4}{10}$
21	(2,3,4)	$2\frac{5}{10}$	22	(2,3,5)	$2\frac{6}{10}$	23	(2,4,4)	$2\frac{7}{10}$	24	(2,4,5)	$2\frac{8}{10}$
25	(2,5,5)	$2\frac{9}{10}$	26	(3,3,3)	3	27	(3,3,4)	$3\frac{1}{6}$	28	(3,3,5)	$3\frac{2}{6}$
29	(3,4,4)	$3\frac{3}{6}$	30	(3,4,5)	$3\frac{4}{6}$	31	(3,5,5)	$3\frac{5}{6}$	32	(4,4,4)	4
33	(4,4,5)	$4\frac{1}{3}$	34	(4,5,5)	$4\frac{2}{3}$	35	(5,5,5)	5			

Среди всех векторных оценок естественно выделяются в качестве реперных оценки вида $y^j = (j, j, \dots, j)$. Например, если успеваемость школьников оценивается в пятибалльной шкале, то векторные оценки $y^1 = (1, 1, \dots, 1)$, $y^2 = (2, 2, \dots, 2)$, $y^3 = (3, 3, \dots, 3)$, $y^4 = (4, 4, \dots, 4)$, $y^5 = (5, 5, \dots, 5)$ можно характеризовать словесными оценками «очень плохо», «плохо», «посредственно», «хорошо», «отлично» и поставить им в соответствие значения реперной функции полезности 1, 2, 3, 4 и 5. Чтобы рассчитать значения реперной функции u^r для векторных оценок, лежащих между соседними реперными оценками, нужно знать их количество. При наличии соответствующих таблиц это сделать очень просто. Так, при $m = 3$ и $q = 5$ из таблицы 1

видно, что между y^1 и y^2 находится 14 векторных оценок, между y^2 и $y^3 - 9$, между y^3 и $y^4 - 5$ и между y^4 и $y^5 - 2$ векторные оценки. Значения реперной функции полезности u^r приведены в таблице 1.

Число элементов t_j^u , находящихся в упорядоченном множестве Z_{\uparrow}^u между соседними реперными элементами y^j и y^{j+1} , равно $u^r(j+1, j+1, \dots, j+1) - u^r(j, j, \dots, j) - 1$. Используя (2), нетрудно получить следующую расчетную формулу:

$$(3) \quad t_j^u = C_{m+q-j-1}^{q-j} - 1, \quad j=1, 2, \dots, q-1.$$

Согласно (3), при $m=3$ и $q=5$ имеем: $t_1^u=14$, $t_2^u=9$, $t_3^u=5$, $t_4^u=2$, и поэтому знаменатели t_j^u+1 дробных частей значений реперной функции полезности u^r равны соответственно 15, 10, 6 и 3 (см. таблицу 1).

Обозначим через y^u векторную оценку, составленную из m чисел, равных минимальной компоненте y_- векторной оценки y . Для значений функции $u^r(y)$ можно записать следующую формулу, имеющую смысл смешанной дроби:

$$(4) \quad u^r(y) = y_- \frac{u^e(y) - u^e(y^u)}{t_j^u + 1}.$$

Например, для $y = (2, 5, 4)$ имеем $y_- = 2$, $y^u = (2, 2, 2)$ и, согласно (2) и (3) (см. также таблицу 1), $u^e(y) = 24$, $u^e(y^u) = 16$, $t_2^u = 9$. Поэтому, согласно (4), $u^r(y) = 2 \frac{8}{10}$.

5. Реперные функции при лексимаксом отношении превосходства во вредности

Будем полагать, что отношение превосходства на Z имеет смысл отношения превосходства во вредности, и использовать в роли представляющей реперную функцию вредности h^r . Будем считать также, что бóльшие значения критериев отражают бóльшую вредность. Примем, что уменьшение бóльших значений одних критериев не компенсируются уменьшением мень-

ших значений других критериев. Соответствующее SL -отношение известно под названием лексимаксного.

Пусть $y_{\downarrow} = (y_{[1]}, y_{[2]}, \dots, y_{[m]})$ – вектор, полученный из вектора $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ упорядочением его компонент по не возрастанию: $y_{[1]} \geq y_{[2]} \geq \dots \geq y_{[m]}$. Например, $(5, 1, 1, 4)_{\downarrow} = (5, 4, 1, 1)$ и $y_{[2]} = 4$. Лексимаксное отношение нестрогого превосходства во вредности – полный квазипорядок R_*^h – определяется так: $yR_*^h z$ верно, если выполнено одно из следующих $m + 1$ условий: 1) $y_{[1]} > z_{[1]}$; 2) $y_{[1]} = z_{[1]}$, $y_{[2]} > z_{[2]}$; ...; m) $y_{[i]} = z_{[i]}$, $i = 1, 2, \dots, m - 1$, $y_{(m)} > z_{(m)}$; $m + 1$) $y_{[i]} = z_{[i]}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Соотношение $yP_*^h z$ верно, если выполнено одно из указанных условий, кроме последнего, а $yI_*^h z$ верно, если выполнено условие $m + 1$, т.е. если $y_{\downarrow} = z_{\downarrow}$. Поэтому, например, при $m = 3$ один из классов эквивалентности составляют векторные оценки $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$ и $(1, 1, 2)$. Для упорядоченного множества классов эквивалентности I_*^h используем обозначение Z_{\uparrow}^h : это упорядочение задается отношением P^h , которое порождается отношением P_*^h . Поскольку, как нетрудно убедиться, отношения эквивалентности I_*^u и I_*^h равны, то и для лексимаксного отношения число классов эквивалентности $i^h = i^u$ можно рассчитать по формуле (1).

Для иллюстрации в таблице 2 перечислены элементы u_{\downarrow} множества Z_{\uparrow}^h при $m = 3$ и $q = 5$ и указаны соответствующие значения реперной функции вредности h^r ; число этих элементов, согласно (1), $i^h = i^u = 7!/(3!4!) = 35$.

Примерами многокритериальных задач, в которых превосходство во вредности можно описывать при помощи лексимаксного отношения, могут служить задачи, в которых опасность (скажем, радиационная) обстановки оценивается словесными оценками «безопасно», «низкая степень опасности», «средняя степень опасности», «высокая степень опасности» и «катастрофическая степень опасности» с соответствующими числовыми оценками 1, 2, 3, 4 и 5. Если система состоит из m равных по значимости подсистем, то опасность обстановки

можно характеризовать вектором $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, где y_i – числовая оценка опасности для i -й подсистемы.

Таблица 2. Элементы множества Z^h , их порядковые номера и значения реперной функции h^r при $m = 3, q = 5$

№	y_{\uparrow}	h^r									
1	(1,1,1)	1	2	(2,1,1)	$1\frac{1}{3}$	3	(2,2,1)	$1\frac{2}{3}$	4	(2,2,2)	2
5	(3,1,1)	$2\frac{1}{6}$	6	(3,2,1)	$2\frac{2}{6}$	7	(3,2,2)	$2\frac{3}{6}$	8	(3,3,1)	$2\frac{4}{6}$
9	(3,3,2)	$2\frac{5}{6}$	10	(3,3,3)	3	11	(4,1,1)	$3\frac{1}{10}$	12	(4,2,1)	$3\frac{2}{10}$
13	(4,2,2)	$3\frac{3}{10}$	14	(4,3,1)	$3\frac{4}{10}$	15	(4,3,2)	$3\frac{5}{10}$	16	(4,3,3)	$3\frac{6}{10}$
17	(4,4,1)	$2\frac{7}{10}$	18	(4,4,2)	$3\frac{8}{10}$	19	(4,4,3)	$3\frac{9}{10}$	20	(4,4,4)	4
21	(5,1,1)	$4\frac{1}{15}$	22	(5,2,1)	$4\frac{2}{15}$	23	(5,2,2)	$4\frac{3}{15}$	24	(5,3,1)	$4\frac{4}{15}$
25	(5,3,2)	$4\frac{5}{15}$	26	(5,3,3)	$4\frac{6}{15}$	27	(5,4,1)	$4\frac{7}{15}$	28	(5,4,2)	$4\frac{8}{15}$
29	(5,4,3)	$4\frac{9}{15}$	30	(5,4,4)	$4\frac{10}{15}$	31	(5,5,1)	$4\frac{11}{15}$	32	(5,5,2)	$4\frac{12}{15}$
33	(5,5,3)	$4\frac{13}{15}$	34	(5,5,4)	$4\frac{14}{15}$	35	(5,5,5)	5			

Пусть \vec{y} – векторная оценка, полученная из векторной оценки y заменой ее координат y_i на $\vec{y}_i = q - y_i + 1$. Легко видеть, что из вектора y_{\downarrow} указанным образом сразу получается вектор \vec{y}_{\uparrow} .

Если верно $y_{\downarrow} P^h z_{\downarrow}$, то верно и $\vec{y}_{\uparrow} P^u \vec{z}_{\uparrow}$; справедливо и обратное утверждение. Следовательно, упорядочения (одного и того же) множества классов эквивалентности (их число равно $t^h = t^u$) порядками P^h и P^u взаимно обратны. Поэтому

$$(5) \quad h^e(y) = t^h - u^e(\vec{y}) + 1, \quad h^r(y) = q - u^r(\vec{y}) + 1.$$

Например, при $m = 3, q = 5$ имеем (см. таблицы 1 и 2) $t^h = 35$ и

$$h^e(5,3,2) = 35 - u^e(1,3,4) + 1 = 35 - 11 + 1 = 25,$$

$$h^r(5,3,2) = 5 - u^r(1,3,4) + 1 = 5 - 1\frac{10}{15} + 1 = 4\frac{5}{15}.$$

Расчеты по формулам (5) можно производить с использованием формул (2) и (4).

6. Реперные функции в задачах с критериями разной важности

Рассмотрим теперь случай, когда в многокритериальной задаче критерии f_i имеют разную важность (значимость, весомость), причем для величин их важности β_i известны соотношения $\beta_1 : \beta_2 : \dots : \beta_m$ (точные определения понятий, связанных с количественной важностью критериев, см. в [10, 11, 13, 18]). Полагая, что все числа β_i рациональные, несложно указать натуральные числа n_i , для которых верны соотношения:

$$\beta_1 : \beta_2 : \dots : \beta_m = n_1 : n_2 : \dots : n_m.$$

Теперь, используя предложенный в [10, 11, 18] прием «клонирования», заменим каждую векторную оценку y расширенной векторной оценкой \hat{y} , которая формируется следующим образом: вначале ставится n_1 раз компонента y_1 , затем n_2 раз компонента y_2 , и т.д. Например, при $m = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = 4$ для $y = (5, 2, 3)$ получим $\hat{y} = (5, 5, 2, 3, 3, 3, 3)$. Векторные оценки вида \hat{y} можно рассматривать как векторы значений равноважных критериев (числом $n_1 + n_2 + \dots + n_m$), при помощи которых оцениваются объекты из множества X . Поэтому далее можно применять все полученные выше результаты для случая равноважных критериев.

Рассмотрим простой пример. Пусть $m = 2$, $q = 5$, $n_1 = 2$, $n_2 = 1$. Тогда каждой векторной оценке $y = (y_1, y_2)$ будет соответствовать расширенная векторная оценка $\hat{y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3) = (y_1, y_1, y_2)$. Следовательно, значения реперных функций полезности $u^r(y)$ и вредности $h^r(y)$ задаются таблицами 1 и 2 для $u^r(\hat{y})$ и $h^r(\hat{y})$ соответственно. Например, если $y = (2, 4)$, то $\hat{y} = (2, 2, 4)$, $\hat{y}_\uparrow = (2, 2, 4)$, $\hat{y}_\downarrow = (4, 2, 2)$, и поэтому $u^r(\hat{y}) = 2 \frac{2}{10}$ и $h^r(\hat{y}) = 3 \frac{3}{10}$.

Прием «клонирования» в прикладной задаче с лексичным отношением предпочтения был использован в [4] для построения функции перечисления.

7. Реперные функции в задачах с иерархической критериальной структурой

Для задач, в которых критерии образуют иерархию, причем все критерии нижнего уровня имеют общую шкалу, можно применять развитый выше подход, если для формирования реперных функций полезности или вредности для значений критериев некоторого уровня использовать значения реперных функций для критериев нижележащего уровня. Для пояснения и иллюстрации рассмотрим пример небольшой размерности.

Пусть некоторая система состоит из двух равноважных по вредности (например, опасности) подсистем, причем первая подсистема состоит из двух равноважных агрегатов, а вторая – из трех равноважных агрегатов. Уровень вредности каждого i -го агрегата оценивается «своим» критерием второго (нижнего) уровня f_i^2 , причем область значений каждого из этих пяти критериев $Z_0 = \{1, 2\}$. Критериальная структура для рассматриваемой задачи представлена на рис. 1. Уровень вредности подсистем оценивается соответствующими критериями первого уровня f_1^1 и f_2^1 . Уровень вредности системы в целом характеризуется критерием нулевого (верхнего) уровня f^0 .

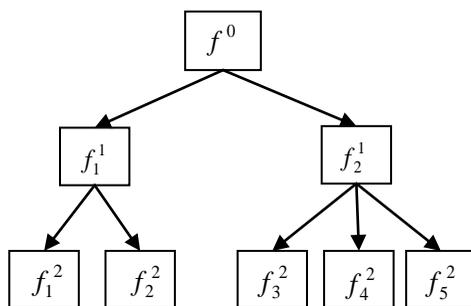


Рис. 1. Критериальная структура

В таблицах 3 и 4 представлены возможные значения векторных оценок состояний подсистем и соответствующие значения реперных функций первого уровня h_1^{1r} и h_2^{1r} . В таблице 5

представлены возможные значения векторных оценок состояний системы, компонентами которых являются реперные функции первого уровня, и значения реперной функции нулевого (верхнего уровня) h^r .

Таблица 3. Векторные оценки состояний первой подсистемы и значения реперной функции h_1^{1r}

y_1^2	y_2^2	$(y_1^2, y_2^2)_\downarrow$	h_1^{1r}	y_1^2	y_2^2	$(y_1^2, y_2^2)_\downarrow$	h_1^{1r}
1	1	(1, 1)	1	2	1	(2, 1)	$1\frac{1}{2}$
1	2	(2, 1)	$1\frac{1}{2}$	2	2	(2, 2)	2

Таблица 4. Векторные оценки состояний второй подсистемы и значения реперной функции h_2^{1r}

y_3^2	y_4^2	y_5^2	$(y_3^2, y_4^2, y_5^2)_\uparrow$	h_2^{1r}	y_3^2	y_4^2	y_5^2	$(y_3^2, y_4^2, y_5^2)_\uparrow$	h_2^{1r}
1	1	1	(1, 1, 1)	1	1	1	2	(2, 1, 1)	$1\frac{1}{3}$
1	2	1	(2, 1, 1)	$1\frac{1}{3}$	2	1	1	(2, 1, 1)	$1\frac{1}{3}$
1	2	2	(2, 2, 1)	$1\frac{2}{3}$	2	1	2	(2, 2, 1)	$1\frac{2}{3}$
2	2	1	(2, 2, 1)	$1\frac{2}{3}$	2	2	2	(2, 2, 2)	2

Таблица 5. Векторные оценки состояний системы и значения реперной функции h^r

h_1^{1r}	h_2^{1r}	$(h_1^{1r}, h_2^{1r})_\downarrow$	h^r	h_1^{1r}	h_2^{1r}	$(h_1^{1r}, h_2^{1r})_\downarrow$	h^r	h_1^{1r}	h_2^{1r}	$(h_1^{1r}, h_2^{1r})_\downarrow$	h^r
1	1	(1, 1)	1	1	$1\frac{1}{3}$	$(1\frac{1}{3}, 1)$	$1\frac{1}{11}$	$1\frac{1}{2}$	1	$(1\frac{1}{2}, 1)$	$1\frac{2}{11}$
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$	$(1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3})$	$1\frac{3}{11}$	1	$1\frac{2}{3}$	$(1\frac{2}{3}, 1)$	$1\frac{4}{11}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{2}{3}$	$(1\frac{2}{3}, 1\frac{1}{2})$	$1\frac{5}{11}$
1	2	(2, 1)	$1\frac{6}{11}$	2	1	(2, 1)	$1\frac{7}{11}$	2	$1\frac{1}{3}$	$(2, 1\frac{1}{3})$	$1\frac{8}{11}$
$1\frac{1}{2}$	2	$(2, 1\frac{1}{2})$	$1\frac{9}{11}$	2	$1\frac{2}{3}$	$(2, 1\frac{2}{3})$	$1\frac{7}{11}$	2	2	(2, 2)	2

В случае критериев разной важности следует применить ранее описанный прием «клонирования» соответствующих координат векторных оценок.

8. Заключение

Реперные функции являются наглядным средством представления объектов в упорядоченных множествах, если некоторые из объектов выделяются как реперные своими характерными свойствами или оценками. Для случаев, когда упорядочение векторных оценок в многокритериальных задачах осуществляется отношениями лексимакса или лексимины, значения реперных функций могут быть рассчитаны аналитически.

Литература

1. АЛЕСКЕРОВ Ф.Т., КАТАЕВА Е.С., ПИСЛЯКОВ В.В., ЯКУБА В.И. *Оценка вклада научных работников методом порогового агрегирования* // Управление большими системами: сборник трудов. – 2013. – №44. – С. 172–189.
2. КАЛЯГИН В.А., ЧИСТЯКОВ В.В. *Модель некомпенсаторного агрегирования с произвольным набором оценок* // Доклады РАН. – 2008. – Т. 421 – С. 607–610.
3. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – М.: МПСИ, 2005. – 584 с.
4. ГОНЧАРОВ А.А., ЧИСТЯКОВ В.В. *Агрегирование предпочтений без учета компенсаций и рейтингование*. Препринт WP7/2010/04. – М.: Изд. Дом ГУ ВШЭ, 2010. – 40 с.
5. ГОНЧАРОВ А.А., ЧИСТЯКОВ В.В. *Рейтингования без компенсаций и их применение* // Проблемы управления. – 2012. – №2. – С. 45–52.
6. ОРЛОВ А.И. *Менеджмент / Учебник*. – М.: Изумруд, 2003. – 298 с.
7. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1975. – № 2. – С. 330–344.
8. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Принцип гарантированного результата для частичных отношений предпочтения* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. – №6. – С. 1436–1450.

9. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Симметрически-лексикографические задачи оптимизации и антагонистические игры* // Автоматика и вычислительная техника. – 1981. – №5. – С. 55–60.
10. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Количественные оценки важности критериев в многокритериальной оптимизации* // Научно-техническая информация. Серия 2. Информационные процессы и системы. – 1999. – №5. – С. 22–25.
11. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Количественная важность критериев* // Автоматика и телемеханика. – 2000. – №5. – С. 110–123.
12. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Задача оценивания коэффициентов важности как симметрически-лексикографическая задача оптимизации* // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №3. – С. 150–162.
13. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений* / Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2007. – 64 с.
14. ПОДИНОВСКИЙ В.В., ПОТАПОВ М.А. *Метод взвешенной суммы критериев в анализе многокритериальных решений: pro et contra* // Бизнес-информатика. – 2013. – №3. – С. 41–48.
15. ПФАНЦАГЛЬ И. *Теория измерений*. – М.: Мир, 1976. – 248 с.
16. ALESKEROV F.T., CHISTYAKOV V.V. *The threshold decision making effectuated by the enumerating preference function* // Int. J. of Information Technology and Decision Making. – 2013. – Vol. 12, No. 6. – P. 1201–1222.
17. PODINOVSKI V.V. *The quantitative importance of criteria for MCDA* // J. of Multi-Criteria Decision Analysis. – 2002. – Vol. 11. – P. 1–15.
18. PODINOVSKI V.V. *Interval articulation of superiority and precise elicitation of priorities* // European J. of Operational Research. – 2007. – Vol. 180. – P. 406–417.
19. SEN A.K. *Collective choice and social welfare*. – San Francisco: Holden Day, 1970. – 255 p.

REPER FUNCTIONS

Vladislav Podinovski, National Research University Higher School of Economics, Moscow, Doctor habilitatus, professor (podinovski@mail.ru).

Abstract: After discussing the notion of utility and utility function, we introduce a concept of reper value function. It enumerates all the elements of the finite ordered set so that for those elements, which can play the role of reference levels (of preference, quality, efficiency, or, conversely, harm, danger, etc.) and to be characterized by meaningful estimates (e.g., verbal assessments "excellent", "good", etc.) the appropriate numerical scores (e.g., 5, 4, etc.) will be assigned. We give several examples of such functions representing practical interest. They are associated with leximin and leximax relations that are used for modeling of preferences in multicriteria problems with criteria of equal importance, when the decrease in the low values of some criteria are not compensated by an increase in the larger values of other criteria. We show how to build the reference functions when the criteria have different importance, and also when criterial structure is hierarchical.

Keywords: ordered set, enumeration function, utility (value) function, leximin, leximax, rating.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 03.02.2017.

Опубликована 31.07.2017.

УДК 517.977.1
ББК 22.18

АППРОКСИМАЦИИ МАТРИЧНОЙ l_0 -КВАЗИНОРМЫ ПРИ СИНТЕЗЕ РАЗРЕЖЕННЫХ РЕГУЛЯТОРОВ: ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ¹

Быков А. В.²

*(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

Щербаков П. С.³

*(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН,
ФИЦ «Информатика и управление», ИСА РАН, Москва)*

Рассмотрены различные способы аппроксимации числа ненулевых строк матрицы для получения разреженных регуляторов в задачах оптимального управления линейными системами. Наряду с популярным подходом, основанным на использовании матричной l_1 -нормы, применяются более сложные невыпуклые приближения, минимизация которых требует специальных вычислительных процедур. Сравнение эффективности разных аппроксимаций происходит в рамках численного моделирования.

Ключевые слова: разреженные регуляторы, l_1 -оптимизация, линейные системы, оптимальное управление, линейные матричные неравенства.

¹ Работа поддержана Российским научным фондом, проект 16-11-10015.

² Алексей Витальевич Быков, аспирант,
(alexey.bykov.mipt@gmail.com).

³ Павел Сергеевич Щербаков, доктор физико-математических наук,
(cavour118@mail.ru).

Введение

В задачах оптимального управления линейными системами помимо оптимизации целевого функционала могут возникать требования к структуре получаемого регулятора, например, требование *разреженности* регулятора [14, 15, 16, 22]. Под разреженностью понимается, как правило, наличие нулевых элементов в матрице усиления регулятора, построенного, например, в форме статической линейной обратной связи по состоянию. Наличие такой поэлементной или блочной разреженности позволяет строить распределенные системы с децентрализованным управлением. Естественно, дополнительное требование к структуре матрицы регулятора неизбежно ухудшает качество управления, так как таким образом сужается множество допустимых регуляторов, на котором происходит минимизация целевого функционала. Тем не менее в некоторых задачах разумный проигрыш в значении критерия качества может считаться допустимым. Так, в задаче о линейно-квадратичном регуляторе в роли целевого функционала выступает квадратичный критерий, связанный с расходом энергии в системе, например, топлива для летательного аппарата. Разреженное управление с одной стороны ухудшает значение критерия, увеличивая расход энергии, с другой – придает системе различные полезные свойства. Например, децентрализация управления делает систему более надежной, устойчивой к отказам элементов системы, уменьшение количества используемых приводов позволяет снизить износ управляющих элементов, тем самым увеличив срок службы системы.

Отличная от поэлементной разреженности структура рассмотрена в работе [17] (см. также [1] – ее русскоязычную версию): разреженным называют регулятор с большим числом нулевых строк или столбцов в матрице усиления. Такие регуляторы позволяют снизить требования к аппаратной реализации систем управления, иными словами, уменьшить число используемых приводов, сенсоров, каналов передачи данных. Непосредственная минимизация числа ненулевых строк или столбцов мат-

рицы – задача, решаемая только с помощью перебора всевозможных комбинаций априори обнуляемых строк или столбцов и вычисления значения целевого функционала. С увеличением размерности такой метод становится неприемлемым из-за экспоненциальной асимптотической сложности решения в смысле времени работы алгоритма. В [1, 17] был предложен подход, в основе которого лежит замена исходной невыпуклой задачи ее выпуклым приближением путем введения специальных матричных норм, выступающих в роли выпуклых приближений исходных невыпуклых матричных l_0 -квазинорм (числа ненулевых строк/столбцов). Использование выпуклых аппроксимаций, однако, не гарантирует получение нулевых строк в матрице регулятора, и, по всей видимости, сформулировать строгие теоретические результаты не удастся ввиду невыпуклости исходной задачи. Тем не менее в пользу применения подхода представлены эвристические соображения, а также приводится ряд численных примеров, подтверждающих работоспособность метода. Компьютерное моделирование является, пожалуй, одним из основных способов проверки эффективности подобных нестрогих подходов, поэтому и в данной работе акцент делается на численном эксперименте.

Кроме выпуклых аппроксимаций, в литературе предлагаются невыпуклые приближения, которые позволяют в некотором смысле более эффективно получать векторные и матричные разреженные представления [6, 7, 8, 15].

Целью данной работы является сравнение между собой различных по своей природе приближений матричной l_0 -квазинормы, которые могут быть использованы для синтеза разреженных регуляторов в задачах оптимального управления. Приводится обобщенная схема достижения компромисса между оптимальностью и разреженностью, позволяющая единообразно применять разные аппроксимации.

Центральными моментами статьи являются адаптация различных приближений матричной l_0 -квазинормы для достижения матричной строчной разреженности, описание схемы численного эксперимента, а также сравнительный анализ результатов чис-

ленной апробации. В ходе эксперимента решались как тестовые задачи, так и линеаризованные модели реальных систем, применялись различные вычислительные средства [9, 18, 19], были адаптированы алгоритмы невыпуклой оптимизации [7, 21].

В работе акцент сделан на численном эксперименте в силу следующей причины. Несмотря на то, что утверждения о работоспособности предлагаемых методов подкреплены обоснованной эвристикой, эти утверждения не вполне конструктивны: можно лишь *надеяться* на наличие нулевых строк в матрице регулятора. Поэтому разные методы на практике могут иметь разную эффективность для различных задач; эффективность этих методов как раз и является предметом исследования в данной работе.

Работа во многом задействует аппарат линейных матричных неравенств (англ. *LMI – Linear Matrix Inequalities*) [5], позволяющий формулировать многие задачи теории управления в виде задач полуопределенного программирования (англ. *SDP – SemiDefinite Programming*) [20].

1. Синтез разреженных регуляторов в задачах оптимального управления

Рассмотрим классическую постановку задачи синтеза оптимального стабилизирующего управления в линейных системах. Пусть исследуемая система описывается обыкновенным дифференциальным уравнением и начальным условием:

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0,$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ – управление, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, пара (A, B) управляема.

Если матрица A не является гурвицевой, то система (1) неустойчива, поэтому управление должно стабилизировать систему. Кроме того, регулятор, как правило, должен минимизировать некоторый целевой функционал на траекториях замкнутой системы. Существуют разные постановки, отличающиеся видом синтезируемого управления; для простоты будем строить управление в форме статической линейной обратной связи по состоя-

нию:

$$(2) \quad u = Kx, \quad K \in \mathbb{R}^{p \times n}.$$

Далее будем рассматривать задачу синтеза линейно-квадратичного регулятора, при этом отметим, что численный эксперимент, равно как и лежащий в его основе подход к достижению разреженности, могут быть легко перенесены на случай других задач оптимального управления. В задаче синтеза LQR-регулятора целевой функционал – *квадратичный критерий качества* – выглядит следующим образом:

$$(3) \quad J = \int_0^{\infty} (x^T R x + u^T S u) dt,$$

где $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $S \in \mathbb{R}^{p \times p}$ – заданные положительно определенные матрицы.

Отметим следующий факт: требование минимизации функционала (3) автоматически влечет за собой стабилизацию системы (1). Действительно, неустойчивость замкнутой системы приводила бы к расходимости интеграла (3), а так как пара (A, B) управляема, то существует стабилизирующий регулятор, для которого функционал J принимает конечное значение.

Классический способ решения задачи синтеза LQR-регулятора заключается в нахождении решения алгебраического уравнения Риккати, однако здесь мы будем придерживаться другого подхода (см., например, [3]), основанного на применении аппарата линейных матричных неравенств. В [3] показано, что LQR-регулятор можно искать как решение следующей задачи полуопределенного программирования:

Задача 1. Пусть P_{opt}, Y_{opt} – решение задачи

$$\text{tr } P \longrightarrow \max$$

при ограничении

$$(4) \quad \begin{pmatrix} AP + PA^T + BY + Y^T B^T & P & Y^T \\ * & -R^{-1} & 0 \\ * & * & -S^{-1} \end{pmatrix} \preceq 0,$$

тогда регулятор (2) с матрицей

$$(5) \quad K_{opt} = Y_{opt} P_{opt}^{-1}$$

стабилизирует систему (1), минимизируя при этом функционал (3), оптимальное значение которого определяется выражением

$$(6) \quad J_{opt} = x_0^\top P_{opt}^{-1} x_0.$$

Описанный подход бывает полезен, когда одним уравнением Риккати не обойтись, например, при решении робастной линейно-квадратичной задачи, когда в матрицах системы присутствует неопределенность. Что более важно для данной работы, именно LMI-подход удобно использовать для синтеза разреженного управления.

Разреженная вариация данной постановки подразумевает дополнительное требование к структуре матрицы регулятора, а именно желание получить как можно больше нулевых строк в матрице K , не сильно проиграв при этом в критерии качества оптимальному регулятору. Проигрыш возникает из-за того, что задавая определенную нулевую структуру матрицы K , мы по сути сужаем область допустимых регуляторов, на которой происходит минимизация функционала (3).

Вопрос сравнения регуляторов по квадратичному критерию качества нетривиален и подробно рассмотрен в [4]. Это связано с тем, что при сравнении значений функционала $J(P) = x^\top P^{-1} x$, соответствующих разным стабилизирующим регуляторам K_1 и K_2 с матрицами P_1 и P_2 соответственно, знак неравенства $J(P_1) \leq J(P_2)$ может меняться при изменении начального условия x_0 . В данной работе, однако, нам будет необходимо сравнивать разреженные регуляторы с оптимальным, т.е. придающим наилучшее значение функционалу J для любого начального условия x_0 . Иными словами, разреженный регулятор с матрицей P_{sp} всегда будет уступать оптимальному с матрицей P_{opt} ; величина проигрыша для конкретного начального условия x_0 определяется отношением

$$\frac{J_{sp}}{J_{opt}} = \frac{x_0^\top P_{sp}^{-1} x_0}{x_0^\top P_{opt}^{-1} x_0},$$

значение которого, опять же, может значительно варьироваться для разных x_0 .

Хорошо известен подход [13], основанный на усреднении значений функционала по начальным условиям, равномерно распределенным по поверхности единичной n -мерной сферы. Нетрудно показать, что математическое ожидание значения функционала J в таком случае равно

$$E(x_0^\top P^{-1} x_0) = \frac{1}{n} \operatorname{tr} P^{-1};$$

тогда величина проигрыша разреженного управления оптимальному «в среднем» равна

$$(7) \quad \frac{J_{sp}}{J_{opt}} = \frac{\operatorname{tr} P_{sp}^{-1}}{\operatorname{tr} P_{opt}^{-1}}.$$

В данной работе мы будем судить о величине проигрыша разреженного регулятора оптимальному именно «в среднем», т.е. пользоваться соотношением (7).

В работе [1] предложена схема, позволяющая строить разреженные регуляторы в задачах оптимального управления, в частности, в задаче LQR. На ключевом шаге для обнаружения нулевых строк в матрице регулятора предлагается минимизировать 1_∞ -норму, выступающую в роли выпуклого приближения числа ненулевых строк матрицы, т.е. невыпуклой матричной l_0 -квазинормы. Матричная 1_∞ -норма определяется следующим образом:

$$(8) \quad \|X\|_{1_\infty} = \sum_{i=1}^n \max_{1 \leq j \leq p} |x_{ij}|, \quad X \in \mathbb{R}^{n \times p}.$$

Трехшаговая схема из [1], обобщенная на случай произвольной аппроксимации матричной l_0 -квазинормы, была взята за основу в численном эксперименте в данной работе, поэтому опишем ее ключевые моменты.

