

**Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

***Выпуск 69
Сентябрь 2017***

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл. №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2017

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

**УПРАВЛЕНИЕ
БОЛЬШИМИ
СИСТЕМАМИ**

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 69

Москва – 2017

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Дорофеев А.А., Кузнецов О.П., Кульба В.В., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: член-корр. РАН Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. физ.-мат. наук Шевляков А.А. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИПМ РАН), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), Галаев А.А. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук Зоркальцев В.И. (ИСЭМ СО РАН), проф. Калашников А.О. (ИПУ РАН), проф. Калянов Г.Н. (ГУ ВШЭ), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ключков В.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук, Коргин Н.А. (ИПУ РАН), проф. Курдюков А.П. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук, проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (МФТИ), д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р биол. наук проф. Михальский А.И., д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н. (ИПС РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Орлов А.И. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), проф. Райгородский А.М. (МГУ), проф. Савватеев А.В. (РЭШ), д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), Совлуков А.С. (ИПУ РАН) д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ), проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Арзамас – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – академик РАН Бычков И.В., д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в интернете: ubs.mtas.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

Системный анализ

Корноушенко Е.К.

Массовая оценка многопараметрических объектов при диапазонном задании зависимой переменной 6

Конкина А.С.

Стохастическая модель Девиса с многоточечным начально-конечным условием..... 21

Математическая теория управления

Краснов Д.В., Уткин А.В.

Синтез многофункциональной системы слежения в условиях неопределенности..... 29

Управление техническими системами и технологическими процессами

Гребенюк Г.Г., Крыгин А.А.

Оптимизация энергопотребления домохозяйства на основе прогноза графика максимальной нагрузки бытовых приборов..... 50

**Управление подвижными объектами
и навигация**

Никитин Д.А.

*Адаптивная система управления квадрокоптером
на основе кватернионной модели вращений.....* 76

Казанин Д.К.

*Защита от взаимных столкновений
при формировании строя беспилотных
летательных аппаратов.....* 102

УДК 519.7:004
ББК 22.17

МАССОВАЯ ОЦЕНКА МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПРИ ДИАПАЗОННОМ ЗАДАНИИ ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Корноушенко Е. К.¹

*(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

Массовая оценка объектов в рамках статистического подхода проводится путем построения различных регрессионных моделей и использования итерационных процедур для нахождения коэффициентов этих моделей. Практическое применение таких моделей может быть сопряжено с определенными трудностями (прежде всего из-за слабой помехоустойчивости и моделей, и процедур). В данной работе рассматривается переход от непрерывной зависимой переменной регрессионной модели к дискретной (диапазонной), что не требует нахождения коэффициентов модели и повышает её помехоустойчивость. При этом вместо итерационных процедур можно применять любой алгоритм классификации. В работе предлагается несложный алгоритм классификации, обладающий рядом важных особенностей. Работа алгоритма показана на практическом примере массовой оценки квартир в различных районах г. Сочи.

Ключевые слова: регрессионная модель, массовая оценка, диапазонная целевая переменная, классификация.

1. Введение

Массовая оценка объектов используется в тех случаях, когда большое количество однотипных объектов с аналогичными признаками необходимо оценить с использованием того или иного критерия, а индивидуальный подход к анализу каждого объекта нецелесообразен (или невозможен) по экономическим

¹ Евгений Константинович Корноушенко, доктор технических наук, главный научный сотрудник (ekorno@mail.ru).

соображениям. Подобные ситуации возникают во многих практических задачах (маркетинговых, финансовых, экономических и т.д.). Типичнейшим примером в этом плане является массовая (кадастровая) оценка объектов недвижимости: каждый объект характеризуется совокупностью описывающих его признаков, а в качестве критерия оценки используется тот или иной стоимостный показатель (удельная или полная стоимость объекта, арендная плата и т.п.). В принципе, для оценки объектов недвижимости существует несколько подходов. При статистическом подходе используются регрессионные модели оценивания, что предусматривает наличие исходных выборок с рыночными данными на каждой оцениваемой территории. По каждой такой выборке строится регрессионная модель оценки того или иного типа, которая далее используется для оценки объектов на данной территории. Для нахождения коэффициентов модели применяется метод наименьших квадратов (линейный или нелинейный в зависимости от типа модели), а также итерационные методы Ньютона и Левенберга—Маркуардта. Вопросы построения и анализа регрессионных моделей достаточно полно освещены в литературе.

Несмотря на отработанность технологий построения регрессионных моделей, доступных в различных статистических пакетах (SPSS, SAS, Matlab, NCSS и др.), регрессионным моделям присущ весьма важный недостаток: зависимость коэффициентов модели (и, соответственно, качества оценки) от возмущений, обусловленных

а) техническими причинами: неудовлетворительным качеством исходных данных, наличием помех, неполнотой рыночных данных и т.п.;

б) аналитическими причинами: отличием отображения значений признаков объектов в значения зависимой переменной, реализуемого построенной моделью, от аналогичного (неизвестного) отображения на оцениваемых объектах (такое отличие называется «смещением» (bias) выборки). Подобное отличие, неизбежно присутствующее в практических ситуациях, подробно исследовано в работах [7, 8]; Для адаптации к «смещению» выборки при проведении массовой оценки в работе [3] в рамках регрессионного подхода предложен многомодельный подход

к массовой оценке с использованием нескольких регрессионных моделей. При этом вместо одного «эталонного» отображения, с которым сравниваются отображения оцениваемых на данной территории объектов, появляется несколько «эталонных» отображений. Множество оцениваемых объектов путем предварительной классификации разбивается на подмножества, на каждом из которых «работает» соответствующая регрессионная модель оценки, что позволяет полнее использовать доступную рыночную информацию;

в) экономическими причинами: в изменяющейся экономической ситуации стоимость объектов недвижимости зависит не только от «физических» ценообразующих факторов, но и от изменяющейся экономической ситуации, влияющей на состояние рынка недвижимости. В работах Л.Н. Ясницкого и его коллег [1, 6, 14] показано, как изменения за десятилетие (2005–2015 гг.) таких экономических факторов как цена на нефть, темп роста ВВП, соотношение рубль/доллар и др. влияли на стоимость недвижимости. Подобные факты говорят о том, что для повышения точности оценки в коэффициенты регрессионной модели целесообразно вводить функциональные зависимости влияния того или иного экономического фактора на стоимость оцениваемых объектов. В отличие от обычных («статических») регрессионных моделей модели с такими зависимостями предложено называть «динамическими».

Проведенная в РФ в последние годы регрессионная (кадастровая) оценка объектов недвижимости вызвала массу нареканий, что обусловлено прежде всего слабой развитостью рынков недвижимости в регионах РФ (и, соответственно, плохим качеством используемых регрессионных моделей оценки). В качестве одного из выходов из такой ситуации управляющими органами РФ рассматривается переход от индивидуальных оценок объектов к формированию так называемых ценовых зон¹. Оценка объектов с точностью до попадания в ценовую зону существенно повышает помехоустойчивость оценивания.

¹ Важность такого перехода отражена в постановлении Минэкономразвития РФ (приказ от 7 июня 2016 г. №358).

Методологические вопросы организации и анализа ценовых зон рассмотрены, в частности, в [5]. В первом приближении ценовая зона представляет собой соответствующий участок карты территории с нанесенными на нее границами зоны по географическому признаку. Однако при более детальном анализе распределения цен внутри ценовых зон могут быть обнаружены факты недопустимого расхождения реальных цен объектов с граничными ценами для рассматриваемой «географической» зоны. Важность такого несоответствия весьма критична для (индивидуального) жилищного строительства и личных подсобных хозяйств. По этой причине приходится применять дополнительные меры для уменьшения разброса реальных цен внутри ценовой зоны: выделять внутри зоны особые участки, полнее учитывать рыночную информацию путем включения в регрессионные модели оценки дополнительных факторов влияния (см. выше), усложнять методологию построения моделей оценки (вплоть до использования нейросетевых технологий [6]). К сожалению, такие меры, требующие определенной квалификации оценщиков и соответствующей вычислительной базы, могут быть эффективно реализованы лишь на хорошо развитых рынках недвижимости.

В данной работе для уменьшения количества объектов с ценовыми «выбросами» внутри ценовой зоны предлагается ценовой диапазон каждой зоны определять по рыночной информации, собранной на рассматриваемом рынке недвижимости. Переход к дискретной (категориальной) зависимой переменной при проведении массовой оценки предусматривает замену регрессионных моделей каким-либо алгоритмом (алгоритмами) классификации. Практическая доступность такого подхода определяется, в частности, вычислительной сложностью используемого алгоритма классификации. В данной работе предлагается алгоритм классификации, описанный в [4] и характеризующийся рядом практически важных особенностей. Прежде всего, вместо операции сравнения векторов значений признаков объектов и использования понятия «ближайшей окрестности», на котором базируется большинство известных алгоритмов классификации, в данном алгоритме производится независимое попарное сравнение соответствующих значений

признаков сравниваемых векторов, что не требует предварительной нормализации этих векторов (и упрощает процедуру сравнения качественных признаков). Для значения каждого признака вводится понятие «допустимой близости» других значений этого признака. При этом вместо ближайшей (по выбранной метрике) окрестности классифицируемого объекта исследуется найденная для него совокупность объектов, в которой каждый из объектов «допустимо близок» к классифицируемому объекту по некоторому признаку (признакам). Такая совокупность больше, чем ближайшая окрестность классифицируемого объекта, и имеет больше «возможностей» для правильной классификации.

В качестве примера в рамках данного подхода с использованием диапазонов зависимой переменной рассматривается массовая оценка удельной стоимости квартир (данные 2013 г.) в многоквартирных домах в разных районах г. Сочи¹. Полученная точность отнесения квартир к назначенным четырем ценовым зонам (точность классификации) равна 87,3%, что является неплохим результатом в шкале оценок алгоритмов классификации и свидетельствует о практических перспективах данного подхода.

Замечание 1. В принципе, задача выбора диапазонов для значений зависимой переменной в регрессионной модели может быть решена с использованием соответствующей логистической модели (см., например, [3]), применяемой для классификации объектов. Нецелесообразность практического использования логистической модели при наличии качественных признаков в описаниях объектов обоснована в [12], где указываются осложнения, возникающие при переводе качественных признаков в соответствующие двоичные переменные. Основную трудность при этом представляет этап нахождения коэффициентов логистической модели. Известны различные итеративные процедуры для нахождения коэффициентов [10], и применение этих проце-

¹ На примере этой выборки в [3] рассматривается преимущество многомодельного подхода к массовой оценке по сравнению с традиционным одномодельным подходом.

дур требует определенной подготовки у пользователя и наличия соответствующих вычислительных средств. Все это указывает на практическую нецелесообразность использования логистических моделей в массовой оценке.

2. Классификация объектов при диапазонном задании целевой переменной

2.1. ИСХОДНАЯ ИНФОРМАЦИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исходной информацией является обучающая выборка (ОВ) из n объектов и тестовая выборка (ТВ) из p объектов, причем каждый из объектов этих выборок имеет m признаков X_1, X_2, \dots, X_m . Для краткости вектор значений признаков всякого объекта назовем *описанием* этого объекта. Признаки могут быть количественными (непрерывными, с интервалами возможных действительных значений) и качественными (дискретными, с конечными множествами значений – целочисленных, вербальных и т.п.). Качественные признаки могут быть номинальными, когда значения признака несравнимы, или ординальными, когда на значениях признака введено отношение порядка¹. Для всех объектов выборки считаются известными соответствующие значения зависимой переменной, которую далее назовем *целевой* (*target*) переменной. Будем считать, что диапазон значений целевой переменной для объектов ОВ разбит на конечное число непересекающихся поддиапазонов, количество и размеры которых определяются спецификой решаемой задачи и требованиями пользователя (так что вопросы оптимизации вводимых разбиений здесь не рассматриваются). При введении того или иного разбиения желательно выполнение очевидных требований, чтобы каждый из поддиапазонов не был слишком «узким» и на нем наблюдалось заметное изменение целевой переменной. Таким образом, каждый объект ОВ однозначно принадлежит некоторому поддиапазону – блоку введенного на ОВ разбиения $\pi_{ОВ}$, и номер этого блока как *метка* (*label*) приписывается дан-

¹ В данной работе все значения ординального признака рассматриваются как независимые номинальные признаки.

ному объекту. Разбиение $\pi_{ОВ}$ индуцирует аналогичное разбиение $\pi_{ТВ}$ целевой переменной на объектах ТВ путем сохранения одних и тех же значений целевой переменной, определяющих границы блоков в разбиении $\pi_{ОВ}$, для границ блоков разбиения $\pi_{ТВ}$. При этом блоки разбиений $\pi_{ОВ}$ и $\pi_{ТВ}$ с одними и теми же границами имеют одинаковый номер в этих разбиениях, хотя такие блоки могут содержать разное число объектов в ОВ и ТВ.

Рассматриваемая ниже задача классификации состоит в том, чтобы при использовании описаний объектов ОВ и ТВ и известного разбиения $\pi_{ОВ}$ «вложить» каждый объект ТВ в некоторый блок разбиения $\pi_{ТВ}$ таким образом, чтобы метка этого объекта как результат процедуры классификации совпадала с номером блока разбиения $\pi_{ТВ}$, содержащего этот объект.

2.2. СУТЬ ПРЕДЛАГАЕМОГО АЛГОРИТМА КЛАССИФИКАЦИИ

Как уже сказано во введении, отличие используемого ниже алгоритма от известных алгоритмов классификации состоит в том, что вместо использования понятия «ближайшей окрестности» для тестового объекта для каждого значения признаков в тестовом объекте вводится понятие «допустимой близости» значений соответствующих признаков у объектов ОВ. Два действительных значения x_1 и x_2 назовем *допустимо близкими*, если расстояние между ними не больше некоторой заданной величины d (о выборе значения d см. далее). Для каждого значения x каждого признака X объекта Z из ТВ определяется множество $V(x)$ допустимо близких значений признака X у объектов ОВ. При этом объекты ОВ, у которых значения признака X принадлежат множеству $V(x)$, образуют совокупность $W(x)$. Поскольку каждый объект из ОВ имеет однозначно определенную метку, множество меток объектов, входящих в $W(x)$, образует совокупность $C(x)$, что для наглядности можно отобразить как $x \rightarrow V(x) \rightarrow W(x) \rightarrow C(x)$. Подобная процедура повторяется для всех значений всех признаков классифицируемого объекта Z из ТВ, так что объекту Z с описанием (x_1, \dots, x_m) сопоставляется ансамбль меток $\{C(x_1), \dots, C(x_m)\}$, по которому определенным образом строится матрица весов размера $(K \times m)$ для объекта Z ,

где K – число классов в разбиении π_{OB} . К строкам этой матрицы применяется нелинейная монотонная свертка (о чем сказано ниже), и номер строки с наибольшим значением такой свертки интерпретируется как метка класса, к которому относится тестовый объект Z из ТВ.

2.3. ЭТАПЫ АЛГОРИТМА КЛАССИФИКАЦИИ

А. Определение понятия допустимой близости значений количественных признаков. Для каждого количественного признака X_k определяются его максимальное X_{kmax} и минимальное X_{kmin} значения по всем объектам ОБ и ТВ. Разность этих значений делится на некоторое выбираемое число h (о выборе значения h см. ниже – п. В). Обозначим $\Delta X_k = X_{kmax} - X_{kmin}$ и $d_k = \Delta X_k/h$. Два значения признака X_k назовем d_k -близкими, если модуль их разности не больше d_k . Выбор значения¹ h существенно влияет на качество алгоритма классификации. В данном алгоритме используется простейший вариант – независимость h от k . Качественные признаки здесь рассматриваются как номинальные, т.е. при сравнении двух значений всякого качественного признака X_q эти значения могут либо не совпадать, либо совпадать (при этом $d_k = 0$ не зависимо от h).

Б. Построение матрицы весов для тестового объекта Z из ТВ. Пусть O_z – описание тестового объекта Z , x_{zj} – численное значение признака X_j (количественного или качественного) в описании O_z , а d_j – заданная величина допустимой близости для значений признака X_j . Совокупность значений признака X_j в описаниях объектов ОБ, таких, что эти значения d_j -близки к значению x_{zj} , назовем d_j -окрестностью значения x_{zj} и обозначим эту совокупность как $V(x_{zj}, d_j)$, а совокупность объектов из ОБ, у которых значение признака X_j принадлежит $V(x_{zj}, d_j)$, – как $W(x_{zj}, d_j)$. Пусть M_{zjv} – число объектов из $W(x_{zj}, d_j)$, входящих в блок C_v разбиения π_{OB} . Сопоставим значению x_{zj} число $I_{zjv} = M_{zjv}/(|W(x_{zj}, d_j)| |C_v|)$, где $|W(x_{zj}, d_j)|$ и $|C_v|$ – соответственно

¹ В принципе, для каждого признака X_k можно выбирать свое h_k , но это ведет к значительному увеличению вычислительной сложности алгоритма.

количество элементов в множествах $W(x_{ij}, d_j)$ и C_ν , $1 \leq \nu \leq K$. Найденное число $I_{zj\nu}$ будем рассматривать как вес метки ν в множестве меток объектов из $W(x_{zj}, d_j)$. Структура числа $I_{zj\nu}$ имеет две особенности:

а) отношение $M_{zj\nu}/|W(x_{zj}, d_j)|$ является, по существу, показателем доверия (*confidence*¹) к утверждению, что всякий объект из ОВ со значением признака X_j , d_j — близким к x_{zj} , относится к классу² C_ν ;

б) показатель доверия для класса C_ν взвешивается с множителем $1/|C_\nu|$. Такое взвешивание показателей доверия для разных меток объектов из $W(x_{zj}, d_j)$ введено для коррекции весов $I_{zj\mu}$ соответствующих меток, относящихся к классам различной мощности³.

Подобным образом сформируем множества $M_{zj\mu}$ для объектов из ОВ, содержащих значения признака X_j , d_j — близкие к значению x_{zj} , но принадлежащих другим классам C_μ , $\mu \neq \nu$, и определим соответствующие числа $I_{zj\mu}$. Сформируем K -столбец весов $H_{zj} = (I_{zj1}, I_{zj2}, \dots, I_{zjK})^T$. Заметим, что все координаты в H_{zj} неотрицательные и не большие единицы. Аналогичным образом рассмотрим другие множества $M_{z_s\mu}$, где x_{z_s} — значение признака X_s в описании O_z тестового объекта Z , и найдем для значений признаков, содержащихся в O_{z_s} соответствующие вектор-столбцы $H_{z_s} = (I_{z_s1}, I_{z_s2}, \dots, I_{z_sK})^T$, $s = 1, \dots, m$. Сформируем матрицу $M_Z = (H_{z1}, H_{z2}, \dots, H_{zm})$, в которой m столбцов (по числу признаков в O_z) и K строк (по числу классов в разбиении $\pi_{ОВ}$). Назовем M_Z *матрицей весов* объекта Z . Элементы каждой стро-

¹ Понятие «confidence» используется во многих алгоритмах классификации (см., например, [9, 15]), где подчеркивается важность использования данного понятия для повышения точности классификации.

² Другими словами, это означает степень «доверия» к утверждению, что класс C_ν , содержащий некоторые объекты из ОВ, входящие в $W(x_{zj}, d_j)$, содержит и тестовый объект Z в разбиении $\pi_{ТВ}$.

³ Как показывают многочисленные эксперименты, подобное взвешивание показателей «доверия» способствует повышению точности классификации данного алгоритма.

ки $M_{Z\mu}$, $1 \leq \mu \leq K$, матрицы M_Z неотрицательны и не большие единицы. При этом значения ненулевых элементов в каждой её строке $M_{Z\mu}$ пропорциональны значениям $M_{Zs\mu}$, $s = 1, \dots, m$, а распределение ненулевых элементов по строке $M_{Z\mu}$ характеризует распределение метки класса C_μ по признакам объекта Z . Это позволяет рассматривать строку $M_{Z\mu}$ как совокупность локальных классификаторов для объекта Z , «настроенных» по каждому признаку на метку μ . В работах [2, 11] говорится о том, что классифицирующая способность совокупности локальных классификаторов может быть усилена путем введения какой-либо монотонной нелинейной функции агрегирования. Согласно этой рекомендации применим к каждой строке $M_{Z\mu} = (H_{Z1\mu}, H_{Z2\mu}, \dots, H_{Zm\mu})$ следующую монотонную нелинейную функцию агрегирования:

$$(1) \quad E(M_{Z\mu}) = \left(- \sum_{s=1}^m H_{Zs\mu} \log_2(H_{Zs\mu}) \mid H_{Zs\mu} > 0 \right), 1 \leq \mu \leq K.$$

Поскольку значения $H_{Zs\mu}$ не являются в общем случае вероятностными величинами¹, выражение (1) назовем *псевдоэнтропией* строки $M_{Z\mu}$. Результатом применения свертки (1) к каждой строке матрицы M_Z является вектор $G_Z = (E(M_{Z1}), \dots, E(M_{ZK}))$, который назовем *классифицирующим вектором* для объекта Z . Номер координаты вектора G_Z с наибольшим значением принимается в качестве искомой метки, приписываемой объекту Z . Аналогичным образом производится классификация остальных объектов ТВ (а также объектов, требующих оценки).

Точность алгоритма классификации определяется как отношение числа правильно классифицированных объектов к длине ТВ.

В. Выбор величины h , определяющей величину допустимой близости значений количественных признаков. Этот этап является очень важным, поскольку от выбора значений допустимой

¹ Условие нормировки $\sum_{s=1}^m H_{Zs\mu} = 1$ для переменных $H_{Zs\mu}$ может не выполняться.

близости зависит точность классификации предлагаемого алгоритма. Как уже сказано в п. А, величина d_j допустимой близости значений признака X_j определяется как $d_j = \Delta X_j / h$, $j = 1, \dots, m^1$. Независимость h от признаков позволяет определять приемлемое значение h при достижении приемлемой точности классификации в виде простейшей процедуры одномерного поиска. Как показано в приводимом ниже примере, несмотря на простоту нахождения h , результирующая точность классификации может оказаться весьма неплохой. Таким образом, данный алгоритм следует отнести к алгоритмам, в структуре которых принципиальным образом используется обратная связь по точности классификации (*wrapper approach*).

Вычислительная сложность алгоритма определяется как $O(n^2 m)$. Структура алгоритма содержит лишь циклы, на которых определены соответствующие арифметические вычисления, управляемые условными операторами. Это позволяет реализовать алгоритм в пакете Excel без привлечения более сложных компьютерных средств, что упрощает его практическое использование.

3. Пример: массовая оценка квартир в разных районах г. Сочи при диапазонном задании стоимостей

Исходной информацией является выборка с описаниями квартир в многоквартирных домах, расположенных в разных районах г. Сочи. В качестве ценообразующих признаков выбраны следующие признаки: 1 – площадь квартиры; 2 – район местоположения дома с оцениваемой квартирой; 3 – расстояние от такого дома до делового центра; 4 – расстояние до ж.-д. станции; 5 – расстояние до положительного центра притяжения (рекреации); 6 – расстояние до берега моря. В качестве целевой переменной рассматривается удельная стоимость квартир (дан-

¹ Для качественных признаков, рассматриваемых здесь как номинальные признаки, полагаем $d = 0$.

ные 2013 г.). ОВ содержит 101 квартиру с известной рыночной стоимостью, а ТВ — 401 квартиру.

При назначении диапазонов стоимости для объектов ОВ известные значения удельной стоимости объектов ОВ сортировались по возрастанию, и на результирующей кривой были выбраны 4 диапазона удельной стоимости (руб/кв.м) (ниже после номера диапазона указаны границы удельной стоимости для этого диапазона, а в скобках — число квартир из ОВ, попадающих в этот диапазон): 1 — не более 50 000 (16 квартир); 2 — (50 000, 65 000] (22 квартиры); 3 — (65 000, 80 000] (37 квартир); 4 — более 80 000 (26 квартир).

Работа описанного выше алгоритма классификации начинается с определения величины h (см. пп. А, В) для случая независимости h от признаков. При применении процедуры одномерного поиска используется эвристическое предположение (неоднократно подтверждающееся на практике), что функция, описывающая зависимость точности классификации от h , унимодальна «в большом»¹. В таком случае поведение значений точности классификации в зависимости от h на выбранном интервале указывает направление выбора следующего (суживающегося) интервала. В результате такого поиска было найдено значение $h = 8$, при котором точность классификации, равная 87,3%, считалась приемлемой².