Шаг 1 (поиск оптимального регулятора). Решаем классическую задачу синтеза LQR-регулятора (задачу 1) и фиксируем величину $\operatorname{tr} P_{opt}^{-1}$, характеризующую оптимальное значение J_{opt} .

Шаг 2 (обнаружение разреженной структуры). Допустим, что добиваясь разреженности регулятора, мы готовы проиграть в значении критерия оптимальности в среднем не больше чем

в α раз, т.е. хотим гарантировать выполнение следующего условия:

$$\frac{\text{tr } P_{sp}^{-1}}{\text{tr } P_{opt}^{-1}} \leq \alpha, \alpha > 1.$$

Таким образом, α – коэффициент допустимой потери в качестве управления, который является параметром в следующей задаче SDP:

Задача 2.

$$(9) \quad \begin{aligned} & \|Y\|_{(sp)} \longrightarrow \min \\ & \text{при ограничениях (4),} \\ & \begin{pmatrix} X & I \\ I & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \text{ и } \text{tr } X \leq \alpha \text{tr } P_{opt}^{-1}. \end{aligned}$$

Заметим, что, как и в задаче 1, матрица регулятора K явным образом не входит в ограничения или минимизируемый функционал. Переменными же являются положительно определенные матричные переменные P и X , а также вспомогательная матричная переменная $Y = KP$, введение которой обусловлено желанием привести ограничения в задаче к виду *линейных* матричных неравенств.

Минимизируемая величина в задаче 2, обозначенная $\|\cdot\|_{(sp)}$, играет роль приближения матричной l_0 -квазинормы. 1∞ -норма – одно из таких приближений – позволяет вместо невыпуклой задачи минимизации числа ненулевых строк решать выпуклую задачу. Возможны и другие, более сложные и вместе с тем более эффективные, аппроксимации, речь о которых пойдет в следующем разделе.

Пусть матрица Y_0 – решение задачи 2, в которой мы обнаружили малые (близкие к нулевым) строки. Зафиксируем эти строки как нулевые, гарантируя при этом, что и в матрице усиления регулятора $K_0 = Y_0 P^{-1}$ будут те же нулевые строки. Последний факт следует из правил матричного умножения. Значение целевого функционала в среднем не превышает αJ_{opt} .

Шаг 3 (дооптимизация). Снова решаем задачу синтеза LQR-регулятора, только уже с полученной на Шаге 2 нулевой

структурой матрицы регулятора. Иными словами, решаем задачу 1 с дополнительными ограничениями на элементы матричной переменной Y .

Подводим итог: следуя описанному алгоритму, можно построить регулятор, который, вероятно, обладает разреженной структурой и при этом не сильно уступает оптимальному с точки зрения качества управления; таким образом достигается компромисс между разреженностью и оптимальностью.

2. Аппроксимации матричной l_0 -квазинормы

Итак, ключевым шагом в процессе синтеза разреженных регуляторов является обнаружение нулевых строк в матрице усиления. Для этого осуществляется минимизация некоторой величины, аппроксимирующей число ненулевых строк матрицы.

Далее мы рассмотрим четыре различных аппроксимации матричной l_0 -квазинормы, эффективность применения которых сравним на численных примерах. Все аппроксимации будут выражены как функции от r_i – величин, характеризующих величину значений в строке с номером i . Если рассматривать строку матрицы как вектор, то в качестве r_i могут выступать различные нормы вектора, например, l_1 -, l_2 -, l_∞ -норма. Строка называется нулевой, если *все* ее элементы нулевые, поэтому, устремляя любую из указанных норм к нулю, мы неизбежно зануляем *все* ее элементы. Численные эксперименты подтверждают, что выбор конкретной нормы для r_i непринципиален; мы остановимся на l_∞ -норме, которая по сути является максимумом среди абсолютных значений элементов вектора. Таким образом, вводим обозначение

$$(10) \quad r_i = \max_{1 \leq j \leq n} |y_{ij}|, \quad Y = \|y_{ij}\| \in \mathbb{R}^{p \times n}.$$

2.1. l_∞ -НОРМА

Предложенная в работе [1] и уже упомянутая в предыдущем разделе l_∞ -норма (8) в терминах r_i , определенных в (10), выглядит следующим образом:

$$(11) \quad \|Y\|_{1\infty} = \sum_{i=1}^p r_i.$$

Эта норма является выпуклой, поэтому ее минимизация при ограничениях (4), (9) – задача SDP, эффективно решаемая средствами выпуклой оптимизации [20].

2.2. ВЗВЕШЕННАЯ l_1 -НОРМА

В работе [7], развивая идеи l_1 -оптимизации для достижения разреженности в векторном случае, авторы предлагают новый алгоритм, который заключается в решении последовательности задач взвешенной l_1 -минимизации. На каждой итерации алгоритма происходит переоценка используемых весовых коэффициентов, исходя из решения, полученного на текущем шаге. С учетом весовых коэффициентов l_1 -норма выглядит следующим образом:

$$(12) \quad \|Y\|_{w_1\infty} = \sum_{i=1}^p w_i r_i.$$

Адаптируя алгоритм из [7] для решения задачи 2, получаем следующую итеративную процедуру:

Алгоритм 1.

1) Начальная точка: $l = 0$, $w_i^{(0)} = 1$, $i = 1, \dots, p$.

2) Решаем выпуклую задачу с заданными весами:

$$r^{(l)} = \arg \min_r \left[\sum_{i=1}^p w_i^{(l)} r_i \right] \text{ при ограничениях (4), (9).}$$

3) Обновляем значения весов:

$$w_i^{(l+1)} = \frac{1}{|r_i^{(l)}| + \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

4) Выходим из цикла, если алгоритм сошелся или достигнуто максимальное число итераций. Иначе увеличиваем l и переходим к пункту 2.

Авторы оригинальной статьи [7] в ряде численных экспериментов подтверждают существенно большую эффективность подхода со взвешенной l_1 -минимизацией по сравнению с классической l_1 -минимизацией. Решая последовательность выпуклых задач, авторы находят решение задачи невыпуклой,

что, по-видимому, позволяет более точно аппроксимировать l_0 -квазинорму.

2.3. НЕВЫПУКЛЫЙ ДЕТЕКТОР РАЗРЕЖЕННОСТИ – NSD

В работе [6] для обнаружения разреженности предложено использовать следующую невыпуклую функцию:

$$(13) \quad \|Y\|_{\text{NSD}} = \sum_{i=1}^p r_i \prod_{j \neq i} \frac{r_j}{r_j + 1}.$$

Авторы предлагают эвристические соображения относительно целесообразности использования такой аппроксимации, а также демонстрируют на численных примерах ее большую эффективность по сравнению с 1_∞ -нормой.

В этой же работе показано, что функция (13) является DC-функцией (англ. *Difference of Convex*) [10], а для ее минимизации предлагается использовать вогнуто-выпуклую процедуру (англ. *Concave-Convex Procedure, CCCP*) [21].

Пусть функция (13) представима в виде DC-функции: $\text{NSD}(r) = U(r) - V(r)$. Тогда алгоритм ее минимизации будет выглядеть следующим образом:

Алгоритм 2.

1) Начальная точка: $l = 0$, $r_i^{(0)} = \max_{1 \leq j \leq n} |y_{ij}|$, $i = 1, \dots, p$, где $Y_{\text{opt}} = \|y_{ij}\|$ – решение задачи 1.

2) Решаем выпуклую задачу:

$$r^{(l+1)} = \arg \min_r \left[U(r) - r^\top \nabla V \left(r^{(l)} \right) \right]$$

при ограничениях (4), (9).

3) Выходим из цикла, если алгоритм сошелся или достигнуто максимальное число итераций. Иначе увеличиваем l и переходим к пункту 2.

В работе [11] получены некоторые результаты относительно сходимости СССР; в общем случае результатов о глобальной сходимости в силу невыпуклости получить не удастся. Однако

на практике метод, как правило, позволяет достигать требуемого результата.

2.4. НЕВЫПУКЛАЯ АППРОКСИМАЦИЯ \log -sum

В ряде работ было показано [7, 8, 15], что \log -sum функция (см. определение ниже) способна более точно приближать l_0 -норму вектора. Действительно, рассмотрим следующие функции скалярного аргумента (рис. 1), выступающих в роли функции штрафа ненулевых значений:

$f_0(x) = 1_{[x \neq 0]}$, $f_1(x) = |x|$, $f_{\log, \epsilon}(x) = C_\epsilon \log\left(1 + \frac{|x|}{\epsilon}\right)$,
 константа пропорциональности функции C_ϵ выбирается так, чтобы выполнялось равенство $f_{\log, \epsilon}(1) = 1 = f_0(1) = f_1(1)$.

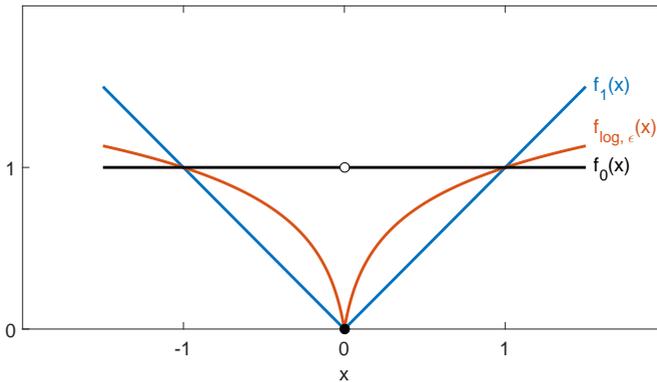


Рис. 1. Аппроксимации l_0 -квазинормы

Производная функции $f_{\log, \epsilon}(x)$ в положительной окрестности нуля растет приблизительно как функция $\frac{1}{\epsilon}$ при $\epsilon \rightarrow 0$. Это позволяет устанавливать относительно большие значения штрафа для малых, но в то же время ненулевых значений. Более того, можно заметить, что $f_{\log, \epsilon}(x) \rightarrow f_0(x)$ при $\epsilon \rightarrow 0$. К сожалению, при уменьшении ϵ до малых значений минимизация функции \log -sum становится затруднительной; эвристика выбора ϵ предложена в [7].

Адаптируя функцию $\log\text{-sum}$ для случая строчной матричной разреженности, получим следующую аппроксимацию:

$$(14) \quad \|Y\|_{\log\text{-sum}} = \sum_{i=1}^p \log(1 + r_i).$$

В силу вогнутости функции (14) ее нельзя минимизировать средствами выпуклой оптимизации. Однако она представляет собой частный случай DC-функции, что позволяет применять для нее тот же алгоритм, что и для NSD – вогнуто-выпуклую процедуру (СССР).

3. Результаты численных экспериментов

В предыдущем разделе были описаны некоторые известные и новые аппроксимации числа ненулевых строк матрицы. В их число входят уже встречавшаяся ранее в литературе 1∞ -норма [1], а также предложенная авторами в работе [6] аппроксимация NSD. Оба приближения, однако, не прошли достаточной численной апробации, что и сделало их претендентами на включение в численный эксперимент. Кроме того, для поиска нулевых строк в матрице были адаптированы две другие аппроксимации (взвешенная l_1 -норма вектора и функция $\log\text{-sum}$), которые ранее применялись для векторов. Все эти приближения использовались на шаге 2 схемы синтеза разреженных регуляторов при проведении численного эксперимента в данной работе.

Все примеры решались в среде моделирования MATLAB с помощью пакета для решения задач выпуклой оптимизации *cvx* [9] и решателя SDPT3 [19]. Использование других решателей, например, SeDuMi [18], не выявило каких-либо существенных преимуществ или недостатков.

Основной целью моделирования была проверка эффективности применения аппроксимаций (11), (12), (13), (14) для получения матриц Y_0 с нулевыми строками на шаге 2 (а следовательно, и строчно-разреженных матриц регулятора) в задачах оптимального управления на примере задачи синтеза LQR-регулятора. В ходе моделирования рассматривались как модельные задачи, так и ли-

неаризованные модели реальных систем, взятых из *COMPl_eib* – свободно распространяемой библиотеки тестовых задач управления [12]. Общая схема проведения численного эксперимента может быть описана следующим алгоритмом:

Алгоритм 3 (схема эксперимента).

- 1) Решаем классическую задачу синтеза LQR-регулятора (задачу 1) и фиксируем величину $\text{tr } P_{opt}^{-1}$, характеризующую оптимальное значение J_{opt} .
- 2) Устанавливаем начальное значение допустимой величины проигрыша в качестве управления $\alpha_{min} = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.
- 3) Увеличивая в цикле значение α до тех пор, пока не получим максимально разреженное управление, выполняем следующие шаги:
 - а) Решаем задачу обнаружения нулевых строк (задачу 2) с выбранным значением $\hat{\alpha}$. Фиксируем полученную нулевую структуру, а также количество ненулевых строк, которое обозначим N_{nz} .
 - б) Решаем задачу синтеза LQR-регулятора (задачу 1) с зафиксированной нулевой структурой регулятора. Определяем проигрыш в качестве управления разреженного регулятора оптимальному как отношение
$$\alpha_{sp} = \frac{\text{tr } P_{sp}^{-1}}{\text{tr } P_{opt}^{-1}}.$$

Таким образом, на каждой итерации получаем две точки на плоскости с координатами *число ненулевых строк и проигрыш в качестве управления*: $(N_{nz}, \hat{\alpha})$ и (N_{nz}, α_{sp}) , при этом $\hat{\alpha}$ – величина допустимого проигрыша, при котором были обнаружены нулевые строки, а α_{sp} – величина реального проигрыша при найденной нулевой структуре, которая может оказаться существенно меньше $\hat{\alpha}$.

- 4) Осуществляем полный перебор всевозможных комбинаций нулевых строк матрицы регулятора и для соответствующей

нулевой структуры решаем задачу синтеза LQR-регулятора (задачу 1). Для каждой комбинации с номером $k \in [1; 2^p - 2]$ определяем проигрыш в качестве управления разреженного регулятора оптимальному как отношение $\alpha_{bf,k} = \frac{\text{tr } P_{bf,k}^{-1}}{\text{tr } P_{opt}^{-1}}$.

Отметим, что интересующих нас комбинаций нулевых строк при полном переборе именно $2^p - 2$, а не 2^p . Мы не считаем случай, когда нулевых строк нет вообще – это эквивалентно отсутствию разреженности и совпадает с классической постановкой задачи, а также случай, когда все строки нулевые – тогда полностью отсутствует управление, а, значит, систему нельзя даже стабилизировать, не говоря уже о достижении оптимального значения целевого функционала.

Полученные в алгоритме 3 точки (N_{nz}, α_{sp}) связаны с известным понятием теории многокритериальной оптимизации – оптимальностью по Парето: улучшая один критерий, мы неизбежно ухудшаем другой. Стоит отметить, однако, что значения α_{sp} могут не быть оптимальными при заданном числе ненулевых строк N_{nz} . Это связано с тем, что мы решаем приближение исходной невыпуклой задачи, поэтому отсутствуют гарантии достижения глобального экстремума. Тем не менее, варьируя важность того или иного критерия, можно добиваться необходимого компромисса между разреженностью и оптимальностью.

3.1. ЗАДАЧИ ИЗ $COMPl_{elib}$

Эксперимент проводился в соответствии с описанной схемой для различных задач из библиотеки $COMPl_{elib}$: «АС1», «АС9», «АС12», «НЕ3», «НЕ4» (линеаризованные модели самолетов и вертолетов). Эти модели были выбраны как наиболее интересные с точки зрения количества управляющих воздействий. Для всех пяти моделей мы наблюдали *схожие* отличия в поведении различных аппроксимаций матричной l_0 -квазинормы. Поэтому имеет смысл привести здесь результаты для одной из типичных задач – для «НЕ4».

Эта линейная модель восьмого порядка описывает двухдвигательный многоцелевой военный вертолет. Напомним, что урав-

нения, описывающие поведение системы, имеют вид (1). Численные значения матриц A и B мы не приводим ради экономии места; их можно найти в документации к библиотеке *COMPl_eib*. В эксперименте использовались единичные матрицы R и S , входящие в квадратичный функционал (3).

Результаты эксперимента, проведенного в соответствии с Алгоритмом 3, представлены на рис. 2, 3, 4.

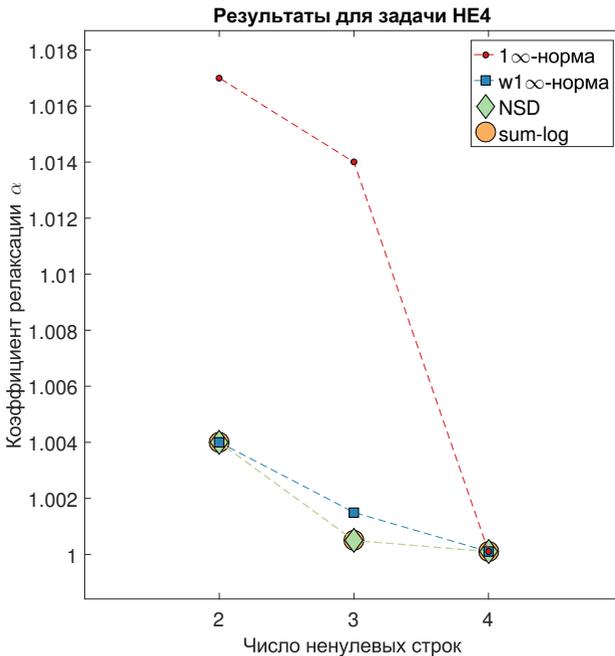


Рис. 2. «HE4». Обнаружение нулевых строк при разных $\hat{\alpha}$

На рис. 2 показаны точки $(N_{nz}, \hat{\alpha})$, полученные для функций (11), (12), (13), (14) с помощью Алгоритма 3. Этот график демонстрирует, насколько большим надо сделать $\hat{\alpha}$ – допустимый проигрыш по критерию оптимальности, чтобы получить нулевые строки в матрице регулятора. Видно, что аппроксимации (12), (13), (14) справляются с обнаружением нулевой структуры при меньших значениях $\hat{\alpha}$. Оказалось, что если пользоваться лю-

бым критерием, кроме 1∞ -нормы, то для обнаружения двух нулевых строк из четырех было достаточно задать $\hat{\alpha}$ чуть меньше 1,005, что соответствует величине относительного проигрыша в качестве управления всего в 0,5%.

Переход от одной нулевой строки к двум происходит при близких значениях $\hat{\alpha}$, поэтому, выбрав недостаточно мелкий шаг по $\hat{\alpha}$, можно получить данные, якобы свидетельствующие о том, что происходит обнуление сразу двух строк. Такое одномоментное обнуление при проведении эксперимента замечено не было, что, по-видимому, связано с тем, что добавляя очередную нулевую строку в структуру регулятора, мы все сильнее сужаем область допустимых регуляторов, на которой происходит оптимизация целевого функционала, а значит, наилучшее значение критерия для регулятора с $n + 1$ нулевой строкой заведомо хуже наилучшего значения того же критерия для регулятора с n нулевыми строками.

На рис. 3 показаны точки (N_{nz}, α_{sp}) из Алгоритма 3, соответствующие уже реальному проигрышу разреженного регулятора с зафиксированной нулевой структурой. Видно, что для 1∞ -нормы значения $\hat{\alpha} \gg \alpha_{sp}$, остальные же аппроксимации успешно обнаруживают нулевую структуру при значениях $\hat{\alpha}$ близких к α_{sp} , что является их несомненным преимуществом. Действительно, если для того, чтобы обнаружить разреженную структуру, дающую фактический проигрыш α_{sp} , необходимо задавать существенно бóльшие значения $\hat{\alpha}$, то теряется интерпретируемость $\hat{\alpha}$ как допустимого проигрыша, которым мы готовы пожертвовать. Например, для нашей модели «НЕ4» для получения нулевой структуры с проигрышем в 0,5% при использовании 1∞ -нормы нам пришлось «согласиться» на проигрыш в 15–20 %, а уже потом узнать, что фактический проигрыш на порядок меньше. Более того, в разных задачах при использовании 1∞ -нормы разница между $\hat{\alpha}$ и α_{sp} варьируется непредсказуемо. В случае использования остальных аппроксимаций обнаружение разреженной структуры происходит, как правило, при значениях $\hat{\alpha}$, довольно близких к α_{sp} , что делает $\hat{\alpha}$ намного более достоверной оценкой α_{sp} .

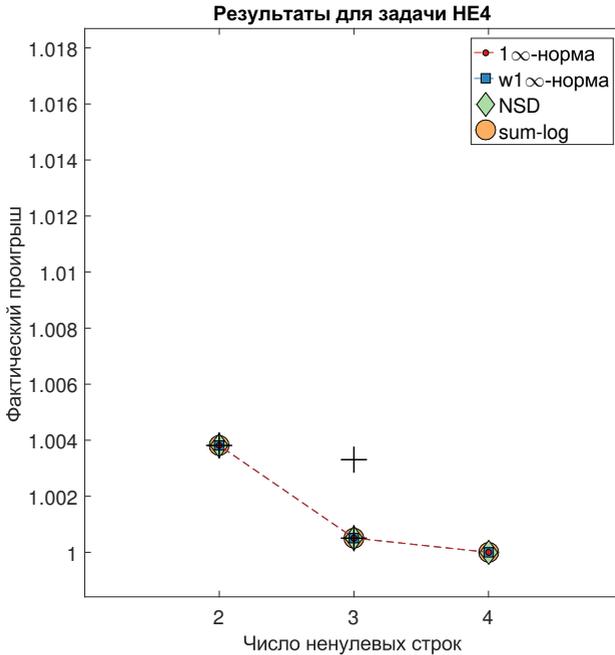


Рис. 3. «HE4». Фактический проигрыш в качестве управления

На рис. 3 также отмечены черными крестами точки, полученные на шаге 4 Алгоритма 3 в процессе полного перебора. Обнаруживаем, что найденные разреженные структуры совпадают с оптимальными для данного числа нулевых строк. Рис. 3 является частью полной картины, представленной на рис. 4, на котором охвачены все варианты разреженных структур матрицы регулятора. Видно, что при неудачном выборе строк для зануления можно сильно ухудшить качество управления. Подчеркнем, что огромные значения фактического проигрыша на рис. 4 никак не связаны с методом обнаружения разреженной структуры, а, напротив, обусловлены внутренним устройством системы, для которой обнуление определенных компонент управления оборачивается

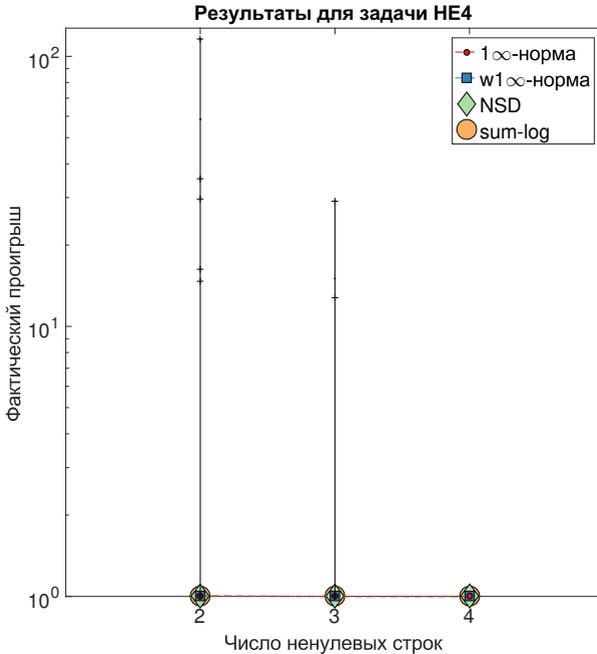


Рис. 4. «HE4». Фактический проигрыш в качестве управления. Все комбинации нулевых структур

катастрофическим проигрышем в качестве. Однако здесь есть и положительный момент, который заключается в том, что выбирая в качестве $\hat{\alpha}$ приемлемые значения допустимого проигрыша, мы заведомо не получим регулятор с «неудачной» структурой, значительно проигрывающий оптимальному.

В заключение подчеркнем, что подобные результаты мы получили не только для задачи «HE4», но и для ряда других задач из *COMPLib*: «AC1», «AC9», «AC12», «HE3». Поэтому приведенные наблюдения и выводы характерны для всех упомянутых моделей.

3.2. ЗАДАЧА «MASS SPRING SYSTEM»

Рассмотрим систему, состоящую из N твердых тел с массами m_i , соединенных пружинами с коэффициентами упруго-

сти k_i , скользящих без трения вдоль горизонтальной линии (см. рис. 5). Обозначим за p_i смещение i -го тела относительно положения равновесия, и пусть переменными состояния являются $x_1 = [p_1 \dots p_n]^T$ и $x_2 = \dot{x}_1$.

Как и в предыдущем примере, уравнения, описывающие поведение системы, имеют вид (1). В данном примере использовались единичные матрицы R и S , входящие в квадратичный функционал (3). Для простоты будем рассматривать систему со следующими параметрами:

$$m_1 = \dots = m_N = 1, \quad k_1 = \dots = k_N = 1.$$

Для указанных значений параметров матрицы системы (1) выглядят следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} O & I \\ T & O \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix},$$

где $T \in \mathbb{R}^{N \times N}$ – треплицева матрица со значением -2 на главной диагонали и значением 1 на первых побочных диагоналях, остальные элементы матрицы T нулевые; $I \in \mathbb{R}^{N \times N}$ – единичная матрица; $O \in \mathbb{R}^{N \times N}$ – матрица, состоящая из нулей.

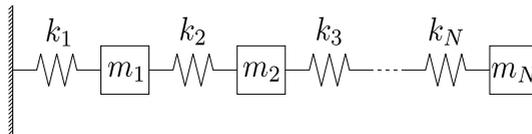


Рис. 5. Модель «Mass Spring System»

Данная модель была выбрана, так как можно произвольным образом выбирать N – число тел, варьируя тем самым размерность модели. Эксперимент выполнялся для разных значений N , результаты при этом получаются похожими. Выберем $N = 10$, так как даже при такой небольшой размерности количество всевозможных комбинаций нулевых строк $2^{10} - 2 = 1022$, поэтому полный перебор хоть и возможен, но уже затруднителен.

Результаты эксперимента, полученные для данной модели, представлены на рис. 6, 7. Из рисунков видно, что для данной задачи

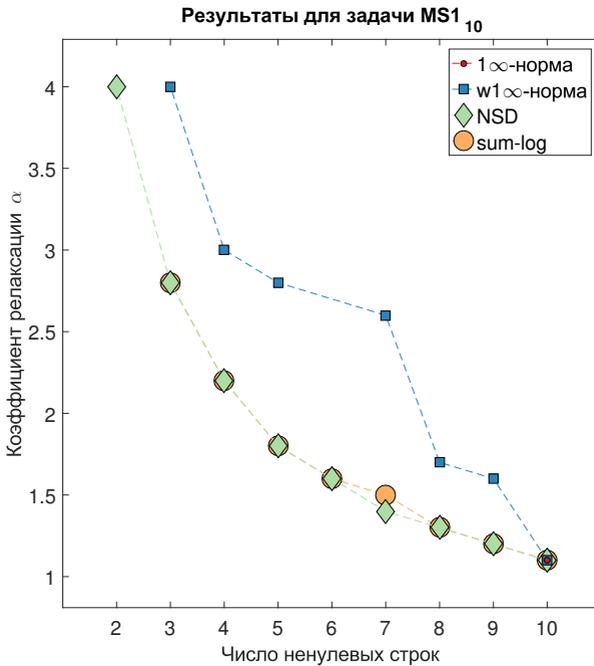


Рис. 6. «MS». Обнаружение нулевых строк при разных $\hat{\alpha}$

1∞ -норма не справилась с задачей обнаружения нулевой структуры, причем даже увеличение $\hat{\alpha}$ до огромных значений не приводит к требуемому результату. Иными словами, снова наблюдаем эффект из предыдущего примера «HE4»: при использовании 1∞ -нормы значение $\hat{\alpha}$ является крайне неточной верхней оценкой α_{sp} , только в данном примере эту оценку и вовсе получить не удалось. Трудно объяснить причины такой неэффективности 1∞ -нормы, которая, к слову, наблюдалась для всех значений N , участвующих в численном эксперименте. Возможно, дело в «однородности» задачи: элементы системы и применяемые к ним управляющие воздействия идентичны, что усложняет выбор конкретного кандидата для обнуления.

В свою очередь, взвешенная 1∞ -норма хоть и позволяет ре-

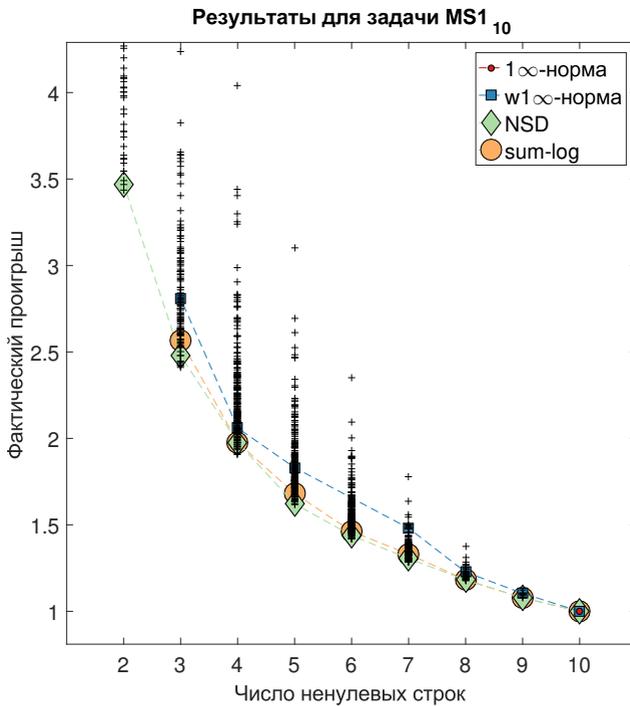


Рис. 7. «MS». Фактический проигрыш в качестве управления

шить разреженную задачу, уступает в эффективности невыпуклым аппроксимациям (13), (14). Несмотря на это, алгоритм 1, минимизирующий взвешенную 1∞ -норму, достаточно прост в реализации и по сравнению с минимизацией обычной 1∞ -нормы гораздо более эффективен. Интересен процесс последовательного обнаружения нулевых строк: их количество растет постепенно, скачкообразно увеличиваясь на некоторых итерациях. В соответствии с алгоритмом нулевым строкам – при численном моделировании нулем считаются значения порядка 10^{-10} – назначается очень большой вес, так как он обратно пропорционален максимальному абсолютному значению элементов строки. Для строк с весом порядка 10^{10} возвращение к ненулевым значениям практи-

чески невозможно. Таким образом, строка, оказавшаяся нулевой в процессе итеративного процесса, останется нулевой до конца работы алгоритма.

Реализация алгоритма для аппроксимаций (13), (14) – СССР – требует вычисления градиента соответствующих функций, а благодаря своей итеративности его реализация в целом похожа на реализацию алгоритма 1. Если сравнивать между собой невыпуклые функции, то NSD, в целом не уступая log-sum, в некоторых случаях оказывается лучше. Из рис. 7 видно, что найденные с помощью функций (13), (14) разреженные структуры близки к оптимальным, а иногда и совпадают с ними. Взвешенная норма (12) в этом отношении менее эффективна. Этот результат важен, так как теоретических гарантий сходимости к глобальному минимуму для невыпуклой задачи нет, поэтому способность находить решения, близкие к оптимальным, ценна.

На основании результатов проведенных численных экспериментов сделаны следующие выводы:

- Для 1∞ -нормы реальный проигрыш в качестве управления существенно меньше задаваемого коэффициента релаксации $\hat{\alpha}$, необходимого для обнаружения нулевых строк. Остальные аппроксимации эффективны, как правило, при значениях $\hat{\alpha}$, близких к реальному проигрышу.
- Аппроксимации обнаруживают нулевую структуру, как правило, близкую к оптимальной в смысле качества управления.
- Существуют задачи (второй пример из раздела с численными экспериментами – тому подтверждение), в которых среди всех приближений l_0 -квазинормы только 1∞ -норма не справляется с нахождением нулевых строк даже при больших значениях $\hat{\alpha}$.
- Аппроксимация NSD оказалась эффективной при решении задач, причем не уступает, например, невыпуклому приближению log-sum, а иногда оказывается лучше.