Важной характеристикой всякого алгоритма классификации является его «способность» правильно классифицировать объекты разных классов, несмотря на существенные отличия их мощности. Результаты классификации объектов ТВ и их распределение по диапазонам приведены в таблице 1.

Приведенные характеристики алгоритма свидетельствуют о его практической пригодности для решения задач массовой оценки при задании (или выборе) диапазонов значений целевой переменной.

¹ То есть нарушения монотонности на каждой из ветвей этой унимодальной функции при некоторых h носят локальный характер.

² В принципе, поиск можно продолжить вокруг точки $h = 8$ и т. д.

Таблица 1. Распределение объектов ТВ по диапазонам до и после классификации

Диапазоны	1	2	3	4
До классификации	24	96	228	53
После классификации	0	74	225	51
% заполнения диапазона на ТВ	0	77,1	98,7	96,2

Литература

1. АЛЕКСЕЕВ А.О., ХАРИТОНОВ В.А., ЯСНИЦКИЙ В.Л. *К вопросу об интеллектуальном анализе, массовой оценке и управлении рынком недвижимости регионов России* // Прикладная математика и вопросы управления. – 2017. – №1. – С. 87–99.
2. ВОРОНЦОВ К.В. *Комбинаторный подход к оценке качества обучаемых алгоритмов* // Математические вопросы кибернетики / Под ред. О.Б. Лупанова. – М.: Физматлит, 2004. – Т. 13. – С. 5–36.
3. КОРНОУШЕНКО Е.К. *Многомодельный подход в массовой оценке многопараметрических объектов* // Проблемы управления. – 2014. – №5. – С. 42–49.
4. КОРНОУШЕНКО Е.К. *Алгоритм классификации путем парного сравнения признаков* // Автоматика и телемеханика. – 2017. – №11 (в печати).
5. МИТИН Н.А., НЕЙМАН Е.И., СМОЛЯК А.С., ФИНГЕРТ А.Б. *Применение когнитивных технологий для оценки недвижимости* // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2015. – №112.
6. ЯСНИЦКИЙ Л.Н., ЯСНИЦКИЙ В.Л. *Разработка и применение комплексных нейросетевых моделей массовой оценки и прогнозирования стоимости жилых объектов на примере рынков недвижимости Екатеринбурга и Перми* // Имущественные отношения в Российской Федерации. – 2017. – №3(186). – С. 68–84.
7. *Biased Sampling and Extrapolation.* – URL: <https://www.ma.utexas.edu/users/mks/statmistakes/biasedsampling.html> (дата обращения: 8.09.2017).

8. BREIMAN L. *Arcing Classifiers* // *Annals of Statistics*. – 1998. – Vol. 26, No. 3. – P. 801–849. – URL: www.cs.iastate.edu/~honavar/boost4.pdf (дата обращения: 8.09.2017).
9. JING LEI *Classification with Confidence* – URL: www.stat.cmu.edu/~jinglei/conf_class_R2.pdf (дата обращения: 8.09.2017).
10. *The Logistic Regression Analysis in SPSS*. – URL: www.statisticssolutions.com/the-logistic-regression-analysis-in-spss/ (дата обращения: 08.09.2017).
11. SPIRIN N., VORONTSOV K. *Learning to Rank with Nonlinear Monotonic Ensemble*. – URL: www.machinelearning.ru/wiki/images/9/96/Voron11spirin-eng.pdf (дата обращения: 8.09.2017).
12. SRINIVASAN M. *Is logistic regression really a good choice for categorical variables?* – URL: www.quora.com/Is-logistic-regression-really-a-good-choice-for-categorical-variables (дата обращения: 8.09.2017).
13. URALSKY D., MARTIN J.H. *Logistic Regression as a Classifier* // *Speech and Language Processing. Draft*. – 2015. – 423 p. – URL: <https://web.stanford.edu/~jurafsky/slp3/7.pdf> (дата обращения: 08.09.2017).
14. YASNITSKY L.N., YASNITSKY V.L. *Technique of design of integrated economic and mathematical model of mass appraisal of real estate property by the example of Yekaterinburg housing market* // *J. of Applied Economic Sciences*. – Winter 2016. – Vol. XI. – Iss. 8 (46). – P. 1519–1530.
15. ZARAGOZA H., D'ALCHE-BUC F. *Confidence Measures for Neural Network Classifiers*. – URL: www.hugo-zaragoza.net/academic/pdf/hugoz_ipmu98.pdf (дата обращения: 8.09.2017).

MASS APPRAISAL OF MULTIPARAMETER OBJECTS WITH RANGE DEPENDENT VARIABLE

Eugeny Kornoushenko, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495) 334-90-00).

Abstract: Statistical mass appraisal of objects is carried out by constructing various regression models and using iterative procedures to find the coefficients of these models. Practical application of such models can be fraught with certain difficulties (first of all, due to weak noise immunity of these models). In this paper, it is proposed in mass appraisal to move from a continuous dependent variable of regression model to a discrete one, which does not require finding the coefficients of the model and increases its noise immunity. Instead of iterative procedures, any classification algorithm can be used in this case. In comparison with the regression model, classification is a more convenient tool in practical applications, because various information processing mechanisms implemented in appropriate algorithms can be used. In connection with the unsatisfactory quality of the cadastral valuation of real estate conducted earlier in the Russian Federation, a course has been chosen by the Ministry of Economic Development to form and evaluate so called price zones. The value of the price range within the zone depends on the properties of the objects entering the zone. In this regard, the choice a discrete dependent variable in models can be practically used in the formation of price zones. In paper, we offer a simple classification algorithm for the formation of price zones. Application of the algorithm is shown by the practical example of a classification of apartments in various districts of Sochi.

Keywords: regression model, mass appraisal, range target variable, classification.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Д.А. Новиковым.*

*Поступила в редакцию 02.04.2017.
Опубликована 30.09.2017.*

УДК 517.9
ББК 22.1 6

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕВИСА С МНОГОТОЧЕЧНЫМ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Конкина А. С.¹

(Южно-Уральский государственный университет,
Челябинск)

Эволюция свободной поверхности фильтрующейся жидкости в пласте ограниченной мощности моделируется уравнением Девиса с однородными условиями Дирихле. Приводится разрешимость многоточечной начально-конечной задачи для стохастической модели Девиса. Основной результат – доказательство однозначной разрешимости эволюционной модели с аддитивным белым шумом и многоточечным начально-конечным условием.

Ключевые слова: белый шум, винеровский K -процесс, модель Девиса.

1. Введение

Пусть U и F – банаховы пространства, где заданы операторы $L \in L(U; F)$ (т.е. линеен и непрерывен) и $M \in Cl(U; F)$ (т.е. линеен, замкнут и плотно определен), причем $M(L; p)$ -секториален, $p \in \{0\} \cup N$.

Пусть выполняются условия:

$$(A1) \quad U^0 \oplus U^1 = U, \quad (F^0 \oplus F^1 = F),$$

которое имеет место либо в случае сильной $(L; p)$ -секториальности оператора M справа (слева), $p \in \{0\} \cup N$, либо рефлексивности пространства U (F).

¹ Александра Сергеевна Конкина, аспирант кафедры математического и компьютерного моделирования (alexandra.konkina@yandex.ru).

$$(A2) \quad L_1^{-1} \in L(F^1; U^1),$$

которое имеет место в случае сильной $(L; p)$ -секториальности оператора M , $p \in \{0\} \cup N$. Ранее было показано, что (A1) вместе с условием $(L; p)$ -секториальности оператора M , $p \in \{0\} \cup N$, дает сильную $(L; p)$ -секториальность оператора M справа (слева), $p \in \{0\} \cup N$, а если к ним добавить условие (A2), то получим сильную $(L; p)$ -секториальность оператора M , $p \in \{0\} \cup N$ [2]. Тогда оператор $G = M_0^{-1}L_0 \in L(U^0)$ нильпотентен степени p , а оператор $S = L_1^{-1}M_1 \in Cl(U^1)$ секториален. (A3) еще одно важное условие на относительный спектр оператора M [1].

Построим относительно спектральные проекторы [1] $P_j \in L(U)$ и $Q_j \in L(F)$, $j = 1, \dots, n$, которые имеют вид

$$(1) \quad \begin{aligned} P_j &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} (\mu L - M)^{-1} L d\mu, Q_j = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} L(\mu L - M)^{-1} d\mu, j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

причем оказывается, что при условии $(L; p)$ -секториальности оператора M и условий (A1), (A2), $P_j P = P P_j = P_j$ и $Q_j Q = Q Q_j = Q$, $j = 1, \dots, n$. Значит, в данном случае существует проектор

$$P_0 = P - \sum_{j=1}^n P_j, P_0 \in L(U).$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим эволюционную модель Девиса

$$(2) \quad (\lambda - \Delta)u_t = \alpha \Delta u - \beta \Delta^2 u + f,$$

$$(3) \quad u(x, t) = \Delta u(x, t) = 0, (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Уравнение (2) вместе с условиями (3), где свободный член $f = f(t)$ – белый шум, можно привести к стохастическому уравнению соболевского типа

$$(4) \quad Ldu = Mu dt + NdW.$$

Здесь U – банахово пространство, F – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, операторы

$L \in L(U; F)$ и $M \in Cl(U; F)$, а $W = W(t)$ $-F$ -значный винеровский K -процесс.

Возьмем $\tau_0 = 0$ и $\tau_j \in \mathbb{R}_+$, если $\tau_{j-1} < \tau_j$ для $j = 1, \dots, n$. Уравнение (4) можно дополнить многоточечным начально-конечным условием

$$(5) \quad \lim_{t \rightarrow \tau_0^+} P_0(u(t) - \xi_0) = 0, P_j(u(\tau_j) - \xi_j) = 0, j = \overline{1, n}.$$

где P_j – относительно спектральные проекторы [2].

Вектор-функцию $u \in C^1(\tau_0, \tau_n; U) \cap C(\tau_0, \tau_n; U)$, удовлетворяющую уравнению (4), назовем его *решением*; решение $u = u(t)$ уравнения (4), удовлетворяющее условию (5), назовем *решением многоточечной начально-конечной задачи* (4), (5).

2. Пространство шумов

Пусть $\Omega \equiv (\Omega, A, P)$ – полное вероятностное пространство, снабженное борелевской σ -алгеброй. Назовем случайной величиной измеримое отображение. Отметим, что все случайные величины имеющие нормальное распределение (т.е. гауссовы), содержатся в пространстве L_2 .

Рассмотрим два отображения – $f: I \rightarrow L_2$, ставящее в соответствие каждому $t \in I$ случайную величину $\zeta \in L_2$, и $g: L_2 \times \Omega \rightarrow R$, ставящее в соответствие каждой паре (ζ, ω) точку $\zeta(\omega) \in R$, где $I \subset R$ – некоторый промежуток. Стохастический процесс – это отображение $\eta: I \times \Omega \rightarrow L_2$, имеющее вид $\eta = \eta(t, \omega) = g(f(t), \omega)$. Отметим, что стохастический процесс $\eta = \eta(t, \bullet)$ (т.е. если зафиксировать $t \in I$) является случайной величиной, а стохастический процесс $\eta = \eta(\bullet, \omega)$ (т.е. если зафиксировать $\omega \in \Omega$) будет называться (выборочной) траекторией. Назовем непрерывным стохастический процесс η , если при почти всех (п.в.) $\omega \in \Omega$ траектория $\eta(t, \omega)$ непрерывна на I .

Обозначим символом $P \equiv P(I \times \Omega; U)$ пространство стохастических процессов. Пространство непрерывных стохастических процессов, чьи случайные величины принадлежат L_2 , обозначим CL_2 , т.е. $\eta \in CL_2$, если $\eta(t, \bullet) \in L_2$ при

всех $t \in I$. Отметим что CL_2 является подпространством P . Отметим, что пространство CL_2 содержит, в частности, те стохастические процессы, все траектории которых п.н. непрерывны, а все (независимые) случайные величины – гауссовы. Рассмотрим оператор $K \in L(R)$, спектр которого $\sigma(K)$ положителен, т.е. $\sigma(K) \in R_+$. Это возможно, когда $\sigma(K)$ положительно определен и самосопряжен. Последовательность собственных значений оператора K обозначим через $\{\lambda_k\}$. Пусть спектр $\sigma(K)$ дискретен, конечнократен и сгущается только к точке нуль, тогда $\{\lambda_k\}$ занумеруем по невозрастанию с учетом их кратности. Оператор K называется *ядерным*, если

$$\text{Tr}K = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < +\infty. \text{ Отметим, что линейная оболочка множества}$$

$\{\varphi_k\}$ соответствующих собственных векторов оператора K плотна в U . Рассмотрим *броуновские движения*, иначе говоря последовательность $\{\xi_k^{\zeta}\}$.

Стохастический процесс

$$(6) \quad \beta(t) \equiv \beta(t, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k^{\zeta} \sin \frac{\pi}{2} (2k+1), \quad t \in \bar{R}_+,$$

обладающий свойствами

(W1) $\beta(0) = 0$ п.в. на Ω , и траектории п.н. непрерывны на \bar{R}_+ .

(W2) Траектории винеровского K -процесса п.н. ни в одной точке недифференцируемы $t \in \bar{R}_+$ и на любом промежутке $I \subset \bar{R}_+$ имеют неограниченную вариацию. называется винеровским K -процессом.

При любых ядерном операторе $K \in L(U)$ и последовательности броуновских движений $\{\xi_k^{\zeta}\}$ винеровский K -процесс $W \in CL_2$:

$$(7) \quad W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \beta_k(t) \phi_k,$$

Для разрешимости задачи (4), (5) нам понадобится еще одно условие

$$(A4) \quad QN = N,$$

тогда формальное решение $u = u(t)$ многоточечной начально-конечной задачи для уравнения (4) будет иметь вид

$$(8) \quad u(t) = U_0^t \xi_0 + \sum_{j=1}^m \left[\int_{\tau_j}^t U^{t-s} L_{1j}^{-1} Q_j N dW(s) + U^{t-\tau_j} \xi_j + L_{1j}^{-1} Q_j N W(t) \right].$$

Пусть оператор M (L, p) -секториален и выполнены условия (A1)–(A4). Тогда для любых U^1 -значных гауссовых случайных величин $\xi_j, j = 1, \dots, n$, не зависящих от $W(t)$ и удовлетворяющих условию (7), существует единственное сильное решение задачи (4), (5), которое к тому же имеет вид (8).

3. Модель Девиса

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . Рассмотрим теперь стохастическое эволюционное уравнение

$$(9) \quad (\lambda - \Delta) du = \alpha \Delta u dt - \beta \Delta^2 u dt + N dW$$

с краевыми условиями

$$(10) \quad u(x, t) = \Delta u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+.$$

Пусть $F = L_2(\Omega)$ и $U = \{u \in W^2_2(\Omega) : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$. Операторы L и M заданы формулами $L = \lambda - \Delta$ и $M = \alpha \Delta - \beta \Delta^2$,
 $\text{dom } M = U \cap \{u \in W^4_2(\Omega) : \Delta u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$.

Очевидно, при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ оператор $L \in \mathcal{L}(U; F)$, а при всех $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор $M \in \mathcal{C}l(U; F)$. При всех $\lambda \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ оператор M сильно $(L, 0)$ -секториален.

Пусть ϕ_k – ортонормированный набор собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ в области Ω , занумерованный по не возрастанию собственных значений λ_k с учетом их кратности. Поскольку

$$(\mu L - M)u = \sum_{k=1}^{\infty} (\mu \lambda - (\mu + \alpha) \lambda_k + \beta \lambda_k^2) \langle u, \phi_k \rangle \phi_k$$

при любых $u \in \text{dom } M, \mu \in \mathbb{C}$, то

$$(11) \quad (\mu L - M)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \phi_k \rangle}{\beta \lambda_k^2 - \alpha \lambda_k + \mu(\lambda - \lambda_k)} \phi_k.$$

Ряд в (8) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте в C , не содержащем точек

$$(12) \mu_k = \lambda_k \frac{\beta\lambda_k - \alpha}{\lambda_k - \lambda}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Поскольку спектр $\sigma(\Delta)$ отрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $-\infty$, то из (12) следует, что L -спектр $\sigma^L(M)$ оператора M вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $-\infty$. При рассмотрении задачи ограничимся только значениями параметра λ , лежащими в спектре оператора Δ . Поэтому из множества чисел (12) следует удалить числа μ_k с номерами k , при которых $\lambda = \lambda_k$.

Итак, пусть $\lambda \in \sigma(\Delta)$, тогда получим

$$(\mu L - M)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty'} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\beta\lambda_k^2 - \alpha\lambda_k + \mu(\lambda - \lambda_k)} + \sum_{\lambda_k=\lambda} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\beta\lambda^2 - \alpha\lambda},$$

$$R_{\mu}^L(M) = \sum_{k=1}^{\infty'} (\mu + \lambda_k \frac{\beta\lambda_k - \alpha}{\lambda - \lambda_k})^{-1} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k = L_{\mu}^L(M),$$

$$(\nu L - M)^{-1} L_{\mu}^L(M) = \sum_{k=1}^{\infty'} (\mu + \lambda_k \frac{\beta\lambda_k - \alpha}{\lambda - \lambda_k})^{-1} \times \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\beta\lambda_k^2 - \alpha\lambda_k + \mu(\lambda - \lambda_k)},$$

где штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых с номерами k такими, что $\lambda = \lambda_k$. Отсюда нетрудно получить сильную L -спектральность оператора M . Простоты ради возьмем оператор $N = Q$, тогда условие (7) очевидно выполняется. Обозначим через $\{\mu_k\}$ последовательность собственных значений оператора Лапласа Δ в области Ω с условием (3), занумерованную по невозрастанию с учетом их кратности, а через $\{\varphi_k\}$ — последовательность собственных функций. Тогда

$$(13) u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\nu_k t} \langle \xi, \varphi_k \rangle \varphi_k + \sum_{j: \nu_j \in \sigma_j^L(M)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_k}}{\lambda - \mu_k} \int_{\tau_j}^t e^{\nu_k(t-s)} d\beta_k(s) \varphi_k,$$

где $\nu_k = \frac{(\alpha\mu_k - \beta\mu_k^2)}{(\alpha - \mu_k)}$ — точки L -спектра оператора M , $\{\lambda_k\}$ — собственные значения специальными образом построенного

ядерного оператора M . Штрих у знака суммы означает отсутствие членов таких, что $\lambda = \mu_k$.

Пусть выполнены условия леммы и теоремы, тогда формула (13) дает существенное сильное решение задачи (2), (3), (5).

Литература

1. SVIRIDYUK G.A., FEDOROV V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
2. ZAGREBINA S.A. *Multipoint initial-final value problem for the linear model of plane-parallel thermal convection in viscoelastic incompressible fluid* // Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software". – 2014. – Vol. 7, Iss. 3. – P.5–22.

STOCHASTIC DAVIS MODEL WITH MULTIPOINT INITIAL-FINAL VALUE

Alexandra Konkina, South Ural State University, Chelyabinsk, assistant (alexandra.konkina@yandex.ru).

Abstract: The evolution of the free surface of the filtering fluid in a reservoir of limited power is modeled by the Davis equation with homogeneous Dirichlet conditions. Depending on the nature of the free term describing the internal source of the liquid, the model will be deterministic or stochastic. The deterministic model has been studied in various aspects by many researchers with different initial (initial-final value conditions). The stochastic model is studied here. Several approaches to solving these problems are mentioned, differing in their understanding of the “white noise”. The definition of a solution is given, as well as definitions of the used stochastic processes. The solvability of the multipoint initial-final problem for the stochastic Davis model is given in the article. The main result is the proof of the unique solvability of the evolutionary model with an additive white noise and a multipoint initial-final condition using linear algebra and spectral methods.

Keywords: white noise, Wiener K -process, Davis model.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.Г. Кушнером.

*Поступила в редакцию 22.06.2017.
Опубликована 30.09.2017.*

УДК 62.50
ББК 32.817

СИНТЕЗ МНОГОФУНКЦИОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СЛЕЖЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ¹

Краснов Д. В.², Уткин А. В.³
(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Формализован класс аффинных нелинейных систем с одним входом и одним выходом, для которых относительный порядок эквивалентной формы «вход–выход» инвариантен по отношению к наличию внешних несогласованных возмущений. Для данного класса систем разработаны методы синтеза многофункциональной системы слежения в условиях параметрической неопределенности модели объекта управления и неполных измерений. Для информационного обеспечения разрывного управления разработан оригинальный метод синтеза наблюдателя пониженного порядка для оценивания смешанных переменных (комбинаций переменных состояния, внешних воздействий и их производных) по измерениям только ошибки слежения. В данном наблюдателе с помощью линейных корректирующих воздействий с насыщением реализуется метод разделения движений ошибок наблюдения.

Ключевые слова: нелинейные аффинные системы с одним входом и одним выходом, слежение, разрывное управление, наблюдатель состояния, инвариантность, декомпозиция.

¹ Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ №15-08-01543А и Гранта президента МД-5336.2016.8.

² Дмитрий Валентинович Краснов, инженер-программист (dim93kr@mail.ru).

³ Антон Викторович Уткин, кандидат технических наук (utkin-av@rambler.ru).

1. Введение

Объектом исследования являются нелинейные системы автоматического управления с одним входом и одним выходом (SISO-системы) при действии внешних несогласованных (т.е. не принадлежащих пространству управления) возмущений и параметрической неопределенности модели объекта управления. Рассматривается задача слежения выходной переменной за заданным сигналом в предположении, что только ошибка слежения подлежит прямым измерениям. Синтез инвариантной системы слежения в указанных условиях нетривиален и требует привлечения и разработки специальных методов. Стандартные методы компенсации или подавления неопределенностей здесь непосредственно не применимы, так как требуют выполнения условий согласования [3, 4, 10, 11, 13, 18], поэтому первостепенная роль в решении данной задачи отводится методам информационного обеспечения базового закона управления. В условиях неполных измерений этим целям служат наблюдатели состояния и возмущений. В классической постановке для реализации наблюдателей требуются параметрически определенные модели объекта управления и внешних возмущений [1, 12]. Однако адекватное моделирование возмущений в условиях постоянно меняющихся внешних факторов представляется практически неразрешимой проблемой.

В рассматриваемой нелинейной SISO-системе с несогласованными возмущениями задача оценивания по отдельности неизмеряемых переменных вектора состояния и внешних возмущений не имеет решения без расширения пространства состояния за счет ввода динамических моделей, имитирующих внешние воздействия. В предположении, что внешние воздействия являются достаточно гладкими, ограниченными функциями времени, в данной работе в качестве основы для построения принят метод, в котором математическая модель объекта управления представляется в канонической форме «вход–выход» относительно смешанных переменных (комбинаций переменных состояния, внешних воздействий и их производных) [2, 6, 7, 8, 14]. Такой подход не требует выполнения в реальном времени

прямых и обратных замен переменных, так как задачи управления и наблюдения решаются относительно одних и тех же переменных нового координатного базиса.

В разделе 2 формализован класс аффинных систем, обладающих инвариантностью канонической формы «вход–выход», и, как следствие, сохраняющий свойства полной управляемости и наблюдаемости, присущие невозмущенной системе, при переходе к новому координатному базису смешанных переменных. Смешанные переменные формируются путем диффеоморфных замен переменных состояния с аффинным вхождением внешних воздействий и их производных, возникающих в процессе получения эквивалентной системы «вход–выход» при многократном дифференцировании ошибки слежения. Существенно, что в полученной канонической форме «вход–выход» условия согласования выполняются. Это позволило синтезировать базовый закон разрывного управления относительно смешанных переменных, обеспечивающий стабилизацию ошибки слежения инвариантно по отношению к наличию внешних возмущений и неопределенности множителя перед управляющим воздействием.

Основной результат представлен в разделе 3, где вводится наблюдатель пониженного порядка смешанных переменных. Формализована процедура синтеза линейных корректирующих воздействий с насыщением, в которой реализован метод разделения движений в пространстве ошибок наблюдения. В разделе 4 приведены результаты моделирования разработанных алгоритмов для системы управления перевернутым маятником.

2. Класс рассматриваемых систем. Базовый закон управления

Рассматривается класс нелинейных SISO-систем, математическая модель которых представима в так называемом треугольном виде [8]:

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}) + q_i^T(x_1, x_2, \dots, x_i)\eta, \quad i = \overline{1, n-1}; \\ \dot{x}_n &= f_n(x) + q_n^T(x)\eta + b_n(x)u, \end{aligned}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in X \subset R^n$ – вектор состояния; $u \in R$ – управление, $x_1(t) \in X_1 \subset R$ – выходная (измеряемая и регулируемая) переменная; $\eta(t) = (\eta_1(t), \dots, \eta_s(t))^T \in R^s$ – вектор внешних возмущений, компоненты которого полагаются неизвестными гладкими ограниченными функциями времени с ограниченными производными в общем случае до $(n-1)$ -го порядка:

$$(2) \quad \left| \eta_j^{(i)}(t) \right| \leq N_{ij} = \text{const} > 0, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{1, s}.$$

Функции $f_i(x_1, \dots, x_{i+1})$ и элементы вектор-строк $q_i^T(x_1, \dots, x_i) \in R^{1 \times s}$, $i = 1, \dots, n-1$, являются непрерывно дифференцируемыми по всем своим аргументам не менее $n-1$ раз и

$$(3) \quad \frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \neq 0, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$(4) \quad b(x) \neq 0.$$

Условия (3), (4) и аналогичные им ниже имеют локальный характер и выполняются в некоторой открытой ограниченной рабочей области изменения переменных $x(t) \in X \subset R^n \quad \forall t \geq 0$, которая определяется технологией процесса. Вместе с тем допускается, что в системе (1) все функции f_i , q_i^T , $i = 1, \dots, n$, $b(x)$ могут содержать неопределенные параметры, но при этом для всех допустимых диапазонов изменения параметров структурные свойства (3)–(4) остаются неизменными.

Ставится задача синтеза обратной связи по состоянию и внешним воздействиям, обеспечивающей слежение выходной переменной $x_1(t)$ за заданным сигналом $g(t) \in X_1 \subset R$, который полагается гладкой, ограниченной функцией времени с ограниченными производными:

$$(5) \quad \left| g^{(i)}(t) \right| \leq G_i = \text{const} > 0, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{0, n}.$$

Как правило, в большинстве исследований по синтезу следящих систем в качестве объекта управления рассматриваются системы (1) с согласованными возмущениями, а именно

$$(6) \quad q_i^T(x_1, \dots, x_i) \equiv \bar{0}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

для которых выражения (3) являются условиями локальной наблюдаемости переменных вектора состояния относительно выхода $x_1(t)$, а выражения (3)–(4) – условиями управляемо-

сти [16]. Благодаря специальному составу аргументов функций $f_i(x_1, \dots, x_{i+1})$, $i = 1, \dots, n-1$, такая система является носителем структуры «вход u – выход x_1 » с относительной степенью n , т.е. для данной системы существует диффеоморфная замена локальных переменных, приводящая к каноническому виду, в котором выход x_1 от входа u с ненулевым коэффициентом усиления будет отделен n интеграторами:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) = \bar{x}_2, \quad \partial f_1 / \partial x_2 \neq 0; \\
 \dot{x}_2 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2, x_3) = h_2(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_3, \\
 &\quad \partial f_1 / \partial x_2 \neq 0, \quad \partial f_2 / \partial x_3 \neq 0 \Rightarrow \partial h_2 / \partial x_3 \neq 0; \\
 \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^i \frac{\partial h_{i-1}}{\partial x_j} f_j(x_1, \dots, x_{j+1}) = h_i(x_1, \dots, x_{i+1}) = \bar{x}_{i+1}, \\
 &\quad \partial h_i / \partial x_{i+1} \neq 0, \quad i = \overline{3, n-1}; \\
 \dot{x}_n &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x_j} f_j + \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x_n} [(q_n^T(x)\eta + b_n(x)u)] = \\
 &= h(x) + q^T(x)\eta + b(x)u, \quad q^T(x) = \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x_n} q_n^T, \quad b(x) = \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x_n} b_n \neq 0.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Каноническая форма (7) является стандартной основой для синтеза систем слежения и наблюдения, где проблемы обеспечения инвариантности по отношению к согласованным возмущениям решаются в рамках тех или иных методов в зависимости от типа неопределенностей путем их подавления или компенсации.

Если общий порядок исходной системы больше, чем ее относительный порядок, равный n , то входо-выходное отображение такой системы включает подсистемы внешней и внутренней динамики [1, 10]. Если решения подсистемы внутренней динамики ограничены, то уравнения (7) можно трактовать как подсистему внешней динамики минимально фазовой системы, а часть внешних возмущений – как переменные внутренней динамики.

В качестве основы для синтеза базового закона управления выходной переменной системы (1) с несогласованными возмущениями целесообразно использовать каноническое представление относительно смешанных переменных – комбинаций переменных состояния, внешних воздействий и их производных [2, 6, 7, 8, 14]. Данный подход к задаче синтеза диктует требования к классу допустимых систем (1), которые обоснуем в следующей лемме.

Лемма 1. Если в системе (1) выполняются условия (3), (4) и элементы вектор-строк $q_i^T \in R^{1 \times s}$, $i = 1, \dots, n-1$, постоянные (в том числе равны нулю) и/или не содержат иных аргументов, кроме указанных

$$(8) \quad q_i^T(x_1, \dots, x_i), \quad i = \overline{1, n-1},$$

то тогда система (1), (3), (4), (8) является носителем структуры «вход и – выход x_1 » в координатном базисе смешанных переменных с относительной степенью n .

Доказательство. Для получения канонического вида нужно продифференцировать первое уравнение системы (1) $(n-1)$ раз. В отличие от системы с согласованными возмущениями (6) этот процесс порождает производные внешних возмущений до $(n-1)$ -го порядка. С учетом обозначений системы (7) имеем:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) + q_1^T(x_1)\eta = y_2, \quad \partial f_1 / \partial x_2 \neq 0; \\ \dot{y}_2 &= h_2(x_1, x_2, x_3) + \bar{q}_2(x_1, x_2, \eta, \dot{\eta}) = y_3, \quad \partial h_2 / \partial x_3 \neq 0, \\ \bar{q}_2(x_1, x_2, \eta, \dot{\eta}) &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} q_1^T(x_1)\eta + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} q_2^T(x_1, x_2)\eta + \frac{d}{dt} q_1^T(x_1)\eta; \\ \dot{y}_i &= h_i(x_1, \dots, x_{i+1}) + \bar{q}_i(x_1, \dots, x_i, \eta, \eta^{(1)}, \dots, \eta^{(i-1)}) = y_{i+1}, \\ \frac{\partial h_i}{\partial x_{i+1}} \neq 0, \quad \bar{q}_i &= \sum_{j=1}^i \frac{\partial h_{i-1}}{\partial x_j} q_j^T(x_1, \dots, x_j)\eta + \frac{d}{dt} \bar{q}_{i-1}, \quad i = \overline{3, n-1}; \\ \dot{y}_n &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x_j} f_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x_j} q_j^T \eta + \frac{d}{dt} \bar{q}_{n-1} + \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x_n} b_n u, \end{aligned}$$

и система (1), (3), (4), (8) представима в каноническом виде

$$(9) \quad \dot{x}_1 = y_2, \quad \dot{y}_i = y_{i+1}, \quad i = \overline{2, n-1}; \quad \dot{y}_n = h(x) + \bar{q}(x, \eta) + b(x)u,$$

где $h(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x_j} f_j$, $b(x) = \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x_n} b_n \neq 0$, $\bar{q} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x_j} q_j^T \eta + \frac{d}{dt} \bar{q}_{n-1}$, $\bar{\eta} = \text{col}(\eta, \eta^{(1)}, \dots, \eta^{(n-1)})$.

Как видим, наличие внешних, несогласованных возмущений с входными каналами (8), во-первых, не влияет на выполнение условий $\partial h_i / \partial x_{i+1} \neq 0$, $i = 2, \dots, n-1$, следовательно, переход к смешанным переменным является диффеоморфным. Во-вторых, в канонической системе (9) управление появляется только в последнем, n -м уравнении, коэффициент перед управлением $b(x)$ не равен нулю и не зависит от внешних возмущений, т.е. относительная степень системы (1) с несогласованными возмущениями равна n . Лемма 1 доказана.

Итак, выделен класс нелинейных аффинных систем (1), (3) (4), в которых относительная степень, присущая системе с согласованными возмущениями (6), не изменится при появлении несогласованных возмущений, если условие (8) выполнено.

Заметим, что если условия (8) не выполнены, то тогда в процессе получения канонического вида возможно «досрочное» появление управления в i -м ($i = 2, \dots, n-1$) уравнении с множителем, зависящим от возмущения, что изменяет относительную степень, а вопрос об управляемости останется открытым.

При выполнении условий (8) в новом координатном базисе системы (9) смешанные переменные

$$y_{i+1} = h_i(x_1, \dots, x_{i+1}) + \bar{q}_i(x_1, \dots, x_i, \eta, \eta^{(1)}, \dots, \eta^{(i-1)}), \quad i = \overline{1, n-1},$$

наблюдаемы относительно выхода x_1 . Система управляема, внешние возмущения и их производные принадлежат пространству управления, что позволяет применить к системе (9) известные методы обеспечения инвариантности для решения задач управления выходной переменной.

Так, для решения поставленной задачи слежения можно получить канонический вид относительно ошибки слежения $e_1 = x_1 - g$ и ее производных. Существенно, что в уравнении $\dot{e}_1 = f_1(x_1, x_2) + q_1^T(x_1)\eta - \dot{g}$ множитель перед внешним воздействием \dot{g} постоянный, т.е. удовлетворяет условиям (8), следо-

вательно, форма «вход u – выход e_1 » имеет такой же относительный порядок n , что и система (9), а для системы относительно новых смешанных переменных $e_1 = x_1 - g$

$$(10) \quad e_{i+1} = h_i(x_1, \dots, x_{i+1}) + \bar{q}_i - g^{(i)}, i = \overline{1, n-1},$$

структурные свойства наблюдаемости и управляемости сохраняются. В силу (10) получим систему «вход u – выход e_1 » вида

$$(11) \quad \dot{e}_i = e_{i+1}, i = \overline{1, n-1}; \dot{e}_n = \psi(x, t) + b(x)u,$$

$$\psi(x, t) = h(x) + \bar{q}(x, \bar{\eta}) - g^{(n)},$$

которая служит основой для дальнейших построений. В системе (11) $e = (e_1, \dots, e_n)^T \in R^n$ – вектор состояния; $\bar{q}(x, \bar{\eta}) - g^{(n)}$ – внешние воздействия. С учетом (2)–(5) будем полагать, что при допустимых вариациях параметров и $\forall x(t) \in X \subset R^n, t \geq 0$, имеют место оценки

$$(12) \quad |\psi(x, t)| \leq F, \bar{b} \leq |b(x)| \leq \bar{\bar{b}}, |e_i(t)| \leq E_i, i = \overline{1, n},$$

где $E_i, F, \bar{b}, \bar{\bar{b}}$ – известные константы, полученные исходя из технологических ограничений и наихудшего расчетного случая, знак $b(x)$ постоянен и известен.

Базовый закон комбинированного управления, компенсирующий действие внешних возмущений [8], в данном случае не реализуем из-за неопределенности множителя $b(x)$. Для обеспечения инвариантности к имеющимся неопределенностям воспользуемся «силовыми» методами их подавления.

Ориентируясь на практически значимый класс электромеханических систем, в которых управляющее воздействие имеет заведомо разрывной характер, вводится следующий базовый закон разрывного управления

$$(13) \quad u = -M \operatorname{sgn} b(x) \cdot \operatorname{sgn} s, \operatorname{sgn} s = \begin{cases} 1, & s > 0, \\ -1, & s < 0; \end{cases}$$

$$(14) \quad s = c^T e = c_1 e_1 + \dots + c_{n-1} e_{n-1} + e_n,$$

где $c_i = \operatorname{const} > 0$ – коэффициенты гурвицева полинома, а именно, корни λ_i уравнения $\lambda^{n-1} + c_{n-1} \lambda^{n-2} + \dots + c_2 \lambda + c_1 = 0$ – действительные и/или комплексно сопряженные и $\operatorname{Re} \lambda_i < 0, i = 2, \dots, n-1$.

Найдем нижнюю оценку для выбора амплитуды разрывного управления $M = const > 0$ из достаточного условия $s\dot{s} < 0$ [13]. В силу (11)–(14) имеем:

$$(15) \quad \begin{aligned} s\dot{s} &= s \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i e_{i+1} + \psi(x, t) - bM \operatorname{sgn} b \cdot \operatorname{sgn} s \right) \leq \\ &\leq |s| \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i E_{i+1} + F - \bar{b}M \right) < 0 \Rightarrow M > \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i E_{i+1} + F \right) / \bar{b}. \end{aligned}$$

При выбранной на основе (15) амплитуде за конечное время

$$0 < t_s \leq \sum_{i=1}^n c_i E_i / \left(\bar{b}M - \sum_{i=1}^{n-1} c_i E_{i+1} - F \right), \quad c_n = 1$$

на поверхности $s = 0$ в пространстве R^n возникнет скользящий режим. При $t > t_s$ динамический порядок системы (11), равный n , понижается до $n - 1$. Выразив из равенства $s = 0$ (14) переменную $e_n = -c_1 e_1 - \dots - c_{n-1} e_{n-1}$ и подставив ее в (11), имеем устойчивую систему

$$(16) \quad \dot{e}_i = e_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-2}; \quad \dot{e}_{n-1} = -c_1 e_1 - \dots - c_{n-1} e_{n-1}, \quad s(t) = 0,$$

где выбором $c_i, i = 1, \dots, n - 1$, обеспечиваются желаемые темпы сходимости ошибки слежения $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0$.

Для реализации базового закона разрывного управления (13) требуются текущие оценки смешанных переменных (10). Для решения этой задачи в следующем разделе представлен оригинальный метод синтеза наблюдателя пониженного порядка смешанных переменных, в котором также реализуется метод разделения движений.

3. Синтез наблюдателя смешанных переменных

Наша цель состоит в создании многофункциональной системы слежения, способной поддерживать различные режимы работы объекта управления без перенастройки параметров обратной связи. В связи с этим аналитический вид задающего воздействия не вводится, и считается, что наблюдаются только его текущие значения $g(t)$, а производные задающего сигнала неизвестны, но ограничены. В неравенствах (5) заложены мак-

симально допустимые оценки для всех возможных режимов работы. Непосредственно измеряется только ошибка слежения $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$, шумы в измерениях отсутствуют.

Для реализации базового закона разрывного управления (13)–(14) и оценивания смешанных переменных (10) предлагается построить наблюдатель пониженного порядка $n - 1$ на основе системы (11) в виде

$$(17) \quad \dot{z}_i = z_{i+1} + v_i, \quad i = \overline{1, n-2}; \quad \dot{z}_{n-1} = v_{n-1},$$

где $z = (z_1, \dots, z_{n-1})^T \in R^{n-1}$ – вектор состояния; $v_i, i = 1, \dots, n - 1$, – корректирующие воздействия наблюдателя, которые формируются на основе измерений $e_1(t)$ так, чтобы обеспечить стабилизацию системы относительно ошибок наблюдения $\varepsilon_i = e_i - z_i, i = 1, \dots, n - 1$, которая в силу (11), (17) имеет вид:

$$(18) \quad \dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_{i+1} - v_i, \quad i = \overline{1, n-2}; \quad \dot{\varepsilon}_{n-1} = e_n - v_{n-1},$$

где $e_n(t)$ полагается ограниченным внешним воздействием для наблюдателя (12).

Эффективный метод оценивания неизмеряемых переменных состояния и внешних воздействий без ввода их динамических моделей заключается в построении наблюдателя состояния (17) с разрывными корректирующими воздействиями и организации скользящих режимов в пространстве ошибок наблюдения [5, 8, 13]. Однако в многомерном случае реализация таких алгоритмов может привести к возникновению неидеальных скользящих режимов и, следовательно, к ненадлежащему качеству (негладкости) восстановленных сигналов, что, в свою очередь, может привести к нежелательным эффектам при реализации разрывного управления (13) на основе восстановленных сигналов.

По указанной причине в системах с разрывным управлением целесообразно использовать наблюдатели с непрерывными корректирующими воздействиями. Преимущества наблюдателей на скользящих режимах, связанные с оцениванием внешних возмущений и разделением движений в пространстве ошибок наблюдения, можно обеспечить в допредельной ситуации с помощью так называемых S -образных корректирующих воздействий, например, в виде сигма-функций [6, 7].

Для упрощения вычислительного аспекта алгоритмов управления в данной работе предложен метод синтеза корректирующих воздействий наблюдателя в виде sat-функций – кусочно-линейных функций с насыщением [19]. Такой подход обеспечивает решение задачи наблюдения с некоторой, наперед заданной точностью, но, в отличие от линейного наблюдателя с большими коэффициентами [17], не требует расширения пространства состояния для оценивания внешних возмущений [9]. Идея заключается в том, чтобы за конечное время $T > 0$ обеспечить в системе (18) стабилизацию с заданной точностью ошибок наблюдения и их производных. Тогда при $T > 0$ переменные наблюдателя сойдутся в малую окрестность неизмеряемых смешанных переменных $z_1(t) \approx e_i(t)$, $i = 2, \dots, n-1$, а из уравнения статики $\dot{e}_{n-1} = e_n - v_{n-1} \approx 0$ будет получена оценка $v_{n-1}(t) \approx e_n(t)$.

Лемма 2. Если в системе (18) с корректирующими воздействиями в виде линейных функций с насыщением

$$(19) \quad v_1 = M_1 \text{sat}(l_1 \varepsilon_1) = \begin{cases} M_1 \text{sgn } \varepsilon_1, & |\varepsilon_1| > 1/l_1, \\ M_1 l_1 \varepsilon_1, & |\varepsilon_1| \leq 1/l_1; \end{cases}$$

$$v_i = M_i \text{sat}(l_i v_{i-1}) = \begin{cases} M_i \text{sgn } v_{i-1}, & |v_{i-1}| > 1/l_i, \\ M_i l_i v_{i-1}, & |v_{i-1}| \leq 1/l_i, \quad i = \overline{2, n-1} \end{cases}$$

начальные условия и функция $e_n(t)$ ограничены известными константами

$$(20) \quad |\varepsilon_i(0)| \leq E_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad |e_n(t)| \leq F_n = E_n,$$

то тогда для любых, сколь угодно малых δ , $T > 0$, найдутся такие положительные действительные числа M_i^* , l_i^* , что $\forall M, l_i$: $M_i > M_i^*$, $l_i > l_i^*$, $i = 1, \dots, n-1$, выполняются неравенства

$$(21) \quad |\varepsilon_i(t)| \leq \delta, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad |e_n(t) - v_{n-1}(t)| \leq \delta \quad \forall t \geq T.$$

Доказательство. Разделим отрезок времени $[0; T]$ на $2(n-1)$ отрезков с помощью точек $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{2n-3} < t_{2n-2} = T$. Предполагая, что $\delta \ll \min \{E_1, \dots, E_{n-1}\}$, амплитуды $M_i > 0$, $i = 1, \dots, n-1$, корректирующих воздействий (19) будем выбирать так, чтобы обеспечить последовательно (сверху вниз)

сходимость корректирующих воздействий в линейные зоны за конечное время:

$$(22) \quad |\varepsilon_1(t)| \leq 1/l_1 \quad \forall t > t_1, \quad |v_i(t)| \leq 1/l_{i+1} \quad \forall t > t_{2i-1}.$$

Параметры $l_i > 0$, $i = 1, \dots, n-1$, выполняют роль больших коэффициентов и выбираются так, чтобы обеспечить (21), а также за время $[t_{2i-1}; t_{2i}]$ выполнение неравенств

$$(23) \quad |\varepsilon_{i+1}(t) - v_i(t)| = |\alpha_{i+1}(t)| \leq \Delta_{i+1} < \delta \quad \forall t > t_{2i}, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad \varepsilon_n := e_n.$$

Решения системы (18)–(19) ограничены на любом конечном интервале времени. Параметры корректирующих воздействий выбираются с целью стабилизации переменных состояния, что позволяет ввести ограничения

$$|\varepsilon_i(t)| \leq F_i = \text{const} \quad \forall t \geq 0, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

В системе (18)–(19) $\text{sgn } v_1(t) = \text{sgn } \varepsilon_1(t) \quad \forall t \geq 0$ по построению, а совпадение знаков $\text{sgn } v_1(t) = \text{sgn } \varepsilon_1(t)$, $i = 2, \dots, n-1$, может не иметь места при $0 \leq t \leq t_{2i-2}$ и гарантируется только при $\forall t > t_{2i-2}$ вне окрестности $|\varepsilon_i| \leq \Delta_i$ (23).

Если $\text{sgn } v_1(0) = \text{sgn } \varepsilon_1(0)$, $i = 2, \dots, n-1$, то система (18)–(19) в начальный момент времени представима в виде

$$\dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_{i+1} - M_i \text{sgn } \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \varepsilon_n := e_n.$$

Ее переменные монотонно устремятся в некоторые окрестности нуля при выборе амплитуд корректирующих воздействий на основе достаточных условий

$$(24) \quad \begin{aligned} \varepsilon_i \dot{\varepsilon}_i < 0 &\Rightarrow \varepsilon_i (\varepsilon_{i+1} - M_i \text{sgn } \varepsilon_i) \leq |\varepsilon_i| (F_{i+1} - M_i) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_i > F_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \end{aligned}$$

где $F_i = E_i$, $i = 1, \dots, n-1$. В худшем случае области изменений ошибок наблюдения можно оценить следующим образом:

$$(25) \quad F_1 = |\varepsilon_1(0)| \leq E_1, \quad F_2 = |\varepsilon_2(t_2)| \leq E_2 + (F_3 + M_2)t_2,$$

$$F_i = |\varepsilon_i(t_{2i-2})| \leq E_i + (F_{i+1} + M_i)t_{2i-2}, \quad i = \overline{2, n-1}, \quad F_n = E_n.$$

Неравенства для выбора амплитуд корректирующих воздействий M_i , обеспечивающих (22) за указанное время, имеют вид

$$(26) \quad M_i > \frac{|\varepsilon_i(t_{2i-2})|}{t_{2i-1} - t_{2i-2}} + F_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

С учетом (25) из (26) последовательно снизу вверх имеем:

$$(27) \quad M_{n-1} > \frac{E_{n-1} + (F_n + M_{n-1})t_{2n-4}}{t_{2n-3} - t_{2n-4}} + F_n \Rightarrow$$

$$M_{n-1}^* = \frac{E_{n-1} + F_n t_{2n-3}}{t_{2n-3} - 2t_{2n-4}}, \quad 2t_{2n-4} < t_{2n-3} < T,$$

$$M_i^* = \frac{E_i + F_{i+1} t_{2i-1}}{t_{2i-1} - 2t_{2i-2}}, \quad 2t_{2i-2} < t_{2i-1}, \quad i = \overline{n-1, 2}, \quad M_1^* = \frac{E_1}{t_1} + F_2.$$

Таким образом, найдены M_i^* (27): $\forall M_i > M_i^*, i = 1, \dots, n-1$, неравенства (22) будут выполнены.

Положим, например $\Delta t = t_{2i-1} - 2t_{2i-2}, i = 2, \dots, n-1$ и $\Delta t = t_1 = t_2 - t_1 = t_4 - t_3 = \dots = t_{2n-2} - t_{2n-3} > 0$. Тогда верхняя оценка для выбора $\Delta t > 0$, при котором обеспечивается заданное время $T > 0$ сходимости ошибок наблюдения, имеет вид:

$$(28) \quad T = \Delta t(2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}) \Rightarrow 0 < \Delta t \leq T / (2(2^{n-1} - 1)).$$

Амплитуды M_i последовательно снизу вверх выбираются на основе (27), (25) при принятом значении Δt (28).