4. Заключение

В работе исследованы различные аппроксимации матричной l_0 -квазинормы, которые можно применять при синтезе разреженных регуляторов в задачах оптимального управления. Результаты численных экспериментов свидетельствуют о том, что до определенной степени все рассмотренные приближения можно применять для обнаружения нулевых строк, однако невыпуклые приближения справляются с этой задачей с большей эффективностью.

В дальнейшем хотелось бы понять, в каких случаях те или иные аппроксимации матричной l_0 -квазинормы оказываются неэффективными. Кроме того, интерес представляют другие вычислительные процедуры (например, ADMM – alternating direction method of multipliers), которые можно применять для получения разреженной структуры регулятора.

Литература

1. ПОЛЯК Б.Т., ХЛЕБНИКОВ М.В., ЩЕРБАКОВ П.С. *Разреженная обратная связь в линейных системах управления* // Автоматика и телемеханика. – 2014. – №12. – С. 13–27.
2. ПОЛЯК Б.Т., ХЛЕБНИКОВ М.В., ЩЕРБАКОВ П.С. *Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств*. – М.: УРСС, 2014. – 560 с.
3. ХЛЕБНИКОВ М.В., ЩЕРБАКОВ П.С., ЧЕСТНОВ В.Н. *Задача линейно-квадратичного управления: I. Новое решение* // Автоматика и телемеханика. – 2015. – №12. – С. 65–79.
4. ХЛЕБНИКОВ М.В. *Сравнение квадратичных критериев качества: эллипсоидальный подход* // Стохастическая оптимизация в информатике. – 2014. – Т. 10, №1. – С. 145–156.

5. BOYD S., EL GHAOUI L., FERON E., BALAKRISHNAN V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. – SIAM, Philadelphia, 1994. – 193 p.
6. BYKOV A., SHCHERBAKOV P., DING M. *A tractable nonconvex surrogate for the matrix l_0 -quasinorm: applications to sparse feedback design* // IFAC-PapersOnLine. – 2016. – Vol. 49, No. 13. – P. 53–58.
7. CANDÈS E.J., WAKIN M.B., BOYD S.P. *Enhancing sparsity by reweighted l_1 minimization* // Journal of Fourier Analysis and Applications. – 2008. – Vol. 14, No. 5. – P. 877–905.
8. FAZEL M., HINDI H., BOYD S. *Log-det heuristic for matrix rank minimization with applications to Hankel and Euclidean distance matrices* // Proc. of American Control Conference. – 2003. – P. 2156–2162.
9. GRANT M., BOYD S. *CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.1*. – URL: <http://cvxr.com/cvx>.
10. HARTMAN P. *On functions representable as a difference of convex functions* // Pacific Journal of Mathematics. – 1959. – Vol. 9, No. 3. – P. 707–713.
11. LANCKRIET G.R., RANGARAJAN B.K. *On the convergence of the concave-convex procedure* // Advances in Neural Information Processing Systems. – 2009. – Vol. 22. – P. 1759–1767.
12. LEIBFRTZ F., LIPINSKI W. *Description of the benchmark examples in COMPl_eib 1.0*. – URL: <http://www.complib.de>.
13. LEVINE W.S., ATHANS M. *On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1970. – Vol. 15, No. 1. – P. 44–48.
14. LIN F., FARDAD M., JOVANOVIĆ M.R. *Augmented Lagrangian approach to design of structured optimal state feedback gains* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2011. – Vol. 56, No. 12. – P. 2923–2929.

15. LIN F., FARDAD M., JOVANOVIĆ M.R. *Design of optimal sparse feedback gains via the alternating direction method of multipliers* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2013. – Vol. 58, No. 9. – P. 2426–2431.
16. MÜNZ U., PFISTER M., WOLFRUM P. *Sensor and actuator placement for linear systems based on \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ optimization* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2014. – Vol. 59, No. 11. – P. 2984–2989.
17. POLYAK B., KHLEBNIKOV M., SHCHERBAKOV P. *An LMI approach to structured sparse feedback design in linear control systems* // Proc. of European Control Conference. – 2013. – P. 833–838.
18. STURM J.F. *Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones* // Optimization Methods and Software. – 1999. – Vol. 11–12. – P. 625–653.
19. TOH K.C., TODD M.J., TUTUNCU R.H. *SDPT3 – a Matlab software package for semidefinite programming* // Optimization Methods and Software. – 1999. – Vol. 11. – P. 545–581.
20. VANDENBERGHE L., BOYD S. *Semidefinite programming* // SIAM Review. – 1996. – Vol. 38, No. 1. – P. 49–95.
21. YUILLE A.L., RANGARAJAN A. *The concave-convex procedure* // Neural Computation. – 2003. – Vol. 15. – P. 915–936.
22. ZELAZO D., SCHULER S., ALLGÖWER F. *Performance and design of cycles in consensus networks* // Systems & Control Letters. – 2013. – Vol. 62, No. 1. – P. 85–96.

NUMERICAL STUDY ON EFFECTIVENESS OF SURROGATES FOR THE MATRIX l_0 -QUASINORM APPLIED TO SPARSE FEEDBACK DESIGN

Alexey Bykov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, (alexey.bykov.mipt@gmail.com).

Pavel Shcherbakov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Institute for Systems Analysis, Federal Research Center “Computer Science and Control” of RAS, Moscow, Doctor of Science, (cavour118@mail.ru).

Abstract: Optimal control problem formulations sometimes require the resulting controller to be sparse, i.e. to contain zero elements in gain matrix. On the one hand, sparse feedback leads to the performance drop if compared with the optimal control, on the other hand, it confers useful properties to the system. For instance, sparse controllers allow to design distributed systems with decentralized feedback. Some sparse formulations require gain matrix of the controller to have special sparse structure, which is characterized by the occurrence of zero rows in a matrix. In this paper various approximations to the number of nonzero rows of a matrix are considered to be applied to sparse feedback design in optimal control problems for linear systems. Along with a popular approach based on using the matrix l_1 -norm, more complex nonconvex surrogates are involved, those surrogates being minimized via special numerical procedures. Effectiveness of the approximations is compared via numerical experiment.

Keywords: sparse control, l_1 -optimization, linear systems, optimal control, linear matrix inequalities.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.П. Курдюковым.

Поступила в редакцию 17.04.2017.

Дата опубликования 31.07.2017.

УДК 303.732; 519.816; 004.023

ББК 65.054

О ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ СИТУАЦИЕЙ СО МНОГИМИ АКТИВНЫМИ СУБЪЕКТАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОГНИТИВНЫХ КАРТ¹

Авдеева З. К.², Коврига С. В.³

*(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

Предложены постановки задач управления ситуацией со многими активными субъектами и общая схема их решения с использованием когнитивных карт. Выделены некоторые перспективные прикладные области, где могут быть востребованы указанные задачи, и обозначены направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: слабоструктурированная ситуация, активные субъекты, когнитивная карта, постановка задач управления.

1. Введение

Современные ситуации характеризуются не только быстрой изменчивостью, взаимодействием множества разнородных и междисциплинарных факторов, но и наличием субъектов (заинтересованных сторон), чьи различные точки зрения, убеждения и интересы приводят к разному видению направлений развития ситуации (такие ситуации часто относят к слабоструктурированным [26]).

¹ Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФ №17-18-01326, РФФИ №14-07-00821.

² Зинаида Константиновна Авдеева, с.н.с. ИПУ РАН, доцент НИУ ВШЭ (avdeeva@ipu.ru).

³ Светлана Вадимовна Коврига, н.с. (kovriga@ipu.ru).

Прикладная ниша применения когнитивных карт охватывает сложные и слабоструктурированные ситуации (см., например, [23]), в том числе ситуации, связанные с многосубъектностью. Под когнитивной картой ситуации понимается формализованная модель ситуации, отражающая знания и/или верования субъекта, индивидуального или коллективного, о причинно-следственных влияниях между значимыми факторами ситуации, будь эти влияния законами развития ситуации или правилами принятия решений субъектов, вовлеченных в ситуацию⁴.

Можно перечислить некоторые виды прикладных задач анализа многосубъектных ситуаций, для решения которых предлагаются модели и методы на основе когнитивных карт, как за рубежом, так и в России:

- разрешение некоторой проблемной ситуации на основе привлечения представлений о ней разных заинтересованных сторон (stakeholders⁵) (например, [19, 20, 22, 24]); при этом

⁴ При этом типично, что в когнитивную карту включены разнородные факторы-переменные, связанные причинно-следственными влияниями: потенциально измеримые переменные типа «собственные доходы города» и абстрактные качественные переменные типа «привлекательность наркобизнеса». Те или иные формализации когнитивных карт описывают динамику ситуаций и систем [2].

⁵ Основоположник теории stakeholders в сфере корпоративного управления Р. Фримен ввел понятие стейкхолдер, определяемое как группа или отдельное лицо, которое может повлиять или влияет на достижение целей организации: «A stakeholder in an organization is (by definition) any group or individual who can affect or is affected by the achievement of the organization's objectives» [17] (цитируется по [18, стр. 207]). Российские исследователи часто наряду с простым заимствованием термина из западной практики используют понятия «причастная сторона», «заинтересованная сторона», «группа влияния» [10]. При этом методы анализа стейкхолдеров предлагаются для решения проблем не только в сфере корпоративного управления компании, но и в области государственного управления, экологической политики, здравоохранения и др. [18].

определяются стратегически важные направления изменения ситуации с учетом баланса между различными интересами выявленных сторон [10];

- формирование коалиций заинтересованных сторон с близкими целями для управления целенаправленным развитием социально-экономической, политической системы (ситуации) [13];

- моделирование взаимодействия субъектов (агентов) с несогласованными представлениями о ситуации и информационное управление одним агентом другими (с использованием теоретико-игровых методов) [11, 12];

- анализ обоснованности решений, предлагаемых субъектом в проблемной ситуации, с учетом точек зрения других заинтересованных сторон ситуации при общности целей всех участников ситуации [5].

В данной работе предлагается подход к анализу ситуации S со многими активными субъектами ситуации (АСС)⁶, $\{AS_i\}$ для поиска возможности достижения целей развития S в интересах отдельно взятого субъекта AS_1 , в том числе при наличии конфликта интересов между АСС в ситуации S . Здесь под АСС понимается индивидуальный или коллективный⁷ субъект, влияющий на изменение ситуации через реализацию своих интересов и возможное противодействие интересам других субъектов ситуации благодаря

- имеющимся у него рычагам управления (активное, или прямое, управление ситуацией) и/или

⁶ Мы намеренно ушли от использования понятий «причастная сторона», «заинтересованная сторона», «группа влияния», так как они отражают отдельные идентификационные признаки субъектов ситуации, связанные с уровнем интереса, уровнем легитимности, уровнем возможного влияния и др. [10], и ввели собственный термин «АСС», чтобы сделать акцент на основных признаках – интересе и влиянии, учитываемых при анализе взаимодействия субъектов в ситуации.

⁷ Примером коллективного субъекта является руководство региона.

- использованию возможностей вне поля его активности (пассивное, или косвенное, управление ситуацией).

При этом принимается, что в когнитивной карте ситуации S , в которой для каждого АСС выделены области его интересов (целевые факторы) и управлений (управляющие факторы), области интересов АСС не пересекаются. Именно при выполнении данного условия могут существовать скрытые конфликты в интересах (целях) различных АСС благодаря структуре опосредованных (косвенных) влияний между взаимосвязанными факторами карты.

В основе данного подхода лежит анализ структурных свойств когнитивной карты ситуации, включающий

- определение интегральных (прямых и косвенных) влияний изменения одних факторов на изменения других факторов в карте (на рис. 1 приведен фрагмент когнитивной карты, в которой для фактора «Уровень энергетической безопасности в Европе» выделены прямые и косвенные влияния на него от других факторов);

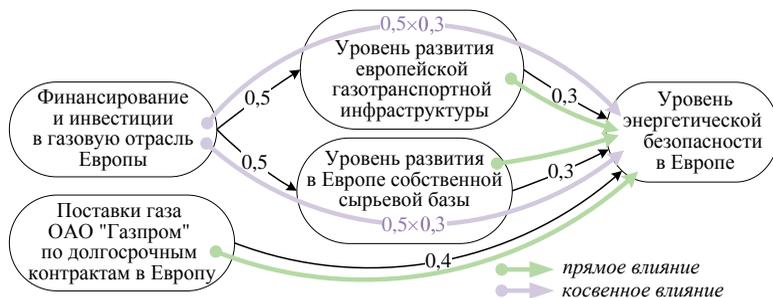


Рис. 1. Фрагмент когнитивной карты с изображением всех прямых и косвенных влияний на фактор «Уровень энергетической безопасности в Европе»

- оценку этих влияний для выявления – противоречий между факторами, характеризующими области интересов субъекта AS_1 и других АСС;

– управляющих факторов, U , способствующих достижению целей развития ситуации S в интересах субъекта AS_1 с учетом найденных противоречий в областях интересов АСС.

Следует отметить, что предлагаемый подход опирается на некоторые базовые определения и общие положения по решению задачи управления ситуацией при заданной нефиксированной цели⁸, изложенные в [15]; при этом цель управления представляется в виде множества целевых факторов: $Y = \{y_i\}$. Однако в отличие от [15], где рассматриваются возможности достижения одной непротиворечивой цели управления⁹ благодаря нахождению совокупности управлений, согласованных с этой целью¹⁰, в данной статье учитываются цели и управления разных субъектов.

В соответствии с предложенным подходом рассмотрены постановки задач управления развитием ситуации со многими АСС в рамках следующих ограничений:

- тип когнитивной модели ситуации¹¹, которая включает карту с весами и функцию динамики факторов ситуации, позволяет описать устойчивые ситуации, т.е. такие, в которых существует установившееся состояние по факторам;

⁸ В [15] под нефиксированной целью управления понимается обеспечение желательных направлений изменения всех целевых факторов.

⁹ Целевые факторы $Y = \{y_i\}$ непротиворечивы, если изменение любого y_i в желательном направлении не приводит к нежелательному изменению остальных целевых факторов в Y [15].

¹⁰ Согласованность управлений и целей подразумевает такую направленность изменений факторов управления, которая не приводит к нежелательной направленности изменения всех целевых факторов [15].

¹¹ Когнитивная модель ситуации – это когнитивная карта, дополненная начальными условиями и некоторыми другими параметрами (к их числу можно отнести такие параметры, как показатель важности целевого фактора, оценка его динамики, отражающая его желательное направление изменения, и др.).

- рассматривается только параметрическое управление ситуацией без изменения структуры карты;
- предполагается, что в когнитивной карте области интересов АСС не пересекаются (ни по целевым факторам, ни по связям), тем самым исключаются из рассмотрения возможные явные противоречия между целевыми факторами из областей интересов АСС.

Последнее ограничение обусловлено следующими соображениями. В области когнитивного моделирования известен ряд подходов к постановке и решению задач управления для ситуаций с пересекающимися целями [11, 12, 15]. По нашему мнению, представляет не меньший интерес ситуации со многими АСС, где отсутствуют явные пересечения по целям, но при этом не исключается возможность скрытых конфликтов между субъектами ситуации. Достаточно напомнить геополитические ситуации, где движущей силой изменения ситуации является активность субъектов ситуации с различными интересами.

К тому же предлагаемый подход к постановке задач управления не исключает рассмотрение ситуаций с явными пересечениями по целям и поиск U даже при наличии противоречий в целях. В таких ситуациях принципиальная возможность достижения противоречивых целей допускается, если найдены факторы управления, позволяющие *компенсировать* влияние противоречий в целях. Подобное решение (с демонстрацией примера) рассмотрено в [6] для задачи управления развитием системы в условиях влияния внешней среды.

В статье помимо описания постановки задач управления развитием ситуации со многими АСС представлены общая схема решения задач такого вида и демонстрационный пример. В заключении выделены некоторые перспективные области применения предложенного подхода к анализу ситуации S со многими АСС, а также обозначены некоторые направления дальнейших исследований.

2. Постановка задач управления развитием ситуации со многими активными субъектами

Пусть даны

- $K_f(X, A, f)$ – когнитивная карта ситуации S , характеризующейся взаимодействием различных АСС, $\{AS_i\}$, заинтересованных в изменении ситуации относительно собственных целей, в которой $X = (x_1, \dots, x_n)$ – множество факторов ситуации; $A = [a_{ij}]$ – матрица $N \times N$ взаимовлияний факторов, где a_{ij} – вес влияния фактора x_i на фактор x_j , оцениваемый в дискретной шкале $[-1; 1]$ ¹²; f – функция, определяющая правило изменения произвольного фактора x_i в любой дискретный момент времени $t \geq 0$:

$$(1) \quad f : x_i(t+1) = x_i(t) + \sum_{j \in I_i} a_{ji} x_j(t) - x_j(t-1) + g_i(t),$$

где $g_i(t) = g_i(0)$ при $t = 0$, а $g_i(t) = 0$ при $t \neq 0$; $x_j(t) = 0$ при $t < 0$; $x_i(0), g_i(0) \in [-1, 1]$. (Полное описание модели приведено в [6]).

С учетом заданной функции (1) состояние ситуации в любой дискретный момент времени $t \geq 0$ определяется по формуле

$$X(t+1) = Q^{t+1} X(0) + Q(t)G(0),$$

где $Q(t) = E_N + A + A^2 + \dots + A^t$.

Ограничимся рассмотрением таких карт, у которых собственные значения матрицы A содержатся внутри окружности единичного радиуса на комплексной плоскости, тогда

$$Q = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = (E_N - A)^{-1},$$

где Q назовем матрицей интегральных влияний факторов когнитивной карты K_f ; элементы Q характеризуют все прямые и опосредованные влияния, которым подвержен каждый зависимый фактор карты.

- Для каждого AS_i заданы

¹² *Вопросу экспертного оценивания весов влияний в когнитивной карте посвящены отдельные исследования [3, 4, 16].*

- область интересов: целевые факторы $X_i^C \subset X$, где X – множество факторов карты K_f ;
- область активного управления: факторы $X_i^U \subset X$, которыми управляет AS_i ;
- вектор оценок динамики факторов (ОДФ) $R(X_i^C)$, отражающий желательные направления изменения целевых факторов X_i^C для AS_i в ситуации S , где

$$(2) \quad r_i(x_i^C) = \left\{ \begin{array}{l} +1, \text{ если желателен рост значения } x_i^C, \\ -1, \text{ если желательно уменьшение значения } x_i^C. \end{array} \right\}.$$

Среди множества АСС, $\{AS_i\}$, выделен субъект AS_1 , в интересах которого решается задача изменения ситуации S в рамках его целей X_1^C .

Требуется найти такие факторы $U \subset \{X_i^U\}$, воздействия на которые способствуют изменению целевых факторов X_1^C в соответствии с $R(X_1^C)$.

При этом предлагаемый подход не исключает рассмотрения возможности достижения целей одновременно разных АСС. Если в соответствии с предложенным подходом рассмотреть возможности изменения ситуации относительно интересов каждого АСС в исследуемой ситуации, то по результатам такого анализа можно показать, например, субъектов, между которыми можно формировать коалицию, когда действия каждого из субъектов коалиции способствуют достижению собственных целей и целей партнеров в коалиции и др.

Допущение 1. Области интересов и активного управления АСС не пересекаются, т.е. $X^C = X \setminus (X^U \cup X^{other})$, где $X^C = \{X_i^C\}$, $X^U = \{X_i^U\}$, X^{other} – остальные факторы карты K_f .

Допущение 2.

2.1. Области интересов АСС, $\{AS_i\}$, образуют непересекающиеся подмножества факторов когнитивной карты K_f , и области управления АСС также образуют непересекающиеся подмножества факторов карты K_f (рис. 2), т.е. для любой пары AS_i и AS_j выполняются условия

$$X_i^C \cap X_j^C = \emptyset; \quad X_i^U \cap X_j^U = \emptyset.$$

Постановки и решение задач управления развитием ситуации S относительно субъекта AS_1 могут уточняться в зависимости

- от наличия или отсутствия конфликта интересов между АСС (в случае наличия конфликта используется механизм достижения целей «противодействие конфликту в интересах субъекта AS_1 »);
- от вовлеченности ресурсов управления других АСС в достижение целей развития S в интересах субъекта AS_1 : активное управление или пассивное управление.

Активное управление предполагает возможность достижения целей X_1^C только благодаря ресурсам управления AS_1 , т.е. $U \subseteq X_1^U$; *пассивное управление* – благодаря ресурсам управления других АСС, $U \subset \{X_1^U\} \setminus X_1^U$. При решении задачи допускается смешанное управление.

Механизм противодействия конфликту в интересах субъекта AS_1 подразумевает поиск таких факторов U из $\{X_i^U\}$, воздействия на которые способствуют достижению целей X_1^C с учетом негативного воздействия факторов управления других АС, X_{neg}^U , на X_1^C .

На рис. 3 демонстрируются примеры действия механизма противодействия конфликту и видов управления (активное или пассивное) на когнитивной карте, приведенной на рис. 2.

Задача считается решенной, если находится такое множество факторов U , воздействия на которые способствует изменению всех X_1^C в желательном направлении (в соответствии с $R(X_1^C)$) и при этом суммарный вес интегральных влияний U превышает суммарный вес интегральных влияний X_{neg}^U .

В общем случае допускается, что U может частично способствовать достижению целей AS_1 или $U = \emptyset$ (что свидетельствует о невозможности достижения X_1^C). Это может быть обусловлено слабым влиянием или отсутствием в когнитивной карте факторов, способных противодействовать X_{neg}^U .

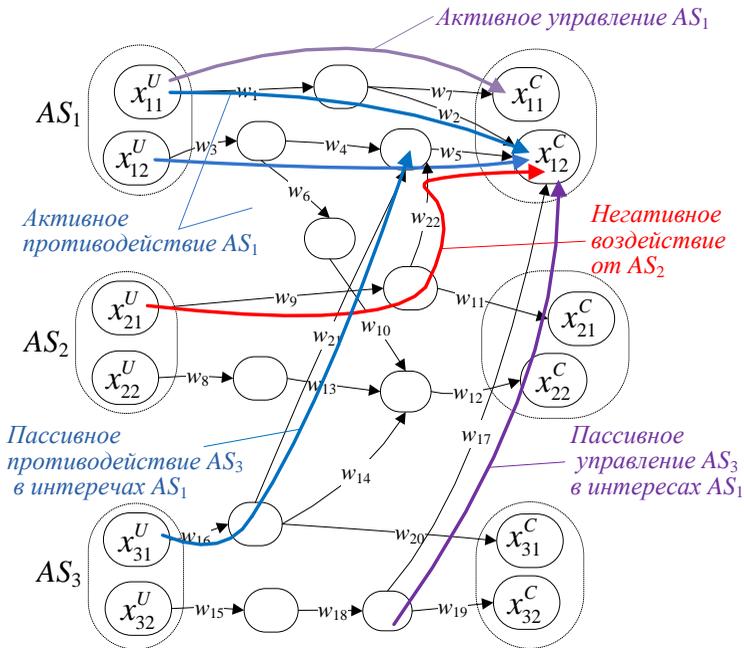


Рис. 3. Демонстрация видов управления

Следует отметить, что предлагаемый подход распространяется и на поиск возможности одновременного достижения целей разных АСС. Если в соответствии с постановкой задачи, изложенной в данном разделе, рассмотреть возможности изменения ситуации относительно интересов каждого АСС в исследуемой ситуации, то по результатам такого анализа можно показать, например, субъектов, между которыми можно формировать коалицию, когда действия каждого из субъектов коалиции способствуют достижению собственных целей и целей партнеров в коалиции и др.

3. Общая схема решения задач управления развитием ситуации со многими активными субъектами

Предварительно введем необходимые определения и допущения.

Допущение 3. Область активного управления любого субъекта AS_i , $i = 1, 2, \dots$, включает только факторы позитивного влияния X_i^U на соответствующую область его интересов X_i^C , т.е. X_i^U согласованы с X_i^C (в терминах [15]).

Далее с учетом допущения 3 вводятся определения, характеризующие возможный характер влияний факторов управления AS_i , $i = 2, 3, \dots$, на область интересов AS_1 .

Определение 1. Фактор из области активного управления субъекта AS_i , $i = 2, 3, \dots$, является фактором позитивного воздействия, $x_{pos_j}^{U_i} \in X_i^U$, относительно AS_1 , если его изменение (рост или снижение) в $X(0)$ способствует желательному изменению хотя бы одного фактора из области интересов AS_1 , $x_{1k}^C \in X_1^C$, т.е. $r_j(x_{pos_j}^{U_i}(0)) = \text{sign}(q_{jk} \times r_k(x_{1k}^C))$, и при этом не приводит к негативному изменению остальных факторов из X_1^C , где $r_k(x_{1k}^C)$ – ОДФ целевого фактора x_{1k}^C (см. (2)), q_{jk} – вес интегрального влияния $x_{pos_j}^{U_i}$ на x_{1k}^C ,

$$(3) \quad r_j(x_{pos_j}^{U_i}(0)) = \begin{cases} +1, & \text{если увеличение значения } x_{pos_j}^{U_i}, \\ -1, & \text{если уменьшение значения } x_{pos_j}^{U_i} \end{cases}$$

определяет возможную направленность изменения $x_{pos_j}^{U_i}$.

Определение 2. Фактор из области активного управления субъекта AS_i , $i = 2, 3, \dots$, является фактором негативного воздействия, $x_{neg_j}^{U_i} \in X_i^U$, относительно AS_1 , если его изменение (рост или снижение) в $X(0)$ приводит к нежелательному изменению хотя бы одного фактора из области интересов AS_1 , $x_{1k}^C \in X_1^C$, т.е. $r_j(x_{neg_j}^{U_i}(0)) \neq \text{sign}(q_{jk} \times r_k(x_{1k}^C))$, где значение $r_j(x_{neg_j}^{U_i}(0))$ определяется аналогично формуле (3).

Этап 1. Выделение из матрицы Q подматрицы Q^{C-U} , где Q^{C-U} – подматрица, в столбцах которой представлены факторы областей интересов АСС, $\{X_i^C\}$, в строках – факторы областей активного управления АСС, $\{X_i^U\}$; на пересечениях строк и столбцов в каждой подматрице – соответствующие интегральные влияния q_{ij} ; если влияние отсутствует, то $q_{ij} = 0$.

На рис. 4 представлен пример выделения из матрицы Q подматрицы Q^{C-U} , а также граф интегральных влияний, являющийся наглядным представлением взаимовлияний между областями интересов и активного управления АСС, представленных в Q^{C-U} .

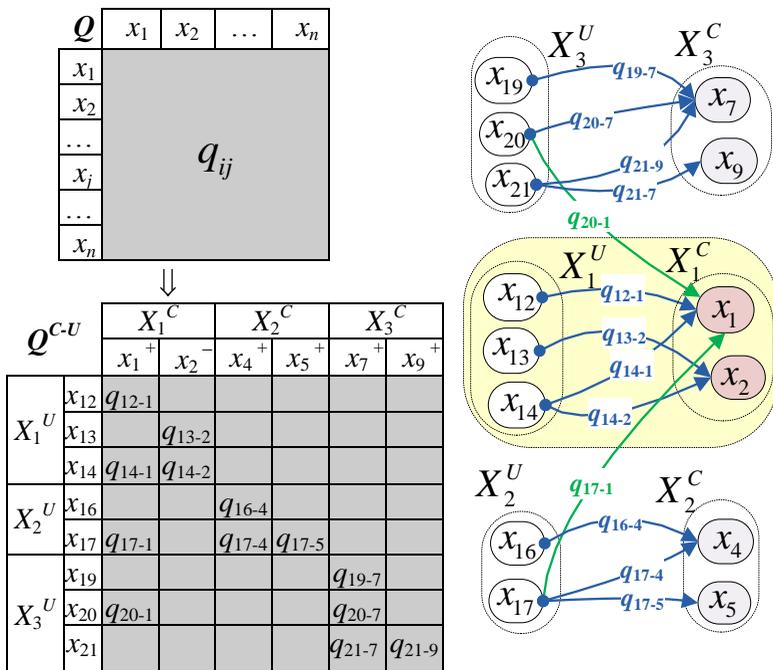


Рис. 4. Пример подматрицы Q^{C-U} и графа влияний, соответствующего этой подматрице

В указанной подматрице для каждого целевого фактора АСС знак «+» или «-» обозначает значение параметра ОДФ

этого фактора в соответствии с формулой (2). ОДФ отражает желательное направление изменения целевого фактора для каждого АСС. Зелеными стрелками обозначены интегральные влияния факторов управления других АСС на область интересов AS_1 .

Этап 2. Определение суммарных весов влияния факторов из области активного управления AS_1 , X_1^U , на отдельные целевые факторы X_1^C (в соответствии с определением 1 и допущением 3).

Суммарный вес влияний факторов управления из X_1^U субъекта AS_1 на его k -й целевой фактор $x_{1k}^C \in X_1^C$ равен модулю суммы весов интегральных влияний:

$$(4) \quad q_{U_1}^{x_{1k}^C} = \sum_{j=1}^n |q_{jk}^{U_1}|,$$

где $q_{jk}^{U_1}$ – вес интегрального влияния j -го фактора управления $x_j^{U_1} \in X^{U_1}$ на k -й целевой фактор $x_{1k}^C \in X_1^C$ области интересов AS_1 .

Этап 3. Определение

- *суммарных весов влияния факторов из областей активного управления АСС, $\{AS_i\} \setminus AS_1$, на целевые факторы X_1^C , если такие влияния есть,*

- *и характера их влияний: позитивного или негативного (в соответствии с определениями 1 и 2 и допущением 3).*

Суммарный вес позитивных влияний факторов управления $\{x_{pos_j}^{U_i}\}$, $x_{pos_j}^{U_i} \in X^{U_i}$, субъекта AS_i на k -й целевой фактор $x_{1k}^C \in X_1^C$ субъекта AS_1 равен модулю суммы весов интегральных влияний:

$$(5) \quad q_{U_i}^{pos-x_{1k}^C} = \sum_{j=1}^n |q_{pos_{jk}}^{U_i}|,$$

где $q_{pos_{jk}}^{U_i}$ – вес позитивного интегрального влияния j -го фактора управления $x_{pos_j}^{U_i}$ на k -й целевой фактор x_{1k}^C области интересов AS_1 ; если $q_{pos_{jk}}^{U_i} = 0$, то влияние $x_{pos_j}^{U_i}$ на x_{1k}^C отсутствует.

Соответственно, суммарный вес негативных влияний факторов управления $\{x_{neg_j}^{U_i}\}$, $x_{neg_j}^{U_i} \in X^{U_i}$, субъекта AS_i равен модулю суммы весов интегральных влияний:

$$(6) \quad q_{U_i}^{neg-x_{1k}^C} = \sum_{j=1}^n \left| q_{neg_{jk}}^{U_i} \right|,$$

где $q_{neg_{jk}}^{U_i}$ – вес негативного интегрального влияния j -го фактора управления $x_{neg_j}^{U_i}$ на k -й целевой фактор x_{1k}^C области интересов AS_1 ; если $q_{neg_{jk}}^{U_i} = 0$, то влияние $x_{neg_j}^{U_i}$ на x_{1k}^C отсутствует.

При этом, в соответствии с определением 1, $x_{pos_j}^{U_i}$ и $x_{neg_j}^{U_i}$ не могут совпадать.

Этап 4. Оценка возможности достижения целей субъекта AS_1 .

Цели из области интересов AS_1 , $X_1^C = \{x_{11}^C, x_{12}^C, \dots, x_{1k}^C, \dots, x_{1m}^C\}$, потенциально достижимы, если для любого целевого фактора суммарный вес позитивных влияний $q_{U_1}^{x_{1k}^C} + q_{U_i}^{pos-x_{1k}^C}$, где $q_{U_1}^{x_{1k}^C}$ и $q_{U_i}^{pos-x_{1k}^C}$ вычислены по формулам (4) и (5) соответственно, превышает суммарный вес негативных влияний $q_{U_i}^{neg-x_{1k}^C}$, вычисленный по формуле (6):

$$(7) \quad q_{U_1}^{x_{1k}^C} + q_{U_i}^{pos-x_{1k}^C} > q_{U_i}^{neg-x_{1k}^C}.$$

Искомое множество U включает те факторы воздействия из областей управления АСС, интегральные влияния по которым учитывались при расчете $q_{U_1}^{x_{1k}^C}$ и $q_{U_i}^{pos-x_{1k}^C}$ по формулам (4) и (5) соответственно для каждой цели. При этом также определяется необходимая направленность изменения каждого $u_i \in U$, $r_i(u_i)$, в соответствии с допущением 3 и определением 1.