С учетом (22)–(23) система (18)–(19) представима в виде

$$(29) \quad \dot{\varepsilon}_1 = -M_1 l_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad |\varepsilon_1| \leq 1/l_1 \quad \forall t > t_1;$$

$$\dot{\varepsilon}_i = -M_i l_i v_{i-1} + \varepsilon_{i+1} = -M_i l_i (\varepsilon_i - \alpha_i) + \varepsilon_{i+1},$$

$$|v_{i-1}| \leq 1/l_i \Rightarrow |\varepsilon_i| \leq 1/l_i + \Delta_i \quad \forall t > \overline{t_{2i-1}}, \quad i = \overline{2, n-1}.$$

Для переменных системы (29) на интервалах $[t_{2i-1}; t_{2i-1} + \Delta t = t_2]$ справедливы оценки

$$(30) \quad |\varepsilon_1(t_2)| \leq \frac{|\varepsilon_2(t)|}{M_1 l_1} + \left(\frac{1}{l_1} - \frac{|\varepsilon_2(t)|}{M_1 l_1} \right) e^{-M_1 l_1 \Delta t} \leq \frac{F_2}{M_1 l_1} + \frac{M_1 - F_2}{M_1 l_1} e^{-M_1 l_1 \Delta t},$$

$$|\varepsilon_i(t_{2i})| \leq \frac{F_{i+1}}{M_i l_i} + \Delta_i + \frac{M_i - F_{i+1}}{M_i l_i} e^{-M_i l_i \Delta t}, \quad i = \overline{2, n-1}.$$

С учетом $v_1 = M_1 l_1 \varepsilon_1 \quad \forall t > t_1, \quad v_i = M_i l_i (\varepsilon_i - \alpha_i), \quad \forall t > t_{2i-1}, i = 2, \dots, n-1$, из (30) следуют нижние оценки для выбора коэффициентов $l_i > 0$, при которых обеспечиваются неравенства (23):

$$(31) \quad (M_i - F_{i+1}) e^{-M_i l_i \Delta t} \leq \Delta_{i+1} \Rightarrow l_i > \frac{1}{\Delta t M_i} \ln \frac{M_i - F_{i+1}}{\Delta_{i+1}}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

С учетом (30)–(31) при $t_{2i} < t \leq T$ для переменных системы (29) имеем соответственно

$$(32) \quad |\varepsilon_1| \leq \frac{|\varepsilon_2| + \Delta_2}{M_1 l_1}, \quad |\varepsilon_i| \leq \frac{|\varepsilon_{i+1}| + \Delta_{i+1}}{M_i l_i} + \Delta_i, \quad i = \overline{2, n-1}.$$

Из двух последних выражений (31), (32) следует, что неравенства $|e_n(t) - v_{n-1}(t)| \leq \delta$, $|e_{n-1}(t)| \leq \delta$ будут выполнены $\forall t \geq T$ при любом $l_{n-1} > l_{n-1}^*$, если

$$(33) \quad l_{n-1}^* = \max \left\{ \frac{F_n + \delta}{M_{n-1} \delta}; \frac{1}{\Delta t M_{n-1}} \ln \frac{M_{n-1} - F_n}{\delta} \right\}.$$

Для выбранного $l_{n-1} > l_{n-1}^*$ определяем точность

$$0 < \Delta_{n-1} \leq \delta - (F_n + \delta) / (M_{n-1} l_{n-1}),$$

которую нужно обеспечить выбором l_{n-2} (31). Оба неравенства

$$|\varepsilon_{n-1}(t) - v_{n-2}(t)| \leq \Delta_{n-1} < \delta \quad \forall t > t_{2n-4},$$

$$|\varepsilon_{n-1}(t)| \leq \delta \Rightarrow |\varepsilon_{n-2}(t)| \leq \frac{\delta + \Delta_{n-1}}{M_{n-2} l_{n-2}} + \Delta_{n-2} < \delta \quad \forall t \geq T$$

будут выполнены $\forall l_{n-2} > l_{n-2}^*$:

$$(34) \quad l_{n-2}^* = \max \left\{ \frac{2\delta - \frac{F_n + \delta}{M_{n-1} l_{n-1}}}{\delta M_{n-2}}; \frac{1}{\Delta t M_{n-2}} \ln \frac{M_{n-2} - F_{n-1}}{\delta - \frac{F_n + \delta}{M_{n-1} l_{n-1}}} \right\}.$$

Для выбранного $l_{n-2} > l_{n-2}^*$ определяем значение $0 < \Delta_{n-2} \leq$

$\leq \delta - (\delta + \Delta_{n-1}) / (M_{n-2} l_{n-2})$, которое нужно обеспечить выбором l_{n-2}

(31) и т.д. Таким образом, оба неравенства

$$|\varepsilon_{i+1}(t) - v_i(t)| \leq \Delta_{i+1} \quad \forall t > t_{2i},$$

$$|\varepsilon_{i+1}(t)| \leq \delta \Rightarrow |\varepsilon_i| \leq \frac{\delta + \Delta_{i+1}}{M_i l_i} + \Delta_i < \delta \quad \forall t \geq T$$

будут выполнены $\forall l_i > l_i^*$, которые последовательно выбираются на основе неравенств

$$(35) \quad l_i^* = \max \left\{ \frac{\delta + \Delta_{i+1}}{\delta M_i}; \frac{1}{\Delta t M_i} \ln \frac{M_i - F_{i+1}}{\Delta_{i+1}} \right\}, \quad i = \overline{n-3, 1},$$

где $0 < \Delta_{i+1} \leq \delta - (\delta + \Delta_{i+2}) / (M_{i+1} l_{i+1})$. Лемма 2 доказана.

Заметим, что оценки (20) справедливы при нулевых начальных условиях $z_i(0) = 0$ в наблюдателе (17). По измерениям $e_1(t)$ можно сразу установить $z_i(0) = e_1(0) \Rightarrow \varepsilon_1(0)$, что несколько ускорит процесс сходимости ошибок наблюдения.

При использовании наблюдателя смешанных переменных (17), (19) базовый закон разрывного управления (13)–(14) будет реализован в виде

$$u = -M \operatorname{sgn} b(x) \cdot \operatorname{sgn}(c_1 e_1 + c_2 z_2 + \dots + c_{n-1} z_{n-1} + v_{n-1})$$

и в силу (21) за конечное время $t_s > T$ обеспечит попадание изображающей точки в $(c_2 + c_3 + \dots + c_{n-1} + 1) \delta = \Delta$ – окрестность многообразия $s = 0$ и при $t > t_s$ в замкнутой системе (1), (13)–(14), (17), (19) имеет место реальный скользящий режим

$$\dot{e}_i = e_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-2}; \quad \dot{e}_{n-1} = -c_1 e_1 - \dots - c_{n-1} e_{n-1} + s, \quad |s(t)| \leq \Delta,$$

что обуславливает решение задачи слежения с некоторой точностью $|e_1(t)| \leq \bar{\delta} \quad \forall t > t_s$.

4. Пример

В качестве иллюстрации разработанного метода рассмотрим процедуру синтеза системы слежения для опорной модели электромеханического объекта управления – перевернутого маятника [15], управляемого двигателем постоянного тока. С учетом редуцированной модели электрического исполнительного устройства, рассматривается система третьего порядка вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ (36) \quad \dot{x}_2 &= a_{21} \sin x_1 - a_{22} x_2 + a_{23} (x_3 + \eta), \\ \dot{x}_3 &= -a_{32} x_2 - a_{33} x_3 + bu, \end{aligned}$$

где x_1 [рад] – угловое положение маятника (регулируемая и измеряемая переменная); x_2 [рад/с] – угловая скорость; x_3 [Н·м] – вращающий момент, приложенный к маятнику на оси подвеса, который развивается двигателем постоянного тока с разрывным управлением u (напряжение якоря); области изменения переменных состояния имеют конструктивные ограниче-

ния $|x_i(t)| \leq X_i$; $\eta(t)$ – неизвестная функция времени, которая характеризует действие внешних ограниченных возмущений (2); $b_3 > 0 \quad \forall \alpha_{ij} > 0$, b_3 , α_{32} , α_{33} – известные коэффициенты передачи: $\alpha_{21} = g^*/l$, $\alpha_{22} = k/l$, $\alpha_{23} = 1/(ml^2)$; $g^* = 9,8 \text{ [м/с}^2\text{]}$ – ускорение свободного падения, $m \text{ [кг]}$; $l \text{ [м]}$ – масса и длина маятника соответственно, $k \text{ [Па}\cdot\text{с]}$ – коэффициент вязкого трения, параметры m , l , k точно не определены, но известны диапазоны, в которых находятся их значения. Решается задача слежения за заданной допустимой траекторией $g(t)$ (5) выходной переменной $x_1(t)$ в предположении, что только ошибка слежения $e_{1\underline{1}}(t) = x_1(t) - g(t)$ подлежит прямым измерениям.

В системе (36) внешние возмущения не согласованы, условия (3), (4), (8) выполняются. С помощью невырожденных замен переменных (10) представим систему (36) в каноническом виде относительно ошибки слежения (11):

$$(37) \quad \dot{e}_1 = e_2, \quad \dot{e}_2 = e_3, \quad \dot{e}_3 = \psi(t) + bu,$$

где

$$\begin{aligned} b &= a_{23}b_3, \quad 0 < \bar{b} \leq b \leq \bar{\bar{b}}, \quad e_1 = x_1 - g, \quad e_2 = x_2 - \dot{g}, \\ e_3 &= a_{21} \sin x_1 - a_{22}x_2 + a_{23}(x_3 + \eta) - \ddot{g}, \\ \psi(t) &= a_{21}x_2 \cos x_1 + a_{33}a_{21} \sin x_1 - (a_{23}a_{32} + a_{22}a_{33})x_2 + \\ &- (a_{22} + a_{33})e_3 + a_{33}a_{23}\eta + a_{23}\dot{\eta} - (a_{22} + a_{33})\ddot{g} - \ddot{\bar{g}}, \\ |e_i(t)| &\leq E_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad E_{1,2} = 2X_{1,2}, \quad |\psi(t)| \leq F \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Базовый закон разрывного управления (13) и неравенство для выбора амплитуды (15) имеют вид

$$u = -M \operatorname{sgn} s, \quad s = c_1 e_1 + c_2 e_2 + e_3, \quad M > (c_1 E_2 + c_2 E_3 + F) / \bar{b}.$$

Для информационного обеспечения закона управления (39) в контур обратной связи введен наблюдатель пониженного порядка смешанных переменных (17) второго порядка с корректирующими воздействиями в виде sat-функций (19):

$$(38) \quad \dot{z}_1 = z_2 + v_1, \quad v_1 = M_1 \operatorname{sat}(l_1 \varepsilon_1); \\ \dot{z}_2 = v_2, \quad v_2 = M_2 \operatorname{sat}(l_2 v_1).$$

С учетом (37), (38) система относительно ошибок наблюдения $\varepsilon_i = e_1 - z_i$, $i = 1, 2$ имеет вид: $\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - v_1$, $\dot{\varepsilon}_2 = e_3 - v_2$. Базовый закон разрывного управления реализуется в виде

$$(39) \quad u = -M \operatorname{sgn}(c_1 e_1 + c_2 z_2 + v_2).$$

Моделирование замкнутой системы (36), (38), (39) проводилось в среде Matlab–Simulink при следующих параметрах:

$$c_1 = c_2 = 4, \quad a_{32} = 2, \quad a_{33} = 10, \quad b_3 = 10, \quad X_1 = 2\pi, \quad X_2 = 1.$$

Рассматривались различные режимы работы при различных возмущениях с вариациями параметров

$$m \in [0,9; 1,1], \quad l \in [0,9; 1,1], \quad \kappa \in [7; 9].$$

Для худшего расчетного случая были приняты следующие коэффициенты регулятора (38), (39):

$$(40) \quad M = 24, \quad l_1 = 50, \quad l_2 = 100, \quad M_1 = 5, \quad M_2 = 10.$$

На рис. 1 показан процесс слежения выходной переменной $x_1(t)$ [рад] системы (36) за постоянным сигналом $g(t) = 1,5$ при внешнем возмущении $\eta_1(t) = \sin t$. На рис. 2 показан процесс слежения за переменным сигналом $g = \sin(0,5t)$ при внешнем возмущении $\eta(t) = 0,5 \sin 2t$ при тех же коэффициентах (40).

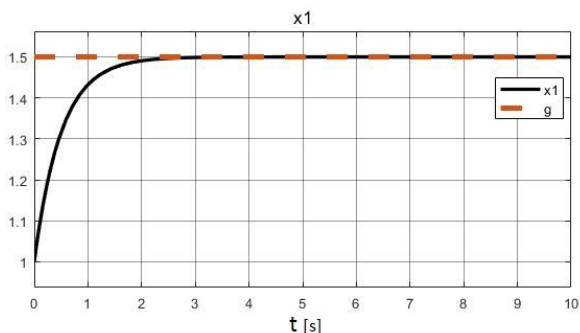


Рис. 1. Процесс слежения выходной переменной $x_1(t)$ за постоянным сигналом $g(t) = 1,5$ рад

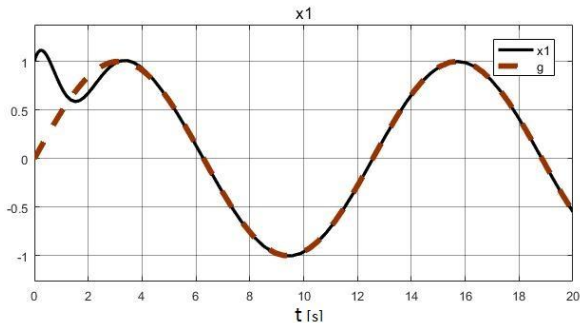


Рис. 2. Процесс слежения выходной переменной $x_1(t)$ за переменным сигналом $g = \sin(0,5t)$ рад

Результаты моделирования подтвердили эффективность разработанного метода синтеза следящей системы в условиях неопределенности.

5. Заключение

Для нелинейных аффинных систем с одним входом и одним выходом при действии внешних возмущений, не принадлежащих пространству управления и в предположении об их гладкости, формализована каноническая форма «вход–выход», на основе которой задачи управления и наблюдения решаются относительно одних и тех же смешанных переменных нового координатного базиса. Основная идея работы, позволяющая расширить класс инвариантных систем слежения для динамических объектов, функционирующих в условиях неопределенности, заключается в разработке методов оценивания неизмеряемых смешанных переменных с помощью наблюдателя состояния, построенного на основе этой виртуальной модели.

Предложенный подход существенно упрощает структуру регулятора, так как не требует ввода автономных динамических моделей внешних воздействий, детализации и реального вычисления нелинейных выражений (что особенно актуально при синтезе системы управления на основе полной нелинейной модели), а также снижает требования к объему априорной

информации об объекте управления и среде его функционирования. Разработанные алгоритмы синтеза многофункциональной системы слежения универсальны, просты в реализации алгоритмы и не требуют перенастройки при существенном изменении параметров и внешних факторов в процессе эксплуатации, а также наличия полного комплекта датчиков в системе управления.

Литература

1. АНДРЕЕВ Ю.Н. *Управление конечномерными линейными объектами*. – М.: Наука, 1976. – 424 с.
2. АХОБАДЗЕ А.Г., КРАСНОВА С.А. *Решение задачи слежения в условиях неопределенности на основе совместной блочно-канонической формы управляемости и наблюдаемости // Управление большими системами*. – 2009. – Вып. 24. – С. 34–80.
3. БОБЦОВ А.А., КОЛЮБИН С.А., ПЫРКИН А.А. *Стабилизация нелинейного объекта с входным запаздыванием и синусоидальным воздействием // Автоматика и телемеханика*. – 2015. – №1. – С. 21–30.
4. ЕМЕЛЬЯНОВ С.В., КОРОВИН С.К. *Новые типы обратной связи*. – М.: Наука, 1997. – 352 с.
5. КРАСНОВА С.А., КУЗНЕЦОВ С.И. *Оценивание на скользких режимах неконтролируемых возмущений в нелинейных динамических системах // Автоматика и телемеханика*. – 2005. – №10. – С. 54–69.
6. КРАСНОВА С.А., МЫСИК Н.С. *Каскадный синтез наблюдателя состояния с нелинейными корректирующими воздействиями // Автоматика и телемеханика*. – 2014. – №2. – С. 106–128.
7. КРАСНОВА С.А., УТКИН А.В. *Сигма-функция в задачах синтеза наблюдателей состояний и возмущений // Проблемы управления*. – 2015. – №5. – С. 27–36.
8. КРАСНОВА С.А., УТКИН А.В. *Анализ и синтез минимально-фазовых нелинейных SISO-систем при действии внешних*

- несогласованных возмущений* // Проблемы управления. – 2014. – №6. – С. 22–30.
9. КРАСНОВ Д.В., РАССАДИН Ю.М., ШИНКАРЮК А.Г. *Реализации метода разделения движений в задачах наблюдения* // Материалы XIII Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2016), 5–9 сентября 2016 г., Самара. – М.: ИПУ РАН, 2016. – С. 121–133.
 10. МИРОШНИК И.В., НИКИФОРОВ В.А., ФРАДКОВ А.Л. *Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами*. – СПб.: Наука, 2000. – 549 с.
 11. НИКИФОРОВ В.О. *Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений*. – СПб.: Наука, 2003. – 282 с.
 12. УОНЕМ У.М. *Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход*. – М.: Наука, 1980. – 376 с.
 13. УТКИН В.И. *Скольльзящие режимы в задачах оптимизации и управления*. – М.: Наука, 1981. – 368 с.
 14. УТКИН В.А., УТКИН А.В. *Задача слежения в линейных системах с параметрическими неопределенностями при неустойчивой нулевой динамике* // Автоматика и телемеханика. – 2014. – №9. – С. 62–81.
 15. ANGELI D. *Almost global stabilization of the inverted pendulum via continuous state feedback* // Automatica. – 2001. – Vol. 37. – P. 1103–1108.
 16. ISIDORI A. *Nonlinear control systems*. 3rd Ed. – Berlin: Springer-Verlag, 1995. – 550 p.
 17. KHALIL H.K., PRALY L. *High-gain observers in nonlinear feedback control* // Int. J. Robust and Nonlinear Control. – 2014. – Vol. 24. – P. 993–1015.
 18. KVATERNIK K., LYNCH A.F. *Global tracking via output feedback for nonlinear MIMO systems* // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2011. – Vol. 56, No. 9. – P. 2179–2184.
 19. TEEL A.R. *A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation* // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1996. – No. 41. – P. 1256–1270.

SYNTHESIS OF A MULTIFUNCTIONAL TRACKING SYSTEM IN CONDITIONS OF UNCERTAINTY

Dmitriy Krasnov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Software Engineer (dim93kr@mail.ru).

Anton Utkin, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (utkin-av@rambler.ru).

Abstract: Class of affine nonlinear single-input single-output systems, where the relative degree of the equivalent form of the input-output is invariant to the presence of external, unmatched disturbances, is formalized. Methods of synthesis of a multifunctional tracking system in the conditions of parametric uncertainty of the control plant model and incomplete measurements are designed for this class of systems. The original method of synthesis of a low dimension observer for estimating mixed variables (these are combinations of state variables, external influences and their derivatives) by measuring only tracking error is designed for information support of discontinuous control. In this observer, using the linear corrective effects with saturation, the method of separating the movements of observation errors is realized. As an illustration of the developed method, an electromechanical control object is considered – an inverted pendulum controlled by a DC motor. The simulation results for the worst case of varying parameters are given.

Keywords: nonlinear affine single-input single-output systems, tracking, discontinuous control, state observer, invariance, decomposition.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.А. Шевляковым.

Поступила в редакцию 15.05.2017.

Опубликована 30.09.2017.

УДК 332.8

ББК 3.31.280.7

ОПТИМИЗАЦИЯ ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЯ ДОМОХОЗЯЙСТВА НА ОСНОВЕ ПРОГНОЗА ГРАФИКА МАКСИМАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ БЫТОВЫХ ПРИБОРОВ

Гребенюк Г. Г.¹, Крыгин А. А.²
(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассматривается задача оптимизации энергопотребления домохозяйства путем построения оптимального графика использования бытовых приборов. Конкретизируется постановка задачи, множество всех видов бытовых приборов разделяется на группы, для каждой из которых формализуются требования по функционированию. С использованием этих требований конструируется методика сведения этой задачи к основной задаче целочисленного программирования, в которой в качестве целевой функции выступает суммарная стоимость потребляемой электроэнергии.

Ключевые слова: оптимизация энергопотребления, энергопотребление в жилом секторе, оптимизация работы бытовых приборов.

1. Введение

На жилой сектор мировых экономик приходится значительный объем энергопотребления. Так, по данным [9], в 2010 г. жилой сектор США потребил 38,7% от всего электричества, используемого в стране. Поэтому оптимизации энергопотребле-

¹ Георгий Григорьевич Гребенюк, доктор технических наук, с.н.с. (Москва, ул. Профсоюзная, 65, тел. (495) 334-87-39, grebenuk@lab49.ru).

² Андрей Александрович Крыгин, кандидат технических наук, н.с. (Москва, ул. Профсоюзная, 65, andreyakr@yandex.ru).

ния в данном секторе экономики уделяется большое внимание. Об этом свидетельствует возрастающий поток научных публикаций по указанной тематике, преимущественно в зарубежных изданиях, например, [6, 19, 21–23].

Среди многочисленных объектов оптимизации особое место занимают бытовые приборы. Для задачи оптимизации энергопотребления бытовых приборов отсутствует единая формализованная постановка, что связано со следующими факторами:

- во-первых, необходимостью прогноза графика энергопотребления домохозяйства и влиянием точности полученного прогноза на вид графиков работы приборов, и, в конечном итоге, на общую финансовую выгоду от оптимизации;

- во-вторых, зависимостью точности прогноза энергопотребления от наличия статистических данных по режимам использования приборов, источником которых могут быть либо опубликованные исследования по типовым домохозяйствам, либо результаты проведения энергоаудита в оптимизируемом домохозяйстве. Воспользоваться опубликованной статистикой затруднительно, так как в ней, как правило, приведены результаты применения усредняющих методик для десятков (а иногда и сотен) домохозяйств, неоднородных по составу приборов и режимам их использования, и не приводится статистика использования приборов в типовом домохозяйстве;

- в-третьих, сохранением неопределенности времени включения и режимов работы приборов для тех или иных жизненных ситуаций.

На вероятность внедрения программ оптимизации влияют затраты домовладельца на проведение энергоаудита своих приборов. Чем меньше для этого потребуется средств и времени, фактически, чем меньше будет получено статистических данных, тем больше шансов внедрения этих программ. В результате возникает противоречие, с одной стороны, чем более подробные данные по режимам использования приборов будут поступать в программу оптимизации, тем больший выигрыш получит домовладелец, с другой, с увеличением объема данных уменьшается вероятность внедрения программ оптимизации домовладельцем. В [17] показана еще одна грань этого противоречия на примере оптимизации работы осветительных прибо-

ров. Шаг за шагом конструируются все более сложные, но, тем не менее, логичные правила автоматизации функционирования приборов освещения, начиная с самых простых, например, «приборы выключены, когда в комнате никого нет», и заканчивая такими, как «освещение в комнате выключается при включении телевизора» и системами с несколькими видами (и разным потреблением) осветительных приборов, режим работы которых программируется пользователем. В результате получается, что полученный обширный список правил слишком сложен и неудобен для пользователя, а в некоторых ситуациях еще и внутренне противоречив, при этом разрешение этого противоречия опять возлагается на пользователя. В качестве выхода предлагается использовать иерархическую систему обучения при составлении правил, ввести дополнительную переменную, отвечающую за комфортность (для пользователя) работы системы автоматизации освещения и оптимизировать режим работы приборов, учитывая и стоимость потраченной электроэнергии и введенный показатель комфортности.

Основные различия в работах по указанной тематике связаны с используемыми исходными данными, моделями функционирования приборов и методами оптимизации энергопотребления. Например, в [19] все приборы разбиваются на четыре группы и рассматривается задача оптимизации при наличии в домохозяйстве альтернативного источника энергии; в [21] предложены алгоритмы оптимизации потребления в условиях формирования цены на электроэнергию в реальном времени.

При разработке программы оптимизации, как правило, в качестве критерия оптимизации выбирается суммарная стоимость потребляемой электроэнергии всеми оптимизируемыми приборами. При этом предполагается, что тариф колеблется в течение суток, что приводит к изменению затрат домовладельца в зависимости от графика работы приборов.

Программа оптимизации должна учитывать ограничения каждого прибора, связанные с его характеристиками и требованиями пользователя к режимам работы. Также должны присутствовать ограничения по предельной мощности потребления домохозяйства.

Необходимо отметить, что даже для небольшой группы домохозяйств и при суточном периоде оптимизации уравнения математической модели содержат порядка 10^2 – 10^4 ограничений, что вызывает необходимость при разработке программы учитывать вычислительную сложность алгоритмов. Поэтому одной из целей данной работы является сведение задачи оптимизации к задаче линейного программирования с разумным числом ограничений. Исследования показали [2], что наиболее эффективным методом решения такого класса задач является метод внутренней точки [4].

Виды бытовых приборов

До рассмотрения самих алгоритмов выделим из множества видов бытовых приборов те, к которым будут применяться эти алгоритмы и, соответственно, проведем формализацию принятых для них ограничений.

Разделим множество видов приборов на подмножества по способу задания требований к функционированию прибора и затем определим для них ограничения.

1. Приборы, не подлежащие оптимизации.

К этому подмножеству относятся приборы, обладающие одним или несколькими свойствами:

- запуск и остановка прибора производятся пользователем;
- невозможно формализовать условия, при которых осуществляется работа прибора;
- режимы работы прибора точно определены и не подлежат изменению в программе оптимизации.

К этому виду приборов можно отнести электрическую плиту, микроволновую печь, стационарный компьютер, осветительные приборы [14], заряжающие устройства, телевизор, видео- или цифровой магнитофон, записывающий по таймеру вещательные программы, пылесос, дрель, усилитель и другие приборы.

2. Приборы с термостатическим управлением или TCL (Thermostatically Controlled Loads).

Этот многочисленный вид бытовых прибор предназначен для поддержания температуры рабочей среды в заданных пределах. К нему относятся кондиционеры, холодильники, моро-

зильники, водонагреватели и тепловые насосы. Для них время и интервалы включения и выключения зависят от температуры рабочей среды прибора (далее «внутренняя температура») и температуры окружающей среды («далее внешняя температура»).

3. Приборы с циклическим режимом работы. К этому подмножеству относятся приборы с последовательным выполнением повторяющихся операций (циклов работы прибора). Для таких приборов известно потребление электроэнергии на каждом цикле и интервал времени от начала до завершения работы. К этому подмножеству приборов можно отнести посудомоечные, стиральные машины, зарядные устройства, сушилки и др.

Отдельно можно ввести два классификационных признака, существенно влияющих на выбор алгоритма оптимизации:

1. Возможность прерывания и возобновления цикла работы.

2. Возможность выполнения одной и той же работы за разные промежутки времени с различным энергопотреблением, например, за более сжатые сроки при большей мощности.

По данным признакам приборы одного вида могут входить в разные классификационной группировки в зависимости от выбранного режима их использования.

Схема взаимодействия между домовладельцем и программой оптимизации.

Реализуется следующая схема взаимодействия между домовладельцем и программой оптимизации:

1. Домовладелец выбирает группу оптимизируемых приборов, вводит в программу их паспортные характеристики и требования к функционированию (период оптимизации, почасовой тарифный график и предельная мощность потребления домохозяйством).

2. Проводится оптимизация, в результате которой домовладельцу предоставляются графики работы приборов и график разрешенной максимальной суммарной мощности для приборов домохозяйства, не вошедших в оптимизируемую группу. Ясно, что для некоторых постановок задачи график, при котором соблюдались бы все ограничения, не может быть построен. В этом случае необходимо отключить один или несколько прибо-

ров. Выбор отключаемых приборов должен основываться на таблице приоритетов, задаваемых пользователем.

К достоинствам данной схемы взаимодействия можно отнести:

– удобство для домовладельца, так как он предоставляет меньший объем данных только по тем приборам, работу которых он хочет оптимизировать;

– возможность масштабирования на группу домохозяйств.

В данной статье для реализации предложенной схемы разработана методика прогнозирования графика максимальной суммарной мощности для группы оптимизируемых приборов и методика оптимизации графиков работы этих приборов.

Итак, основная цель данной работы заключается в решении, точнее сведении задачи оптимизации потребления к основной задаче линейного целочисленного программирования для домохозяйства без альтернативных источников энергии, с тарифной стоимостью электроэнергии и с ограничением на суммарную потребляемую мощность. По классификации, предложенной в [5], эта задача соответствует PBP-TOU, т.е. целевая функция определяется как суммарная стоимость потребленной энергии, а оптимизируются моменты включения и выключения приборов.

При постановке задачи и конструировании алгоритмов оптимизации учитывались следующие виды приборов: с термостатическим управлением, с циклическим режимом работы, с возможностью прерывания и возобновления цикла работы и возможностью выполнения одной и той же работы за разные промежутки времени с различным энергопотреблением. Для приборов с термостатическим управлением рассматривалась их работа как в совместном режиме (например, работа нескольких обогревателей в одной комнате), так и ситуации, когда внутренняя температура одного прибора является внешней температурой другого (например, работа обогревателя и морозильника, находящихся в одном помещении). Также при составлении ограничения по предельной мощности потребления домохозяйства была получена оценка суммарного потребления приборов, не включенных в список оптимизации.

Обзор работ по этой теме выявил необходимость и актуальность формализации и решения задачи в предложенной поста-

новке. Так, в [8, 24] предложено решение задачи оптимизации только для приборов с циклическим режимом работы, при этом оценка потребления не оптимизируемых приборов считается заданной.

В [25] при постановке задачи оптимизации для каждого прибора вводится матрица всех возможных допустимых графиков нагрузки. Эта матрица считается заданной, что сильно сокращает область применения предложенного алгоритма в тех случаях, когда она не задана. Также в некоторых ситуациях, когда работа одного прибора зависит от работы другого прибора, такая матрица принципиально не может быть построена: в зависимости от графика нагрузки одного прибора один и тот же график нагрузки второго прибора может быть как допустимым, так и недопустимым.

Из рассмотренных статей немалую долю занимают работы, в которых основное внимание уделяется отдельным подзадачам оптимизации энергопотребления, а также смежным вопросам; в них также присутствует постановка, формализация и методика решения оптимизационной задачи.

В [13, 15] рассматривается вариант оптимизации потребления при изменении цены на электроэнергию в реальном времени. Основная цель этих работ – создание алгоритмов прогнозирования стоимости электроэнергии. При этом постановка задачи оптимизации ограничивается приборами с циклическим режимом работы без возможности прерывать и возобновлять цикл работы, оценка потребления не оптимизируемых приборов считается заданной. К этому же направлению можно отнести исследование [20], в котором предложена более подробная постановка задачи оптимизации: помимо приборов с циклическим режимом работы также приводятся алгоритмы для некоторых приборов с термостатическим управлением, для которых, однако, не рассматриваются варианты использования нескольких приборов в совместном режиме и ситуации, когда внутренняя температура одного прибора является внешней температурой другого.

В уже упоминавшейся работе [17] рассматриваются алгоритмы оптимизации только осветительных приборов и кондиционеров. В интересном и необычном исследовании [16] уста-

навливается следующий факт: суммарный график потребления множества домохозяйств, в каждом из которых проведена оптимизация потребления в соответствии с заданной тарифной стоимостью электроэнергии, содержит пики, причем их высота иногда превышает высоту аналогичных пиков без оптимизации. Решение этой проблемы основывается на том, что при оптимизации во многих случаях можно получить несколько вариантов и, применяя разные варианты на группе домохозяйств, можно существенно снизить пиковое потребление. Постановка задачи оптимизации, используемая в этом исследовании, также ограничивается приборами с циклическим режимом работы.

Работа [18] посвящена разработке методов снижения ущерба, причиняемого домохозяйствам, при перебоях и нарушении режимов в подаче электроэнергии. Как наиболее перспективные направления решения этой задачи были выделены децентрализованное электроснабжение и использование альтернативных источников энергии. В качестве критерия оценки использовалась как функция комфорта, так и общей стоимости электроэнергии, при этом задаче оптимизации графиков работы приборов в домохозяйствах уделено достаточно мало внимания.

Наиболее близка к данному исследованию работа [19]. В ней также проводится разбиение всех приборов домохозяйства на подмножества по способу задания пользовательских требований к их функционированию: приборы с термостатическим управлением, приборы с циклическим работы, приборы с заданным режимом работы и приборы, для которых нельзя провести формализацию условий его работы, т.е. два последних подмножества объединены в данном исследовании в подмножество «приборы, не подлежащие оптимизации». По сравнению с [19] в данном исследовании для приборов с термостатическим управлением обоснованы выражения для внутренней температуры, предоставлена методика определения необходимых коэффициентов и также рассмотрены варианты использования нескольких приборов в совместном режиме и ситуации, когда внутренняя температура одного прибора является внешней температурой другого. Для приборов с циклическим работы рассмотрены варианты работы с возможностью прерывания и возобновления

цикла и возможностью выполнения одной и той же работы за разные промежутки времени с различным энергопотреблением.

Перейдем к рассмотрению поставленной задачи оптимизации.

2. Определение функции максимально допустимого потребления для оптимизируемых приборов

Введем временной интервал оптимизации как интервал постоянства таких переменных модели оптимизации, как тариф и предельная мощность потребления домохозяйством. Для процесса энергопотребления, характеризуемого сравнительно редкими изменениями указанных переменных, длительность интервала оптимизации выбирают в диапазоне 1–10 минут. С количеством интервалов связано число уравнений и ограничений задачи оптимизации.

Обозначим $F(t)$ – функцию максимально допустимого потребления для оптимизируемых приборов в течение t -го интервала оптимизации; $A^-(t)$ – суммарное потребление в течении t -го интервала оптимизации всех приборов, не входящих в список оптимизируемых приборов. Тогда функцию $F(t)$ можно определить как $F(t) = A_{\text{полн}} - A^-(t)$, где $A_{\text{полн}}$ – предельное потребление всех приборов на интервале оптимизации:

$$A_{\text{полн}} = U \cdot I \cdot \tau,$$

таким образом, при $U = \text{const}$, $\tau = \text{const}$ предельное потребление $A_{\text{полн}}$ определяется максимально допустимой силой тока.

Поиску функции $A^-(t)$ посвящено много работ; основные различия между ними заключаются в составе данных для моделирования. В канонической работе [11] благодаря полной и детальной статистике по приборам и социальному составу жителей исследуемых домохозяйств построена часто цитируемая математическая модель (модель «Капассо»), которая с высокой точностью прогнозирует графики потребления электроэнергии. Однако для РФ подобная статистика отсутствует. В этой области также интересна постановка, предложенная в [12]. В работе показано, как с использованием фильтра Калмана и при наличии данных о суммарном потреблении на предыдущих

интервалах оптимизации можно эффективно прогнозировать эту величину.

В данной работе предлагается использовать оценку функции $A^-(t)$ с помощью предложенного в [1] подхода.

Он содержит следующие этапы:

Выбор домохозяйств – представителей от каждой группы домохозяйств, сформированной по принципу близости используемых в ней приборов и их режимов работы.

Выбор эталонных часов для проведения аудита (измерений) в домохозяйстве – представителе группы домохозяйств.

Проведение измерений.

Обработка и анализ результатов измерений.

На основе результатов измерений, полученных на этапе 3, рассчитываются коэффициенты использования бытовых приборов по мощности и строятся усредненные профили бытовых приборов. Коэффициенты использования $K_{исп}$ для каждого вида прибора рассчитываются по формуле

$$\frac{\tilde{P}_{\text{факт}}}{\tilde{P}_{\text{ном}}},$$

где $\tilde{P}_{\text{факт}}$ и $\tilde{P}_{\text{ном}}$ – соответственно, усредненная по k домохозяйствам-представителям фактическая потребляемая мощность и номинальная мощность прибора, измеренные в эталонные часы.

Однако для оценки функции $A^-(t)$ требуется не усредненный, а максимальный профиль использования не оптимизируемых приборов. Примем следующее допущение: значения потребляемой мощности, полученные при измерении, можно рассматривать как случайную величину, имеющую нормальное распределение. Для нормального распределения вероятность отклонения случайной величины $P_{\text{факт}}^j$ (для j -го домохозяйства)

от своего математического ожидания $\tilde{P}_{\text{факт}}$ на величину большую, чем утроенное среднее квадратичное отклонение σ , прак-

тически равна нулю, другими словами, вероятностью события

$P_{\text{факт}}^j \geq \tilde{P}_{\text{факт}} + 3 * \sigma$ можно пренебречь.

Следовательно, она практически равна нулю и для всей зависимости $P_{\text{факт}}^*(\tau)$, построенной с коэффициентом использова-

ния $\frac{\tilde{P}_{\text{факт}} + 3 * \sigma}{\tilde{P}_{\text{ном}}}$ для каждого вида прибора и домохозяйства.

Таким образом, при принятом допущении применение методики, предложенной в [1] с коэффициентом использования $K_{\text{исп}}^*$, дает оценку максимального профиля использования прибора. Соответственно, оценку функции $\bar{A}(t)$ можно получить как сумму максимальных профилей не оптимизируемых приборов.

3. Определение целевой функции

Введем следующие общие обозначения: i – номер прибора; N – общее количество приборов, работу которых нужно оптимизировать; τ – длительность интервала оптимизации; H – величина оптимизируемого периода (обычно неделя или день); $h = H/\tau$ – количество интервалов оптимизации; $t = 1, \dots, h$ – номер интервала; $c(t)$ – тариф на t -м интервале; $F(t)$ – максимально допустимое потребление в течение t -го интервала оптимизации; $e_i(t) \in \{0, 1\}$ – график работы (включений/выключений) i -го прибора на t -м интервале оптимизации; $e_i(t) = 0$, если i -й прибор выключен на t -м интервале, $e_i(t) = 1$, если включен; a_i – энергия, потребляемая i -м прибором в течение одного интервала оптимизации.

При введенных обозначениях задачу можно сформулировать следующим образом:

Требуется найти графики работы каждого прибора $e_i(t)$, отвечающие минимуму общей стоимостной функции:

$$(1) \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^h c(t) \cdot e_i(t) \cdot a_i \rightarrow \min .$$

При этом графики работы приборов должны удовлетворять ограничениям задачи.

Математические модели оптимизируемых приборов должны описывать вклад приборов перечисленных подмножеств в целевую функцию, ограничения на потребляемые ими мощности, а также функциональные требования (в виде неравенств) к рассматриваемому подмножеству приборов.

Обозначим $R_i(t)$ – потребление i -го прибора в течении t -го интервала оптимизации. Ограничение по максимальной потребляемой мощности имеет вид неравенства

$$(2) \quad \sum_i R_i(t) < F(t); \forall t \in [1, \dots, h].$$

Рассмотрим более детально энергопотребление $R_i(t)$ приборов каждого из перечисленных выше подмножеств.

4. Модели оптимизации для рассматриваемых видов приборов

ПРИБОРЫ С ТЕРМОСТАТИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ

Будем рассматривать i -й прибор с термостатическим управлением на i -м интервале оптимизации; введем для него следующие обозначения: $\Theta_{in}^t(\eta), \eta \in [0; \tau)$ – внутренняя температура в момент времени η , отсчитываемый от начала i -го интервала; Θ_{out}^t – средняя внешняя температура на t -м интервале; будем считать, что в течение интервала оптимизации внешняя температура не меняется и равна средней внешней температуре.

$\Theta_{comf}^-, \Theta_{comf}^+$ – диапазон комфортных (допустимых) внутренних температур;

Определение внутренней и внешней температуры и диапазона комфортных температур для отдельных видов приборов с термостатическим управлением представлены в таблице 1.

Таблица 1. Таблица внутренних и внешних температур

	Холодильник	Морозильник	Кондиционер/ нагреватель
Внутренняя температура	Температура в камере	Температура в камере	Температура в комнате
Внешняя температура	Температура в комнате	Температура в комнате	Температура на улице
Θ_{conf}^-	0	-25	22
Θ_{conf}^+	6	-18	26

В терминах введенных обозначений функциональные требования к приборам с термостатическим управлением можно записать в следующем виде:

$$(3) \quad \Theta_{conf}^- \leq \Theta_{in}^t(\eta) \leq \Theta_{conf}^+, \forall \eta \in [0, \tau), \forall t \in [1, \dots, h].$$

Для исследования динамики приборов этого вида используем упрощенную математическую модель процесса поддержания температуры прибора, описываемого дифференциальным уравнением 1-го порядка. Данная модель, предложенная в [10], апробирована на реальных данных и широко используется для описания агрегации TCL приборов и экономических исследований по энергопотреблению в задаче управления спросом [7].

С учетом введенных обозначений уравнение можно записать в следующем виде (для t -го интервала оптимизации):

$$(4) \quad \frac{d\Theta_{in}^t(\eta)}{d\eta} = \alpha \cdot (\tilde{\Theta}_{out}^t - \Theta_{in}^t(\eta)) - \beta \cdot e_i(t) \cdot P_m,$$

где, согласно [10], P_m – номинальная мощность прибора;

$\alpha = \frac{1}{C \cdot R}$; $\beta = \frac{\lambda}{C}$; C – тепловая емкость; R – тепловое сопротивление; λ – коэффициент полезного действия.

Решение этого дифференциального уравнения можно записать в следующем виде:

$$(5) \quad \Theta_{in}^t(\eta) = e^{-\alpha \eta} \cdot (\Theta_{in}^t(0) + \frac{\beta \cdot e_i(t) \cdot P_m}{\alpha} - \tilde{\Theta}_{out}^t) + \tilde{\Theta}_{out}^t - \frac{\beta \cdot e_i(t) \cdot P_m}{\alpha},$$

где $\Theta_{in}^t(0)$ – внутренняя температура в начале t -го интервала.

Несложно показать, что $\Theta_{in}^t(\eta)$ – монотонная функция, следовательно, неравенство (3) эквивалентно следующей системе неравенств:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_{conf}^- \leq \Theta_{in}^1(0) \leq \Theta_{conf}^+ \\ \Theta_{conf}^- \leq \Theta_{in}^1(\tau) \leq \Theta_{conf}^+ \\ \Theta_{conf}^- \leq \Theta_{in}^2(\tau) \leq \Theta_{conf}^+ \\ \dots \\ \Theta_{conf}^- \leq \Theta_{in}^h(\tau) \leq \Theta_{conf}^+ \end{array} \right.$$

То есть достаточно проверить выполнение неравенства на концах всех интервалов оптимизации.

Для нахождения

$$\Theta_{in}^t(\tau) = e^{-\alpha\tau} \cdot (\Theta_{in}^t(0) + \frac{\beta \cdot e_i(t) \cdot P_m}{\alpha} - \Theta_{out}^t) + \Theta_{out}^t - \frac{\beta \cdot e_i(t) \cdot P_m}{\alpha}$$

воспользуемся равенством $\Theta_{in}^t(0) = \Theta_{in}^{t-1}(\tau)$ и, чтобы сократить объем выкладок, проведем замену переменных

$$\varphi = e^{-\alpha\tau}; \xi = \frac{\beta \cdot P_m}{\alpha}.$$

В результате получим

$$(7) \quad \begin{aligned} \Theta_{in}^t(\tau) &= \varphi \cdot \Theta_{in}^t(0) - e_i(t) \cdot \xi \cdot (1 - \varphi) + \Theta_{out}^t \cdot (1 - \varphi) = \\ &= \varphi \cdot \left(\varphi \cdot \Theta_{in}^{t-1}(0) - e_i(t-1) \cdot \xi \cdot (1 - \varphi) + \Theta_{out}^{t-1} \cdot (1 - \varphi) \right) - \\ &- e_i(t) \cdot \xi \cdot (1 - \varphi) + \Theta_{out}^t \cdot (1 - \varphi) = \dots \\ &= \varphi^t \cdot \Theta_{in}^1(0) - \xi \cdot (1 - \varphi) \cdot \sum_{k=1}^t (\varphi^{t-k} \cdot e_i(k)) + (1 - \varphi) \cdot \sum_{k=1}^t (\varphi^{t-k} \cdot \Theta_{out}^{t-k}). \end{aligned}$$

Для каждого прибора параметры φ и ξ определяются практически из системы уравнений, полученных при измерении $\tilde{\Theta}_{in}(\eta)$ в моменты времени $\eta = 0$ и $\eta = \tau$ при включенном и при выключенном приборе

$$(8) \quad \begin{cases} \Theta_{in}^{off}(\tau) = \varphi * \Theta_{in}^{off}(0) + \overset{\sim}{\Theta}_{out}^{off} * (1 - \varphi) \\ \Theta_{in}^{on}(\tau) = \varphi * \Theta_{in}^{on}(0) - \xi * (1 - \varphi) + \overset{\sim}{\Theta}_{out}^{on} * (1 - \varphi). \end{cases}$$

Итак, функциональные требования к приборам с термостатическим управлением описываются системой неравенств (6).

Вклад в ограничение по общему потреблению i -го прибора с термостатическим управлением в течении t -го интервала оптимизации составляет

$$(9) \quad R_i(t) = e_i(t) \cdot a_i.$$

Часть целевой функции i -го прибора с термостатическим управлением

$$(10) \quad \sum_i \sum_{t=1}^h c(t) \cdot e_i(t) \cdot a_i \rightarrow \min.$$

Исследование работы приборов с термостатическим управлением должно охватывать два важных случая:

1. Случай работы прибора в заданных промежутках времени, например, в интервале с 8.00 ч до 19.00 ч температура в помещении должна находиться в рамках комфортного диапазона. Соответственно, при моделировании такого режима в группу неравенств (6) будут входить только те неравенства, интервалы оптимизации которых находятся в указанных промежутках времени. Также возможны различные требования к диапазону комфортных температур в зависимости от времени. Для моделирования таких случаев нужно вводить зависимость комфортных температур от времени: $\Theta_{conf}^-(t), \Theta_{conf}^+(t)$ и использовать их в группе неравенств (6).

2. Случай работы нескольких приборов в общей окружающей среде, например, поддержание температуры в одной комнате несколькими обогревателями. Рассмотрим, как в таких случаях изменятся уравнения на примере двух обогревателей (с порядковыми номерами i_1, i_2). Уравнение (4) примет следующий вид:

$$(11) \quad \frac{d\Theta_{in}^t(\eta)}{d\eta} = \alpha \cdot (\tilde{\Theta}_{out}^t - \Theta_{in}^t(\eta)) -$$

$$-\beta_{i_1} \cdot e_{i_1}(t) \cdot P_m^{i_1} - \beta_{i_2} \cdot e_{i_2}(t) \cdot P_m^{i_2}.$$

Группа неравенств (6) не изменится, выражение (5) примет следующий вид:

$$(12) \quad \Theta_{in}^t(\tau) = \varphi^t \cdot \Theta_{in}^1(0) - \xi_{i_1} \cdot (1 - \varphi) \cdot \sum_{k=1}^t (\varphi^{t-k} \cdot e_{i_1}(k)) -$$

$$-\xi_{i_2} \cdot (1 - \varphi) \cdot \sum_{k=1}^t (\varphi^{t-k} \cdot e_{i_2}(k)) + (1 - \varphi) \cdot \sum_{k=1}^t (\varphi^{t-k} \cdot \tilde{\Theta}_{out}^{t-k}).$$

Для двух приборов система уравнений (8) будет выглядеть следующим образом:

$$(13) \quad \begin{cases} \Theta_{in}^{off}(\tau) = \varphi \cdot \Theta_{in}^{off}(0) + \tilde{\Theta}_{out}^{off} \cdot (1 - \varphi) \\ \Theta_{in_i_1}^{on}(\tau) = \varphi \cdot \Theta_{in}^{on}(0) - \xi_{i_1} \cdot (1 - \varphi) + \tilde{\Theta}_{out}^{on} \cdot (1 - \varphi) \\ \Theta_{in_i_2}^{on}(\tau) = \varphi \cdot \Theta_{in}^{on}(0) - \xi_{i_2} \cdot (1 - \varphi) + \tilde{\Theta}_{out}^{on} \cdot (1 - \varphi). \end{cases}$$

Измерения, соответственно, проводятся в следующем порядке: сначала отключены оба прибора, потом включен только первый прибор и в завершение включен только второй прибор.

Все вышеприведенные уравнения и неравенства, относящиеся к приборам с термостатическим управлением, обладают важным свойством: они линейны относительно $e_i(t)$, т.е. решение задачи оптимизации этих приборов возможно методами линейного программирования. Это свойство также сохраняется и в ситуации, когда внутренняя температура одного прибора является внешней температурой для другого. Покажем справедливость последнего утверждения на примере оптимизации совместной работы холодильника (прибор №1) и кондиционера (прибор №2), которые расположены в одном помещении.

Все слагаемые в выражении (7), связанные с внешней температурой $\tilde{\Theta}_{out}$ для *холодильника*, входят в уравнения и неравенства с постоянными множителями, которые не зависят от

$e_1(t)$ холодильника, следовательно, эти уравнения будут линейными, если $\tilde{\Theta}_{out}$ будет линейно относительно $e_2(t)$ кондиционера. При составлении уравнений и неравенств для холодильника в качестве $\tilde{\Theta}_{out}$ нужно подставлять $\frac{1}{\tau} \cdot \int_0^{\tau} \Theta_{in}^t(\eta) \cdot d\eta$, где $\Theta_{in}^t(\eta)$ – зависимость внутренней температуры от времени, полученная для кондиционера. Из выражения (5) видно, что указанный интеграл линеен относительно $e_2(t)$ кондиционера.