В данном случае неравенство (7) характеризует общий случай, когда для изменения ситуации S в интересах субъекта AS_1 задействованы 3 группы АСС, что подразумевает вариант смешанного управления ситуацией (напомним, что возможные виды управления ситуацией рассмотрены в разделе 2.).

Первая группа включает субъекта AS_1 , чьи факторы управления соответствуют активному управлению ситуацией S в интересах субъекта AS_1 .

Вторую группу образуют субъекты $\{AS_i^{pos}\}$, чьи факторы управления соответствуют пассивному управлению ситуацией S относительно AS_1 . Наконец, в третью группу включены субъекты $\{AS_i^{neg}\}$, чьи факторы управления препятствуют изменению ситуации S в интересах AS_1 .

В зависимости от включенности различных АСС в решение задачи, искомое множество управлений U может состоять из разных сочетаний факторов управления АСС (см. таблицу 1).

Таблица 1. Возможные сочетания факторов управления (для разных видов управления) и факторов негативного воздействия

Возможные сочетания факторов управления, U		Вид управления ситуацией	Факторы управления $\{AS_i^{neg}\}$, препятствующие желательному изменению X_1^C (есть/нет)
Факторы управления AS_1 (всегда есть)	Факторы управления $\{AS_i^{pos}\}$ (есть/нет)		
$q_{U_1}^{x_{1k}^c} \neq 0$	$q_{U_i}^{pos-x_{1k}^c} = 0$	активное управление	с учетом негативного воздействия $q_{U_i}^{neg-x_{1k}^c} \neq 0$
	$q_{U_i}^{pos-x_{1k}^c} \neq 0$	смешанное управление	
$q_{U_1}^{x_{1k}^c} \neq 0$	$q_{U_i}^{pos-x_{1k}^c} = 0$	активное управление	в отсутствии негативного воздействия $q_{U_i}^{neg-x_{1k}^c} = 0$
	$q_{U_i}^{pos-x_{1k}^c} \neq 0$	смешанное управление	

В заключение отметим, что предложенный подход к анализу ситуации со многими АСС применим и для более сложного случая, когда целевые факторы АСС могут быть связаны прямыми или опосредованными связями (отказ от допущения 2.2). В этом случае при формировании суммарных весов влияний на целевые факторы AS_1 по формулам (4)–(6)

потребуется учет влияний целевых факторов других АСС, связанных с областью интересов AS_1 в когнитивной карте.

При этом допускается, что U может частично способствовать достижению целей AS_1 или $U = \emptyset$ (см. разд. 2).

4. Демонстрационный пример

На рис. 5 представлена абстрактная когнитивная карта (по факторам) с тремя АСС (количество факторов $n = 22$). Толстыми стрелками со знаком «+» или «-» обозначены желательные направления изменения целевых факторов, составляющих области интересов АСС, и направления изменения факторов управления каждого АСС, обеспечивающие желательное изменение соответствующих целевых факторов.

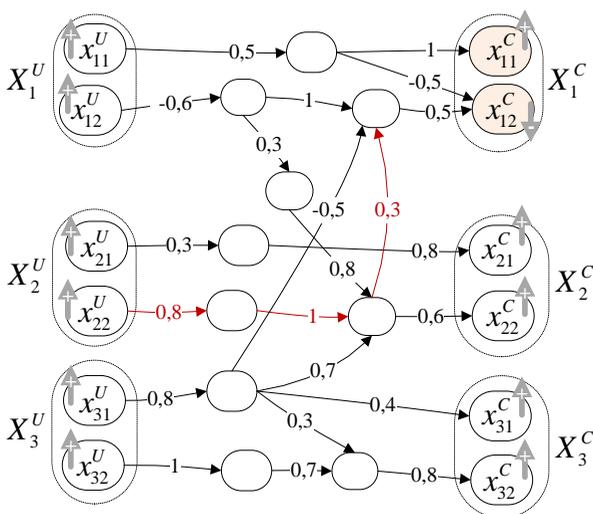


Рис.5. Абстрактная (по факторам) когнитивная карта с тремя АСС

Пусть даны

- Подматрица Q^{C-U} , отражающая интегральные влияния $X_1^U \cup X_2^U \cup X_3^U$ на $X_1^C \cup X_2^C \cup X_3^C$ (рис. 6). Q^{C-U} выделяется из общей матрицы интегральных влияний Q размерности 22×22 .

- Для каждого АСС AS_1, AS_2, AS_3 заданы
 - области интересов: $X_1^C = \{x_{11}^C, x_{12}^C\}$, $X_2^C = \{x_{21}^C, x_{22}^C\}$ и $X_3^C = \{x_{31}^C, x_{32}^C\}$ соответственно;
 - области активного управления: $X_1^U = \{x_{11}^U, x_{12}^U\}$, $X_2^U = \{x_{21}^U, x_{22}^U\}$ и $X_3^U = \{x_{31}^U, x_{32}^U\}$ соответственно;
 - векторы оценок динамики факторов (ОДФ), $R(X_i^C)$, отражающие желательные направления изменения целевых факторов X_i^C для AS_i в ситуации S : $R(X_1^C) = (1, -1)$, $R(X_2^C) = (1, 1)$, $R(X_3^C) = (1, 1)$.

При этом AS_1 – это субъект, в интересах которого решается задача изменения ситуации S в рамках целей X_1^C .

Суммарные веса влияний факторов управления X_1^U субъекта AS_1 на его целевые факторы x_{11}^C и x_{12}^C равны $q_{U_1}^{x_{11}^C} = 0,5$ и $q_{U_1}^{x_{12}^C} = |-0,25| + |-0,32| = 0,57$ соответственно.

Суммарные веса позитивных влияний факторов управления X_3^U субъекта AS_3 на целевые факторы x_{11}^C и x_{12}^C субъекта AS_1 равны $q_{U_3}^{x_{11}^C} = 0$ и $q_{U_3}^{pos-x_{11}^C} = |-0,11| = 0,11$ соответственно.

Наконец, суммарные веса негативных влияний факторов управления X_2^U субъекта AS_2 на целевые факторы x_{11}^C и x_{12}^C субъекта AS_1 равны $q_{U_2}^{x_{11}^C} = 0$ и $q_{U_2}^{neg-x_{12}^C} = 0,12$ соответственно.

В соответствии с (7) получаем $0,57 + 0,11 > 0,12$. Однако из полученного результата видно, что негативное воздействие от AS_2 компенсируется позитивным воздействием от AS_3 .

Таким образом, если ресурсные возможности AS_2 не превосходят ресурсных возможностей AS_3 , то для достижения целей субъекта AS_1 , $X_1^C = \{x_{11}^C, x_{12}^C\}$, в U достаточно включить факторы из области активного управления субъекта AS_1 , $U = X_1^U = \{x_{11}^U, x_{12}^U\}$; в противном случае $U = \{x_{11}^U, x_{12}^U, x_{31}^U\}$.

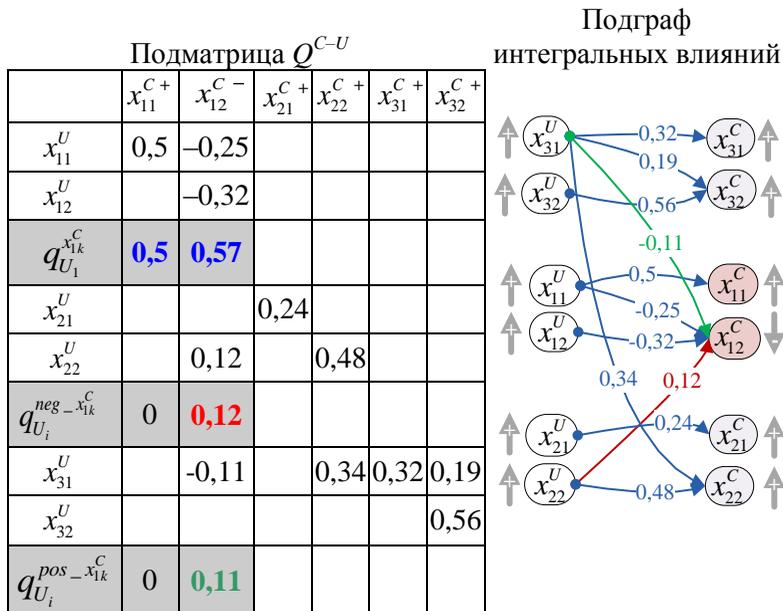


Рис. 6. Подматрица Q^{C-U} и соответствующий ей подграф интегральных влияний

5. Заключение

Общность получаемых результатов на основе предложенного подхода к анализу ситуации S со многими АСС не дает конкретного решения по достижению целей субъекта AS_1 , а лишь определяет принципиальную возможность их достижения. Такая постановка задачи целесообразна при анализе проблемной ситуации в условиях недостатка конкретных данных по ресурсам управления АСС и предопределяет дальнейшую конкретизацию задачи при различных предположениях о возможных ресурсных ограничениях АСС в ситуации S . В частности, для такой конкретизации могут быть применены подходы, представленные в [11, 12, 15].

В части дальнейшего развития предложенного подхода предполагается исследование возможности его распространения

для анализа ситуаций с более сложной динамикой изменения факторов. Еще одним перспективным направлением представляется исследование возможности его интеграции с методами принятия решений в цикле подготовки и принятий решений в слабоструктурированных проблемных ситуациях. Можно привести отдельные примеры интеграции когнитивных карт и методов многокритериального оценивания [7, 9, 14] в задачах поиска лучшей альтернативы развития ситуации, однако в перечисленных публикациях не рассматриваются ситуации, связанные с многосубъектностью.

С точки зрения практической значимости полученных результатов можно выделить некоторые перспективные направления применения предложенного подхода к анализу ситуации со многими АСС.

Стратегический мониторинг ситуации играет одну из ключевых ролей в цикле формирования, реализации и коррекции стратегии развития социально-экономической системы (СЭС). В [6] предложена схема стратегического мониторинга с возможностью включения различных видов задач управления развитием СЭС. Выбор того или иного вида или их сочетания зависит от специфики конкретной ситуации.

Включение постановок задач управления ситуацией со многими АСС расширяет состав решаемых задач управления развитием СЭС. На рис. 7 приведена общая схема стратегического мониторинга [6] с включением задачи управления со многими АСС.

Еще одной перспективной областью приложения предложенного подхода к анализу ситуации со многими АСС является политика, геополитика, международные отношения. Появляются отечественные и зарубежные публикации, в которых обосновывается и демонстрируется перспективность применения когнитивного моделирования в перечисленных сферах (см., например, [1, 8, 21, 25, 27]). По нашему мнению, рассмотренные в данной статье постановки задач управления ситуацией со многими АСС расширяют инструментарий когнитивного моделирования для решения прикладных задач в сфере геополитики и международных отношений, где

взаимодействие субъектов играет существенную роль в развитии ситуации.

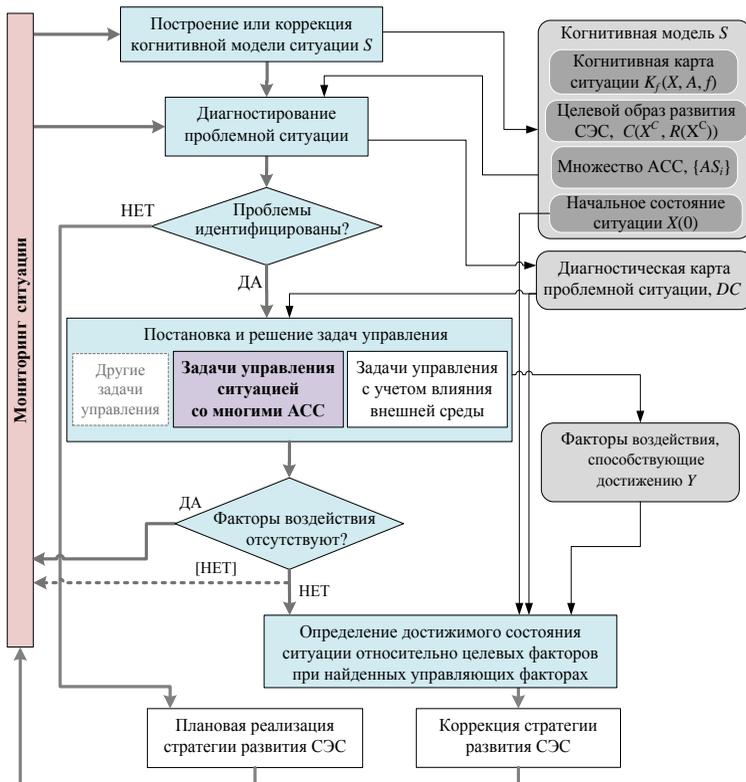


Рис. 7. Общая схема стратегического мониторинга при реализации стратегии развития СЭС [6] с включением задач управления ситуацией со многими ACC

Литература

1. АБАЕВ Л.Ч. *Об актуальных подходах к моделированию международных отношений* // Проблемы национальной стратегии. – 2011. – №2(7). – С. 31–48.
2. АБРАМОВА Н.А., АВДЕЕВА З.К., ФЕДОТОВ А.А. *Систематизация теоретических моделей формальных когнитивных карт: общий подход и его применение* // Труды IX Междунар. конф. «Когнитивный анализ и управление развитием ситуаций». CASC'2011. – М.: ИПУ РАН, 2011. – С. 120–129.
3. АБРАМОВА Н.А., ВОРОНИНА Т.А. *Об одном эксперименте по расстановке весов влияний в когнитивной карте* // Междунар. конф. «Когнитивная наука в Москве: новые исследования». – М.: Институт возрастной физиологии РАО, 2011. – С. 131–142.
4. АБРАМОВА Н.А., ВОРОНИНА Т.В., ФЕДОТОВ А.А. *О механизмах формирования оценок значений факторов и весов влияний в когнитивных картах* // Труды IX Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами», 2012. – Т.1. – С. 111–114.
5. АБРАМОВА Н.А., ПОРЦЕВ Р.Ю. *Рефлексивный подход к анализу обоснованности мер по обеспечению безопасности системы на основе методологии когнитивного моделирования* // Труды XXIII Междунар. конференции «Проблемы управления безопасностью сложных систем». – М.: ИПУ РАН, 2015. – С. 349–353
6. АВДЕЕВА З.К., КОВРИГА С.В. *Подход к постановке задач управления на когнитивной модели ситуации для стратегического мониторинга* // Управление большими системами. Вып. 59. – М.: ИПУ РАН, 2016. – С. 120–146.

7. ГОРЕЛОВА Г.В., РЯБЦЕВ В.Н. *Когнитивный подход к исследованию геополитических процессов в мировых регионах и когнитивное моделирование их развития (на примере Черноморско-Каспийского региона)* // Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона». – 2012. – №4 (часть 2). – URL: <http://vww.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1407> (дата обращения: 24.07.2017).
8. АВЕРКИН А.Н., КУЗНЕЦОВ О.П., КУЛИНИЧ А.А., ТИТОВА Н.В. *Поддержка принятия решений в слабо структурированных предметных областях. Анализ ситуаций и оценка альтернатив* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2006. – Вып. 3. – С. 139–149.
9. ДАВЫДОВ С.В., МАКСИМОВ В.И. *Многокритериальное иерархическое оценивание ситуации при когнитивном моделировании* // Когнитивный анализ и управление развитием ситуаций (CASC 2001). Материалы 1-й Межд. конф. в 3-х томах. – М.: ИПУ РАН, 2001. – Том 1. – С. 173–196.
10. ДУДЕНКОВ Д.А. *Стейкхолдер-ориентированная модель компании в теории корпоративного управления* // Вестник Саратовского государственного социально-экономического университета. – 2014. – №1. – С. 50–53.
11. КОРГИН Н.А., КУЛИВЕЦ С.Г. *Модель информационного управления на основе игры на линейной когнитивной карте* // Управление большими системами. – 2011. – Вып. 35. – С. 94–113.
12. КУЛИВЕЦ С.Г. *Моделирование конфликтных ситуаций с несогласованными представлениями у агентов на основе игр на линейных когнитивных картах* // Проблемы управления. – 2010. – №4 – С. 42–48.
13. КУЛИНИЧ А.А. *Модель поддержки принятия решений для образования коалиций в условиях неопределенности* // Искусственный интеллект и принятие решений. – 2012. – №2. – С. 27–38.
14. ЛЕОНОВА Н.В. *Использование методов многокритериального принятия решений в условиях смешанных стратегий для целей макроэкономического анализа* // Экономические науки. – 2013. – №4(101). – С. 167–172.

15. МАКСИМОВ В.И., КОРНОУШЕНКО Е.К. *Аналитические основы применения когнитивного подхода при решении слабоструктурированных задач // Труды ИПУ РАН. – М.: ИПУ РАН, 1999. – Том II. – С. 95–109.*
16. ABRAMOVA N.A., TELITSYNA T.A. *An approach to analysis of expert estimation validity in cognitive mapping // IFAC Conference on Manufacturing Modelling, Management, and Control (MIM), 2013. – P. 927–932.*
17. FREEMAN R.E. *Strategic management: A stakeholder approach.* – Boston: Pitman, 1984. – 292 p.
18. FREEMAN R.E. et al. *Stakeholder theory: The state of the art.* – New York: Cambridge University Press, 2010. – 343 p.
19. GRAY S., CHAN A., CLARK D., JORDAN R. *Modelling the integration of stakeholder knowledge in social-ecological decision-making: benefits and limitations to knowledge diversity // Ecological Modelling. – 2012. – Vol. 229. – P. 88–96.*
20. HESTER P. *Analyzing stakeholders using fuzzy cognitive mapping // Procedia Computer Science. – 2015. – Vol. 61. – P. 92–97.*
21. ORMEROD P., RIORDAN S. *New approach to the analysis of geo-political risk // Diplomacy & Statecraft. – 2004. – Vol. 15, Iss. 4. – P. 643–654.*
22. ÖZESMI U., ÖZESMI S. *Ecological models based on people's knowledge: a multi-step fuzzy cognitive mapping approach // Ecological Modelling. – 2004. – Vol. 176. – P. 43–64.*
23. PAPAGEORGIU E. *Review study on fuzzy cognitive maps and their applications during the last decade / In: M. Glykas (ed.), Business Process Management, SCI444. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. – 2013. – P. 281–298.*
24. PAPAGEORGIU E., KONTOGIANNI A. *Using fuzzy cognitive mapping in environmental decision making and management: a methodological primer and an application / In: International perspectives on global environmental change. Edited by Dr. S.Young. –INTECH, 2012. – P. 428–450.*

25. SHAYJI S., KADHI N., WANG Z. *Fuzzy cognitive map theory for the political domain* // Proc. of the Federated Conference on Computer Science and Information Systems. – Szczecin, Poland, 2011. – P. 179–186
26. SIMON H., NEWELL A. *Heuristic problem solving: the next advance in operations research* // Operations Research. – 1958. – Vol. 6, No. 1. – P. 1–10.
27. TSADIRAS A.K., KOUSKOUVELIS I. *Using fuzzy cognitive maps as a decision support system for political decisions: the case of Turkey's integration into the European Union* / In: P. Bozanis and E.N. Houstis (Eds.), *Advances in Informatics. Proc. of 10th Panhellenic Conference on Informatics, PCI2005*. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. – P. 371–381.

ON THE STATEMENT OF CONTROL PROBLEMS OF THE SITUATION WITH MANY ACTIVE STAKEHOLDERS WITH USE OF COGNITIVE MAPS

Zinaida Avdeeva, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow; National Research University «The Higher School of Economics», Cand.Sc. (avdeeva@ipu.ru).

Svetlana Kovriga, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow (kovriga@ipu.ru).

Abstract: The paper proposes the statement of control problems of the situation with many active stakeholders and the general scheme of their solution with use of cognitive maps. This formulation of the problem is suitable for analyzing the problem situation in the conditions of a lack of specific data on the management resources of the ACC and predetermines further specification of the problem under various assumptions about possible resource limitations of the stakeholders in the situation of S. From the point of view of practice, the proposed approach makes it possible to diagnose and predict problem situations caused by a conflict of interests at the stage of strategic monitoring and provide a correction for the development strategy of the socio-economic system (SES).

Keywords: ill-structured situation, active subjects, cognitive maps, statements of a control problem.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.Н. Бурковым.

*Поступила в редакцию 08.11.2016.
Опубликована 31.07.2017.*

УДК 334.02; 519.08
ББК 22.18

МОДЕЛИ АДАПТАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТРАКТАХ В УСЛОВИЯХ ВЕРОЯТНОСТНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ¹

Белов М. В.²

(Компания ИБС, Москва)

Новиков Д. А.³

*(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

Получены новые достаточные условия оптимальности скачкообразных и компенсаторных систем стимулирования в вероятностных задачах стимулирования; предложены и исследованы динамические модели адаптации участников организационной системы к изменению статистических характеристик внешней среды.

Ключевые слова: теория контрактов, задача стимулирования, вероятностная неопределенность, адаптивное поведение, задача о разладке.

1. Введение

Задачи стимулирования в организационных системах, т.е. побуждения управляемых субъектов к выбору определенных действий в интересах субъекта, осуществляющего управление, являются предметом исследований в теории управления организационными системами [12, 13] и в теории контрактов [21, 28], причем в рамках последней основное внимание уделяется ситуациям, когда результаты деятельности управляемых субъек-

¹ Работа поддержана грантом РФФ №16-19-10609.

² Михаил Валентинович Белов, к.т.н. (mbelov59@mail.ru).

³ Дмитрий Александрович Новиков, д.т.н., чл.-корр. РАН, профессор (novikov@tushino.com).

тов зависят не только от их собственных действий, но и от внешних случайных факторов. Если взаимодействие участников организационной системы повторяется во времени неоднократно, то возникает необходимость рассмотрения динамических контрактов, описываемых в рамках теории повторяющихся игр (в дискретном [10, 24, 27] или в непрерывном [22, 29] времени) – см. обзоры в [11, 23, 27]. Однако возможны ситуации, когда характеристики внешней неопределенности изменяются во времени, следовательно, необходимы разработка и исследование моделей, учитывающих эффекты обнаружения участниками оргсистемы подобных изменений и эффективной реакции на них.

Изложение материала настоящей работы имеет следующую структуру. Во втором разделе вводится система классификаций моделей контрактов в организационных системах, рассматриваются статические модели контрактов, в том числе в условиях аддитивной неопределенности (подраздел 2.4) и в рамках так называемой модели простого агента (подраздел 2.5), для которых получены новые достаточные условия оптимальности скачкообразных и компенсаторных систем стимулирования. Третий раздел посвящен контрактам в многоагентных системах, четвертый и пятый разделы – динамическим моделям освоенного объема и процессов адаптации участников организационной системы к изменению характеристик внешней среды.

2. Статическая модель

Рассмотрим организационную систему (ОС) [13], состоящую из одного управляющего органа – *центра* – и одного управляемого им субъекта – *агента*. Агент выбирает неотрицательное *действие* $y \geq 0$, которое совместно с реализацией неопределенного параметра – *состояния природы* $\theta \in [0; \Delta]$ – однозначно определяет *результат* $z = y - \theta$ его деятельности (так называемая *аддитивная модель* учета неопределенности, в которой неопределенность «аддитивно ухудшает» действие агента). Предположим, что размер *затрат* агента $c(y, r)$ зависит от его действия y и *типа* $r > 0$ (параметр агента, отражающий эффективность его деятельности), причем будем считать, что

$c(\cdot, r)$ – строго монотонно возрастающая гладкая выпуклая функция первого аргумента, равная нулю в случае выбора агентом нулевого действия, и монотонно убывающая функция второго аргумента. Описание затрат агента функцией двух переменных является традиционным для теории управления организационными системами (см. например, [5–13]). Однако в большинстве рассматриваемых в работе случаев тип агента r фиксирован и/или несущественен с содержательной точки зрения. Поэтому будем его опускать в записи функции затрат, используя для последней обозначение $c(y)$ там, где это не приводит к неоднозначности.

Центр предлагает агенту заключить *контракт* $\sigma(z)$, определяющий размер неотрицательного вознаграждения (и условия его получения) в зависимости от достигнутого результата. Целевая функция агента имеет вид разности между стимулированием и затратами:

$$(1) \quad f(\sigma(\cdot), y, z) = \sigma(z) - c(y, r).$$

Центр получает *доход* $H(z)$ от деятельности агента (где $H(\cdot)$ – непрерывная неубывающая функция) и несет затраты на стимулирование, т.е. его целевая функция равна разности между доходом и стимулированием:

$$(2) \quad \Phi(\sigma(\cdot), z) = H(z) - \sigma(z).$$

Примем традиционный для задач стимулирования в рамках теории управления организационными системами [2, 12, 13] и теории контрактов [21, 26, 28, 30] *порядок функционирования*: сначала центр и агент согласовывают контракт (центр предлагает агенту контракт, от которого агент может «отказаться», выбирая нулевое действие, т.е. не получая вознаграждения, но и не неся затрат), затем агент выбирает действие, после чего производятся выплаты.

Будем считать, что при принятии решений участники ОС стремятся максимизировать свои целевые функции. Так как результат деятельности агента зависит и от его действия, и от состояния природы, то для устранения *неопределенности* относительно значения состояния природы и центр, и агент должны использовать всю имеющуюся у них информацию. В зависимости от информированности участников, выделяют:

- *детерминированный случай* (неопределенность отсутствует ($\Delta \equiv 0$), и это является общим знанием для центра и агента);
- *случай полной информированности* (когда субъект, принимающий решение, знает истинное значение состояния природы);
- *интервальную неопределенность* (когда субъект, принимающий решение, знает лишь множество возможных значений $[0; \Delta]$ неопределенного параметра – состояния природы);
- *вероятностную неопределенность* (когда субъект, принимающий решение, знает распределение вероятностей на множестве возможных значений неопределенного параметра – состояния природы или результата деятельности агента);
- *нечеткую неопределенность* (когда субъект, принимающий решение, знает функцию принадлежности неопределенного параметра, определенную на множестве его возможных значений).

Обозначим через $\langle f(\sigma(\cdot), y) \rangle$ и $\langle \Phi(\sigma(\cdot), y) \rangle$ «детерминированные» целевые функции агента и центра, т.е. получающиеся после устранения ими неопределенности относительно состояния природы. Для устранения интервальной неопределенности обычно – см. обзор методов устранения неопределенности в задачах стимулирования в [12] – используют принцип максимального гарантированного результата, в случае вероятностной неопределенности – принцип ожидаемой полезности, в случае нечеткой – принцип максимально недоминируемых альтернатив.

Обозначим через $P(\sigma(\cdot))$ – множество оптимальных для агента (реализуемых центром) действий агента в рамках контракта $\sigma(\cdot)$, через M – множество допустимых контрактов, где

$$P(\sigma(\cdot)) = \arg \max_{y \geq 0} \{f(\sigma(\cdot), y)\}.$$

Примем гипотезу благожелательности [12, 13], в соответствии с которой агент выбирает из множества реализуемых действий то действие, которое наиболее предпочтительно для центра. Тогда задача стимулирования будет заключаться в нахождении оптимального контракта $\sigma^*(\cdot)$, т.е. допустимого контракта, максимизирующего выигрыш центра:

$$(3) \quad \sigma^*(\cdot) \in \operatorname{Arg} \max_{\sigma \in M} \{ \max_{y \in P(\sigma)} \{ \Phi(\sigma(\cdot), y) \} \}.$$

Если гипотеза благожелательности не выполнена, то ищется система стимулирования (контракт), имеющая максимальную гарантированную эффективность:

$$\sigma_g^*(\cdot) \in \operatorname{Arg} \max_{\sigma \in M} \{ \min_{y \in P(\sigma)} \{ \Phi(\sigma(\cdot), y) \} \}.$$

Отметим, что даже при наличии одного неопределенного параметра число возможных комбинаций информированности центра и агента достаточно велико (точнее, равно $17 = 1 + 4^2$; случаи нетривиальной взаимной информированности [14] лежат вне рассмотрения настоящей работы). Проанализируем некоторые из них.

2.1. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ СЛУЧАЙ

В его рамках $z \equiv y$, и оптимальной (решением задачи (3)) является скачкообразная система стимулирования, использующая принцип компенсации затрат агента [1, 3, 13]:

$$(4) \quad \sigma_c(x_0, y) = \begin{cases} c(x_0), & y \geq x_0, \\ 0, & y < x_0, \end{cases}$$

где оптимальный план по действию (желательное для центра действие агента) равен

$$(5) \quad x_0 = \operatorname{arg} \max_{z \geq 0} \{ H(z) - c(z) \}.$$

Подставляя (4) и (5) в (2), легко найти оптимальный выигрыш центра

$$(6) \quad K_0 = \max_{z \geq 0} \{ H(z) - c(z) \}.$$

Значение целевой функции агента при этом равно нулю.

Если гипотеза благожелательности не выполнена, то ε -оптимальной является система стимулирования

$$(7) \quad \sigma_{c_\varepsilon}(x, y) = \begin{cases} c(x_0) + \varepsilon, & y \geq x_0, \\ 0, & y < x_0; \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малая константа.

2.2. СЛУЧАЙ ПОЛНОЙ ИНФОРМИРОВАННОСТИ ЦЕНТРА И АГЕНТА

Пусть на момент принятия решений о выбираемом действии и размере выплат соответственно агент и центр знают реализовавшееся значение состояния природы. Тогда центр может использовать так называемый *механизм гибкого планирования* [9], в котором и оптимальный план

$$(8) \quad x^*(\theta) = \arg \max_{y \geq 0} [H(y - \theta) - c(y)],$$

и система стимулирования

$$(9) \quad \sigma_c(x^*(\theta), z) = \begin{cases} c(x^*(\theta)), & z \geq x^*(\theta) - \theta, \\ 0, & z < x^*(\theta) - \theta; \end{cases}$$

зависят в явном виде от состояния природы θ . Значение целевой функции агента при этом равно нулю, а оптимальный выигрыш центра равен

$$(10) \quad K(\theta) = \max_{y \geq 0} [H(y - \theta) - c(y)].$$

Очевидно, что в силу неубывания функции затрат агента, $\forall \theta \geq 0 \quad K(\theta) \leq K_0$, т.е. влияние неопределенности на выигрыш центра негативно.

2.3. ИНТЕРВАЛЬНАЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

В ситуациях неполной информированности целесообразно разделять случаи *симметричной* (одинаковой) и *асимметричной информированности* центра и агента (обычно считается, что агент информирован о неопределенных параметрах не хуже центра [13], поэтому в рамках асимметричной информированности ниже предполагается, что агент на момент принятия решений знает реализовавшееся значение состояния природы, а центр принимает решения в условиях неопределенности). Отметим, что возможность сообщения агентом центру информации [2, 13] мы не рассматриваем.

Асимметричная информированность. В этом случае центр, зная только диапазон $[0; \Delta]$ возможных значений состояния природы, вынужден гарантировать агенту компенсацию затрат:

$$(11) x_{\text{МГР}}^* = \arg \max_{y \geq 0} \min_{\theta \in [0; \Delta]} [H(y - \theta) - c(y)] = \\ = \arg \max_{y \geq 0} [H(y - \Delta) - c(y)],$$

т.е. использовать систему стимулирования

$$(12) \sigma_C(x_{\text{МГР}}, z) = \begin{cases} c(x_{\text{МГР}}), & z \geq x_{\text{МГР}} - \Delta, \\ 0, & z < x_{\text{МГР}} - \Delta. \end{cases}$$

Агент при этом, зная реализовавшееся значение состояния природы θ , выбирает действие

$$(13) y^*(\theta) = x_{\text{МГР}} - \Delta + \theta,$$

приводящее к «ожидаемому» центром результату $x_{\text{МГР}} - \Delta$ его деятельности (то, что агенту выгодно выполнять план, легко проверяется сравнением размеров его выигрышей при выполнении и невыполнении плана).

Оптимальный выигрыш центра

$$(14) K_{\Delta} = \max_{y \geq 0} [H(y - \Delta) - c(y)]$$

в случае асимметричной информированности при любом значении состояния природы не выше, чем в случае полной информированности (ср. (10) и (14)).

Значение целевой функции агента при этом равно

$$(15) f(\sigma_C(x_{\text{МГР}}, x_{\text{МГР}}), y^*(\theta), x_{\text{МГР}}) = c(x_{\text{МГР}}) - c(x_{\text{МГР}} - \Delta + \theta) \geq 0.$$

Величина (15) называется *информационной рентой*, т.е. выигрышем, который получает субъект (в данном случае – агент) за счет лучшей своей информированности по сравнению с другими субъектами (центром).

Симметричная информированность. В этом случае ни центр, ни агент на момент принятия решений не знают реализации состояния природы, а им известен только диапазон $[0; \Delta]$ его возможных значений. Поэтому центр использует систему стимулирования (12) и получает выигрыш (14), а агент вынужден выбирать действие, гарантирующее ему получение ненулевого вознаграждения:

$$(16) u_{\text{МГР}} = x_{\text{МГР}},$$

что приносит ему нулевой выигрыш. При этом в организационной системе реализуется «перепроизводство», равное $\Delta - \theta \geq 0$.

2.4. ВЕРОЯТНОСТНАЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ:
АДДИТИВНАЯ МОДЕЛЬ

Пусть состояние природы θ , относительно которого в ОС имеет место симметричная информированность, является случайной величиной с непрерывной функцией распределения $\hat{F}_\theta(\cdot): [0; \Delta] \rightarrow [0; 1]$, для которой существует п.р.в. $p_\theta(\cdot)$. В дальнейшем нам будет удобно пользоваться функцией распределения $F_\theta(\cdot): (-\infty; +\infty) \rightarrow [0; 1]$:

$$F_\theta(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leq 0, \\ \hat{F}_\theta(\xi), & \xi \in [0; \Delta], \\ 1, & \xi \geq \Delta. \end{cases}$$

При заданном действии агента y , в силу определения результата деятельности $z = y - \theta$, последний является случайной величиной с функцией распределения $F_z(\cdot, y): [y - \Delta; y] \rightarrow [0; 1]$, равной

$$(17) F_z(q, y) = 1 - F_\theta(y - q).$$

Предположим, что центр ограничен параметрическим классом (параметры: $\pi \geq 0, \lambda \geq 0$ – см. выражение (18)) скачкообразных систем стимулирования (как показано в [6, 12], в рассматриваемом случае скачкообразные системы стимулирования могут быть не оптимальны – см. также ниже, но, тем не менее, они просты и широко распространены на практике):

$$(18) \sigma_c(\pi, z) = \begin{cases} \lambda, & z \geq \pi, \\ 0, & z < \pi, \end{cases}$$

где π – план по результату (желательный для центра результат деятельности агента).

При выборе агентом действия $y \geq \pi$ математическое ожидание размера его вознаграждения (18) равно

$$(19) E_z \sigma_c(\pi, z) = \lambda F_\theta(y - \pi).$$

Будем считать, что агент выбирает действие, максимизирующее его ожидаемую полезность [12, 13, 21], поэтому из условий первого порядка можно записать, что действие агента $y^*(\pi, \lambda) \geq \pi$ должно удовлетворять уравнению

$$(20) \lambda p_\theta(y^*(\pi, \lambda) - \pi) = c'(y^*(\pi, \lambda)).$$

Задача центра заключается в выборе параметров $\pi \geq 0, \lambda \geq 0$ системы стимулирования (контракта), максимизирующих его ожидаемую полезность:

$$(21) \int_0^{\Delta} H(y^*(\pi, \lambda) - \zeta) p_{\theta}(\zeta) d\zeta - \lambda F_{\theta}(y^*(\pi, \lambda) - \pi) \rightarrow \max_{\pi \geq 0, \lambda \geq 0}.$$

Пример 1. Пусть центр имеет линейную функцию дохода $H(z) = \gamma z$, где $\gamma > 0$ – известная константа; агент имеет квадратичную функцию затрат $c(y, r) = y^2/2r$, где $r > 0$ – тип агента [13], отражающий эффективность его деятельности; а распределение $F_{\theta}(\cdot)$ равномерное: $F_{\theta}(v) = v/\Delta, v \in [0; \Delta]$.

Из выражения (19) следует, что математическое ожидание размера вознаграждения агента равно $\lambda(y - \pi)/\Delta$. Следовательно, при выборе агентом действия $y \geq \pi$ математическое ожидание значения его целевой функции равно

$$(22) E_z f(\sigma_C(\pi, z), y, z) = \lambda(y - \pi)/\Delta - y^2/2r.$$

Максимизируя свой ожидаемый выигрыш (22), агент выберет действие (см. также выражение (20))

$$(23) y^*(\pi, \lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda r}{\Delta} & \text{при } \pi \leq \frac{\lambda r}{2\Delta}, \\ 0 & \text{при } \pi > \frac{\lambda r}{2\Delta}. \end{cases}$$

Математическое ожидание значения целевой функции центра равно:

$$(24) E_z \Phi(\sigma_C(\pi, z), z) = \gamma(y - \Delta/2) - \lambda(y - \pi)/\Delta.$$

Подставляя (23) в (24), получим задачу (см. (21)) выбора центром параметров системы стимулирования (18)

$$(25) \gamma(\lambda r/\Delta - \Delta/2) - \lambda(\lambda r/\Delta - \pi)/\Delta \rightarrow \max_{\lambda \geq 0, \pi \leq \lambda r/(2\Delta)}.$$

Решение задачи (25) имеет вид $\lambda^* = \gamma\Delta, \pi^* = \gamma r/2$. Ожидаемый выигрыш центра при этом равен $\gamma(\gamma r - \Delta)/2$, а ожидаемый выигрыш агента равен нулю. •¹

Решим задачу синтеза оптимальной системы стимулирования для рассматриваемой вероятностной аддитивной модели.

¹ Символ «•» здесь и далее обозначает окончание примера или доказательства.

Общая схема решения вероятностных задач стимулирования такова [12]: сначала для каждого действия агента x ищется минимальная (с точки зрения ожидаемых затрат центра на стимулирование) реализующая его система стимулирования $\sigma_{\min}(x, \cdot)$, т.е. побуждающая агента выбирать именно это действие: $x \in P(\sigma_{\min}(x, \cdot))$. Затем ищется действие, реализация которого наиболее выгодна для центра (максимизирует его ожидаемый выигрыш – см. также выражение (3)):

$$(26) x^* = \arg \max_{x \geq 0} E\Phi(\sigma_{\min}(x, \cdot), x),$$

где E – оператор вычисления математического ожидания.

$$\text{Обозначим через } x^{**} = \arg \max_{x \geq \Delta} \left[\int_0^{\Delta} H(x - \zeta) p_{\theta}(\zeta) d\zeta - c(x) \right].$$

Лемма 1. *В вероятностной задаче стимулирования для любого действия агента $x \geq 0$ не существует системы стимулирования, реализующей это действие с ожидаемыми затратами центра на стимулирование, строго меньшими затрат агента, т.е. $\sigma_{\min}(x, \cdot) \geq c(x)$.*

Доказательство. Пусть существует действие агента $\hat{x} \geq 0$ и система стимулирования $\hat{\sigma}(z)$, такие, что выполнено

$$(27) E_z \hat{\sigma}(z) | \hat{x} = \int_0^{+\infty} \hat{\sigma}(z) p_z(v, \hat{x}) dv < c(\hat{x}),$$

и система стимулирования $\hat{\sigma}(z)$ реализует действие $\hat{x} \geq 0$, т.е. $\forall y \geq 0$ выполнено

$$(28) E_z \hat{\sigma}(z) | \hat{x} - c(\hat{x}) \geq E_z \hat{\sigma}(z) | y - c(y).$$

Для $y = 0$ выражение (28) с учетом условия $c(0) = 0$ примет вид

$$E_z \hat{\sigma}(z) | \hat{x} \geq c(\hat{x}) + E_z \hat{\sigma}(z) | 0,$$

что в силу неотрицательности стимулирования (и, следовательно, его математического ожидания) противоречит (27). •

Найдем достаточные условия оптимальности системы стимулирования типа (18), а именно контракта

$$(29) \sigma_C(x, z) = \begin{cases} c(x), & z \geq x - \Delta, \\ 0, & z < x - \Delta. \end{cases}$$

Утверждение 1. Если $\forall x \in [x^{**} - \Delta; x^{**}]$ выполнено

$$(30) \quad p_{\theta}(x - x^{**}) \geq \frac{c'(x)}{c(x^{**})},$$

то в аддитивной модели учета вероятностной неопределенности система стимулирования (29) реализует действие x^{**} агента с минимальными ожидаемыми затратами центра на стимулирование, равными $c(x^{**})$ и является оптимальной.

Доказательство. Вычислим математическое ожидание вознаграждения агента при выборе им действия y при плане x :

$$E_z \sigma_C(x, z)|y = \int_0^{\Delta} \sigma_C(x - \Delta, y - \zeta) p_{\theta}(\zeta) d\zeta. \quad \text{Из выражения (19)}$$

следует, что $E_z \sigma_C(x, z)|y = c(x) F_{\theta}(y - x + \Delta)$. Ожидаемая полезность агента равна

$$E_z \sigma_C(x, z)|y - c(y) = \begin{cases} -c(y), & y \leq x - \Delta, \\ c(x) F_{\theta}(y - x + \Delta) - c(y), & y \in [x - \Delta, x], \\ c(x) - c(y), & y \geq x. \end{cases}$$

При плане $x = x^{**}$ в силу условия (30) максимум данной ожидаемой полезности достигается при выборе агентом либо нулевого действия, либо действия, совпадающего с планом x (условие (30) гарантирует неубывание ожидаемой полезности агента по его действию на отрезке $[x^{**} - \Delta; x^{**}]$). В силу гипотезы благожелательности агент выберет действие x^{**} , что приведет к ожидаемым затратам центра на стимулирование в точности равным затратам агента. Следовательно, в силу результата леммы 1 система стимулирования (29) оптимальна. •

Очевидно, что, если гипотеза благожелательности не выполнена, то ε -оптимальной системой стимулирования в рамках условия (30) будет система стимулирования

$$\sigma_{C\varepsilon}(x, z) = \begin{cases} c(x) + \varepsilon, & z \geq x - \Delta, \\ 0, & z < x - \Delta. \end{cases}$$

Пример 2. В условиях примера 1 условие (30) примет вид: $\gamma r \geq 2\Delta$. •

Теперь исследуем достаточные условия оптимальности компенсаторной системы стимулирования. Для этого найдем систему стимулирования $\hat{\sigma}(z)$, которая обращает в ноль ожи-

даемую полезность агента для любых его действий, т.е. для которой выполнено

$$(31) \int_{y-\Delta}^y \hat{\sigma}(z) p_{\theta}(y-z) dz = c(y).$$

Утверждение 2. Если существует контракт $\hat{\sigma}(z) \geq 0$, удовлетворяющий выражению (31), то он является оптимальным в аддитивной модели учета вероятностной неопределенности.

Справедливость утверждения 2 следует из свойства (31) системы стимулирования $\hat{\sigma}(z)$ и результата леммы 1.

Итак, система стимулирования $\hat{\sigma}(z)$ является оптимальной, если существует положительнозначное решение интегрального уравнения (31). Сформулируем условия существования такого решения.

Утверждение 3. Если функции $c'_y(y)$ и $p'_{\theta}(v)$ непрерывны в областях определения, то интегральное уравнение (31) имеет единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений:

$$(32) \begin{cases} \hat{\sigma}_0(z) = \frac{c'(z)}{p_{\theta}(0)}, \\ \hat{\sigma}_{i+1}(z) = \frac{c'(z)}{p_{\theta}(0)} - \int_0^z \hat{\sigma}_i(u) \frac{p'_{\theta}(z-u)}{p_{\theta}(0)} du, \quad i=1, 2, \dots \end{cases}$$

Для положительности решения интегрального уравнения (32) необходимо

$$(33) c'(y) \geq \int_0^y \hat{\sigma}_i(u) p'_{\theta}(y-u) du, \quad i=1, 2, \dots$$

Доказательство. Продифференцируем выражение (31):

$$(34) p_{\theta}(0)\hat{\sigma}(z) - p_{\theta}(\Delta)\hat{\sigma}(z-\Delta) + \int_{z-\Delta}^z \hat{\sigma}(u) p'_{\theta}(z-u) du = c'(z).$$

Сначала решаем (34) при $z \leq \Delta$:

$$p_{\theta}(0)\hat{\sigma}(z) + \int_0^z \hat{\sigma}(u) p'_{\theta}(z-u) du = c'(z).$$

Перепишем данное выражение в виде:

$$(35) \hat{\sigma}(z) = \frac{c'(z)}{p_\theta(0)} - \int_0^z \hat{\sigma}(u) \frac{p'_\theta(z-u)}{p_\theta(0)} du.$$

Уравнение (35) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода. Известно (см., например, [17]), что в рамках условий доказываемого утверждения оно имеет единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений (32). Для положительности решения необходимо выполнения (33). Таким образом, решение для $z \leq \Delta$ получено.

Используя (34), аналогичное решение можно получить для $z \in [j\Delta; (j+1)\Delta], j = 1, 2, \dots$:

$$\hat{\sigma}(z) = \frac{\{c'(z) + p_\theta(\Delta)\hat{\sigma}(z-\Delta)\}}{p_\theta(0)} - \int_0^z \sigma(u) \frac{p'_\theta(z-u)}{p_\theta(0)} du,$$

причем доказательство положительности решения $\hat{\sigma}(z)$ достаточно выполнить только для решения на первом интервале, далее $c'(z) + p_\theta(\Delta)\hat{\sigma}(z-\Delta) \geq c'(z)$.

Пример 3. Пусть п.р.в. $p_\theta(\cdot)$ является равномерной, т.е.

$$p_\theta(v) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{при } v \in [a_0; a_1], \\ 0 & \text{при } v \notin [a_0; a_1]; \end{cases}$$

где $0 < a_0; a_1 = a_0 + \Delta$.

Тогда (31) примет вид $\int_{z-a_1}^{z-a_0} \sigma(u) dz = \Delta c(z, r)$. Дифференцируя

обе части, получим функциональное уравнение

$$\sigma(z-a_0) - \sigma(z-a_1) = \Delta c'(z).$$

Учитывая, что $c(y) = 0$ $c'(y) = 0$ и при $y \leq 0$, решение итогового уравнения получится в виде функционального ряда:

$$\sigma(z-a_0) = \Delta \sum_{i=0}^{\infty} c'(z-\Delta i).$$

Так как $c(\cdot)$ непрерывно дифференцируема и выпукла, сумма функционального ряда положительна и возрастает, что соответствует основному требованию к функции стимулирования $\sigma(\cdot)$.

В частности, в условиях примера 1 $c(y, r) = y^2/2r$, а $c'(y, r) = y/r$ при $y > 0$, тогда

$$\sigma(z - a_0) = \frac{\Delta}{r} \sum_{i=0}^{\infty} \theta(z - \Delta i)(z - \Delta i),$$

где $\theta(\cdot)$ – функция Хевисайда: $\theta(u) = \begin{cases} 1 & \text{при } u \geq 0, \\ 0 & \text{при } u < 0. \end{cases}$

2.5. ВЕРОЯТНОСТНАЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ: МОДЕЛЬ С ПРОСТЫМ АГЕНТОМ

Альтернативой рассмотренной выше в подразделе 1.4 аддитивной модели учета неопределенности является так называемая модель *простого агента* [3, 5, 6, 12], в которой функция распределения результатов деятельности имеет вид

$$(36) F_z(q, y) = \begin{cases} G(q), & q \leq y, \\ 1, & q > y; \end{cases}$$

где $G(\cdot): [0; +\infty) \rightarrow [0; 1]$ – известная функция распределения (соответствующую ей п.р.в. обозначим через $g(\cdot)$), $G(0) = 0$, т.е., как и в аддитивной модели, действие агента определяет максимально возможный результат, а распределение $G(\cdot)$ не зависит явным образом от действия. П.р.в., соответствующую функции распределения (36), обозначим через $p_z(q, y)$.

При использовании центром скачкообразной системы стимулирования (18) и выборе агентом действия $y \geq \pi$ математическое ожидание размера его вознаграждения равно $\lambda(G(y) - G(\pi))$. Аналогом условия первого порядка (20) для модели простого агента является

$$\lambda g(y^*(\pi, \lambda)) = c'(y^*(\pi, \lambda)).$$

В [12] доказано, что в модели нейтрального к риску простого агента оптимальны компенсаторные системы стимулирования, а в [6] доказано, что в этом классе моделей оптимальны:

– для несклонного к риску агента – *компенсаторные системы стимулирования* вида

$$(37) \sigma_K(z) = \int_0^z \frac{c'(v)dv}{1 - G(v)};$$

– для склонного к риску агента – *скачкообразные системы стимулирования* следующего вида:

$$(38) \sigma_C(x, z) = \begin{cases} \frac{c(x)}{1-G(x)}, & z \geq x, \\ 0, & z < x. \end{cases}$$

Легко убедиться, что функция стимулирования (37) является неотрицательной, возрастающей и выпуклой. По аналогии с леммой 1 в [6] можно доказать следующие свойства систем стимулирования (37) и (38).

Утверждение 4. В модели простого агента $\forall y \geq 0$ выполнено:

$$1) \int_0^{+\infty} \sigma_K(q) p_z(q, y) dq = c(y);$$

$$2) \int_0^{+\infty} \sigma_C(q) p_z(q, y) dq = c(x).$$

Содержательно результат первого пункта утверждения 4 означает, что для любого действия агента математическое ожидание его вознаграждения (37) в точности равно затратам агента по выбору этого действия. Следовательно, при выборе центром функции стимулирования (37) для любых действий агента его ожидаемая полезность обращается в ноль, что делает его индифферентным к выбору действий, следовательно, в рамках гипотезы благожелательности агент выберет действие, которое наиболее предпочтительно с точки зрения центра.

При использовании центром системы стимулирования (38) агент индифферентен между нулевым действием (отказ от контракта) и выполнением плана. Для того чтобы ожидаемая полезность агента достигала единственного максимума при выборе действия, совпадающего с планом, необходимо увеличить размер выплат за выполнение плана на сколь угодно малую положительную величину ε . Но такая система стимулирования будет уже не оптимальной, а ε -оптимальной. Легко убедиться, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5. В модели простого агента $\forall x \geq 0$ система стимулирования

$$(39) \sigma_C^\varepsilon(x, z) = \begin{cases} \frac{c(x, r) + \varepsilon}{1 - G(x)}, & z \geq x, \\ 0, & z < x, \end{cases}$$

ε -оптимальна (т.е. реализует действие агента x с минимальными ожидаемыми затратами центра на стимулирование).

Независимо от того какую – компенсаторную или скачкообразную – систему стимулирования использует центр, оптимальным с его точки зрения будет план (по действию)

$$(40) x^* = \arg \max_{y \geq 0} \left[\int_0^y H(z)g(z)dz + (1 - G(y)) H(y) - c(y, r) \right].$$

Условием первого порядка для выражения (40) является

$$(41) H(x^*) + (1 - G(x^*)) H'(x^*) = c'(x^*, r).$$

Пример 4. Пусть в условиях примера 1 $G(z) = z/(1 + z)$. Из выражения (37) следует, что $\sigma_K(z) = \frac{z^2}{2r} \left(1 + \frac{2z}{3} \right)$, а из выраже-

ния (41) находим $x^* = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1+3\gamma r}{1-\gamma r}} - 1 \right) \cdot$

Так как в рассматриваемой в настоящей работе модели простого агента последний нейтрален к риску, то, выбирая из систем стимулирования (37) и (38), наверное, следует отдать предпочтение скачкообразной системе стимулирования, так как она, во-первых, проще, а, во-вторых, ее ε -оптимальный аналог побуждает агента выбрать действие, совпадающее с планом (см. утверждение 5).

Основными результатами первого раздела, в котором рассматривались статические задачи теории контрактов, являются «аналитические» зависимости типа (31), (37), которые позволяют ставить и решать более сложные задачи – в частности динамические, в которых изменяются характеристики агентов и/или состояния природы (например, изменяются параметры его функции распределения). Однако сначала рассмотрим непосредственное обобщение модели с одним агентом и аддитивной

неопределенностью на многоагентный случай (раздел 3), а затем обобщение статической модели с простым агентом на случай нескольких последовательных периодов его деятельности (раздел 4).

3. Многоагентная модель

Пусть в ОС центру подчинены n агентов, принимающих решения одновременно и независимо (через $N = \{1, \dots, n\}$ обозначим множество этих агентов), а функция затрат i -го агента $c_i(y_i, r_i) = c(y_i, r_i)$, где $y_i \geq 0$ – его действие, $r_i > 0$ – его тип (нижним индексом здесь и далее будем обозначать номер агента).

Обозначим через $Y = \sum_{i \in N} y_i$ сумму действий всех агентов.

Предположим, что задачей центра является обеспечение суммарного результата $X \geq 0$ деятельности всех агентов с вероятностью не меньшей заданного значения $\alpha \in [0; 1]$. Величина α называется *надежностью контракта* [4].

Для аддитивной модели учета неопределенности это условие примет вид следующего ограничения на действия агентов:

$$(42) Y \geq X + n F_{\theta}^{-1}(\alpha).$$

Величина $n F_{\theta}^{-1}(\alpha)$ может рассматриваться как «плата за неопределенность» в терминах действий агентов.

Рассмотрим следующую задачу: каковы должны быть оптимальные планы (по действиям)? Воспользовавшись утверждением 1, получаем, что ожидаемые затраты центра на стимулирование каждого агента в точности равны затратам последнего от выбора соответствующего действия (так как при использовании центром системы стимулирования (31) ожидаемый выигрыш агента постоянен при любом его действии, то, в силу гипотезы благожелательности, он выберет действие, совпадающее с планом). Так как затраты агентов – неубывающие, то в оптимальном решении условие (42) выполняется как равенство. Следовательно, поиск оптимальных планов сводится к следующей задаче условной оптимизации:

$$(43) \begin{cases} \sum_{i \in N} c(x_i, r_i) \rightarrow \min_{\{x_i \geq 0\}} \\ \sum_{i \in N} x_i = X + nF_{\theta}^{-1}(\alpha). \end{cases}$$

Применяя метод множителей Лагранжа, получаем, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 6. В аддитивной модели учета вероятностной неопределенности оптимальные планы $\{x_i^*\}$ в контракте по обеспечению суммарного результата $X \geq 0$ с надежностью α имеют вид

$$(44) x_i^* = c'^{-1}(\mu, r_i), i \in N,$$

где $\mu > 0$ – решение следующего уравнения:

$$(45) \sum_{i \in N} c'^{-1}(\mu, r_i)x_i = X + nF_{\theta}^{-1}(\alpha).$$

В силу монотонности функции распределения получаем из анализа задачи (43), что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 7. В аддитивной модели учета вероятностной неопределенности с ростом надежности контракта минимальные затраты центра на обеспечение заданного суммарного результата деятельности агентов не убывают.

Пример 5. Пусть агенты имеют функции затрат типа Кобба–Дугласа, т.е. $c(y, r) = \frac{1}{\delta} y^{\mu} r^{1-\mu}$, $\mu > 1$. Из выражений (44) и (45) получаем

$$(46) x_i^* = \frac{r_i}{\sum_{j \in N} r_j} (X + n F_{\theta}^{-1}(\alpha)), i \in N.$$

Зная оптимальные планы (46), вычисляем оптимальное значение критерия эффективности:

$$(47) \sum_{i \in N} c(x_i^*, r_i) = \frac{(X + nF_{\theta}^{-1}(\alpha))^{\mu}}{\mu \left(\sum_{j \in N} r_j \right)^{\mu-1}}.$$

Правая часть выражения (47) не убывает по α (см. утверждение 5).

Размер «платы за неопределенность» (разность между (47) и значением критерия эффективности в соответствующей детерминированной задаче) в терминах критерия эффективности составляет $\frac{(X + nF_{\theta}^{-1}(\alpha))^{\mu} - X^{\mu}}{\mu(\sum_{j \in N} r_j)^{\mu-1}}$ и не убывает с ростом надежности контракта. •

4. Модель освоенного объема

Модель освоенного объема очень распространена в теории и практике управления проектами, поэтому имеет смысл показать, как предлагаемые динамические модели контрактов связаны с моделью освоенного объема.

Рассмотрим взаимодействие центра и одного агента в течение выполнения некоторого *проекта* – нескольких последовательных периодов дискретного времени. К концу периода T_0 (планового, называемого *планируемым сроком завершения проекта*) центру требуется обеспечить заданный суммарный результат $X_0 \geq 0$ деятельности. Пусть значения состояния природы $\{\theta^t\}_{t=1,2,\dots}$ в различные периоды – независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F_{\theta}(\cdot)$, а центр заключает с агентом оптимальный (см. утверждение 2) контракт $\hat{\sigma}(z^t)$, удовлетворяющий выражению (31) и определяющий размер вознаграждения агента в зависимости от результата его деятельности в периоде t , $t = 1, 2, \dots$.

Так как тип агента и его функция затрат не зависят от номера периода, то при заданной надежности α каждого однопериодного контракта центру следует назначать агенту в каждом периоде один и тот же план (по действию), равный (ср. с выражением (42))

$$(48) \quad x_0 = X_0/T_0 + F_{\theta}^{-1}(\alpha),$$

причем, в силу (31), агенту выполнять этот план выгодно.

Плановый результат (суммарный) деятельности агента в момент времени t равен

$$(49) \quad X_0^t = t x_0 - t F_{\theta}^{-1}(\alpha) = tX_0/T_0.$$

Последовательность (49) в терминах *методики освоенного объема*, принятой в современном управлении проектами [7, 16], называется *планируемой динамикой объемов работ* (BQWS – Budgeted Quantity of Work Scheduled).

Так как результат $z^\tau = x_0 - \theta^\tau$ деятельности агента в периоде τ – случайная величина, то суммарный результат X^t , достигнутый к периоду t , также является случайной величиной:

$$(50) X^t = tx_0 - \sum_{\tau=1}^t \theta^\tau = t(X_0/T_0 + F_\theta^{-1}(\alpha)) - \sum_{\tau=1}^t \theta^\tau = \\ = X_0^t + t F_\theta^{-1}(\alpha) - \sum_{\tau=1}^t \theta^\tau .$$

Последовательность (50) в терминах методики освоенного объема является *фактической траекторией* (фактическая динамика объема работ: AQWP – Actual Quantity of Work Performed).

Определим другие показатели освоенного объема в терминах рассматриваемой аддитивной модели учета неопределенности ($t = 1, 2, \dots, T$) [7]:

– *плановые ожидаемые* (в смысле математического ожидания) *затраты* центра (Budgeted Cost of Work Scheduled – BCWS), директивный график:

$$(51) c_0^t = tc(X_0/T_0 + F_\theta^{-1}(\alpha), r);$$

– *фактические затраты* центра (Actual Cost of Work Performed – ACWP):

$$(52) c^t = \sum_{\tau=1}^t \hat{\sigma}(x_0 - \theta^\tau);$$

– отставание от плана (временное, может в общем случае быть как положительным, так и отрицательным):

$$(53) \delta(t) = \min \{ \delta \mid X_0^{t-\varepsilon} = X^t \};$$

– *освоенный объем* (EV – Earned Value, Budgeted Cost of Work Performed – BCWP) как плановая стоимость фактически выполненных работ:

$$(54) c_e^t = c_0^{t-\delta(t)} .$$

– текущий прогноз $T(t)$ времени завершения проекта:

$$(55) T(t) = T_0 + \varepsilon(t);$$

– общие плановые затраты C_0 (BAC – Budget at Completion или BC – Budget Cost):

$$(56) C_0 = T_0 c(X_0/T_0 + F_0^{-1}(\alpha), r);$$

– текущая линейная оценка общих затрат:

$$(57) C(t) = T(t) c^t/t.$$

– фактический срок завершения проекта:

$$(58) T' = \min \{t \geq 0 \mid X^t \geq X_0\};$$

– разность между фактическими и освоенными затратами (Cost Overrun – «перерасход» средств):

$$(59) \Delta c_e(t) = c^t - c_e^t;$$

– показатель освоенного объема (SPI – Schedule Performance Index):

$$(60) a^t = c_e^t/c_0^t;$$

– показатель динамики (освоения) затрат (CPI – Cost Performance Index):

$$(61) b^t = c_e^t/c^t.$$

Показатели освоенного объема (48)–(61), которые подразделяются на *первичные* – (48)–(52) и *производные* – (53)–(61), являются эффективным инструментом планирования проектов и оперативного управления их реализацией.

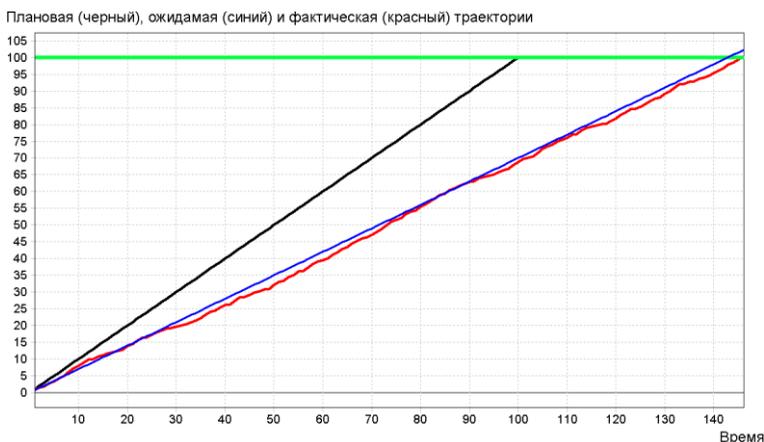


Рис. 1. Динамика результатов в примере 6

Пример 6. Пусть в условиях примера 1 $r = 1$, $T_0 = 100$, $X_0 = 100$, $\Delta = 1$, $\alpha = 0,2$. Плановая (см. выражение (49)), фактическая (см. выражение (50)) и ожидаемая ($X^t = X_0^t + t(F_\theta^{-1}(\alpha) - E\theta)$) траектории приведены на рис. 1 (моделирование осуществлялось в программном комплексе РДС [15]).

Динамика плановых и фактических затрат, а также освоенного объема приведены на рис. 2. •

Получаем: $T^* = 145$, $VAC = 72$, $\Delta c_e(T^*) \approx 60\%$. •

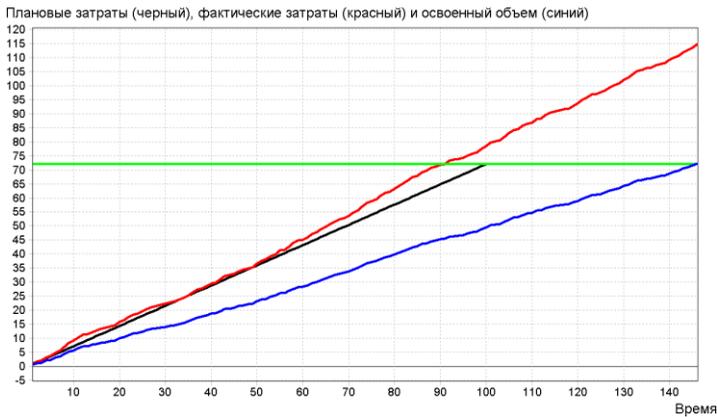


Рис. 2. Динамика затрат и освоенного объема в примере 6

5. Модель адаптации

Классификацию задач стимулирования в динамических организационных системах можно осуществлять по различным основаниям: взаимосвязь периодов, дальновидность участников, режим принятия решений и др. (см. [11]). В настоящем разделе сначала вводится классификация динамических задач стимулирования в условиях, когда на протяжении рассматриваемого промежутка времени может однократно (в момент времени t_p) измениться один из параметров модели – целевая функция центра, функция затрат агента или функция распределения результатов деятельности агента (подобное событие будем условно называть «разладкой»). Участники организационной системы при этом предполагаются *недальновидными*, т.е. при-

нимающими в каждом периоде решения только на данный период, не принимая во внимание возможные будущие последствия этих решений. Затем изучается одна из моделей, в которой предметом разладки является функция распределения, а момент разладки не известен ни центру, ни агенту. Изменение поведения участников организационной системы при обнаружении факта разладки можно условно трактовать как их адаптацию к новым условиям функционирования [8, 18].

5.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СТИМУЛИРОВАНИЯ

В таблице 1 перечислены все возможные варианты информированности центра и агента о «новых» функциях (дохода, затрат и распределения) после наступления момента разладки (эти функции будем обозначать, используя верхнюю тильду). При этом будем считать, что перед принятием решения на период t относительно «истории игры» центр знает $Z_{t-1} = (z^1, \dots, z^{t-1})$, а агент – и Z_{t-1} , и $Y_{t-1} = (y^1, \dots, y^{t-1})$. Информированность агента и центра отражены в третьем и четвертом столбцах.