ПРИБОРЫ С ЦИКЛИЧЕСКИМ РЕЖИМОМ РАБОТЫ

Введем следующие обозначения: T_i^{begin}, T_i^{end} – номера интервалов оптимизации, в промежутке между которыми должен выполнить свой цикл i -й прибор; n_i^{cycle} – количество интервалов оптимизации в цикле работы i -го прибора; $a_i(k); k \in [0, \dots, n_i^{cycle}]$ – потребляемая энергия на k -м интервале цикла i -м прибором; p_i – номер интервала оптимизации от момента T_{begin}^i начала работы i -го прибора, которое требуется найти.

Для этой группы при описании уравнений и неравенств вместо оптимальных значений $e_i(t) \in \{0, 1\}$ удобно использовать переменные p_i . При найденном значении p_i $e_i(t) = 1$ на интервале $T_i^{begin} + p_i \leq t \leq T_i^{begin} + p_i + n_i^{cycle}$, в остальных случаях $e_i(t) = 0$. В такой постановке выражения, соответствующие ограничениям, вкладу прибора в целевую функцию и неравенство по общему потреблению можно записать следующим способом.

Ограничения для p_i :

$$(14) \quad 0 \leq p_i \leq T_i^{end} - T_i^{begin} - n_i^{cycle}.$$

Вклад в ограничение по общему потреблению в течение t -го интервала оптимизации:

(15)

$$\begin{cases} R_i(t) = 0; t \leq \tau \cdot (T_i^{begin} + p_i), \\ R_i(t) = a_i \left(\left\lfloor \frac{t - \tau \cdot (T_i^{begin} + p_i)}{\tau} \right\rfloor \right); \tau \cdot (T_i^{begin} + p_i) < t < \tau \cdot (T_i^{begin} + p_i + n_i^{cycle}), \\ R_i(t) = 0; t \geq \tau \cdot (T_i^{begin} + p_i + n_i^{cycle}). \end{cases}$$

Часть целевой функции:

$$(16) \quad \sum_{\forall t: T_i^{begin} + p_i \leq t \leq T_i^{begin} + p_i + n_i^{cycle}} c(t) \cdot a_i(t - T_i^{begin} - p_i) \rightarrow \min.$$

Можно показать, что, проведя замену переменной p_i на набор булевых переменных, выражения (14)–(16) приводятся к необходимому для решения методами линейного программирования виду.

ПРИБОРЫ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ КЛАССИФИКАЦИОННЫМ ПРИЗНАКАМ

Рассмотрим алгоритмы оптимизации для приборов, удовлетворяющих двум классификационным признакам, предложенным во введении: приборы с возможностью прерывания и возобновления цикла работы и приборы с возможностью выполнения одной работы за разные промежутки времени с различным энергопотреблением.

4.3.1. ПРИБОРЫ С ВОЗМОЖНОСТЬЮ ПРЕРЫВАНИЯ И ВОЗОБНОВЛЕНИЯ ЦИКЛА РАБОТЫ

Такие приборы можно промоделировать несколькими приборами с циклом работы. Рассмотрим прибор, в полном цикле работы которого есть две возможности: прервать его работу и возобновить. Обозначим $n_1^{cycle}, n_2^{cycle}, n_3^{cycle}$ - количество интервалов оптимизации, соответствующее каждому подциклу; p_1, p_2, p_3 - номера оптимальных интервалов оптимизации для каждого подцикла.

Тогда выражения (14), (15) примут следующий вид.

Ограничения для $p_{1,2,3}$:

$$\begin{aligned}
 & 0 \leq p_1 \leq T^{end} - T^{begin} - n_1^{cycle} - n_2^{cycle} - n_3^{cycle}, \\
 (17) \quad & p_1 + n_1^{cycle} \leq p_2 \leq T^{end} - T^{begin} - n_2^{cycle} - n_3^{cycle}, \\
 & p_2 + n_2^{cycle} \leq p_3 \leq T^{end} - T^{begin} - n_3^{cycle}.
 \end{aligned}$$

Вклад в ограничение по общему потреблению i -го прибора в течении t -го интервала оптимизации:

(18)

$$\left\{ \begin{aligned}
 & R_i(t) = 0; t \leq \tau \cdot (T^{begin} + p_1), \\
 & R_i(t) = a_i \left(\left[\frac{T - \tau \cdot (T^{begin} + p_1)}{\tau} \right] \right); \tau \cdot (T^{begin} + p_1) < t < \tau \cdot (T^{begin} + p_1 + n_1^{cycle}), \\
 & R_i(t) = 0; \tau \cdot (T^{begin} + p_1 + n_1^{cycle}) \leq t \leq \tau \cdot (T^{begin} + p_2), \\
 & R_i(t) = a_i \left(\left[\frac{t - \tau \cdot (T^{begin} + p_2) + \tau \cdot n_1^{cycle}}{\tau} \right] \right); \tau \cdot (T^{begin} + p_2) < t < \tau \cdot (T^{begin} + p_2 + n_2^{cycle}), \\
 & R_i(t) = 0; \tau \cdot (T^{begin} + p_2 + n_2^{cycle}) \leq t \leq \tau \cdot (T^{begin} + p_3), \\
 & R_i(t) = a_i \left(\left[\frac{t - \tau \cdot (T^{begin} + p_3) + \tau \cdot (n_1^{cycle} + n_2^{cycle})}{\tau} \right] \right); \tau \cdot (T^{begin} + p_3) < t < \tau \cdot (T^{begin} + p_3 + n_3^{cycle}), \\
 & R_i(t) = 0, t \geq \tau \cdot (T^{begin} + p_3 + n_3^{cycle}).
 \end{aligned} \right.$$

Аналогичным образом строится выражение (16) для части целевой функции. В связи с тем, что номера интервалов k в $a_i(k)$ необходимо преобразовывать с учетом прерывания циклов, это выражение получается достаточно громоздким и здесь не приводится.

4.3.2. ПРИБОРЫ С ВОЗМОЖНОСТЬЮ ВЫПОЛНЕНИЯ ОДНОЙ РАБОТЫ ЗА РАЗНЫЕ ПРОМЕЖУТКИ ВРЕМЕНИ С РАЗЛИЧНЫМ ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЕМ

При определении потребляемой энергии в течение интервала оптимизации a_i подразумевалось, что прибор имеет только один режим работы (с точки зрения потребляемой энергии). Рассмотрим методику адаптации под построенную модель приборов с разными режимами работы на примере кондиционера с тремя режимами и возможностью удаленно выбирать необходимый режим (имеется в виду, что все режимы равноправны, т.е. пользователю все равно, в каком из режимов в конечном счете будет работать прибор, а важно только соблюдение требо-

ваний по функционированию). Каждый из режимов характеризуется тремя значениями потребляемой энергии a_1, a_2, a_3 и тремя значениями параметра w : w_1, w_2, w_3 в уравнении, описывающем значение средней внутренней температуры.

Представим кондиционер в виде совокупности трех отдельных и независимых приборов i_1, i_2, i_3 с указанными параметрами и добавим неравенство, ограничивающее возможность работы более одного прибора для любого интервала оптимизации:

$$(19) e_{i_1}(t) + e_{i_2}(t) + e_{i_3}(t) \leq 1 \forall t \in [1, \dots, h].$$

Аналогичным образом можно адаптировать приборы, имеющие несколько режимов работы из других подмножеств.

5. Пример

Для проверки работоспособности и эффективности полученного алгоритма оптимизации было проведено его моделирование на примере оптимизации работы холодильника и посудомоечной машины с двумя режимами работы в течение пяти часов при трехзонном тарифном графике. В результате было получено выражение целевой функции и 76 неравенств, описывающих ограничения переменных, ограничение на использование приборов и ограничения на максимально потребляемую мощность.

На рис. 1 приведен график работы приборов в оптимальном варианте

В соответствии с используемым тарифным графиком оптимальная программа работы посудомоечной машины соответствует четырём последним интервалам оптимизации с наиболее низким тарифом. На рис. 2 приведены графики зависимости мощностей максимально допустимого потребления и потребления оптимизируемых приборов от номера интервала оптимизации в полученном варианте.

Из этих графиков видно, что при оптимизации выполняется ограничение на максимальное потребление: в любой точке график потребления оптимизируемых приборов лежит ниже графика допустимого потребления.

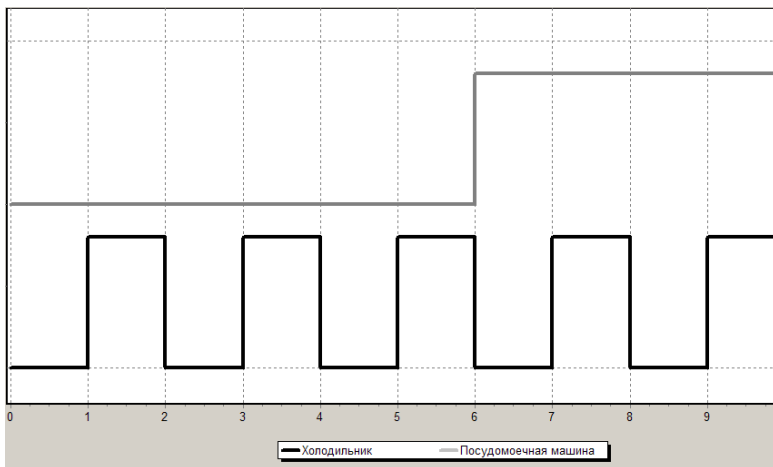


Рис. 1 Графики зависимости работы приборов от номера интервала оптимизации

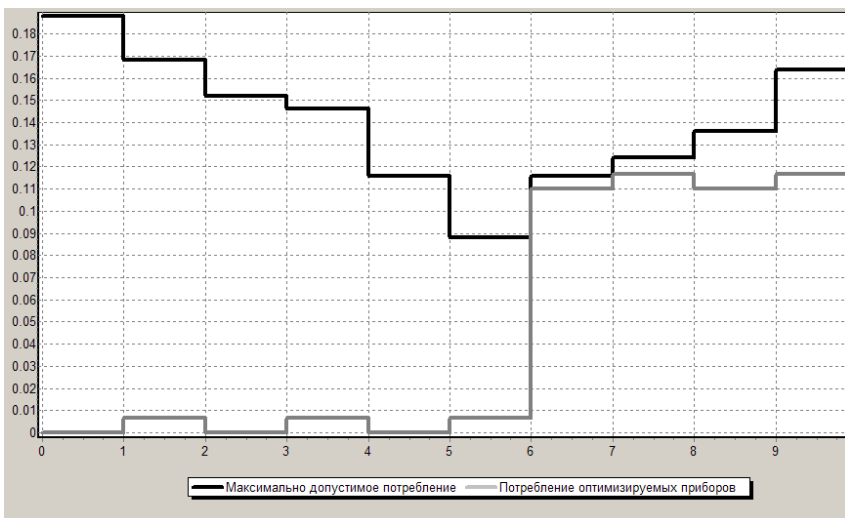


Рис. 2. Графики зависимости мощностей максимально допустимого потребления и потребления оптимизируемых приборов (кВт) от номера интервала оптимизации

6. Заключение

1. Проведено исследование существующих подходов и проблем оптимизации энергопотребления домохозяйств, которое позволило разделить множество видов приборов на подмножества по способу задания требований к их функционированию, выделить группы оптимизируемых приборов и присущие им ограничения, тем самым уменьшить объем необходимых статистических данных.

2. Разработана методика оптимизации энергопотребления, содержащая методику прогнозирования графика максимальной суммарной мощности и методику оптимизации графиков работы различных видов приборов.

3. Показано, что задача оптимизации потребления для рассмотренных видов приборов сводится к основной задаче линейного целочисленного программирования большой размерности.

4. Получены выражения частичной суммы для целевой функции и ограничения по максимальной потребляемой мощности, а также неравенства, описывающие функциональные требования к рассматриваемому подмножеству.

5. Выполнено моделирование полученных алгоритмов оптимизации, которое показало их работоспособность и эффективность.

6. Полученные результаты являются основой для решения практических задач оптимизации энергопотребления в домохозяйствах.

Литература

1. ГРЕБЕНЮК Г.Г., КОВАЛЕВ С.П., КРЫГИН А.А., СЕРЕДА Л.А. *Организация энергоменеджмента и планирование электрической нагрузки домохозяйств // Энергобезопасность и энергосбережение.* – 2015. – №3. – С. 22–27.
2. ЗОРКАЛЬЦЕВ В.И., ФИЛАТОВ А.Ю. *Новые варианты двойственных алгоритмов внутренних точек для систем линейных неравенств // Журнал вычислительной математики и математической физики.* – 2004. – Том 44. – №7. – С. 1234–1243.
3. НАЦОКИН В.В. *Техническая теродинамика и теплопередача.* – М.: Изд-во «Высшая школа». – 1969. – С. 372–374.
4. УСКОВ Е.И. *Численное сравнение оптимизационных алгоритмов // Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа.* – М.: ВЦ РАН, 2012. – С. 118–131.
5. ALBANI M.H., EL-SAADANY E.F. *A summary of demand response in electricity markets // Electric Power Systems Research.* – 2008. – Vol. 11, Iss. 78. – P. 1989–1996.
6. ANN-PIETTE M., GHATIKAR G., KILICCOTE S., WATSON D., KOCH E., HENNAGE D. *Design and operation of an open, interoperable automated demand response infrastructure for commercial buildings // J. Comput. Inf. Sci. Eng.* – June, 2009. – Vol. 9. – P. 1–9.
7. BASHASH S., FATHY HOSAM K. *Modeling and Control Insights into Demand-side Energy Management through Setpoint Control of Thermostatic Loads // American Control Conference, June 29 – July 1, 2011, San Francisco, CA, USA.* – P. 4546–4553.
8. BRADAC Z., KACZMARCZYK V., FIEDLER P. *Optimal scheduling of domestic appliances via MILP // Energies.* – 2015. – Vol. 8, Iss. 1. – P. 217–232.
9. *Buildings Energy Data Book, Energy Efficiency and Renewable Energy: Building Technologies Program.* – U.S. Department of Energy, Washington, D.C., March, 2012.

10. CALLAWAY D.S. *Tapping the energy storage potential in electric loads to deliver load following and regulation, with application to wind energy* // Energy Conversion and Management. – 2009. – Vol. 50. – P. 1389–1400.
11. CAPASSO A., GRATTIERI W., LAMEDICA R., PRUDENZI A. *A bottom-up approach to residential load modeling* // IEEE Transactions on Power Systems. – Sept. 1994. – Vol. 2. – P. 957–965.
12. CHAN S-C. et al. *Load / price forecasting and managing demand response for smart grids: Methodologies and challenges* // Signal Processing Magazine. – 2012. – Vol. 29, Iss. 5. – P. 68-85.
13. CONEJO A.J., MORALES J.M., BARINGO L. *Real-time demand response model* // IEEE Trans. on Smart Grid. – 2010. – Vol. 1, Iss. 3. – P. 236–242.
14. *Demand Response And Light Control. Scott Ziegenfus* // ASHRAE Journal. – 2012. – November. – P. B20–B24.
15. FERREIRA R.S., BARROSO L.A.N., CARVALHO M.M. *Demand response models with correlated price data: a robust optimization approach* // App. Energy. – 2012. – Vol. 96. – P. 133–149.
16. GOTTWALT S. et al. *Demand side management – a simulation of household behavior under variable prices* // Energy policy. – 2011. – Vol. 39, Iss. 12. – P. 3–8174.
17. KHALILI A.H., WU C., AGHAJAN H. *Hierarchical preference learning for light control from user feedback* // IEEE Computer Society Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops (CVPRW 2010). – 2010. – P. 56–62.
18. LI B. et al. *Predicting user comfort level using machine learning for smart grid environments* // Innovative Smart Grid Technologies (ISGT 2011). – P. 1–6.
19. LINA, CHEN LIJUN, STEVEN H. *Low Optimal Demand Response Based on Utility Maximization in Power Networks* Power and Energy Society General Meeting // IEEE Power and Energy Society General Meeting. – 2011. – P. 1–8.
20. LUJANO-ROJAS J. M. et al. *Optimum residential load management strategy for real time pricing demand response programs* // Energy policy. – 2012. – Vol. 45. – P. 671–679.

21. MOHSENIAN-RAD A. H., LEON-GARCIA A. *Optimal Residential Load Control With Price Prediction in Real-Time Electricity Pricing Environments* // IEEE Trans. on Smart Grid. – 2010. – Vol. 1, Iss. 2. – P. 120–133.
22. PEDRASA M.A.A., SPOONER T.D., MAXGILL I.F. *Scheduling of demand side resources using binary particle swarm optimization* // IEEE Trans. on Power Systems. – 2009. – Vol. 24, №3. – P. 1173–1181.
23. RAMANATHAN B., VITTAL V. *A framework for evaluation of advanced direct load control with minimum disruption* // IEEE Trans. on Power Systems. – 2008. – Vol. 23, Iss. 4. – P. 1681–1688.
24. SOU K.C. et al. *Scheduling smart home appliances using mixed integer linear programming* // 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC-2011). – P. 5144-5149.
25. VOLKOVA I.O., GUBKO M.V., SALNIKOVA E.A. *Active consumer: optimization problems of power consumption and self-generation* // Automation and Remote Control. – 2014. – Vol. 75, Iss. 3. – P. 551–562.

HOUSEHOLD ENERGY CONSUMPTION OPTIMIZATION BASED ON FORECAST SCHEDULE MAXIMUM LOAD OF HOUSEHOLD APPLIANCES

Georgy Grebenuk, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495)334-87-39).
Andrey Krygin, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495)334-87-39).

Abstract: The problem of optimization of household energy consumption by constructing an optimal schedule for the use of household appliances. The formulation of the task is specified, the set of all types of household appliances is divided into 4 groups: devices with thermostatic control, devices with a cyclic mode of operation, devices with the ability to interrupt and resume the cycle of work and instruments with the possibility performing one job at different time intervals with different power consumption. For each group, the requirements for functioning are formalized and mathematical models are constructed, describing these requirements for the operation of the instrument and a graph of its energy consumption. With the use of these models, an algorithm is developed for optimizing the operation schedules of devices and shows how to reduce this problem to the main integer programming problem, in which as the objective function is the total cost of electricity consumed. Particular attention is paid to the possibility of practical application of the obtained algorithm, simplicity and convenience of input of initial data.

Keywords: optimization of energy consumption, energy consumption in the residential sector, optimization of household appliances.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии М.В. Губко.*

Поступила в редакцию 20.02.2017.

Опубликована 30.09.2017.

УДК 681.52
ББК Ж 30

АДАПТИВНАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРОМ НА ОСНОВЕ КВАТЕРНИОННОЙ МОДЕЛИ ВРАЩЕНИЙ¹

Никитин Д. А.²

(Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург)

Предложен синтез системы стабилизации квадрокоптера, основанный на кватернионной модели вращений. Рассматривается адаптивная система идентификации коэффициентов тяги квадрокоптера на основе метода скоростного градиента. Приводятся доказательства устойчивости, а также примеры моделирования системы.

Ключевые слова: БПЛА, квадрокоптер, адаптивное управление, метод скоростного градиента, кватернионы.

Введение

В последнее время в обществе всё большую роль начинают играть беспилотные летательные аппараты, в особенности самые доступные из них – квадрокоптеры. Их популярность в последние годы обеспечена простотой конструкции и появлением большого количества различных систем управления, многие из которых являются программами open-source.

Существует множество задач, которые можно решать в связи с квадрокоптерами, в том числе задач научных. К примеру, работы [10, 11, 24] демонстрируют обучение роботов эффективным траекториям полета, работы [7, 23] – кооперативному поведению, [25, 26, 28] – навигации при помощи камер и RGBD-сенсоров,

¹ Работа была выполнена в ИПМаш РАН при поддержке гранта РНФ 14-29-00142.

² Денис Александрович Никитин, магистрант (dniken@gmail.com).

а [2, 22] – отслеживанию траектории нелинейными регуляторами. Оценка ориентации подобных машин обычно осуществляется модификациями комплементарного фильтра [17, 18] или же расширенным фильтром Калмана [14], а обзор применяемых математических моделей, используемых для описания квадрокоптера, приведен в [8].

Для управления реальными квадрокоптерами обзор основных существующих решений можно найти в статье [16]. Однако можно выделить два общих свойства, присущие этим системам: они все работают на PID-регуляторах, и они все используют углы Эйлера (иначе называемые углами Крылова) в качестве переменных состояния.

Проблема использования углов Эйлера заключается в том, что этот способ имеет сингулярность, а значит, в некоторых областях пространства ориентаций не будет работать. К примеру, ни одна из общедоступных систем не способна сделать полностью контролируемый flip (сальто, переворот), не отключая при этом основной регулятор. В отличие от углов Эйлера, кватернионы не имеют подобных проблем, хотя их редко используют для создания систем управления квадрокоптерами. Примером системы, полностью основанной на кватернионах, может являться [9].

Проблема PID-регулятора в том, что для каждого конкретного робота нужно заново подбирать коэффициенты. К программам open-source прилагаются специальные инструкции о том, как это делать, однако всё равно такой подход снижает эффективность системы, так как не позволяет достичь оптимальных параметров. Примеры синтеза PID-регулятора для квадрокоптера можно найти в работах [13, 19, 21].

В связи с этими проблемами была создана своя система стабилизации, использующая для синтеза регулятора кватернионы в качестве переменной состояния и идею, похожую на линеаризацию обратной связью. В результате получился регулятор, большинство параметров которого являются в точности физическими параметрами конкретного квадрокоптера, а оставшиеся коэффициенты не зависят от робота и могут быть подобраны единожды

для всего класса машин.

Некоторые из физических параметров конкретного робота часто бывает сложно измерить, или же они могут меняться со временем прямо в полете. Поэтому особенно большую ценность приобретает система, позволяющая идентифицировать неизвестные параметры и использовать их в системе стабилизации. Существующие же адаптивные системы, к примеру [1, 20, 29], полагаются на углы Эйлера и, в основном, стандартные PID-регуляторы.

Данная работа состоит из четырёх частей. В первой определяется используемая математическая модель. Вторая часть посвящена системе стабилизации и доказательству её устойчивости. В третьей части приводится система адаптации и идентификации коэффициентов тяги квадрокоптера, ключевых для устойчивого полета. Последняя часть описывает проведенное моделирование общей системы.

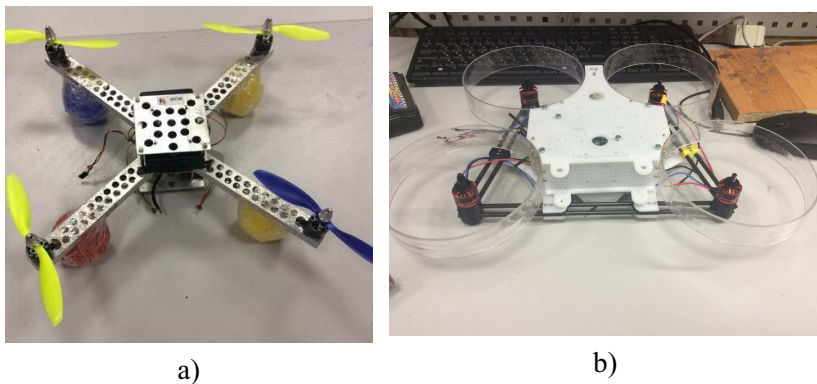


Рис. 1. Тестовые самодельные квадрокоптеры: а) робот Квадракон (*FlyMarple*); б) робот Бонд (*ТРИК*)

Надо также сказать, что система стабилизации была проверена на реальных, самодельных квадрокоптерах (рис. 1), один из которых работал на контроллере *FlyMarple*, второй – на контроллере *ТРИК* (подробнее об этой российской разработке см. www.trikset.com, [27]).

1. Математическая модель квадрокоптера

1.1. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть q – кватернион. Обозначим через q_w скалярную часть q , а через q_v – векторную. Тогда $q = (q_w, q_v) = (q_w, q_x, q_y, q_z)$.

Пусть r и s – два вектора в \mathbb{R}^3 . Их скалярное произведение обозначается как $\langle r, s \rangle$, а векторное – как $r \times s$. Произведение кватернионов $a = (a_w, a_v)$ и $b = (b_w, b_v)$ может быть записано как

$$a * b = (a_w b_w - \langle a_v, b_v \rangle, \quad a_w b_v + b_w a_v + a_v \times b_v).$$

Под умножением кватерниона a на вектор r будем понимать кватернионное произведение $a * (0, r)$.

Кватернион, сопряженный к q , будем обозначать как q^* . Если $\|q\| \equiv 1$, то $q * q^* = q^* * q = (1, 0, 0, 0)$.