1-2. Изменение функции дохода центра ($H(z) \rightarrow \tilde{H}(z)$) рассмотрено в строках 1 и 2. Если новая функция дохода и момент времени t_p (момент разладки) известны центру (первая строка), то постановка сводится к набору типовых – рассмотренных в первом разделе – статических задач стимулирования, решаемых отдельно для каждого периода. Если новая функция дохода центра $\tilde{H}(z)$ или момент времени t_p неизвестны центру, то такая постановка не имеет смысла, так как центр не имеет достаточной информации для принятия решений (не знает своей функции дохода).

3-9. Изменение функции затрат агента ($c(y) \rightarrow \tilde{c}(y)$) рассмотрено в строках 3-9 таблицы 1.

Если момент изменения и новая функция затрат известны и агенту, и центру (строка 3), то постановка сводится к набору типовых задач, последовательно и независимо решаемых в различные моменты времени.

Если центр знает новую функцию затрат агента, но не знает момента её изменения (строка 4), то рациональным поведением для него является предлагать всякий раз агенту меню контрактов, являющихся оптимальными для набора вариантов функции затрат – известный принцип скрининга (screening), используемый в условиях асимметричной информированности (см. [13, 21]).

Таблица 1. Классификация динамических задач стимулирования

№	Предмет разладки	Агент знает	Центр знает	Задача	
1	$H(z) \rightarrow \tilde{H}(z)$	Не важно	$t_p; \tilde{H}(z)$	Типовая задача	
2			Ничего или t_p	Не имеет смысла	
3	$c(y) \rightarrow \tilde{c}(y)$	$t_p; \tilde{c}(y)$	$t_p; \tilde{c}(y)$	Типовая задача	
4			$\tilde{c}(y)$	Screening	
5			Ничего	Не имеет решения	
6		$\tilde{c}(y)$	$t_p; \tilde{c}(y)$	Типовая задача	
7			$\tilde{c}(y)$	Типовая задача	
8			Ничего	Не имеет решения	
9		Ничего	Не важно	Не имеет решения	
10		$F_\theta(z, y) \rightarrow \tilde{F}_\theta(z, y)$	$t_p; \tilde{F}_\theta(z, y)$	$t_p; \tilde{F}_\theta(z, y)$	Типовая задача
11				$\tilde{F}_\theta(z, y)$	Screening
12	Ничего			Не имеет решения	
13	$\tilde{F}_\theta(z, y)$		$t_p; \tilde{F}_\theta(z, y)$	Типовая задача	
14			$\tilde{F}_\theta(z, y)$	P1	
15			Ничего	Не имеет решения	
16	Ничего	Не важно	Не имеет решения		

Если агент знает и новую функцию затрат, и момент изменения, а центр – ничего из этого (строка 5), то задача не имеет решения по следующим причинам. Для того чтобы получить самому выигрыш больший нуля, центр должен побудить агента действовать хотя бы каким-то образом, а для этого он должен сформировать контракт, который даст агенту выигрыш не меньший нуля. Но в условиях, когда центр не знает функции затрат агента, он не сможет сформировать такой контракт. По аналогичным причинам не имеют решения задачи в строках 8, 12 и 15, когда центр не знает новых функций затрат $\tilde{c}(y)$ или распределения $\tilde{F}_\theta(z, y)$.

Если центр знает и новую функцию затрат агента, и момент её изменения, а агент – только функцию затрат (строка 6), то данный случай сводится к типовой задаче: центр обладая полной информацией будет предлагать до момента разладки контракт, соответствующий $c(y)$, а после нее – $\tilde{c}(y)$; агент может идентифицировать момент разладки через момент смены предложения центра и реагировать оптимально. То есть в этом случае получаем набор типовых задач.

Рассмотрим случай, когда центр и агент знают новую функцию затрат, но не знают момент её изменения (строка 7). Выше мы предполагали, что функция затрат агента непрерывно дифференцируема и строго монотонна, а это означает, что, наблюдая свои фактические затраты, агент может идентифицировать факт разладки (если последняя имела место), причем изменения функции затрат достоверно обнаруживаются агентом непосредственно по окончанию периода, наступившего после разладки, и в котором агент выберет некоторое действие y , для которого $c(y) \neq \tilde{c}(y)$. Однако в этом одном периоде (выбирая свое действие) он гарантированно не знает своей функции затрат. Поэтому в условиях недалёковидности агента центр должен будет всегда предлагать контракт, рассчитанный на наилучший для агента вариант функции затрат, т.е. на функцию $\hat{c}(y) = \max\{c(y); \tilde{c}(y)\}$, причем и до, и после наступления разладки и обнаружения её агентом. Таким образом, в этом случае возникает типовая задача с дополнительными затратами центра,

величина которых может быть оценена обоими игроками (и центром, и агентом).

Если агент не знает новой функции затрат, задача также не имеет решения в данной постановке независимо от информированности центра (строка 9): в этом случае он не может оценить своих возможных потерь в течение периодов, пока он не идентифицирует новую функцию затрат, и поэтому предпочтет отказ от действий.

10-16. Изменение функции распределения результата деятельности агента в зависимости от его действия или функции распределения состояния природы ($F_\theta(z, y) \rightarrow \tilde{F}_\theta(z, y)$) рассмотрено в строках 10–16.

Если центр знает и новую функцию распределения $\tilde{F}_\theta(z, y)$, и момент разладки, а агент знает хотя бы новую функцию $\tilde{F}_\theta(z, y)$, то возникает набор типовых задач (строки 10 и 13).

Если агент знает и новую функцию распределения $\tilde{F}_\theta(z, y)$, и момент разладки, а центр – только новую функцию $\tilde{F}_\theta(z, y)$, то возникает последовательная задача скрининга (строка 11).

Если агент не знает новой функции распределения $\tilde{F}_\theta(z, y)$, задача также не имеет решения в данной постановке независимо от информированности центра (строка 16): в этом случае он не может оценить своих возможных ожидаемых выигрышей и потерь в течение периодов, пока он не идентифицирует новую функцию $\tilde{F}_\theta(z, y)$, и поэтому предпочтет отказ от действий.

Модель **P1** (строка 14) является многопериодной моделью контрактов с изменением функции распределения $F_\theta(z, y)$ в некоторый момент времени. В этой модели и центр, и агент знают новую функцию $\tilde{F}_\theta(z, y)$ и знают, что она может измениться не более одного раза, но априори не знают момента разладки.

Перед первым периодом взаимодействия и агент, и центр не имеют никакой информации о разладке кроме априорной, поэтому они обязаны действовать в предположении, что в первом периоде результат будет соответствовать одному из вариантов

функции $F_\theta(z, y)$ или $\tilde{F}_\theta(z, y)$. При этом в условиях недалёковидности агента центр должен предлагать контракт, рассчитанный на наихудший для агента вариант. Потому что если центр этого не сделает, то агент откажется от контракта, а следовательно ни агент, ни центр не получат новой информации о состоянии природы, и дальнейшее их взаимодействие потеряет смысл.

Если центр сформировал такой контракт, а агент рационален, то центр может прогнозировать действие агента y . Результат z наблюдаем центром, поэтому центр апостериори будет обладать той же информацией, что и агент. Этот факт можно обобщить в виде принципа «прозрачности стимулирующего контракта», сформулировав его в следующей форме: если условия задачи позволяют центру сформировать стимулирующий контракт, агент рационален и не осуществляет манипулирования, то центр может достоверно прогнозировать действия агента и обладать, таким образом, той же полной информацией, что и агент.

Следовательно, после окончания первого периода центр сможет построить контракт для второго периода на основании не только априорных знаний о функциях $F_\theta(z, y)$ и $\tilde{F}_\theta(z, y)$, но также и «наблюдений» Z_1 и Y_1 . Аналогично центр будет поступать и в дальнейшем, формируя контракт $\sigma_t(z)$ для периода t с использованием знаний о функциях $F_\theta(z, y)$ и $\tilde{F}_\theta(z, y)$ и наблюдениях Z_{t-1} и Y_{t-1} .

Альтернативой является использование недалёковидным центром контракта, оптимального в условиях распределения $F_\theta(z, y)$, до тех пор, пока центр не примет решение о том, что разладка произошла (именно такая ситуация рассматривается ниже при анализе модели P1). Отметим, что в силу одинаковой информированности, центр и агент примут решение о наличии разладки, условно говоря, одновременно.

В зависимости от наличия дополнительной априорной информации у центра и агента возможны несколько постановок задачи формирования таких контрактов.

Если обоим участникам доступна априорная информация о распределении вероятности момента разладки, то может быть сформирован последовательный оптимальный байесовский алгоритм формирования контракта $\sigma_t(z)$.

Если оба участника не имеют дополнительной информации о возможности наступления разладки в различные моменты времени и знают, что их взаимодействие может прерваться после любого количества периодов, то оптимальным будет минимаксный подход.

5.2. ЗАДАЧА О РАЗЛАДКЕ (ЗАДАЧА P1 – CM.)

Пусть в рамках многопериодной модели (с несвязанными периодами [0]) простого агента центр использует оптимальную систему стимулирования (38) с оптимальным планом (40), причем первоначально и центр, и агент имели одинаковую информацию о функции распределения $G(\cdot)$. Предположим, что в некоторый момент времени $t_p > 0$ происходит *разладка* – распределение $G(\cdot)$ меняется на $\tilde{G}(\cdot)$. Предполагается, что новое распределение $\tilde{G}(\cdot)$ известно априори и центру, и агенту, но момент разладки неизвестен никому из них. Изменение в результате разладки значения ожидаемой полезности агента в одном периоде равно

$$(62) \Delta f(G(\cdot), \tilde{G}(\cdot)) = c(x^*) \frac{G(x^*) - \tilde{G}(x^*)}{1 - G(x^*)}.$$

Выбирая в каждый момент времени действие x^* , агент и центр наблюдают последовательность результатов Z_t (агент дополнительно наблюдает последовательность $Y_t = (x^*, \dots, x^*)$) и должны принять решение, произошла разладка или нет. Получается, что последовательная задача распадается (из-за независимости периодов) на «одношаговые задачи с дополнительной информацией»:

На период t агент и центр перезаключают контракт, имея информацию о двух возможных распределениях $G(\cdot)$ и $\tilde{G}(\cdot)$ и дополнительные наблюдения Z_{t-1} .

Определим величину: $L_t = \ln(\tilde{g}(z_t, y_t)) - \ln(g(z_t, y_t))$, которая позволяет сформировать оптимальное последовательное правило максимального правдоподобия обнаружения разладки: в каждый момент времени $t > 0$ вычисляется значение l_t ($l_0 = 0$):

$$(63) \quad l_t = \begin{cases} 0, & \text{если } l_{t-1} + L_t \leq 0, \\ l_{t-1} + L_t, & \text{если } l_{t-1} + L_t > 0. \end{cases}$$

Если в какой-то момент $l_t > \delta$, то принимается решение, что разладка имела место, где порог δ задает значения характеристик ошибок первого и второго рода.

Известно (например, [19]), что статистика максимального правдоподобия позволяет сформировать решающее правило, наиболее эффективное (по сравнению с другими статистиками) по следующему критерию эффективности: одна из ошибок фиксируется на уровне не ниже заданного, а вторая – оптимизируется. Порог δ выбирается исходя из значений характеристик ошибок первого и второго рода.

Пример 7. Пусть в условиях примеров 1 и 4 $G(z) = z/(\beta_1 + z)$, $\tilde{G}(z) = z/(\beta_2 + z)$. Тогда $Ez(y) = \beta_i \ln(1 + y/\beta_i)$. Из условия (41) находим:

$$x^* = \frac{\beta}{2} \left(\sqrt{\gamma r - 1 - \frac{4\gamma r}{(\gamma r - 1)\beta}} - 1 \right).$$

Выражение (38) примет вид:

$$(64) \quad \sigma_C(x^*, z) = \begin{cases} \frac{(x^*)^2(x^* + \beta)}{2r\beta}, & z \geq x^*, \\ 0, & z < x^*. \end{cases}$$

Тогда согласно условиям примера и принципу прозрачности стимулирующего контракта агент будет всегда выбирать

действие $y = x^* = \frac{\beta_1}{2} \left(\sqrt{\gamma r - 1 - \frac{4\gamma r}{(\gamma r - 1)\beta_1}} - 1 \right)$. До момента разладки результат действий агента будет иметь распределение

$$g(z, x^*) = \frac{\beta_1}{\beta_1 + x^*} \delta(z - x^*) + \frac{\beta_1}{(\beta_1 + z)^2} \text{ при } z \in [0, x^*],$$

а после разладки – распределение

$$\tilde{g}(z, x^*) = \frac{\beta_2}{\beta_2 + x^*} \delta(z - x^*) + \frac{\beta_2}{(\beta_2 + z)^2} \text{ при } z \in [0, x^*],$$

где $\delta(\cdot)$ – δ -функция. Тогда

$$L_t = \begin{cases} \ln\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) + 2 \ln\left(\frac{\beta_1 + z_t}{\beta_2 + z}\right) & \text{при } z_t \in [0, x^*), \\ \ln\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) + 2 \ln\left(\frac{\beta_1 + x^*}{\beta_2 + x^*}\right) & \text{при } z_t = x^*. \end{cases}$$

Пусть $T = 500$, $T_p = 200$, $r = 1$, $\gamma = 10$, $\beta_1 = 100$, $\beta_2 = 60$. Плановая, ожидаемая (в смысле математического ожидания) и фактическая траектории (кумулятивная сумма результатов деятельности агента) приведены на рис. 3 (пунктиром изображены кривые, соответствующие необнаружению разладки).

Графики динамики кумулятивных затрат агента и затрат центра на стимулирование приведены на рис. 4 (пунктиром изображены кривые, соответствующие необнаружению разладки).

Плановая (черный), ожидаемая (синий) и фактическая (красный) траектории

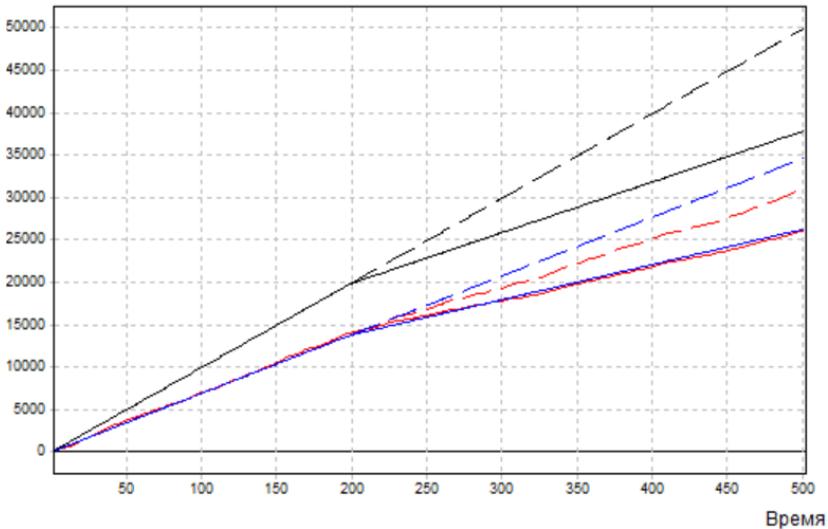


Рис. 3. Динамика кумулятивных результатов деятельности агента в примере 7

Фактические затраты агента (черный), затраты центра на стимулирование (красный)

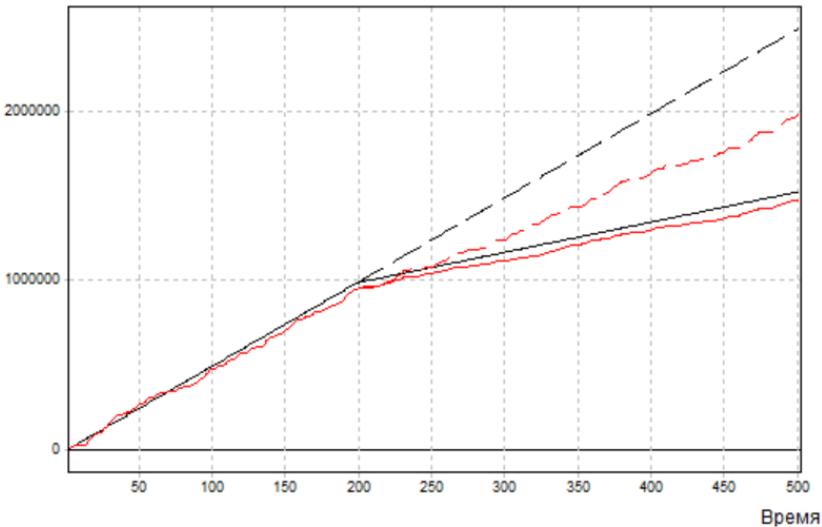


Рис. 4. Динамика кумулятивных затрат агента и центра в примере 7

В рамках метода кумулятивных сумм величины

$$(65) S_1^t = \sum_{\tau=1}^t z^\tau - t Ez(x^*)$$

или

$$(66) S_2^t = \sum_{\tau=1}^t \sigma_c(x^*, z^\tau) - tc(x^*, r)$$

могут служить показателями разладки (их графики для рассматриваемого примера приведены на рис. 5).

Воспользуемся выражением (63). Динамика его значений приведена на рис. 6. Средние значения статистики L_t до и после разладки равны $-0,04$ и $+0,04$, а среднеквадратичные отклонения $-0,29$ и $0,27$ соответственно. Причем до разладки статистика L_t

будет принимать значение $\ln\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) + \ln\left(\frac{\beta_1 + x^*}{\beta_2 + x^*}\right) = -0,29$ с веро-

ятностью $\frac{\beta_1}{\beta_2 + x^*} = 0,5$, а после разладки – с вероятностью

$$\frac{\beta_2}{\beta_2 + x^*} = 0,38.$$

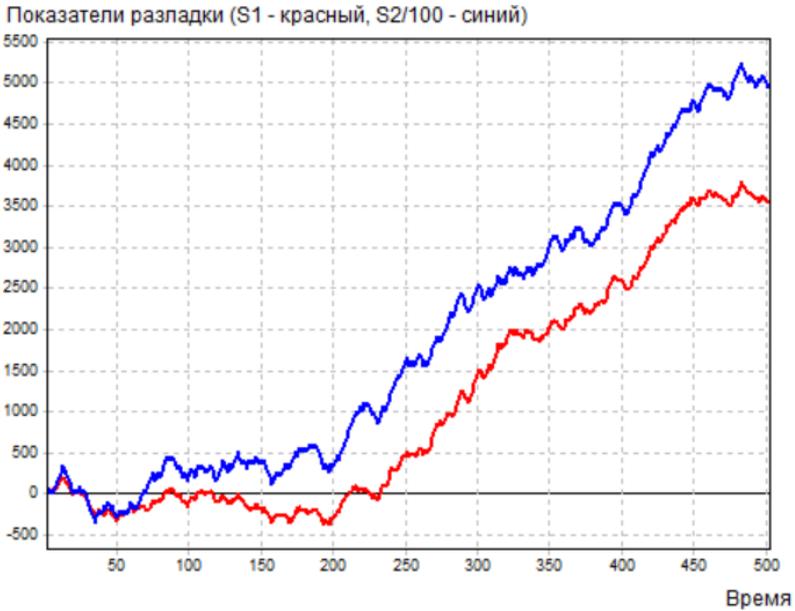


Рис. 5. Динамика показателей разладки S_1 и S_2 в примере 7

В рассматриваемом примере при $\delta = 2$ разладка обнаруживается спустя 10 периодов после того как она происходит. •

Показатель разладки

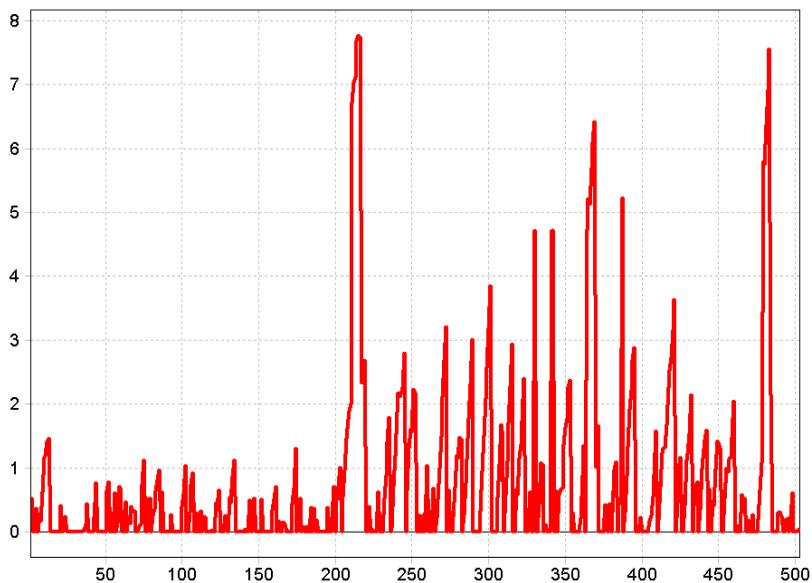


Рис. 6. Динамика показателей разладки в примере 7

6. Заключение

В настоящей работе рассмотрены контракты между недальновидными центром и агентами, функционирующими в условиях внешней вероятностной неопределенности (*измеримой неопределенности* в терминах F. Knight [25]), характеристики которой могут меняться со временем (отражение *истинной неопределенности* в его же терминах). Именно реакция на истинную неопределенность является одной из основных функций управляющих органов, обеспечивающих адаптивность поведения подчиненных им структурных элементов деятельности [1, 20].

Перспективными направлениями будущих исследований представляются рассмотрение других методов описания влияния внешней неопределенности на результаты деятельности агентов, изучение условий перезаклучения контрактов дальновидными центрами.

видными центром и агентами и анализ задач «разладки» в многоэлементных динамических организационных системах.

Литература

1. БЕЛОВ М.В., НОВИКОВ Д.А. *Структурные модели комплексной деятельности* // Управление развитием крупномасштабных систем. – М.: Физматлит, 2017.
2. БУРКОВ В.Н. и др. *Механизмы управления* / Под ред. Д.А. Новикова. – М.: Ленанд, 2011. – 192 с.
3. БУРКОВ В.Н., ГОРГИДЗЕ И.А., ИВАНОВСКИЙ А.Г. *Простой активный элемент. Реализация плана и переоценка будущего состояния. Синтез функций дохода* // Активные системы. Сборник статей № 2 (Проблемы и методы управления в активных системах). – М.: ИАТ, 1974. – С. 52–62.
4. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А. *Как управлять проектами*. – М.: Синтег, 1997. – 188 с.
5. БУРКОВ В.Н. *Основы математической теории активных систем*. – М.: Наука, 1977. – 255 с.
6. ГУБКО М.В. *Задача теории контрактов для модели «простого» агента* // Управление большими системами. – 2000. – Вып. 2. – С. 22–27.
7. КОЛОСОВА Е.В., НОВИКОВ Д.А., ЦВЕТКОВ А.В. *Методика освоения объема в оперативном управлении проектами*. – М.: Апостроф, 2000. – 156 с.
8. НОВИКОВ Д.А. *Математические модели формирования и функционирования команд*. – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2008. – 184 с.
9. НОВИКОВ Д.А. *Механизмы гибкого планирования в активных системах с неопределенностью* // Автоматика и телемеханика. – 1997. – №5. – С. 118–125.

10. НОВИКОВ Д.А. *Механизмы стимулирования в динамических и многоэлементных социально-экономических системах* // Автоматика и телемеханика. – 1997. – №6. – С. 3–26.
11. НОВИКОВ Д.А., СМИРНОВ И.М., ШОХИНА Т.Е. *Механизмы управления динамическими активными системами.* – М.: ИПУ РАН, 2002. – 124 с.
12. НОВИКОВ Д.А. *Стимулирование в социально-экономических системах.* – М.: ИПУ РАН, 1998. – 216 с.
13. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами. 3-е изд.* – М.: Физматлит, 2012. – 604 с.
14. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Рефлексия и управление: математические модели.* – М.: Физматлит, 2013. – 412 с.
15. РОЦИН А.А. *Расчет Динамических Систем (РДС). Руководство для программистов. Приложение: описание функций и структур. Приложение к руководству для программистов.* – М.: ИПУ РАН, 2012. – 719 с.
16. *Руководство к своду знаний по управлению проектами (РМВОК).* – М.: Олимп-Бизнес, 2014. – 388 с.
17. ТРИКОМИ Ф. *Интегральные уравнения.* – М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. – 299 с.
18. ЦЫГАНОВ В.В. *Адаптивные механизмы в отраслевом управлении.* – М.: Наука, 1991. – 166 с.
19. ШИРЯЕВ А.Н. *Статистический последовательный анализ. Оптимальные правила остановки.* – М.: Физматлит, 1976. – 272 с.
20. BELOV M., NOVIKOV D. *Reflexive Models of Complex Activity* // Proc. of WOSC World Congress. – Rome, 2017.
21. BOLTON P., DEWATRIPONT M. *Contract Theory.* – Cambridge: MIT Press, 2005. – 740 p.

22. CVITANIC J., ZHANG J. *Contract Theory in Continuous-Time Models*. – Heidelberg: Springer, 2012. – 256 p.
23. HORNE M. *Essays on Dynamic Contract Theory*. – Ann Arbor: The University of North Carolina, 2016. – 96 p.
24. LJUNGQVIST L., SARGENT T. *Recursive Macroeconomic Theory. 2nd ed.* – Cambridge: MIT Press, 2004. – 1082 p.
25. KNIGHT F. *Risk, Uncertainty and Profit* // Hart, Schaffner, and Marx Prize Essays. – No. 31. – Boston and New York: Houghton Mifflin, 1921. – 381 p.
26. MENARD C. *Institutions, Contracts and Organizations: Perspectives from New Institutional Economics*. – Northampton: Edward Elgar Pub, 2000. – 458 p.
27. RENNER P., SCHMEDDERS K. *Dynamic Principal-Agent Models* // Swiss Finance Institute Research Paper No. 16–26. – Zurich: University of Zurich, 2016. – 35 p.
28. SALANIE B. *The Economics of Contracts. 2nd Edition*. – Massachusetts: MIT Press, 2005. – 224 p.
29. SANNIKOV Y. *A Continuous-Time Version of the Principal-Agent Problem* // Review of Economic Studies. – 2008. – Vol. 75. – No. 3. – P. 957–984.
30. STOLE L. *Lectures on the Theory of Contracts and Organizations*. – Chicago: Univ. of Chicago. 1997. – 104 p.

MODELS OF ADAPTATION IN DYNAMIC CONTRACTS UNDER STOCHASTIC UNCERTAINTY

Mikhail Belov, The IBS Company, Moscow, Cand.Sc.
(mbelov59@mail.ru).

Dmitry Novikov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow,
Doctor of Science, professor (Moscow, Profsoyuznaya st., 65,
(495) 334-75-69).

Abstract: This work synthesizes the ideas of organization systems control theory and contract theory in the case of stochastic uncertainty repeated in time. Results on optimal reward systems for different problems are systematized. New sufficient conditions are given for the optimality of lump-sum and compensative contracts under stochastic uncertainty. Dynamic models of principal's and agents' adaptation to the changes in the statistical characteristics of the environment are considered. A classification of dynamic (in a sense of decision taking process) models of reward is given. Contracts between shortsighted center and agents functioning under stochastic uncertainty are considered. Reaction to such uncertainty is, indeed, one of the most crucial functions of control organs, providing adaptivity of their subordinate structural elements. Perspective future venues of research are different methods of describing uncertainty influence on agents, studying conditions of contract modification between farsighted center and agents and "dissonance" analysis on complex multielement dynamic organization systems.

Keywords: contract theory, incentive problem, stochastic uncertainty, adaptive behavior.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Г.А. Угольником.*

*Поступила в редакцию 24.11.2016.
Опубликована 31.07.2017.*

УДК 336.6
ББК 65.05

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КОНЦЕПЦИИ «ЗАТРАТЫ-ВЫПУСК» ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

Романов Б. А.¹

*(Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет), Москва)*

Анализируются возможности использования модели В. Леонтьева «затраты-выпуск» для описания взаимодействия группы предприятий. Анализ показывает, что непосредственное применение этой модели невозможно ввиду практической невозможности реализации в модели В. Леонтьева многопродуктового подхода. Предлагается обобщение этой модели для реализации многопродуктового подхода. Это обобщение реализовано в виде представления реального предприятия как совокупности условных предприятий, каждое из которых выпускает один продукт. Совокупность условных предприятий, выпускающее количество продуктов, равно количеству условных предприятий, моделирует реальное предприятие, выпускающее такое же количество продуктов.

Ключевые слова: производственные затраты, выпуск продукции, модель «затраты-выпуск», коэффициенты прямых затрат.

¹ Борис Александрович Романов, доцент, кандидат технических наук (boris094@mail.ru).

1. Введение

Модель В. Леонтьева «затраты-выпуск» [5] используется достаточно широко за рубежом при анализе экономики государства, например при определении взаимного влияния отраслей и секторов [14]. Основой этой модели являются таблицы «затраты-выпуск» (межотраслевой баланс). В СССР межотраслевые балансы разрабатывались, начиная с 1959 года, регулярно: за 1966, 1972, 1977, 1982, 1987 годы и с достаточно подробной продуктовой детализацией.

В постсоветское время эти исследования были практически свернуты. Последние таблицы относятся к 2003 году и опубликованы в 2013 г. Они включают: таблицу ресурсов товаров и услуг по 24 их видам, таблицы использования товаров и услуг; симметричную таблицу «затраты-выпуск», а также вспомогательные таблицы (матрицы) транспортных и торговых наценок, налогов и субсидий на продукты [7].

Насколько далека Россия от мирового уровня разработок межотраслевого баланса показывают следующие примеры. Годовые таблицы «затраты-выпуск» для США по 65 видам продуктов за 1998–2009 годы находятся в открытом доступе на сайте Бюро экономического анализа США. Годовые таблицы разрабатываются на основе базовых таблиц, которые составляются в более широкой номенклатуре продуктов, последние базовые таблицы разработаны за 2002 год по 495 продуктам. Разработка таблиц «затраты-выпуск» является обязательным элементом статистической базы для стран – членов Евросоюза [7].

Правительство России 14 февраля 2009 года выпустило распоряжение N 201-р, которое предписывало Росстату «в целях формирования официальной статистической информации о межотраслевых связях и структурных пропорциях экономики Российской Федерации, а также повышения качества статистических и прогнозных расчетов макроэкономических показателей» разработать базовые таблицы «затраты-выпуск» за 2011 год и в 2015 году представить их в Правительство Россий-

ской Федерации и осуществлять разработку базовых таблиц «затраты-выпуск» на регулярной основе 1 раз в 5 лет.

Однако это событие не вызвало заметной реакции в научной среде, хотя оно заслуживает внимания и ученых-экономистов, и управленцев, занимающихся проблемами развития экономики и ее модернизации, и бизнесменов [7]. Еще менее известно использование концепции «затраты-выпуск» В. Леонтьева для моделирования взаимосвязи группы предприятий.

В СССР такие модели не были развиты в силу планового характера советской экономики, требующей директивного выполнения предприятиями указаний Госплана СССР. В постсоветское время эти модели практически не развивались по причине коренных рыночных экономических преобразований в значительной степени разрушивших индустриальную базу.

В настоящее время, когда рыночные отношения в России в основном сформированы, наступает время возобновления использования моделей «затраты-выпуск» В. Леонтьева. Этому свидетельством является приведенное выше распоряжение Правительства России. В последнее время появились работы по использованию модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева. Так, в выполненной в 1998-2013 гг. работе [10] используются таблицы «затраты-выпуск» России за 2003 г., опубликованные в 2013 г.

В отношении использования концепции «затраты-выпуск» для моделирования деятельности предприятий в Российской научной литературе есть лишь упоминание о возможности такого использования. В [13] приводится описание простейшей динамической однопродуктовой модели В. Леонтьева для одного предприятия, в которой рассматриваются взаимосвязанные показатели, такие как валовой продукт, конечный продукт, трудовые ресурсы, производственные фонды, капитальные вложения, потребление и т.д. Однако модели, отражающие взаимную связь группы предприятий на основе модели В. Леонтьева, ни теоретически, ни практически в России не развиты. Автор данной статьи не встречал подобных работ также и в зарубежной литературе.

В данной статье рассматриваются некоторые вопросы применения концепции и понятий модели В. Леонтьева – межотрас-

левого баланса (МОБ) для описания взаимодействия группы предприятий, совместно производящих продукцию.

Прежде всего следует отметить, что структура и форма взаимодействия группы предприятий отличается от взаимодействия и структуры отраслей государства в модели МОБ. Для того чтобы понять различия, рассмотрим сначала концепцию, структуру и основные понятия модели МОБ.

2. Концепция, понятия и структура модели МОБ

Изложение концепции, понятий и структуры МОБ выполним на основе книги [12]. Метод межотраслевых связей исследует взаимоотношения, возникающие в процессе производства, поэтому главная задача межотраслевого баланса – определить потоки товаров и услуг, движущихся от одного сектора (отрасли) к другой. Основной принцип МОБ состоит в разделении потребляемой продукции на промежуточную и конечную.

Разделение продукции на промежуточную и конечную ведет к появлению четырех видов операций, которые показываются в четырех квадрантах таблицы МОБ. Обычное содержание квадрантов таблицы МОБ следующее. В квадранте I содержатся данные о произведенных товарах и оказанных услугах, включая инвестиции, частное и государственное потребление, а также экспорт и импорт (в зависимости от цели исследования этот состав может меняться).

Квадрант II содержит основную часть межотраслевых счетов и показывает количество продукта i , потребляемого в отрасли j . Квадрант III показывает добавленную стоимость, возникающую в отраслях (секторах). Добавленная стоимость может быть разложена на составляющие: зарплату, страхование, налоги, прибыль и др. В квадранте IV представлены суммы по строкам квадранта I. Первое уравнение – по строкам таблицы МОБ – можно записать в виде:

$$Z_i = M_i + X_i = \sum_j X_{ij} + Y_i = W_i + Y_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где Z_i – общее предложение продукта i ; X_i – общее производство продукта i ; M_i – импорт продукта i ; X_{ij} – количество продукта i , потребленного в отрасли j (спрос); Y_i – конечный продукт i ; $W_i = \sum_j X_{ij}$ – общее промежуточное потребление продукта i .

Конечный продукт Y_i включает инвестиции I_i , частное потребление C_i , государственное потребление G_i , экспорт E_i и импорт M_i :

$$Y_i = I_i + C_i + G_i + E_i - M_i.$$

Второе уравнение – по столбцам таблицы МОБ – записывается в виде:

$$X_j = \sum_i X_{ij} + V_j = U_j + V_j,$$

где $U_j = \sum_i X_{ij}$ – общее потребление сектором j продукции, приобретаемой в других отраслях; $V_j = X_j - \sum_i X_{ij}$ – добавленная стоимость в отрасли (секторе) j .

В модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева устанавливаются следующие предположения:

- 1) данный продукт производится только в одном секторе (отрасли);
- 2) в каждой отрасли производится только один продукт;
- 3) величина каждого вида затрат в любой отрасли полностью определяется уровнем выпуска в этой отрасли.

Эти предположения позволяют написать уравнение для спроса X_{ij} , например в виде линейной неоднородной функции:

$$X_{ij} = \bar{X}_{ij} + \alpha_{ij} X_j.$$

Параметр α_{ij} называется коэффициентом прямых затрат. Постоянная \bar{X}_{ij} включает все постоянные элементы затрат, которые не зависят от уровня производства. Если эти элементы отсутствуют, то функция затрат принимает вид однородной линейной функции:

$$X_{ij} = \alpha_{ij} X_j.$$

Теперь рассмотрим, какие элементы целесообразно включить в модель МОБ, описывающую взаимодействие группы предприятий, а какие можно исключить. Если под отраслью понимать отдельное предприятие и принять указанные выше предположения В. Леонтьева, то уравнения по строкам – данные в квадрантах I и II – можно использовать для описания взаимодействия группы предприятий с тем различием, которое относится к структуре конечного продукта для предприятий.

При исключении из модели МОБ для описания группы взаимодействующих предприятий квадрантов III и IV никаких существенных потерь для адекватности такой модели не происходит. Это не означает, что следует совсем отказаться от расчета добавленной стоимости и суммарных значений переменных квадранта I. Однако это можно сделать в отдельных блоках вычислений, не привлекая основные уравнения. При этом основные уравнения не перегружаются дополнительными переменными и имеют достаточно простой вид.

Основная проблема использования МОБ для описания взаимодействия предприятий заключается в том, чтобы можно было моделировать выпуск каждым предприятием нескольких продуктов. В период интенсивного развития метода межотраслевого баланса (50-е – 70-е годы XX века) рассматривались оптимизационные задачи МОБ, в которых требовалось выбрать оптимальную структуру производства продуктов между различными производственными способами [1]. Для задач такого типа доказаны теоремы, получившие название теорем о замещении. Одна из теорем формулируется так: производятся все продукты и каждый продукт производится только одним способом. Во второй теореме утверждается, что базис оптимального плана, и, следовательно, выбор «лучших» способов производства остается постоянным при любых изменениях положительного вектора конечного спроса.

Проблема моделирования выпуска нескольких продуктов для группы взаимодействующих предприятий на основе использования модели «затраты-выпуск» в настоящее время еще не решена. Автор данной статьи предлагает свой подход для ее решения.

Ядром модели «затраты-выпуск» является система уравнений, связывающих производство и распределение продукции в отраслях. Баланс затрат и выпуска продукции выполняется в любой замкнутой экономической системе. Группу взаимодействующих предприятий можно рассматривать как замкнутую экономическую систему, поскольку никакие дополнительные субъекты для ее функционирования не требуются.

Для группы предприятий, выпускающих продукцию с использованием продукции, поставляемой другими предприятиями, также должен выполняться баланс производства (выпуска) и затрат продукции. Однако модели «затраты-выпуск» в основном развиты для однопродуктового представления, когда одна отрасль выпускает один продукт. В то же время в межотраслевых моделях имеются некоторые подходы, которые учитывают производство отраслью нескольких продуктов.

При разработке системы балансовых уравнений затрат и производства продукции группой взаимодействующих предприятий принципиально требуется использовать многопродуктовый подход, т.е. описать производство каждым предприятием нескольких продуктов. При построении микроэкономической модели группы взаимодействующих предприятий целесообразно использовать опыт разработки многопродуктовых модификаций межотраслевых моделей «затраты-выпуск». Рассмотрим эти подходы в целях анализа возможности использования для описания взаимодействия группы промышленных предприятий.

3. Анализ модели «затраты-выпуск»

В классической модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева понятия продукт, технологический вариант производства и организационная форма деятельности тождественны, т.е. принято однопродуктовое представление. В связи с этим структура производственного процесса отражается в форме квадратной матрицы $(I - A)$ и каждой организационной форме деятельности соответствует один продукт, производимый одним технологическим способом (I – единичная диагональная матрица, A – матрица

коэффициентов прямых затрат продуктов размерности равной количеству отраслей модели).

При использовании модели «затраты-выпуск» для описания взаимодействующей группы предприятий необходимо отказаться от тождественности этих понятий и трансформировать модель из однопродуктовой в многопродуктовую. Трансформацию классической модели «затраты-выпуск» можно реализовать в рамках балансовой модели «затраты-выпуск» или в рамках оптимизационной модели «затраты-выпуск» [8]. В последнем случае в результате оптимизации определяются лучшие продукты в соответствии с принятыми критериями и технологические варианты их производства. При описании взаимодействия группы предприятий, совместно производящих продукты, не требуется выбирать лучшие виды продуктов или технологические способов их производства, тем более исключать их. Поэтому остается рассмотреть трансформацию однопродуктовой модели «затраты-выпуск» в многопродуктовую в рамках балансовой модели.

4. Многопродуктовые модификации модели «затраты-выпуск»

Система балансовых уравнений модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева записывается в виде

$$x = Ax + y,$$

где $x = (x_1, \dots, x_N)$ – вектор валового выпуска продукции отраслей; $y = (y_1, \dots, y_N)$ – вектор выпуска конечной продукции отраслей; N – число отраслей.

Многопродуктовые модификации модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева можно представить тремя способами. В первом способе несколько продуктов, выпускаемых предприятием наряду с основным продуктом, рассматриваются как сопряженные продукты [8]. Затраты на выпуск сопряженных продуктов обычно выделяются из затрат на основной продукт и переносятся в позиции соответствующих сопряженных продуктов. В этом случае соответствующие коэффициенты прямых затрат матрицы $(I - A)$ будут положительными, что интерпретируется как отрицательные затраты.

Решение балансовой системы уравнений «затраты-выпуск» записывается в виде

$$x = (I - A)^{-1}y,$$

где $B = (I - A)^{-1}$ – обратная матрица к матрице $(I - A)$.

В рассматриваемом способе модификации модели «затраты-выпуск» матрица B будет содержать отрицательные элементы, соответствующие положительным коэффициентам матрицы $(I - A)$. В этом случае в решении систем уравнений модели «затраты-выпуск» могут быть отрицательные валовые выпуски, не отражающие реальности. Поэтому такой подход трансформации однопродуктовой модели «затраты-выпуск» в многопродуктовую с целью описания производства продукции группой предприятий неприемлем.

Во втором способе модификации однопродуктовой модели в многопродуктовую для каждого предприятия вводится своя матрица коэффициентов прямых затрат. Подобная модель была разработана в Научно-исследовательском экономическом институте Госплана СССР [9]. Эта модель имеет вид:

$$x - \sum_{l=1}^m A^l W^l x = y,$$

где A^l – матрица коэффициентов прямых затрат α_{ij}^l на предприятии l ; W^l – диагональная матрица удельных весов выпуска продуктов w_j^l предприятием l ; w_j^l – удельный вес выпуска продукта j предприятием l в общем объеме выпуска продукта j всеми предприятиями (задается экзогенно).

При использовании этой модели для описания совместного производства продукции группой предприятий потребуется экзогенно задавать матрицу W^l , что также неприемлемо, поскольку нет оснований для установления жесткой связи выпуска продуктов на разных предприятиях при описании их совместного производства.

Третий способ модификации однопродуктовой модели в многопродуктовую основывается на введении прямоугольной матрицы затрат [8]. Эта модель записывается в виде двух систем уравнений. Первая из них описывает распределение продукции:

$$\bar{A}q + y = x,$$

где \bar{A} – матрица ($n \times m$) коэффициентов прямых затрат $\bar{\alpha}_{il}$ продукта $i = (1, \dots, n)$ на производство единицы валовой продукции предприятия l ($l = 1, \dots, m$); q – вектор валового выпуска продукции предприятий ($m \times 1$).

Вторая система характеризует структуру валовой продукции предприятий при выпуске ими нескольких видов продуктов:

$$\bar{W}x = q,$$

где \bar{W} – диагональная матрица ($m \times n$) коэффициентов w_j^l , характеризующих удельный вес производства продукта i на предприятии l в общем объеме производства продукта i .

Необходимость задания экзогенной матрицы \bar{W} , как и в предыдущем способе, приводит к неприемлемости и этой модели для описания совместного производства продукции группой предприятий.

5. Многопродуктовая модификация модели «затраты-выпуск» общего вида

Рассмотрим наиболее общую по структуре матрицы затрат многопродуктовую модификацию модели «затраты-выпуск» [2], которую запишем в виде:

$$x_i - \sum_{l=1}^m \sum_{j \in Q(l)} a_{ij}^l w_j^l x_j = y_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$x_j^l = w_j^l x_j; \quad \sum_{i=1}^m w_j^l = 1,$$

где $Q^{(l)}$ – множество номеров продуктов, производимым предприятием l .

Подставив величину $x_j = \frac{x_j^l}{w_j^l}$ в балансовое уравнение и умножив на w_j^l левую часть, а на w_i^l – правую часть и обозначая $w_i^l y_i$ как y_i^l , получаем:

$$x_j^l - \sum_{l=1}^m \sum_{j \in Q^{(l)}} a_{ij}^l x_j^l = y_i^l.$$

Полученное посредством преобразований балансовое уравнение формально идентично однопродуктовой модели «затраты-выпуск». Идентичность по существу будет только в том случае, если удельный вес выпускаемых на предприятии конечных продуктов будет равен удельному весу промежуточных продуктов, затрачиваемых при производстве конечных продуктов на предприятии. В реальности данное условие для описания совместного производства продукции группой предприятий практически никогда не будет выполняться.

Поэтому такая модель не может быть применима для описания совместного производства продукции несколькими предприятиями, каждое из которых выпускает несколько продуктов. Обобщением модели В. Леонтьева можно считать только ту модель, которая при агрегировании приводится к модели В. Леонтьева. Рассматриваемая модель не может быть агрегирована в классическую однопродуктовую модель «затраты-выпуск» и поэтому не является ее обобщением.

6. Модель «затраты-выпуск» для группы взаимодействующих предприятий

Поскольку существующие многопродуктовые модификации модели «затраты-выпуск» неприемлемы, то попытаемся построить модель, пригодную для наших целей. Суть построения такой модели заключается в дезагрегации модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева от уровня отраслей до уровня предприятий. Проблема дезагрегации модели состоит в разработке коэффициентов прямых материальных затрат на основе переписей производства продукции на предприятиях. В некоторых странах мира, в частности в Японии, еще в 70-е годы XX века проводилась работа по составлению таблиц коэффициентов прямых затрат почти до уровня предприятия. Поэтому мировой опыт разработки коэффициентов прямых затрат почти на уровне предприятий существует.

Однако для моделирования совместного производства и распределения продукции группой взаимодействующих предприятий даже до такого уровня дезагрегирования недостаточно. Для адекватного описания взаимодействия предприятий надо дезагрегировать производство до уровня производственной линии предприятия, выпускающей один продукт. В этом случае реальное предприятие, выпускающее несколько продуктов, можно представить как совокупность условных предприятий – производственных линий, каждая из которых выпускает один продукт. Вообще говоря, этот продукт может представлять собой агрегат продуктов, в случае, если дальнейшее дезагрегирование, определяемое целями моделирования, не целесообразно.

Проблему дезагрегирования модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева до той степени, в которой ее можно использовать для описания совместного производства продукции группой предприятий, можно решить посредством введения понятия комбинации предприятие-продукт. Тогда одинаковым по названию продуктам, выпускаемым на разных предприятиях можно приписать разные индексы. Используя понятие комбинации предприятие-продукт или условного предприятия, и на основе данных о потреблении и выпуске этих продуктов на предприятиях, можно построить матрицу коэффициентов прямых материальных затрат комбинаций предприятие-продукт, совместно производящих продукцию.

Теоретически проблема разработки матрицы коэффициентов прямых затрат для экономики государства в виде комбинации предприятие-продукт не представляет сложности, но требует большого объема работы. Более важным и принципиально трудным является разработка такого состава номенклатуры комбинаций предприятие-продукт, которая, с одной стороны, будет достаточна для микроописания производства продукции на предприятиях, а с другой стороны, не будет настолько подробной, чтобы приводить к ее постоянному изменению ввиду изменения структуры выпуска продукции предприятием.

Конкретный алгоритм разработки матрицы коэффициентов прямых затрат в предлагаемой модели состоит из следующих

шагов. Пусть каждое предприятие может выпускать несколько видов продукции из заданного множества M_R . Искомую матрицу коэффициентов затрат по предприятиям-продуктам можно построить, связав способ производства и выпускаемые продукты на предприятиях. В этом случае получаем множество комбинаций предприятие-продукт, которое служит основой для разработки матрицы коэффициентов прямых затрат.

При этом одинаковые продукты, выпускаемые на разных предприятиях, будут учитываться как различные. Каждому реальному предприятию может соответствовать несколько таких комбинаций по числу выпускаемых продуктов. Под множеством M_N будем понимать общее количество этих комбинаций. В этом случае в качестве элементов матрицы коэффициентов прямых затрат $\|\alpha_{ij}\|$ будем понимать не затраты продукта i для производства продукта j , как в классической межотраслевой модели «затраты-выпуск», а затраты комбинации предприятие-продукт i для производства комбинации предприятие-продукт j . Эта матрица квадратная, что весьма удобно для выполнения вычислительных процедур.

Такую матрицу можно получить следующим способом. Составим матрицу $l \times r$ элементов, где l – индекс предприятия, а r – индекс продукта $l, l \in M_P, r \in M_R$. Если предприятие l производит продукт r , то значением элемента этой матрицы будет 1, в противном случае 0. Далее выберем элементы этой матрицы со значением 1 слева направо и сверху вниз. Последовательность этих элементов будет представлять собой все имеющиеся комбинации предприятие-продукт. Затем построим квадратную матрицу размерности, равной количеству этих комбинаций, значениями которой будут коэффициенты прямых затрат комбинации предприятие-продукт по выпуску других комбинаций предприятие-продукт. Обозначим эту матрицу $\|a_{l_r m_r}\|$, индексы которой l_r и m_r представляют собой комбинацию предприятие-продукт. Обозначив $l_r = I$, а $m_r = j$, эту матрицу можно переписать в виде $\|\alpha_{ij}\|$, где индексы i и j обозначают

комбинацию предприятие-продукт ($i, j = 1, \dots, q$), где q – количество комбинаций предприятие-продукт).

7. Способы вычисления коэффициентов прямых затрат

В модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева важной проблемой является формулировка функции зависимости коэффициентов прямых затрат от объемов валового производства продукции. В ранее разработанных межотраслевых моделях «затраты-выпуск» в качестве такой функции обычно принимается линейная однородная функция от объема производства продуктов:

$$x_{ij} = \alpha_{ij}x_j,$$

где x_{ij} – объем затрат продукта i на продукт j .

Параметр этой функции – коэффициент прямых затрат α_{ij} – остается неизменным при всевозможных изменениях объема выпуска x_j . Разрабатывались межотраслевые модели «затраты-выпуск» с нелинейной зависимостью функций затрат на производство от объема выпуска продукции, например вида [3]:

$$x_{ij} = \alpha_{ij}x_j^2 + \beta_{ij}x_j + \gamma_{ij},$$

где α_{ij} – параметр, учитывающий изменение удельного расхода продукта i на продукт j при увеличении производства продукта j ; β_{ij} – параметр, учитывающий удельный расход продукта i пропорционально производству продукта j (его содержание аналогично содержанию коэффициента прямых затрат α_{ij}); γ_{ij} – параметр, характеризующий условно-постоянные расходы продукта i на продукт j .

В этом случае модель «затраты-выпуск» становится значительно сложнее и, кроме того, нелинейную зависимость затрат продукта i на продукт j на опыте получить довольно сложно. Для упрощения предлагалась линейная неоднородная функция, учитывающая условно-постоянные расходы [8]:

$$x_{ij} = \bar{x}_{ij} + d_{ij},$$

где \bar{x}_{ij} – величина затрат продукта i на продукт j , прямо пропорционально зависящая от объема выпуска продукта j (прямые технологические затраты); d_{ij} – величина затрат продукта i , не

зависящая прямо пропорционально от объема выпуска продукта j (условно-постоянные расходы).

Вводя коэффициент прямых затрат, соответствующий прямым технологическим затратам, величину x_{ij} можно записать так:

$$x_{ij} = \bar{a}_{ij}x_{ij} + d_{ij}, \text{ где } \bar{a}_{ij} = \frac{\bar{x}_{ij}}{x_j}.$$

Можно далее упростить модель, используя линейную однородную функцию затрат $x_{ij} = a_{ij}x_j$, но при этом учесть условно-постоянные расходы, рассчитывая коэффициенты прямых затрат как функцию объемов производства продукта x_j по формуле:

$$a_{ij} = \bar{a}_{ij} + \frac{d_{ij}}{x_j}.$$

8. Проблемы агрегирования модели «затраты-выпуск»

Исходя из матрицы коэффициентов прямых затрат, разработанной на основе концепции предприятие-продукт, посредством агрегирования можно в принципе получить матрицу коэффициентов затрат модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева сначала для уровня предприятий, а затем и для отраслей экономики государства.

Проблемы агрегирования модели «затраты-выпуск» рассматривались в [9]. В этой работе доказано, что модель «затраты-выпуск» сохраняется при агрегировании в случае выполнения определенных требований. Агрегирование модели $x = Ax + y$ сводится к представлению векторов x и y в виде наборов векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. В вектор x_s входит множество n_s компонент вектора x , которые образуют s -й агрегат. Аналогично устроен вектор y_s .

Агрегаты образуются по правилу скалярного произведения заданного вектора $e = (e_1, \dots, e_n)$ и векторов x_s и y_s .

Тогда уравнение $x = Ax + y$ можно переписать в виде системы уравнений

$$x_s = \sum_{r=1}^n A_{sr}x_r + y_s, \quad r = 1, \dots, n,$$

где A_{sr} – блок матрицы A , составленный из элементов на пересечении строк $i \in n_s$ и столбцов $j \in n_s$.

Эту систему уравнений можно переписать в виде

$$x_s = \sum_{r=1}^n (e_s A_{sr} x_r) + y_s, \quad s = 1, \dots, n.$$

Из последней системы уравнений следует, что агрегированная система «затраты-выпуск» будет тождественной первоначальной системе при выполнении условия

$$e_s A_{sr} = \alpha_{sr} e_r, \quad s, r = 1, \dots, n.$$

Иными словами, должны быть одинаковыми агрегированные в пределах одного агрегата затраты $\frac{1}{e_j} \sum_{i \in n_s} e_i \alpha_{ij}$ на выпуск j -

го продукта, $j \in n_r$, который дает единичный вклад в выпуск r -го агрегата. Это довольно жесткие условия. Эти условия можно смягчить, если считать, что каждый продукт может выпускаться несколькими технологиями [15].

Важнейшим условием практического применения модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева является постоянство коэффициентов прямых затрат как функции времени. Матрицу коэффициентов прямых затрат можно использовать для прогнозных расчетов до тех пор, пока не произойдут структурные сдвиги в выпуске продукции. В случае описания экономики государства с помощью модели «затраты-выпуск» необходимо учитывать эти структурные изменения. Однако при этом возникают вопросы: какие изменения считать структурными сдвигами и какие из них приведут к изменению отдельных элементов матрицы коэффициентов прямых затрат, а какие к изменению размерности этой матрицы. Подходы к решению этих проблем для экономики государства изложены в [9].

В данной статье целью использования модели «затраты-выпуск» является моделирование взаимодействия группы предприятий, совместно реализующих производственные проекты. При этом предполагается, что при реализации этих проектов коэффициенты прямых затрат не изменяются. Эти коэффициенты вычисляются на основе прогноза выпуска продукции пред-

приятиями в соответствии с содержанием исследуемого производственного проекта.

С учетом этого условия, концепцию представления продукта в виде комбинации предприятие-продукт можно считать обобщением модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева в рамках исследования реализации производственных проектов. Многопродуктовая модель «затраты-выпуск» на основе концепции предприятие-продукт может быть сведена к классической модели В. Леонтьева посредством соответствующего агрегирования. Разработка матрицы коэффициентов прямых затрат на основе концепции предприятие-продукт в рамках реализации производственного проекта для группы взаимодействующих предприятий является вполне решаемой задачей, что подтверждается многочисленными работами в области межотраслевых балансов экономики государств.

9. Пример использования модели «затраты-выпуск» для группы взаимодействующих предприятий

Рассмотрим пример использования предложенной модели «затраты-выпуск» для анализа производства продукции группой взаимосвязанных предприятий. Пусть требуется определить максимальный объем производства конечной продукции ряда предприятий с учетом ограничений на производственные мощности предприятий. Тогда балансовую систему уравнений производства и распределения продукции предприятий можно записать в следующем виде:

$$(1) \quad x = Ax + y,$$

где x – вектор валового выпуска производственной линии комбинации предприятие-продукт; A – матрица коэффициентов прямых затрат комбинаций предприятие-продукт; y – вектор выпуска конечной продукции комбинаций предприятие-продукт.

Ограничение на производственные мощности производственных линий комбинаций предприятие-продукт запишем в виде векторного неравенства:

$$(2) \quad x < p,$$

где p – вектор мощностей производственных линий комбинаций предприятие-продукт.

Кроме того, примем не очень ограничивающее общность задачи требование, что выпуск конечной продукции y удовлетворяет соотношению

$$(3) \quad y = qa,$$

где q – вектор долей выпуска комбинаций предприятие-продукт в общем объеме выпуска конечной продукции всех предприятий; a – скаляр, представляющий собой общий объем производства конечной продукции.

Скаляр a вычисляется как скалярное произведение вектора e на вектор y по формуле

$$(4) \quad a = ey.$$

Введем в задачу требование максимизации общего объема производства конечной продукции:

$$(5) \quad a \rightarrow \max.$$

Оптимизационная задача формулируется в следующем виде: найти максимум величины a при условиях (1)–(4). В этой задаче все векторы являются векторами-столбцами. Размерности векторов и матрицы A равны количеству комбинаций предприятие-продукт в задаче. Каждое предприятие выпускает несколько продуктов. Поэтому общее количество условных предприятий, каждое из которых представляет собой несколько комбинаций предприятие-продукт, равно сумме продуктов, выпускаемых предприятиями.

Эта оптимизационная задача представляет собой классическую задачу линейного программирования, которую можно решить стандартными методами или используя пакеты прикладных программ. Однако условие (3) позволяет решить эту задачу значительно проще. В [4, 6] доказано, что решение можно получить в виде

$$(6) \quad \max a = \min a_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $a_i = \frac{p_i}{[Bq]_i}$, n – сумма выпускаемых продуктов.

В примере рассматривается группа взаимодействующих предприятий, обеспечивающих производство автомобилей, в которую входят предприятия, выпускающие количество комбинаций предприятие-продукт, указанное в скобках:

1. Автосборочное предприятие (4).
2. Предприятие по производству приборов (3).
3. Предприятие по производству двигателей (5).
4. Предприятие по производству проката (3).
5. Предприятие по производству резинотехнических изделий (4).
6. Предприятия по электроснабжению, водоснабжению и газоснабжению (1).

Для обеспечения расчетов информацией собираются данные об автосборочном предприятии и смежных предприятиях, выполняющих поставки материалов, запасных частей и комплектующих узлов и деталей. В число этих данных входят:

- производственные мощности предприятий;
- объемы поставок продуктов смежных предприятий на сборочное предприятие;
- затраты продуктов смежных предприятий, приходящиеся на один рубль валовой продукции, выпускаемой сборочным автопредприятием.

Для краткости в приводимых ниже таблицах комбинации предприятие-продукт, участвующие в реализации производственного проекта обозначаются порядковыми номерами предприятий из указанного выше перечня с добавлением через дефис номера продукта, выпускаемого на этом предприятии. Данные о производстве продуктов приводятся в стоимостных единицах (рублях). Все приведенные ниже данные условные и разработаны автором данной статьи. Положим, что требуется найти максимум конечной продукции только автосборочного предприятия, выпускающего 4 модели автомобилей. Тогда вектор q состоит из нулей кроме элементов, соответствующих этим моделям, выпускаемых автосборочным предприятием, которые равны соответственно 0,4, 0,3, 0,2 и 0,1. Сумма компонентов вектора q равна 1. В этом случае формула (6) принимает вид

$$a_i = \frac{p_i}{\sum_j b_{ij} q_j},$$

где $j = 1-1, 1-2, 1-3, 1-4$, b_{ij} – элементы матрицы B .

Коэффициенты прямых материальных затрат комбинаций предприятие-продукт представлены в таблице 1.

Матрица B , обратная к матрице $I - A$, приведена в таблице 2. Производственные мощности комбинаций предприятие-продукт – в таблице 3.

Исходя из этих данных по формуле (6) был рассчитан максимальный объем производства автомобилей. В таблице 4 представлены результаты расчетов значений величин a_i , $i = 1, \dots, 20$.

Из таблицы 4 видно, что максимальный общий объем выпуска автомобилей $\max a = \min a_i$, $i = 1, \dots, 20$, в стоимостном выражении равен 375 млн руб. Выпуск четырех моделей 1-1, 1-2, 1-3, 1-4 в стоимостном выражении составляет соответственно 150 млн руб., 112,5 млн руб., 75 млн руб., 37,5 млн. руб.

Таблица 1. Коэффициенты прямых затрат (матрица A)

	1-1	1-2	1-3	1-4	2-1	2-2	2-3	3-1	3-2	3-3
1-1										
1-2										
1-3										
1-4										
2-1	0,031	0,029	0,028	0,032		0,012	0,017	0,012	0,013	0,014
2-2	0,082	0,079	0,068	0,091	0,013		0,015	0,17	0,019	0,021
2-3	0,041	0,038	0,032	0,039	0,014	0,023		0,028	0,012	0,019
3-1	0,063	0,059	0,044	0,057	0,022	0,031	0,015		0,018	0,021
3-2	0,013	0,014	0,012	0,017						
3-3	0,014	0,012	0,015	0,013						
3-4	0,091	0,089	0,076	0,081						
3-5	0,082	0,073	0,074	0,068						
4-1	0,041	0,039	0,045	0,047				0,032	0,039	0,028
4-2	0,031	0,029	0,037	0,041				0,027	0,029	0,018
4-3	0,029	0,021	0,017	0,025				0,017	0,012	0,021
5-1	0,013	0,017	0,009	0,015	0,021	0,028	0,025			
5-2	0,017	0,019	0,021	0,016	0,031	0,029	0,027			
5-3	0,011	0,017	0,015	0,013	0,014	0,016	0,018			
5-4	0,018	0,021	0,022	0,016	0,023	0,025	0,012	0,011	0,013	0,014
6-1	0,019	0,017	0,012	0,013	0,015	0,021	0,019	0,026	0,021	0,015

Таблица 1 (продолжение)

	3-4	3-5	4-1	4-2	4-3	5-1	5-2	5-3	5-1	6-1
1-1										
1-2										
1-3										
1-4										
2-1	0,015	0,015	0,011	0,018	0,013	0,017	0,016	0,015	0,014	0,010
2-2	0,013	0,016	0,012	0,022	0,017	0,015	0,027	0,013	0,019	0,012
2-3	0,017	0,024	0,023	0,031	0,037	0,018	0,025	0,027	0,021	0,017
3-1	0,015	0,018	0,021	0,016	0,022	0,023	0,014	0,018	0,013	0,015
3-2										
3-3										
3-4										
3-5										
4-1	0,034	0,037		0,021	0,032	0,037	0,029	0,026	0,022	0,024
4-2	0,023	0,021	0,022		0,028	0,023	0,021	0,018	0,019	0,017
4-3	0,017	0,011	0,017	0,029		0,014	0,015	0,027	0,018	0,027
5-1										
5-2										
5-3										
5-4	0,012	0,017	0,013	0,015	0,018	0,017	0,012	0,019		0,014
6-1	0,014	0,011	0,018	0,025	0,013	0,028	0,017	0,013	0,022	

Таблица 2. Матрица В

	1-1	1-2	1-3	1-4	2-1	2-2	2-3	3-1	3-2	3-3
1-1	1									
1-2		1								
1-3			1							
1-4				1						
2-1	0,040	0,038	0,036	0,041	1,003	0,015	0,019	0,015	0,016	0,017
2-2	0,092	0,089	0,077	0,101	0,016	1,004	0,018	0,020	0,022	0,024
2-3	0,056	0,052	0,045	0,054	0,018	0,027	1,004	0,032	0,017	0,024
3-1	0,076	0,071	0,055	0,070	0,025	0,034	0,018	1,004	0,031	0,035
3-2	0,013	0,014	0,012	0,017					1	
3-3	0,014	0,012	0,015	0,013						1
3-4	0,091	0,089	0,076	0,081						
3-5	0,082	0,073	0,074	0,068						
4-1	0,056	0,053	0,058	0,061	0,004	0,005	0,004	0,035	0,042	0,031
4-2	0,042	0,040	0,047	0,051	0,003	0,004	0,003	0,029	0,032	0,021
4-3	0,038	0,030	0,025	0,034	0,003	0,020	0,015	0,024	0,019	0,014
5-1	0,018	0,022	0,013	0,020	0,022	0,029	0,026	0,002	0,001	0,002
5-2	0,022	0,024	0,026	0,022	0,032	0,030	0,028	0,002	0,002	0,002
5-3	0,014	0,020	0,018	0,016	0,015	0,017	0,019	0,001	0,001	0,001
5-4	0,029	0,031	0,032	0,027	0,025	0,028	0,015	0,014	0,016	0,017
6-1	0,031	0,029	0,023	0,026	0,018	0,025	0,022	0,029	0,025	0,019

Таблица 2 (продолжение)

	3-4	3-5	4-1	4-2	4-3	5-1	5-2	5-3	5-4	6-1
1-1										
1-2										
1-3										
1-4										
2-1	0,017	0,017	0,013	0,020	0,016	0,020	0,019	0,018	0,016	0,012
2-2	0,016	0,019	0,014	0,025	0,020	0,018	0,030	0,016	0,021	0,014
2-3	0,021	0,028	0,026	0,035	0,041	0,023	0,029	0,031	0,025	0,021
3-1	0,018	0,021	0,024	0,020	0,025	0,027	0,018	0,022	0,016	0,018
3-2										
3-3										
3-4	1									
3-5		1								
4-1	0,037	0,040	1,003	0,024	0,035	0,040	0,032	0,029	0,024	0,026
4-2	0,026	0,024	0,024	1,003	0,030	0,026	0,023	0,021	0,021	0,019
4-3	0,019	0,014	0,019	0,031	1,003	0,017	0,017	0,029	0,020	0,029
5-1	0,001	0,002	0,001	0,002	0,002	1,001	0,002	0,002	0,002	0,001
5-2	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	1,002	0,002	0,002	0,001
5-3	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	1,001	0,001	0,001
5-4	0,015	0,020	0,015	0,018	0,021	0,020	0,015	0,022	1,003	0,016
6-1	0,017	0,015	0,021	0,028	0,017	0,032	0,021	0,017	0,025	1,003

Таблица 3. Мощности производственных линий комбинаций предприятие-продукт, млн руб.