1.2. КВАТЕРНИОН ОРИЕНТАЦИИ КВАДРОКОПТЕРА

Пусть у нас есть абсолютная (земная) система координат XYZ (где XY – горизонтальная плоскость, а ось Z направлена вверх, против силы тяжести), тогда для системы $X'Y'Z'$, связанной с квадрокоптером, существует единственная ось u и единственный угол $\phi \in [0, \pi)$ такие, что, если повернуть штрихованную систему вокруг оси u на угол ϕ против часовой стрелки, получится исходная система. Пусть (u_x, u_y, u_z) – единичный вектор в системе XYZ , являющийся направляющей оси u . Тогда кватернионом, описывающим поворот $X'Y'Z'$ в положение XYZ , называется $q = \left(\cos \frac{\phi}{2}, u_x \sin \frac{\phi}{2}, u_y \sin \frac{\phi}{2}, u_z \sin \frac{\phi}{2} \right)$. Заметим, что $\|q\| \equiv 1$ для любых u и ϕ . Пусть теперь нам задан вектор v' в системе $X'Y'Z'$. Для его представления v в системе XYZ будет выполнено равенство $v = q * v' * q^*$. Если система $X'Y'Z'$ вращается относительно вектора угловой скорости ω , то закон изменения кватерниона ориентации q будет следующим:

$$(1) \quad \dot{q} = \frac{1}{2} q * \omega.$$

В данном уравнении используются координаты вектора ω в системе, связанной с квадрокоптером. Таким образом, q и ω являются частью вектора состояния динамической системы, описывающей квадрокоптер. Кроме того, мы можем измерять ω при помощи гироскопов, установленных на робота, и использовать её для оценки q . Вывод уравнения (1), а также дополнительные сведения о кватернионной арифметике можно посмотреть в [4].

1.3. МОДЕЛЬ

В дополнение к уравнению (1) введем еще два уравнения:

$$(2) \quad I\dot{\omega} = \begin{pmatrix} L(F_2 - F_4) \\ L(F_3 - F_1) \\ \xi(F_1 + F_3 - F_4 - F_2) \end{pmatrix} - \omega \times I\omega,$$

$$(3) \quad \ddot{H} = \frac{1}{m} (1 - 2q_x^2 - 2q_y^2) (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) - g.$$

Уравнение (2) – уравнение Ньютона-Эйлера для вращающегося тела (см. [3]). Здесь F_i – сила тяги (Н), создаваемая i -м винтом, I – матрица моментов инерции ($\text{кг}\cdot\text{м}^2$), предполагаемая диагональной, L – расстояние от центра масс до винтов (м), а ξ – коэффициент связи силы тяги винта с реактивным моментом (м). Соответствие номеров винтов с их положениями и направлениями вращений можно увидеть на рис. 2.

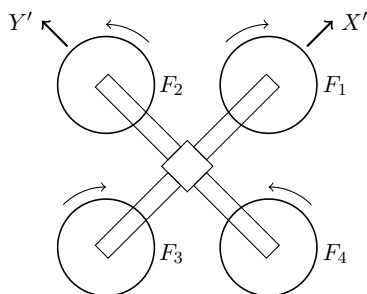


Рис. 2. Схематичное изображение квадрокоптера

Уравнение (3) описывает динамику квадрокоптера по вертикальной оси Z , направленной против силы тяжести (движение в

горизонтальной плоскости $X'Y'$ опущено для упрощения, так как в данной работе мы не наблюдаем и не пытаемся управлять позицией робота в этой плоскости). Здесь H – координата робота по оси Z (м), m – масса робота (кг), g – ускорение свободного падения (м/с^2). Множитель $(1 - 2q_x^2 - 2q_y^2)$ равен косинусу угла между осями Z и Z' и определяет, насколько суммарная тяга квадрокоптера воздействует на его ускорение по высоте. Данный множитель в дальнейшем для удобства будет обозначаться через k_{mod} .

Сила тяги винта F_i предполагается зависящей квадратично от скорости вращения винта (см. [15]), которую в свою очередь можно считать линейно зависящей от напряжения, подаваемого на i -й мотор. Представим, что управление u_i – напряжение на i -м моторе, при этом задаваемое по шкале от 0 до 1, где 0 – отсутствие напряжения, а 1 – максимальное напряжение на мотор. Тогда можно ввести коэффициент пропорциональности квадрата напряжения и силы тяги K_i , который также будет иметь смысл максимального значения тяги i -го винта. Если $F_i = K_i u_i^2$, то мы также можем заменить переменную управления, введя $U_i = u_i^2$. Тогда зависимость между тягой и управлением принимается линейной с коэффициентом пропорциональности K_i . Оценке K_i и посвящен раздел 4. В разделе 3 подразумевается, что значения K_i известны, и, более того, для простоты изложения равны единому коэффициенту K .

2. Система стабилизации

2.1. СТАБИЛИЗАЦИЯ ОРИЕНТАЦИИ

Основная идея закона управления лежит в создании двух последовательных регуляторов: сначала для кватерниона ориентации, потом для угловой скорости. Если задача, которая стоит перед роботом – совпадение систем отсчета $X'YZ$ и $X'Y'Z'$ (т.е. висение на месте), то выполнение цели означает равенство кватерниона q значению $(1, 0, 0, 0)$. Определим тогда целевой кватернион q_d , который будет целью управления. В простейшем случае его значение будет $(1, 0, 0, 0)$, однако можно использовать и лю-

бые другие значения для реализации более сложных движений, вплоть до переворотов.

Алгоритм 1.

- 1) Определим желаемую производную кватерниона: $\tau_d = k_p(q_d - \langle q_d, q \rangle q)$, где $k_p > 0$ – коэффициент усиления, а $\langle q_d, q \rangle$ – скалярное произведение кватернионов как векторов в \mathbb{R}^4 .
- 2) Инверсией уравнения (1) получаем целевую угловую скорость: $\omega_d = 2 q^* * \tau_d$.
- 3) Определим желаемое угловое ускорение: $\rho_d = k_d(\omega_d - \omega)$, где $k_d > 0$ – коэффициент усиления.
- 4) Инверсией уравнения (2) получаем целевой момент: $M_d = I\rho_d + \omega \times I\omega$. В итоге $\dot{\omega} \equiv \rho_d$.
- 5) Момент M_d дает нам 3 линейных уравнения на управления U_i . Определив любым способом четвертое управление (например, задав суммарную тягу четырех винтов), мы можем полностью рассчитать управление U_i .

Скалярное произведение в шаге 1 необходимо для того, чтобы выполнялось условие ортогональности τ_d и q в \mathbb{R}^4 , которое в свою очередь есть следствие условия $\|q\| \equiv 1$. Оказывается, этого достаточно, чтобы при кватернионном умножении в шаге 2 скалярная часть результирующего кватерниона обращалась в 0 и ω_d была бы вектором.

Заметим, что единственными параметрами регулятора являются коэффициенты k_p и k_d , которые не зависят от физических параметров системы. То есть однажды найденные коэффициенты смогут стабилизировать любой квадрокоптер (при условии отсутствия погрешностей в определении физических параметров системы).

2.2. СТАБИЛИЗАЦИЯ ВЫСОТЫ

Момент сил M_d определяет 3 уравнения на U_i . Один из вариантов полностью определить управления – добавить регулятор высоты. Пусть задана целевая высота H_d , которую необходимо выдержать квадрокоптеру. Применим PD-регулятор, задав целевое ускорение:

$$(4) \quad \Upsilon_d = A_p(H_d - H) - A_d\dot{H},$$

где A_p и A_d положительные. Из уравнения (3) получаем четвертое уравнение на управляющие воздействия:

$$(5) \quad \sum_{i=1}^4 U_i = \frac{m}{K} \frac{(\Upsilon_d + g)}{k_{mod}}.$$

2.3. ОБЩИЙ ЗАКОН УПРАВЛЕНИЯ

Введем матрицу G , связывающую целевые моменты и ускорения с управляющими воздействиями U_i :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & KL & 0 & -KL \\ -KL & 0 & KL & 0 \\ K\xi & -K\xi & K\xi & -K\xi \\ \frac{K}{m} & \frac{K}{m} & \frac{K}{m} & \frac{K}{m} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2KL} & \frac{1}{4K\xi} & \frac{m}{4K} \\ \frac{1}{2KL} & 0 & -\frac{1}{4K\xi} & \frac{m}{4K} \\ 0 & \frac{1}{2KL} & \frac{1}{4K\xi} & \frac{m}{4K} \\ -\frac{1}{2KL} & 0 & -\frac{1}{4K\xi} & \frac{m}{4K} \end{pmatrix}.$$

И тогда управления рассчитываются просто из матричного умножения:

$$(6) \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2KL} & \frac{1}{4K\xi} & \frac{m}{4K} \\ \frac{1}{2KL} & 0 & -\frac{1}{4K\xi} & \frac{m}{4K} \\ 0 & \frac{1}{2KL} & \frac{1}{4K\xi} & \frac{m}{4K} \\ -\frac{1}{2KL} & 0 & -\frac{1}{4K\xi} & \frac{m}{4K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{dx} \\ M_{dy} \\ M_{dz} \\ \Upsilon_d + g \\ k_{mod} \end{pmatrix}.$$

2.4. УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ

Устойчивость высоты при использовании регулятора (4) очевидна. Докажем теперь, что алгоритм 1 обеспечивает цель управления ориентацией для почти всех начальных состояний. Пусть $q_d = (1, 0, 0, 0)$. Это предположение неограничивающее, так как в противном случае мы можем ввести модифицированный кватернион ориентации $q' = q_d^* * q$ в качестве нового состояния. При

таким выборе q_d уравнения замкнутой системы для ориентации сводятся к

$$(7) \quad \dot{q} = \frac{1}{2} q * \omega,$$

$$\dot{\omega} = -2k_p k_d q_v - k_d \omega.$$

Теорема 1. Пусть $k_p, k_d > 0$. Тогда точка $L_1 = [(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0)]$ является асимптотически устойчивой точкой равновесия системы (7), $L_2 = [(-1, 0, 0, 0), (0, 0, 0)]$ – неустойчивой точкой равновесия, и область притяжения точки L_1 является область $\mathbb{S}^4 \times \mathbb{R}^3 \setminus \{L_2\}$.

Доказательство. В качестве кандидата на функцию Ляпунова рассмотрим функцию

$$(8) \quad V(q, \omega) = h_{11} \|q_v\|^2 + 2h_{12} \langle q_v, \omega \rangle + h_{22} \|\omega\|^2 + 2\nu(1 - q_w).$$

Очевидно, что $V(L_1) = 0$ и $V(L_2) = 4\nu$. Необходимо найти такие коэффициенты h_{ij} и ν , чтобы производная \dot{V} в силу системы была отрицательна всюду, кроме точек L_1 и L_2 , а сама V была положительно определена. Для удобства обозначим $k_q = 2k_p k_d$.

Производную функции V в силу системы можно записать как

$$(9) \quad \dot{V} = g_{11}(q_w) \|q_v\|^2 + 2g_{12}(q_w) \langle q_v, \omega \rangle + g_{22}(q_w) \|\omega\|^2,$$

где коэффициенты g_{ij} удовлетворяют равенству

(10)

$$G(q_w) = \begin{pmatrix} g_{11}(q_w) & g_{12}(q_w) \\ g_{12}(q_w) & g_{22}(q_w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\nu}{2} \\ \frac{\nu}{2} & 0 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{q_w}{2} \\ -k_q & -k_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -k_q \\ \frac{q_w}{2} & -k_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

Иной способ записи уравнения (9),

$$\dot{V} = (q_v^\top \quad \omega^\top) [G(q_w) \otimes I_3] \begin{pmatrix} q_v \\ \omega \end{pmatrix},$$

показывает, что отрицательная определенность \dot{V} равносильна отрицательной определенности матрицы G . Также очевидно, что $(q_v, \omega) \equiv (0, 0)$ только в точках L_1 и L_2 .

Теперь покажем, что существуют такие коэффициенты h_{ij} и ν , что матрица G будет отрицательно определена. Задача осложняется тем, что по уравнению (10) коэффициенты матрицы, в общем случае, зависят от q_w . Для решения этой проблемы воспользуемся частотной теоремой (см. [6, 12]).

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -k_q & -k_d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\nu}{2} \\ \frac{\nu}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Введем линейную динамическую систему

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

Условие отрицательной определенности матрицы G тогда запишется как

$$(11) \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \frac{q_w}{2}x_2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} HA + A^\top H & HB \\ B^\top H & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{q_w}{2}x_2 \end{pmatrix} < 0,$$

$$|x_1| + |x_2| \neq 0.$$

Пусть

$$u = \frac{q_w}{2}x_2, \quad |q_w| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad (x_2 + 2u)(x_2 - 2u) \geq 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{pmatrix} \geq 0.$$

Определим

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad S = M + \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\nu}{2} & 0 \\ \frac{\nu}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Тогда выполнение условия (11) будет следовать из матричного неравенства

$$(12) \quad S + \begin{pmatrix} HA + A^\top H & HB \\ B^\top H & 0 \end{pmatrix} < 0.$$

Частотная теорема утверждает, что существование матрицы $H = H^\top$ такой, что неравенство (12) выполнено, равносильно выполнению неравенства

$$(13) \quad (x^* \quad u^*) S \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} < 0$$

при всех $(x, u) \in \mathcal{M}_{i\omega}$ для каждого $\omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, где множества \mathcal{M}_λ при $\lambda \in \mathbb{C}$ определены как

$$\mathcal{M}_\lambda = \begin{cases} (x, u) \mid x \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, u \in \mathbb{C}, \lambda x = Ax + Bu, \text{ при } |\lambda| < \infty, \\ (0, u) \mid u \in \mathbb{C}^1 \setminus \{0\}, \text{ при } |\lambda| = \infty. \end{cases}$$

В случае, когда $i\omega$ не является собственным числом A , условие (13) может быть записано в терминах частотной характеристики:

$$(14) \quad \begin{pmatrix} (i\omega I - A)^{-1} B \\ 1 \end{pmatrix}^* S \begin{pmatrix} (i\omega I - A)^{-1} B \\ 1 \end{pmatrix} < 0.$$

Выражая частотную характеристику

$$\begin{aligned} (i\omega I - A)^{-1} B &= \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ k_q & i\omega + k_d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{-\omega^2 + i\omega k_d} \begin{pmatrix} i\omega + k_d \\ -k_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\omega} \\ \frac{k_q(\omega + ik_d)}{\omega(\omega^2 + k_d^2)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и подставляя её в (14), получаем условие

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{i}{\omega} & \frac{k_q(\omega - ik_d)}{\omega(\omega^2 + k_d^2)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\nu}{2} & 0 \\ \frac{\nu}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i}{\omega} \\ \frac{k_q(\omega + ik_d)}{\omega(\omega^2 + k_d^2)} \\ 1 \end{pmatrix} = \\ = \frac{k_q^2 - \nu k_q k_d}{\omega^2(\omega^2 + k_d^2)} - 4 < 0, \end{aligned}$$

для выполнения которого достаточно положить

$$(15) \quad \nu > \frac{k_q}{k_d} > 0.$$

Если же $i\omega$ – собственное число A , то условие (13) надо проверять для всех векторов вида $(x_\omega + x_s, u)$ таких, что $x_\omega \in \ker(i\omega I - A)$, $x_s \perp \ker(i\omega I - A)$, $Ax_s - i\omega x_s + Bu = 0$. В

нашем случае $\omega = 0$, и для него $x_\omega = (k_d \ -k_q)^\top$. Более того, $x_s = (0 \ 1)^\top \perp B$, а значит, $(x_s, u) = (0, 0)$. Тогда частотное условие сводится к неравенству

$$(k_d \ -k_q) \begin{pmatrix} 0 & \frac{\nu}{2} \\ \frac{\nu}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_d \\ -k_q \end{pmatrix} < 0,$$

которое в свою очередь равносильно (15). Таким образом, доказано существование матрицы H и числа ν таких, что производная V в силу системы отрицательно определена.

Осталось показать, что функция V положительно определена. Из отрицательной определенности матрицы G и равенства (10), выбирая $q_w = 1$, получаем:

$$\begin{aligned} -2k_q h_{12} &= g_{11} < 0, \\ -2k_d h_{22} + h_{12} &= g_{22} < 0, \end{aligned}$$

откуда сразу следует положительность коэффициента h_{22} . Следовательно, так как $\|q_v\| \leq 1$ и $|q_w| \leq 1$, функция $V \rightarrow +\infty$ при $\|\omega\| \rightarrow +\infty$. Значит, существует такое $R > 0$, что для любого $q \in \mathbb{S}^4$ из $\|\omega\| > R$ следует $V > 1$. Рассмотрим множество $E = \mathbb{S}^4 \times B^3(R)$, содержащее все пары кватернионов ориентации q и угловых скоростей w таких, что $\|w\| \leq R$. Множество E компактно, значит, существует точка L_3 , в которой $V(L_3) = \min_{x \in E} V(x)$. Так как $V(L_1) = 0$ и $L_1 \in E$, значение $V(L_3) \leq 0$. Таким образом, L_3 не может находиться на границе множества E , а значит, существует открытое множество $U \subset E$, содержащее L_3 . Обозначим за $\psi_{L_3}(t)$ решение системы (7), выпущенное из точки L_3 . Тогда будет существовать такое $\Delta t > 0$, что $\psi_{L_3}(\tau) \in U$ для всех $\tau \in [0, \Delta t]$. Пусть теперь $\dot{V}(L_3) < 0$. Выбрав Δt достаточно маленьким, мы получим, что $V(\psi_{L_3}(\tau))$ убывает, что противоречит минимальности $V(L_3)$. Таким образом, $\dot{V}(L_3)$ не может быть меньше нуля. Однако таких точек всего две – это L_1 и L_2 . $V(L_1) < V(L_2)$, значит, $L_3 \equiv L_1$. То есть функция V не принимает отрицательных значений, а нуль достигается только в точке L_1 . Значит, функция V положительно определена.

Итак, мы нашли положительно определенную функцию V , производная которой в силу системы отрицательно определена всюду, кроме двух точек равновесия, L_1 и L_2 . По теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости точка L_1 является асимптотически устойчивой, при этом её областью притяжения является всё пространство, кроме точки L_2 .

3. Система адаптации

В реальной машине, к сожалению, из-за небольших погрешностей в изготовлении винтов или двигателей, а также из-за возможных повреждений, коэффициенты K для каждого винта будут немного отличаться. И эта разница оказывает существенное влияние, в первую очередь, на угловую стабилизацию, так как робота начинает кренить в одну из сторон, и не выполняется условие на кватернионы $q \rightarrow q_d$. Далее рассматривается случай, когда у каждого двигателя есть свой коэффициент тяги K_i , а также своя оценка этого коэффициента \hat{K}_i . Рассмотрим замкнутую систему, которая получится в таком случае.

Уравнения модели можно записать так:

$$(16) \quad \begin{pmatrix} I\dot{\omega} + \omega \times I\omega \\ \frac{\ddot{H} + g}{k_{mod}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & LK_2 & 0 & -LK_4 \\ -LK_1 & 0 & LK_3 & 0 \\ \xi K_1 & -\xi K_2 & \xi K_3 & -\xi K_4 \\ \frac{K_1}{m} & \frac{K_2}{m} & \frac{K_3}{m} & \frac{K_4}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix},$$

а уравнения регулятора (6) – так:

$$(17) \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2\hat{K}_1 L} & \frac{1}{4\hat{K}_1 \xi} & \frac{m}{4\hat{K}_1} \\ \frac{1}{2\hat{K}_2 L} & 0 & -\frac{1}{4\hat{K}_2 \xi} & \frac{m}{4\hat{K}_2} \\ 0 & \frac{1}{2\hat{K}_3 L} & \frac{1}{4\hat{K}_3 \xi} & \frac{m}{4\hat{K}_3} \\ -\frac{1}{2\hat{K}_4 L} & 0 & -\frac{1}{4\hat{K}_4 \xi} & \frac{m}{4\hat{K}_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{dx} \\ M_{dy} \\ M_{dz} \\ \frac{\Upsilon_d + g}{k_{mod}} \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\frac{1}{\widehat{K}_i}$ через Ψ_i . Подставив (17) в (16) и выразив M_d по алгоритму 1, получим

$$(18) \quad \begin{pmatrix} I\dot{\omega} + \omega \times I\omega \\ \frac{\ddot{H} + g}{k_{mod}} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} -Ik_d\omega - Ik_qq_v + \omega \times I\omega \\ \frac{\Upsilon_d + g}{k_{mod}} \end{pmatrix},$$

где коэффициенты матрицы B имеют следующий вид:

$$B[1 : 2, \bullet] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(K_2\Psi_2 + K_4\Psi_4) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(K_1\Psi_1 + K_3\Psi_3) \\ -\frac{\xi}{2L}(K_2\Psi_2 - K_4\Psi_4) & -\frac{\xi}{2L}(K_1\Psi_1 - K_3\Psi_3) \\ \frac{1}{2Lm}(K_2\Psi_2 - K_4\Psi_4) & -\frac{1}{2Lm}(K_1\Psi_1 - K_3\Psi_3) \end{pmatrix},$$

$$B[3, \bullet] = \begin{pmatrix} -\frac{L}{4\xi}(K_2\Psi_2 - K_4\Psi_4) \\ -\frac{L}{4\xi}(K_1\Psi_1 - K_3\Psi_3) \\ \frac{1}{4}(K_1\Psi_1 + K_2\Psi_2 + K_3\Psi_3 + K_4\Psi_4) \\ \frac{1}{4\xi m}(K_1\Psi_1 - K_2\Psi_2 + K_3\Psi_3 - K_4\Psi_4) \end{pmatrix},$$

$$B[4, \bullet] = \begin{pmatrix} \frac{Lm}{4}(K_2\Psi_2 - K_4\Psi_4) \\ -\frac{Lm}{4}(K_1\Psi_1 - K_3\Psi_3) \\ \frac{\xi m}{4}(K_1\Psi_1 - K_2\Psi_2 + K_3\Psi_3 - K_4\Psi_4) \\ \frac{1}{4}(K_1\Psi_1 + K_2\Psi_2 + K_3\Psi_3 + K_4\Psi_4) \end{pmatrix}.$$

Как можно было ожидать, в случае точного совпадения оценок коэффициентов с их реальными значениями, т.е. в случае $K_i\Psi_i \equiv 1$ матрица B совпадает с единичной.

В (18) перейдем к линейной системе

$$(19) \quad \begin{pmatrix} I_x\dot{\omega}_x \\ I_y\dot{\omega}_y \\ I_z\dot{\omega}_z \\ \ddot{H} + g \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} -I_xk_d\omega_x - I_xk_qq_x \\ -I_yk_d\omega_y - I_yk_qq_y \\ -I_zk_d\omega_z - I_zk_qq_z \\ A_p(H_d - H) - A_d\dot{H} + g \end{pmatrix}.$$

Теперь введем новые обозначения, чтобы перейти к полностью матричной записи задачи. Определим новый вектор состояния $X = (X_1^\top, X_2^\top)^\top$, где

$$X_1 = (2I_xq_x, 2I_yq_y, 2I_zq_z, H - H_d)^\top, \quad X_2 = (I_x\omega_x, I_y\omega_y, I_z\omega_z, \dot{H})^\top,$$

и обозначим через вектор \tilde{g} общее воздействие гравитации на систему:

$$\tilde{g} = (0, 0, 0, g)^\top.$$

Тогда система (19) может быть переписана как

$$(20) \quad \begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2, \\ \dot{X}_2 &= B(-T_1 X_1 - T_2 X_2 + \tilde{g}) - \tilde{g}, \end{aligned}$$

где матрицы T_1 и T_2 – матрицы коэффициентов регуляторов:

$$T_1 = \text{diag} \left(\frac{k_q}{2}, \frac{k_q}{2}, \frac{k_q}{2}, A_p \right), \quad T_2 = \text{diag} (k_d, k_d, k_d, A_d).$$

Фактически они диагональны, но ниже предполагается лишь их симметричность, положительная определенность и, ради удобства вычислений, перестановочность между собой.

Теперь для оценки Ψ_i мы можем применить метод скоростного градиента в дифференциальной форме (см. [5]). Данный метод позволяет синтезировать управление, обеспечивающее стремление заданной целевой функции $Q(X)$ к нулю. Для этого функция лишь должна удовлетворять четырем условиям:

- 1) условию регулярности: $Q(X)$ и $\dot{Q}(X, \Psi)$ непрерывны,
- 2) условию роста: $Q(X) \geq 0$ и $Q(X) \rightarrow +\infty$ при $|X| \rightarrow +\infty$,
- 3) условию выпуклости производной в силу системы: $\dot{Q}(X, \Psi) - \dot{Q}(X, \Psi') \geq (\Psi - \Psi')^\top \nabla_\Psi \dot{Q}(X, \Psi')$,
- 4) условию достижимости цели: $\exists \Psi^* \in \mathbb{R}^4$ и $\rho > 0$: $\dot{Q}(X, \Psi^*) < -\rho Q(X) \quad \forall X$.