1-1	1-2	1-3	1-4	2-1	2-2	2-3	3-1	3-2	3-3
150	200	180	120	350	420	480	410	900	950
3-4	3-5	4-1	4-2	4-3	5-1	5-2	5-3	5-1	6-1
850	830	1200	1300	1500	1700	400	450	520	470

Таблица 4. Значения величин a_i млн руб.

1-1	1-2	1-3	1-4	2-1	2-2	2-3	3-1	3-2	3-3
375	666	900	1200	21212	24137	18461	∞	∞	∞
3-4	3-5	4-1	4-2	4-3	5-1	5-2	5-3	5-1	6-1
∞	∞	21428	30023	47318	∞	∞	∞	∞	16785

10. Заключение

В статье сформулирована обобщенная модель «затраты-выпуск» В. Леонтьева для описания взаимодействия группы предприятий, совместно выпускающих продукцию. Посредством агрегирования эту модель можно привести к классической межотраслевой модели «затраты-выпуск» В. Леонтьева. Обобщенная модель используется в качестве ядра оптимизационных и имитационных моделей, предназначенных для исследования инвестиционных производственных проектов, выполняемых группой предприятий [11]. Приведен пример расчета максимального объема производства четырех моделей автомобилей.

Литература

1. ГРАНБЕРГ А.Г. *Математические модели социалистической экономики*. – М.: Экономика, 1978. – 351 с.
2. КЛОЦВОГ Ф.Н., НОВИЧКОВ В.А. *Экспериментальные расчеты упрощенной динамической модели межотраслевого баланса* // В кн.: «Проблемы моделирования народного хозяйства. Ч. I». – Новосибирск, 1970. – С. 4–14.
3. КОССОВ В.В. *Межотраслевой баланс*. – М.: Экономика, 1965. – 231 с.
4. ЛАВРОВСКИЙ Б.Л. *Исследование свойств вероятностной модели межотраслевого баланса производственных мощностей* // В кн.: «Оптимизационные и балансовые модели народного хозяйства». – Новосибирск: Наука, 1977. – 251 с.
5. ЛЕОНТЬЕВ В.В. *Избранные произведения в 3-х томах*. – М.: ЗАО «Издательство «Экономика», 2006.
6. МАСАКОВ В.М. *Некоторые свойства моделей межотраслевого баланса производственных мощностей простейшего типа* // В сб.: «Проблемы моделирования народного хозяйства. Ч. 3». – Новосибирск, ИЭ и ОПП, 1973. – 264 с.
7. МИХЕЕВА Н.Н. *Таблицы «затраты-выпуск»: новые возможности экономического анализа* // Вопросы экономики. – 2011. – №7. – С. 140–148.

8. *Моделирование народно-хозяйственных процессов* / Под ред. Дадаева В.С. – М.: Экономика, 1973. – 479 с.
9. ПЕТРОВ А.А., ПОСПЕЛОВ И.Г., ШАНАНИН А.А. *Опыт математического моделирования экономики*. – М.: Энергоатомиздат, 1996. – 544 с.
10. ПОЗАМАНТИР Э.И. *Вычислимое общее равновесие экономики и транспорта. Транспорт в динамическом межотраслевом балансе*. – М.: «ПОЛИ ПРИНТ СЕРВИС», 2014. – 280 с.
11. РОМАНОВ Б.А. *Комплекс оптимизационных и имитационных моделей для исследования реализации предприятиями инвестиционных производственных проектов*. – М.: РИОР: Academus: ИНФРА-М, 2015. – 292 с.
12. ЧЕНЕРИ Х, КЛАРК П. *Экономика межотраслевых связей*. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. – 384 с.
13. ШИРЯЕВ В.И., БАЕВ И.А., ШИРЯЕВ Е.В. *Управление фирмой. Моделирование, анализ, управление*. – М.: Изд-во ЛКИ/URSS, 2007.
14. DIETZENBACHER E. et al. *Input-Output Analysis: The next 25 Years* // *Economic System Research* / Eds.: Lenzen M., Los B. – Abington, UK: Taylor & Francis, December, 2013. – Vol. 25(4). – P. 369–389.
15. НАТАНАКА М. *Note on Consolidation within a Leontief System* // *Econometrica*. – 1952. – Vol. 20, No. 2. – P. 301–303.

ABOUT USE OF "INPUT-OUTPUT" MODEL FOR INTERCONNECTED ENTERPRISES

Boris Romanov, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow (boris094@mail.ru).

Abstract: In this article, possibilities of use of the "input-output" V. Leontief model for the description of interaction of group of the enterprises are analyzed. The analysis shows that direct application of this model is impossible in view of practical impossibility of realization in V. Leontief's model of the multiproduct approach. Generalization of this model that implements the multiproduct approach is offered. This generalization is performed in such way as to represent the real enterprise as a set of abstract enterprises, each producing only one kind of one product. This set of abstract enterprises, outputting the number of products equal to the number of the abstract enterprises, models the real enterprise outputting the same quantity of products. This generalized model is used as a core of optimization and imitation models, designed to research investment in industrial projects, carried out by groups of enterprises. An example of computing maximum output of producing 4 models of automobiles is given.

Keywords: industrial expenses, output, "input-output" model, factors of a factor cost.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Р.М. Нижегородцевым.

*Поступила в редакцию 16.10.2015.
Опубликована 31.07.2017.*

УДК 681.5.23
ББК 32.965

РЕАЛИЗАЦИЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО АЛГОРИТМА РЕКУРРЕНТНО-ПОИСКОВОГО ОЦЕНИВАНИЯ КОРРЕЛЯЦИОННО- ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ПО РЕЛЬЕФУ МЕСТНОСТИ

Белов Р. В.¹,

(ПАО «АНПП «Темп-Авиа», Арзамас)

Огородников К. О.²

(ПАО «АНПП «Темп-Авиа»,

Арзамасский политехнический институт

(филиал НГТУ), Арзамас)

Рассматривается рекуррентно-поисковый алгоритм корреляционно-экстремальной навигационной системы по рельефу местности, способный оценивать горизонтальные координаты, высоту и вертикальную скорость по измерениям инерциальной навигационной системы, радиовысотомера и эталонной информации. Однако при наличии сбоев, ложных данных и слабой информативности рельефа этот алгоритм не может обеспечить надежной и точной коррекции. В связи с вышесказанным предлагается ввести условия достоверности, что позволит ограничить влияние ошибок в определении горизонтальной скорости, проводить оценивание при наличии сбоев и минимизировать вероятность выдачи ложных поправок. Кроме того, в статье рассмотрены особенности реализации вышеуказанного алгоритма, направленные на общее повышение быстродействия.

¹ Роман Валерьевич Белов, ведущий математик.

² Кирилл Олегович Огородников, инженер-математик, аспирант (okplay@mail.ru).

Ключевые слова: корреляционно-экстремальная навигационная система, рекуррентно-поисковый алгоритм, оценивание параметров движения, снижение вычислительной сложности.

1. Введение

Методы навигации по геофизическим полям получили свое распространение примерно в 60-х гг. XX века, когда выявились возможности использования некоторых видов аномальных физических полей, которые ранее в навигации служили только помехами. Ввиду «случайности» аномальных геофизических полей алгоритмы функционирования соответствующих навигационных систем имеют резко выраженную специфику – сопоставление наблюдаемого геофизического поля с его эталоном осуществляется в бортовой навигационной системе посредством функционала типа корреляционной функции, при этом осуществляется определение или поиск экстремума функционала. Системы навигации по геофизическим полям получили название корреляционно-экстремальных навигационных систем, или КЭНС [2, 3, 5].

Как известно, при автономном функционировании инерциальной навигационной системы (ИНС) накапливаются ошибки в определении координат и вектора скорости, в связи с чем возникает задача коррекции ИНС по доступным измерениям поля высот рельефа. При движении на малых высотах вблизи поверхности часто используются радиометрические измерители скорости, угла сноса и высоты над поверхностью. Ошибки в определении скорости ИНС могут быть оценены непосредственно по этим измерениям, что ограничит скорость нарастания ошибок по координатам, но не устранил их. Для оценивания ошибок в определении координат ИНС могут быть использованы корреляционно-экстремальные методы по измерениям поля высот рельефа местности.

Задача корреляционно-экстремальной навигации по рельефу местности сводится к оцениванию горизонтальных координат летательного аппарата (ЛА) по информации ИНС, измере-

ниям радиовысотомера и эталонной информации о рельефе в районе осуществления навигации.

2. Основные принципы корреляционно-экстремальной навигации

В основу метода корреляционно-экстремальной навигации положен следующий принцип: географическое положение любой точки земной поверхности описывается единственным образом с помощью вертикальных профилей или топографией окружающей местности. Такая система требует предварительного картографирования или иного определения характеристик профилей поверхности того района, над которым система будет использоваться. Это может быть сделано, например, по стереоскопическим аэроснимкам местности с помощью известных в настоящее время способов. Предварительно определенные данные о рельефе района полетов запоминаются в цифровом виде в бортовом запоминающем устройстве.

Во время полета вертикальный профиль рельефа определяется вдоль истинной траектории полета с помощью радиовысотомера (для измерения геометрической высоты полета) и баровысотомера (для получения уровня отсчета профиля). Определив профиль рельефа вдоль траектории полета, система организует поиск в памяти вычислителя наиболее похожего, заранее запомненного профиля с известными координатами. Поиск осуществляется последовательным сопоставлением измеренного профиля с цифровым образом.

Алгоритмы, связанные со сплошным перебором всех возможных вариантов ошибок скорости и местоположения движущегося объекта и представляющие собой группу поисковых методов, надежно решают принципиальную для КЭНС проблему ликвидации больших начальных отклонений. Однако их использование в случае многопараметрического оценивания наталкивается на непреодолимые вычислительные трудности. Поэтому необходимо сокращать число параметров, по которым осуществляется сплошной перебор. Существенно нелинейной при синтезе алгоритмов КЭНС является зависимость геофизиче-

ского поля от позиционных координат. Эта нелинейная зависимость носит характер реализаций случайного процесса и не может быть разложена в ряд Тейлора, так как высшие производные реализаций геофизических полей могут не существовать. В отмеченном характере нелинейности и состоит специфика и трудность синтеза алгоритмов КЭНС.

В общей задаче многопараметрического оценивания навигационных параметров по рельефу местности целесообразно отделить часть, связанную с нелинейной зависимостью геофизических полей от позиционных координат, и сохранить в этой части сплошной перебор вариантов, чтобы алгоритмы надежно решали проблему ликвидации больших начальных отклонений. По отношению к остальным параметрам (высота, вертикальная скорость) – отказаться от сплошного перебора и использовать методы фильтрации.

Теоретической основой такого подхода как раз и является метод рекуррентно-поискового оценивания и его непрерывный аналог, объединяющие идеи калмановской фильтрации и теории проверки статистических гипотез.

3. Рекуррентно-поисковый алгоритм

Для решения задачи рекуррентно-поискового оценивания горизонтальных координат ЛА по инерциальной траектории, измерениям радиовысотомера и эталонной информации о рельефе в районе осуществления навигации используются упрощенные уравнения ошибок ИНС, включающие ошибки по горизонтальным координатам δx и δz , а также ошибки по ускорению, скорости в вертикальном канале и высоте (δa , δv и δh):

$$(1) \quad \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta z \\ \delta a \\ \delta v \\ \delta h \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T^2}{2} & T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta z \\ \delta a \\ \delta v \\ \delta h \end{bmatrix}_{k-1} + \overline{w_{k-1}},$$

где T – период дискретизации, $\overline{w_{k-1}}$ случайный процесс.

Уравнение измерения радиовысотомера без учета различных систематических погрешностей представляет собой разность истинной высоты h и функции высоты $h_{nn}(x, z)$ подстилающей поверхности от горизонтальных координат, к которой прибавляется шум измерения v :

$$(2) \quad h_{pв} = h - h_{nn}(x, z) + v.$$

Для формирования алгоритма условно разделим вектор состояния на две части. В поисковую часть войдут оценки ошибок по горизонтальным координатам. Для них примем множество гипотез и будем оценивать корректность каждой из них. Оставшуюся часть вектора состояния будем оценивать с помощью фильтра Калмана (ФК) для каждой гипотезы. При этом по величинам невязок ФК можно судить об истинности гипотезы [4].

Множество гипотез строится по регулярной сетке, совпадающей с сеткой дискретизации функции эталонной высоты подстилающей поверхности h_{nn} . Количество гипотез определяется размером области неопределенности и размером дискрета эталона. Таким образом, можно установить однозначное соответствие между номером гипотезы ij и парой ошибок горизонтальных координат δx и δz .

Невязка e , представляющая собой высоту, полученную от ИНС, из которой вычитаются высота радиовысотомера и высота подстилающей поверхности, используется не только внутри ФК для вертикальных параметров, но и для оценки истинности гипотезы:

$$(3) \quad \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta v \\ \delta h \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ T & 1 & 0 \\ T^2/2 & T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta v \\ \delta h \end{bmatrix}_{k-1} + \overline{w_{k-1}},$$

$$(4) \quad e_{ij}(k) = h_{unc}(k) - h_{pв}(k) + \delta h(k) - H_{nn},$$

$$H_{nn} = h_{nn}(x_{unc}(k) + \delta x(i), z_{unc}(k) + \delta z(j)).$$

В результате работы фильтров по всем гипотезам будет получена функция суммы квадратов невязок от ошибок координат

$$(5) \quad F_{ij}(k) = \sum_{k=1}^N e_{ij}^2(k).$$

Для выбора истинной гипотезы проводится анализ массива суммы квадратов невязок $F_{ij}(k)$ в пределах окна длиной N_{max} и его значения в точке минимума $F_{min}(k)$, а также осуществляется проверка критериев достоверности с последующим формированием сигнала достоверности коррекции. Необходимыми условиями достоверности найденного минимума являются:

$$1. \quad N_{valid} > N_{min},$$

где N_{valid} – количество достоверных измерений, N_{min} – минимальное количество измерений, необходимых для проверки условий достоверности;

$$2. \quad \sqrt{\frac{F_{min}(k)}{N_{valid}}} < L_{std},$$

где L_{std} – параметр зоны коррекции;

$$3. \quad D_{max} \leq m_1 + m_2 \frac{N_{valid}}{N_{max}},$$

где D_{max} – радиус области в пространстве ошибок координат δx , δz , заданной условием

$$F_{ij}(k) < F_{min}(k) \left(1 + \sqrt{\frac{m_3}{N_{valid}}} \right),$$

N_{max} – максимальное количество измерений в окне;

$$4. \quad R_{min} \leq 1,$$

где R_{min} – размер области, в которой находился минимум в течении предыдущих N_{obl} измерений.

Параметры N_{min} , N_{max} , L_{std} вычисляются по эталонному массиву высот. Коэффициенты m_1 , m_2 , m_3 выбираются по результатам испытаний так, чтобы корректирующие поправки выдавались только в случае достаточной обусловленности решения.

В случае выполнения всех условий, координаты минимума δx_{min} и δz_{min} преобразуются в оценки ошибок и поступают на выход алгоритма. Если существует необходимость, возможно проведение дополнительного уточняющего поиска в малой области для повышения точности.

При отсутствии признака достоверности радиовысотомера измеренная информация отбрасывается и не поступает в рекуррентно-поисковый алгоритм. После каждого пропуска первая полученная невязка не участвует в формировании массива квадратов невязок. Количество измерений в окне отслеживается и хранится в N_{valid} .

Обработка ложной информации происходит за счет оценивания найденного решения во время проверки условий достоверности. Те же условия достоверности предотвращают формирование ложных поправок при движении по недостаточно информативной траектории, а точность оценивания определяется погрешностями исходной информации и информативностью рельефа.

4. Методы снижения вычислительной сложности рекуррентно-поискового алгоритма

Несмотря на более низкую вычислительную сложность рекуррентно-поискового алгоритма по сравнению с поисковым методом за счет оценки вертикальных параметров методами рекуррентной фильтрации, существенным недостатком остается недостаточное быстродействие, связанное с перебором большого количества гипотез. Еще одним недостатком является требование к объему памяти вычислителя для хранения массивов квадратов невязок [1].

Один из способов оптимизации вычислений заключается в следующем. Если в процессе работы рекуррентно-поискового алгоритма момент получения измерений ИНС ($x_{инс}$, $z_{инс}$, $h_{инс}$) и РВ ($h_{рв}$) оказывается несинхронизированным с моментом достижения центра дискрета эталонного массива высот, то для увеличения точности коррекции требуется использование интерполяции между соседними дискретами, что увеличивает среднее время обработки одного измерения. В предлагаемом способе происходит преобразование частоты поступающих измерений к частоте смены дискрет эталона, т.е. от ИНС и РВ используются только те показания, которые попадают в область ближайшего дискрета. Таким образом, измерение профиля

рельефа рассчитывается как среднее значение за период прохождения дискрета, что позволяет делать выборки из массива высот без использования интерполяции, а получаемая переменная частота измерений будет зависеть от скорости движения ЛА и размера дискрета эталонной информации.

Следующий способ заключается в оптимизации процедуры обработки измерений ФК. В существующем алгоритме последовательная обработка данных для каждого измерения осуществляется путем обращения к каждому элементу массива векторов состояния, т.е. операции чтения-записи осуществляются до и после обработки текущего измерения каждым ФК. Предлагается уменьшить количество операций чтения-записи путем проведения обработки измерений группами, накопленными за некоторый малый промежуток времени. В этом случае операции чтения-записи будут осуществляться до и после обработки текущей группы измерений каждым ФК. Тогда при том же количестве обращений к массиву векторов состояния будет обработана вся группа измерений. Важно, что при этом структура ФК не меняется, поскольку каждое измерение из группы обрабатывается так же, как и в существующем алгоритме, т.е. рекуррентно. Количество измерений в группе N_b выбирается исходя из максимально допустимой задержки, а сама задержка определяется длительностью прохождения N_b дискрет и зависит от скорости движения и размера дискрета. На вычислителе с многоуровневой моделью памяти такой порядок вычислений оказывается эффективнее.

Еще один способ для уменьшения вычислительной сложности заключается в способе формирования суммы массивов квадратов невязок F_{ij} . Для реализации скользящего окна по массивам квадратов невязок e_{ij}^2 в предлагаемом методе производится группировка массивов в сегменты по N_g элементов. Для каждого сегмента хранится только суммарный массив квадратов невязок, каждый элемент которого равен сумме N_g элементов массива сегмента. Следовательно, выходящие из окна массивы могут вычитаться из суммы содержимого скользящего окна только сегментами. Таким образом, требования к объему памяти для скользящего окна сокращаются в N_g раз. Величина N_g опре-

деляет минимально возможное количество массивов, вычитаемое из суммы содержимого скользящего окна. Общее количество массивов в сумме может изменяться на N_g за один такт, что ограничивает выбор данной величины.

Предложенный метод повышения производительности реализуется следующим образом (рис. 1).

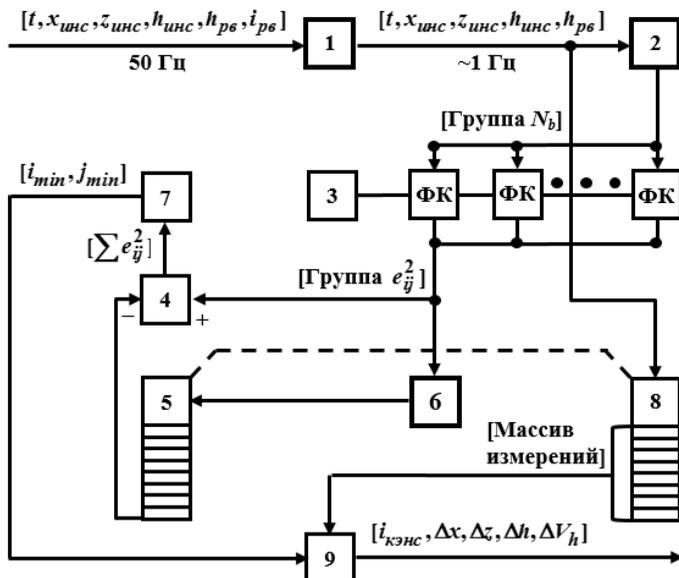


Рис. 1. Схема модифицированного алгоритма рекуррентно-поискового оценивания. Блоки: 1 – блок преобразования; 2 – формирование групп; 3 – блок эталонной информации; 4 – блок суммирования; 5 – очередь массивов квадратов невязок; 6 – формирование сегментов массивов квадратов невязок; 7 – поиск минимума; 8 – очередь измерений; 9 – формирование выходной информации

Преобразование входной информации и ее выдача происходит в случае, если изменилась целая часть координаты $x_{инс}$, т.е. произошел переход через границу дискрет. Состав выходной информации соответствует входному за исключением от-

сутствия признака достоверности РВ $i_{рв}$. Выходные данные не формируются для недостоверных измерений РВ, а также при нахождении ЛА вне зоны коррекции.

Затем производится формирование групп измерений длиной N_b и вся оставшаяся часть устройства функционирует на пониженной в N_b раз частоте.

Основная часть алгоритма состоит из множества ФК, на входы которых поступают эталонная информация и сформированные группы измерений. Каждому ФК соответствует гипотеза о величинах ошибок δx и δz , а вектор состояния содержит оценки вертикальных ошибок. На выходах ФК формируется не более N_b массивов квадратов невязок, причем количество массивов может быть меньше N_b , если по меткам времени t в входном блоке измерений обнаружен достаточно длительный пропуск информации.

Далее происходит накопление суммы массивов квадратов невязок, а затем формируется скользящее окно, организованное очередью массивов квадратов невязок совместно с очередью измерений. Поступающие в скользящее окно массивы группируются в сегменты по N_g элементов. В окне хранятся только суммы сегментов, а не отдельные массивы квадратов невязок. Если в течении N_g тактов были пропуски, то сегмент заполняется, насколько это возможно. На выходе скользящего окна крайний элемент проверяется по условию выхода, и в случае успеха сегмент вычитается из суммы массивов квадратов невязок. При этом соответствующее количество элементов вычитается также в очереди измерений.

Поиск минимума и проверка условий достоверности осуществляется путем использования текущей суммы массивов квадратов невязок.

При успешном прохождении условий достоверности, найденные координаты и сохраненные измерения из заполненной очереди используются для окончательного формирования выходной информации.

Таким образом, построенный алгоритм отличается от оригинального тем, что поступающие измерения преобразуются к переменной частоте, зависящей от скорости движения ЛА, а

затем обрабатываются группами. Поиск минимума и проверка условий достоверности производится реже в N_b раз. Длина скользящего окна не постоянна, так как выходящие из него массивы вычитаются сегментами по N_g элементов.

5. Результаты моделирования

При оценке работы КЭНС для моделирования подстилающей поверхности и подготовки эталонного массива высот использовались данные Shuttle Radar Topographic Mission (SRTM). Для оценки функционирования условий достоверности задавался сбой, приводивший к некорректной работе базового рекуррентно-поискового алгоритма. Сбой представляет собой аддитивную ошибку по высоте РВ, задаваемую в течение нескольких секунд. Коррекция в базовом алгоритме проводилась при наборе минимально возможного количества измерений N_{min} . При использовании модифицированного алгоритма коррекция не проводилась до момента выполнения всех условий достоверности. Размер зоны коррекции составляет 200×101 дискрет, размер дискрета – 125×125 м. Начало измеряемого профиля находится в точке (70 дискрет; 70 дискрет).

На рис. 2 показаны линии уровня рельефа и траектории движения, полученные по результатам коррекции инерциальной траектории с помощью поправок, сформированных в базовом и модифицированном алгоритмах соответственно. Моделирование показало, что ошибки корректирующих поправок базового алгоритма составляют 24 дискрета по поперечной оси и 1 дискрет по продольной оси, в то время как у модифицированного алгоритма не превышают 1 дискрета.

Иными словами, добавление критериев достоверности позволило ограничить выдачу ошибочных корректирующих поправок рекуррентно-поисковым алгоритмом. Однако выполнение условий достоверности увеличивает время до наступления момента коррекции.

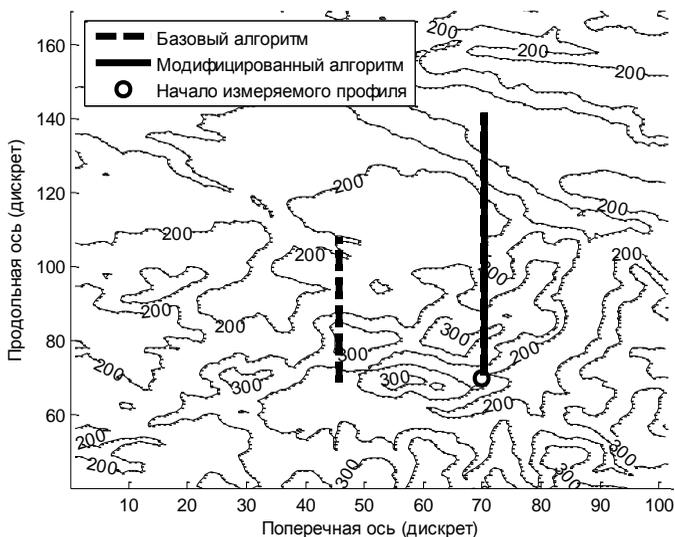


Рис. 2. Сравнение траекторий

Производительность алгоритмов оценивалась путем фиксации времени их выполнения. Характеристики вычислителя, на котором проводились испытания, следующие:

- архитектура микропроцессора: MIPS IV;
- тактовая частота ядра: 396 МГц.

На рис. 3 показана оценка быстродействия рекуррентно-поискового алгоритма в базовом исполнении, а также его модифицированного варианта, полученная по результатам проведения 1000 испытаний и представленная средним значением по всем испытаниям. Распределение ошибок горизонтальных оценок для базового и модифицированного алгоритмов при этом оказалось одинаковым.

По результатам проведения испытаний видно, что вышеуказанные методы повышения производительности позволяют снизить нагрузку на вычислитель более чем в 6 раз.

Таким образом, изменение структуры алгоритма и введение условий достоверности повлекло за собой повышение эффективности вычислений и снижение требований к характеристикам вычислителя, а также обеспечило функционирование КЭНС

в условиях сбоев, ложных данных и слабой информативности рельефа.

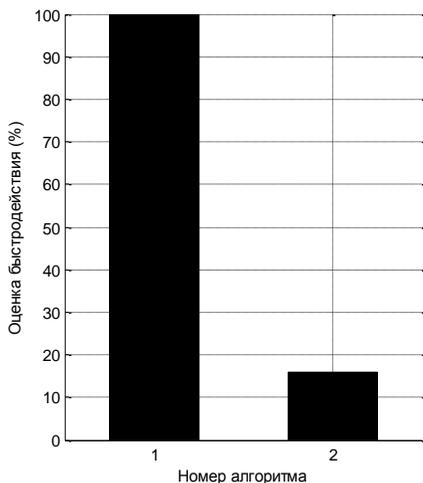


Рис. 3. Оценка быстродействия построенных алгоритмов:
1 – базовый алгоритм; 2 – модифицированный алгоритм

6. Заключение

Модифицированный алгоритм рекуррентно-поискового оценивания КЭНС по рельефу местности позволяет проводить коррекцию горизонтальных координат при наличии сбоев, ложных данных и слабой информативности рельефа, что было достигнуто путем введения условий достоверности. Снижение вычислительной сложности алгоритма обеспечивается за счет применения нескольких способов оптимизации вычислений, что приводит к значительному уменьшению количества выполняемых математических операций по сравнению с базовым рекуррентно-поисковым методом.

Таким образом, разработанный модифицированный алгоритм КЭНС предназначен для внедрения в перспективные разработки, основной задачей которых является определение и коррекция координат ЛА. Вследствие уменьшения времени

выполнения рекуррентно-поискового алгоритма, освободились дополнительные вычислительные ресурсы, которые могут быть использованы, например, для решения других смежных задач, а также для применения более сложных и требовательных к вычислителю методов комплексирования.

Литература

1. БЕЛОВ Р.В., ОГОРОДНИКОВ К.О. *Повышение производительности алгоритма корреляционно-экстремальной навигационной системы* // Материалы XVIII конференции молодых ученых «Навигация и управление движением» – СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2016. – С. 363–369.
2. БЕЛОГЛАЗОВ И.Н., ДЖАНДЖГАВА Г.И., ЧИГИН Г.П. *Основы навигации по геофизическим полям*. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 328 с.
3. ДЖАНДЖГАВА Г.И., ГЕРАСИМОВ Г.И., АВГУСТОВ Л.И. *Навигация и наведение по пространственным геофизическим полям* // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – №3(140). – С. 74–83.
4. КОСТЕНКО Г.И., МИШИН А.Ю., БЕЛОВ Р.В. *Способ коррекции координат, высоты и вертикальной скорости летательного аппарата и устройство для его осуществления* // Пат. 2547158 Российская Федерация, МПК G01C21/20. – №2013151947/28, заявл. 21.11.2013, опубл. 10.04.2015, Бюл. №10. – 8 с.
5. КРАСОВСКИЙ А.А., БЕЛОГЛАЗОВ И.Н., ЧИГИН Г.П. *Теория корреляционно-экстремальных навигационных систем*. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 448 с.

IMPLEMENTATION OF MODIFIED RECURRENT-SEARCH ESTIMATION ALGORITHM OF CORRELATION-EXTREMAL TERRAIN-AIDED NAVIGATION SYSTEM

Roman Belov, PAO «ANPP «Temp-Avia», Arzamas, leading mathematician.

Kirill Ogorodnikov, PAO «ANPP «Temp-Avia», Arzamas Polytechnical institute, Arzamas, engineer-mathematician, post-graduate student (okplay@mail.ru).

Abstract: The article discusses the recurrent-search algorithm of correlation-extremal terrain-aided navigation system that is able to estimate horizontal coordinates, altitude and vertical velocity from measurements of the inertial navigation system, radio altimeter and reference information. However, in the presence of failures in measurements and ill-conditioned reference information, this algorithm cannot provide reliable and accurate correction. In relation to the above, it is proposed to introduce the reliability condition that prevents wrong solution to be given in case of ill-conditioned reference information or presence of large errors in measurements. This allows us to find the solution in the presence of failures, and also to limit the influence of errors in the determination of horizontal velocity. Overall effect of reliability conditions is to solve a large number of ill-conditioned cases, but minimize the probability of wrong correction. In addition, the article examines features of the above-stated algorithm, aimed at improving an overall performance.

Keywords: correlation-extremal navigation system, recurrent-search algorithm, estimation of motion parameters, reduction of computational complexity.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.М. Вишневым.

Поступила в редакцию 08.04.2017.

Опубликована 31.07.2017.