В качестве целевой функции для метода скоростного градиента рассмотрим функцию

$$(21) \quad \begin{aligned} Q(X) &= \|T_1 X_1 + T_2 X_2\|^2 + X_1^\top T_1^2 X_1 = \\ &= (X_1^\top \quad X_2^\top) \begin{pmatrix} 2T_1^2 & T_1 T_2 \\ T_1 T_2 & T_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Благодаря положительной определенности матриц T_1 и T_2 , $Q(X)$ также является положительно определенной квадратичной формой, а значит, её стремление к нулю гарантирует стремление к 90

нулю X , кроме того, очевидно выполнены условия роста и регулярности.

Возьмем производную в силу системы от функции $Q(X)$:

$$(22) \quad \begin{aligned} \dot{Q}(X, B) = & \\ & = 2 \left(X_2^\top \quad -X_1^\top T_1 B^\top - X_2^\top T_2 B^\top + g^\top (B^\top - I) \right) \cdot \\ & \cdot \begin{pmatrix} 2T_1^2 & T_1 T_2 \\ T_1 T_2 & T_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Условие выпуклости функции \dot{Q} выполнено, так как она линейна по матрице B , которая в свою очередь линейна по оценкам Ψ_i .

Введем вспомогательную функцию $Z(X, J)$ такую, что $Z(X, J) = -\nabla_{\Psi_i} \dot{Q}(X, B)$, где $J = \frac{\partial B}{\partial \Psi_i}$:

$$\begin{aligned} Z(X, J) = & \left(X_1^\top \quad X_2^\top \quad \tilde{g}^\top \right) \cdot \\ & \begin{pmatrix} 2T_1 T_2 J T_1 & T_1 T_2 J T_2 + T_1 J^\top T_2^2 & -J^\top T_1 T_2 \\ T_2 J^\top T_1 T_2 + T_2^2 J T_1 & 2T_2^2 J T_2 & -J^\top T_2^2 \\ -T_1 T_2 J & -T_2^2 J & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \tilde{g} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть $T_2^2 > T_1$. Тогда алгоритм

$$(23) \quad \dot{\hat{K}}_i = -\gamma \hat{K}_i^2 Z \left(X, \frac{\partial B}{\partial \Psi_i} \right).$$

обеспечивает устойчивость линеаризованной системы и стремление $\hat{K}_i \rightarrow K_i$.

Доказательство. Мы уже показали, что для функции $Q(X)$ выполнены условия регулярности, роста и выпуклости метода скоростного градиента. Осталось проверить последнее условие – условие достижимости цели. Для этого подставим в функцию (22) $B \equiv I$, соответствующее идеально найденным оценкам Ψ_i . Получим

$$\begin{aligned} \dot{Q}_I(X) = & - \left(X_1^\top \quad X_2^\top \right) \begin{pmatrix} 2T_1^2 T_2 & 2T_1 T_2^2 - 2T_1^2 \\ 2T_1 T_2^2 - 2T_1^2 & 2T_2^3 - 2T_1 T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \\ & = -X^\top R X. \end{aligned}$$

Достаточно показать, что матрица этой квадратичной формы R положительно определена. Попробуем найти неособое пре-

образование координат, превращающее эту матрицу в блочно-диагональную. Одним из таких преобразований может быть

$$\begin{aligned} R &= \begin{pmatrix} 2T_1^2 T_2 & 2T_1 T_2^2 - 2T_1^2 \\ 2T_1 T_2^2 - 2T_1^2 & 2T_2^3 - 2T_1 T_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} T_1 & T_1 T_2^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2T_1 T_2^{-1} & 0 \\ 0 & 2T_2^3 - 2T_1 T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ T_1 T_2^{-1} & I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

откуда следует критерий положительной определенности матрицы R :

$$\begin{aligned} T_1 T_2^{-1} &> 0, \\ T_2^3 - T_1 T_2 &> 0, \end{aligned}$$

который, учитывая положительность матриц T_1 и T_2 , преобразуется в условие

$$(24) \quad T_2^2 > T_1.$$

Итак, если для матриц коэффициентов выполнено условие (24), то адаптация коэффициентов Ψ_i по методу скоростного градиента приведет к пределу $Q(X, B) \rightarrow 0$ и, следовательно, $X \rightarrow 0$, что доказывает утверждение об устойчивости линеаризованной системы. Означает ли это, что оценки Ψ_i сойдутся к своим истинным значениям $\frac{1}{K_i}$? Для доказательства этого факта рассмотрим систему (20). Так как точка $X = 0$ является устойчивой точкой равновесия для адаптивной системы, в пределе должно быть выполнено равенство

$$\tilde{g} = B\tilde{g},$$

которое означает, что матрица B в пределе имеет собственный вектор $(0, 0, 0, 1)^\top$ с собственным числом 1. Раскрыв это равенство как систему уравнений, получим

$$\begin{aligned} K_2 \Psi_2 - K_4 \Psi_4 &= 0, \\ K_1 \Psi_1 - K_3 \Psi_3 &= 0, \\ K_1 \Psi_1 - K_2 \Psi_2 + K_3 \Psi_3 - K_4 \Psi_4 &= 0, \\ K_1 \Psi_1 + K_2 \Psi_2 + K_3 \Psi_3 + K_4 \Psi_4 &= 4, \end{aligned}$$

откуда немедленно следует набор равенств $K_i\Psi_i = 1$ и, соответственно, $\Psi_i = \frac{1}{K_i}$ для всех $i \in \{1, \dots, 4\}$.

Адаптация по методу скоростного градиента может быть записана так:

$$\dot{\Psi}_i = -\frac{\dot{K}_i}{\hat{K}_i^2} = \gamma Z \left(X, \frac{\partial B}{\partial \Psi_i} \right),$$

Неизвестные, но постоянные значения настоящих коэффициентов тяги K_i входят в соответствующую частную производную $\frac{\partial B}{\partial \Psi_i}$ линейно, и потому могут быть вынесены из функции Z в множитель γ . Выразив отсюда \dot{K}_i , получаем (23).

Для полноты алгоритма приведем конкретные значения используемых производных $\frac{\partial B}{\partial \Psi_i}$, считая при этом коэффициенты K_i убранными в множитель γ :

$$(25) \quad \begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial \Psi_1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{L}{4\xi} & -\frac{Lm}{4} \\ 0 & -\frac{\xi}{2L} & \frac{1}{4} & \frac{\xi m}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2Lm} & \frac{1}{4\xi m} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial B}{\partial \Psi_2} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{L}{4\xi} & \frac{Lm}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\xi}{2L} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{\xi m}{4} \\ \frac{1}{2Lm} & 0 & -\frac{1}{4\xi m} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial B}{\partial \Psi_3} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{L}{4\xi} & \frac{Lm}{4} \\ 0 & \frac{\xi}{2L} & \frac{1}{4} & \frac{\xi m}{4} \\ 0 & \frac{1}{2Lm} & \frac{1}{4\xi m} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial B}{\partial \Psi_4} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{L}{4\xi} & -\frac{Lm}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\xi}{2L} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{\xi m}{4} \\ -\frac{1}{2Lm} & 0 & -\frac{1}{4\xi m} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Моделирование

Проверка алгоритма, представленного в предыдущем разделе, была проведена при помощи моделирования полета квадрокоптера в системе MATLAB R2016a. Для этого была реализована модель квадрокоптера, система управления и система адаптации. Физические параметры для моделирования были приближенно измерены у одного из реальных изготовленных квадрокоптеров (робот Квадракон), и они перечислены в таблице 1.

Таблица 1. Значения параметров при моделировании

Физические параметры	Параметры регуляторов	Коэффициенты тяги
$m = 1,3 \text{ kg}$		
$L = 0,22 \text{ m}$	$k_p = 2,6$	$K_1 = 12,6 \text{ Н}$
$\xi = 0,017 \text{ m}$	$k_d = 10,0$	$K_2 = 18,6 \text{ Н}$
$I_x = 0,12 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	$A_p = 2,0$	$K_3 = 4,6 \text{ Н}$
$I_y = 0,12 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	$A_d = 5,0$	$K_4 = 7,0 \text{ Н}$
$I_z = 0,22 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	$H_d = 3 \text{ m}$	
$g = 9,8 \text{ m/sec}^2$		

Здесь же указаны примененные коэффициенты регуляторов, которые удовлетворяют условию (24), и выбранные для моделирования «истинные» коэффициенты тяги, неизвестные для алгоритма управления. В начальном положении робот считается покоящимся на горизонтальной поверхности, его координата по высоте принята за 0.

Для проверки алгоритма было проведено 3 эксперимента, в первом из них адаптации не было ($\gamma = 0$), во втором $\gamma = 0,0005$, в третьем $\gamma = 0,005$. Начальные оценки коэффициентов \hat{K}_i равны 8,6 Н, время симуляции – 10 с.

В первом случае (рис. 3) в отсутствие адаптации робот входит в устойчивое движение, но не достигает цели управления, в частности, у него есть наклон по крену и тангажу, что в реальной системе привело бы к появлению ускорения в плоскости XU .

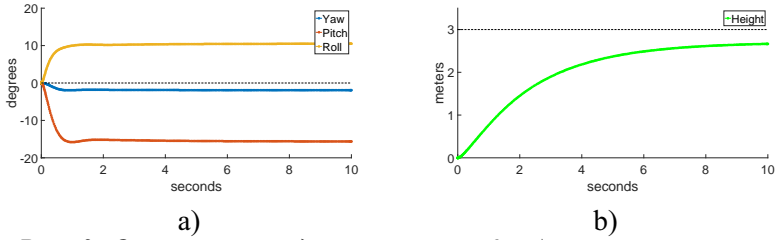


Рис. 3. Отсутствие адаптации, $\gamma = 0$: а) ориентация, углы Эйлера; б) высота H

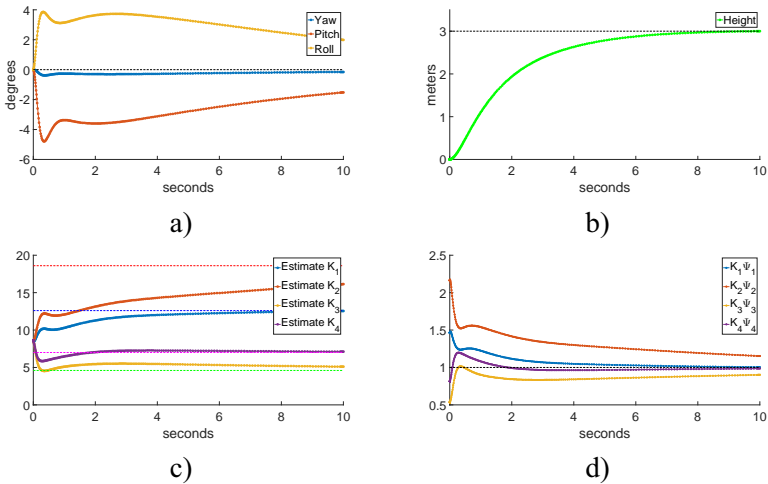


Рис. 4. Медленная адаптация, $\gamma = 0,0005$: а) ориентация, углы Эйлера; б) высота H ; в) оценки коэффициентов \hat{K}_i ; г) величины $K_i\Psi_i$

В случае медленной адаптации (рис. 4) состояние робота асимптотически достигает своих целевых значений, как и коэффициенты тяги. Также можно заметить, что при отсутствии адаптации ошибка по крену и тангажу составила 10–15 градусов, тогда как при её наличии она не превысила 5, а через 10 секунд составляла уже 2 градуса. Ошибки такого порядка уже могут быть приемлемы в реальной системе.

При быстрой адаптации (рис. 5) коэффициенты сходятся к

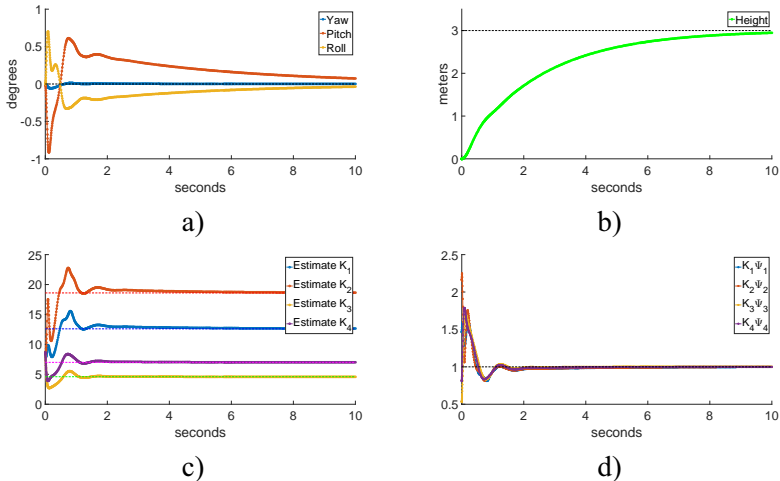


Рис. 5. Быстрая адаптация, $\gamma = 0,005$: а) ориентация, углы Эйлера; б) высота H ; в) оценки коэффициентов \hat{K}_i ; г) величины $K_i\Psi_i$

своим истинным значениям гораздо быстрее, а ошибка по крену и тангажу не превышает 1 градус. Однако можно заметить, что в начальный период коэффициенты, а вместе с ними и ориентация испытывают сильные колебания. Дальнейшее увеличение коэффициента γ приводит к тому, что вычисления становятся неустойчивыми.

5. Заключение

В данной работе был описан основанный на кватернионах параметрический регулятор для стабилизации квадрокоптера, а также система идентификации коэффициентов тяги на каждом винте. Также было проведено численное моделирование, подтверждающее работоспособность предложенных алгоритмов.

Литература

1. БЕЛЯВСКИЙ А.О., ТОМАШЕВИЧ С.И. *Синтез адаптивной системы управления квадрокоптером методом пассивации* // Управление большими системами. – 2016. – Вып. 63. – С. 155–181.
2. КАНАТНИКОВ А.Н., АКОПЯН К.Р. *Управление плоским движением квадрокоптера* // Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2015. – №2. – С. 23–36.
3. ЛАНДАУ Л.Д., ЛИФШИЦ Е.М. *Теоретическая физика, том 1. Механика. 5-е издание.* – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 224 с.
4. МАТВЕЕВ В.В., РАСПОПОВ В.Я. *Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем.* – ЦНИИ «Электроприбор», 2009. – 278 с.
5. МИРОШНИК И.В., НИКИФОРОВ В.О., ФРАДКОВ А.Л. *Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами.* – СПб.: Наука, 2000. – 549 с.
6. ЯКУБОВИЧ В.А. *Частотная теорема в теории управления* // Сибирский математический журнал. – 1973. – Т. 14. – №2. – С. 484–420.
7. AUGUGLIARO F., SCHOELLIG A.P., D'ANDREA R. *Generation of collision-free trajectories for a quadcopter fleet: A sequential convex programming approach* // IEEE/RSJ Int. Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), October 7-11, 2012, Vilamoura-Algarve, Portugal. – P. 1917–1922.
8. CHOVANCOVÁ A., FICO T., CHOVANEC L., HUBINSK P. *Mathematical Modelling and Parameter Identification of Quadrotor (a survey)* // Procedia Engineering. – 2014. – Vol. 96. – P. 172–181.

9. FRESK E., NIKOLAKOPOULOS G. *Full Quaternion Based Attitude Control for a Quadrotor* // European Control Conference (ECC'2013), July 17–19, 2013, Zurich, Switzerland. – P. 3864–3869.
10. HEHN M., D'ANDREA R. *A frequency domain iterative learning algorithm for high-performance, periodic quadcopter maneuvers* // Mechatronics. – 2014. – Vol. 24, Iss. 8. – P. 954–965.
11. HEHN M., D'ANDREA R. *Quadcopter trajectory generation and control* // IFAC World Congress, August 28 - September 2, 2011, Milano, Italy. – Vol. 18, Iss. 1. – P. 1485–1491.
12. KALMAN R.E. *Lyapunov functions for the problem of Lur'e in automatic control* // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 1963, February. – No. 49(2) – P. 201-5.
13. KHATOON S., SHAHID M., CHAUDHARY H. *Dynamic modeling and stabilization of quadrotor using PID controller* // IEEE Int. Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI), September 24-27, 2014, Delhi, India. – P. 746–750.
14. LEFFERTS E.J., MARKLEY F.L., SHUSTER M.D. *Kalman filtering for spacecraft attitude estimation* // J. of Guidance, Control, and Dynamics. – 1982. – Vol. 5, Iss. 5. – P. 417–429.
15. LEISHMAN J.G. *Principles of Helicopter Aerodynamics, Second Edition*. – Cambridge Aerospace Series, 2006.
16. LIM H., PARK J., LEE D., KIM H.J. *Build your own quadrotor. Open-Source Projects on Unmanned Aerial Vehicles* // IEEE Robotics and Automation Magazine. – September 2012. – P. 33–45.
17. MADGWICK S.O.H. *An efficient orientation filter for inertial and inertial/magnetic sensor arrays* // Internal Report. – 2010.
18. MAHONY R., HAMEL T., PFLIMLIN J.M. *Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group* // IEEE Transactions on Automatic Control. – Vol. 53, Iss. 5. – 2008. – P. 1203–1218.

19. MAHONY R., KUMAR V., CORKE P. *Multirotor aerial vehicles. Modelling, Estimation, and Control of Quadrotor* // IEEE Robotics and Automation Magazine. – September, 2012. – P. 20–32.
20. PEREZ I.C., FLORES-ARAIZA D., FORTOUL-DIAZ J.A., MAXIMO R., GONZALEZ-HERNANDEZ H.G. *Identification and PID control for a quadrocopter* // IEEE Int. Conference on Electronics, Communications and Computers (CONIELECOMP), February 26-28, 2014, Puebla, Mexico. – P. 77–82.
21. POUNDS P., MAHONY R., CORKE P. *Modelling and Control of a Quad-Rotor Robot* // Proc. Australasian Conference on Robotics and Automation'2006, December 6-8, 2006, Auckland, New Zealand. – P. 1–10.
22. RAFFLO G.V., ORTEGA M.G., RUBIO F.R. *MPC with Nonlinear H_{∞} Control for Path Tracking of a Quad-Rotor Helicopter* // Proc. of the 17th IFAC World Congress, July 6–11, 2008, Seoul, Korea. – P. 8564–8569.
23. RITZ R., MULLER M.W., HEHN M., D'ANDREA R. *Cooperative quadrocopter ball throwing and catching* // IEEE/RSJ Int. Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), October 7-11, 2012, Vilamoura-Algarve, Portugal. – P. 4972–4978.
24. SCHOELLIG A.P., WILTSCHE C., D'ANDREA R. *Feed-forward parameter identification for precise periodic quadrocopter motions* // IEEE American Control Conference, June 27-29, 2012, Montreal, Canada. – P. 4313–4318.
25. SHEN S., MULGAONKAR Y., MICHAEL N., KUMAR V. *Vision-Based State Estimation and Trajectory Control Towards High-Speed Flight with a Quadrotor* // Robotics: Science and Systems, June 24-28, 2013, Berlin, Germany. – Vol. 1. – P. 32.

26. STEGAGNO P., BASILE M., BULTHOFF H.H., FRANCHI A. *Vision-based Autonomous Control of a Quadrotor UAV using an Onboard RGB-D Camera and its Application to Haptic Teleoperation* // 2nd IFAC Work. on Research, Education and Development of Unmanned Aerial Systems, Compiègne, France. – 2013. – P. 87–92.
27. TEREKHOV A.N., LUCHIN R.M., FILIPPOV S.A. *Educational Cybernetical Construction Set for schools and universities* // Proc. of the 9th IFAC Symposium Advances in Control Education, June 19–21, 2012, Nizhny Novgorod, Russia. – P. 430–435.
28. TOURNIER G.P., VALENTI M., HOW J.P. *Estimation and control of a quadrotor vehicle using monocular vision and moire patterns* // AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit. – 2006. – P. 21–24.
29. ZHU J., LIU E., GUO S., XU C. *A gradient optimization based PID tuning approach on quadrotor* // IEEE 27th Chinese Control and Decision Conference (CCDC), May 23–25, 2015, Qingdao, China. – P. 1588–1593.

ADAPTIVE QUATERNION-BASED QUADROTOR CONTROL SYSTEM

Denis Nikitin, Saint-Petersburg State University, master (dniken@gmail.com).

Abstract: In this paper we propose the quaternion-based control system for quadrotor. Adaptive scheme for thrust coefficients identification, based on speed-gradient method, is designed. Proofs of stability are provided, as well the results of numerical simulations. In existing theoretical works, Euler angles are often used as coordinates for describing quadrotor's coordinates. Equations using those coordinates, however, have a singularity, which prevents their use near certain points. We use quaternions instead, which have no such restrictions. The process of discovering PID-regulator coefficients is known to be tedious, error-prone and specific for each quadcopter. We propose a control scheme in which most of the parameters are physical values, and the rest do not depend on the quadcopter and can be found once for the whole class of the flying machines. An identification algorithm for obtaining physical parameters is also described. MATLAB modelling is used to test and confirm the performance of the proposed scheme.

Keywords: UAV, quadrotor, adaptive control, speed-gradient method, quaternions.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Б.Р. Андриевским.

Поступила в редакцию 07.04.2017.

Дата опубликования 30.09.2017.

УДК 007.52
ББК 32.817

ЗАЩИТА ОТ ВЗАИМНЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ СТРОЯ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Казанин Д. К.¹

(ПАО АНПП «Темп-Авиа», Арзамасский политехнический институт (филиал НГТУ), Арзамас)

Рассматривается групповой полёт гипотетических беспилотных летательных аппаратов. Реализуется стратегия предотвращения их столкновений при формировании строя. Эта стратегия основана на развитии метода искусственного потенциального поля. Произведено математическое моделирование полученных алгоритмов, подтверждающее работоспособность предложенного подхода.

Ключевые слова: беспилотный летательный аппарат, формирование строя, мультиагентная система, система управления, предотвращение столкновений, искусственное потенциальное поле.

1. Введение

В последние годы большое внимание многих исследователей привлекают задачи группового управления мультиагентными системами (МАС) [8, 10, 16, 18]. Наряду с чисто теоретическим интересом результаты решения этих задач имеют существенное практическое значение. В качестве конкретных практических примеров таких МАС можно указать системы беспилотных летательных аппаратов (БПЛА), спутниковые

¹ Дмитрий Константинович Казанин, инженер-математик, аспирант (kazanindk@gmail.com).

группировки, автономные мобильные роботы различного назначения, распределённые сенсорные сети и т.д.

Вопросы управления группой подвижных объектов в настоящее время достаточно хорошо изучены. Основной задачей при управлении группировкой (формацией) является задача достижения консенсуса. Большинство работ по вопросам группового управления, решающих эту задачу, представляют модели агентов в виде линейных дифференциальных уравнений, во многих случаях первого или второго порядка [7, 8, 15, 18, 21, 22, 24]. Для построения алгоритмов достижения консенсуса при таком подходе эффективно применяются методы оптимизации [25] и техника линейных матричных неравенств (LMI) [9].

В [2, 3] рассмотрена архитектура распределенной системы управления групповыми действиями БПЛА и в частности задача полёта строем, которая решается за счет использования комплекса пропорционально-интегральных регуляторов, реализованных в системах управления БПЛА. Вопросы защиты от столкновений при формировании строя здесь не рассматриваются.

В работе [4] предложен подход к формированию строя БПЛА, основанный на алгоритме достижения консенсуса. Динамика объектов управления задается в виде системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Однако столкновения между агентами, которые могут возникнуть в процессе формирования строя, также не были рассмотрены.

Проблема защиты от столкновений, в силу ее практической значимости, в последнее время привлекает большое внимание исследователей. Для её решения были разработаны различные алгоритмы управления. Основные стратегии базируются на применении различных версий барьерных функций [19, 20] и методах прогноза [12, 14]. В работах [5, 13, 26], предложен метод искусственного потенциального поля, который можно рассматривать как специфическую версию метода барьерных функций. Стратегии, основанные на прогнозирующих моделях, изучались в работах [6, 11, 23]. Метод, основанный на искусственном потенциальном поле, активно применяется в области автономной навигации роботов. Суть его заключается в том, что

для целевых точек задаются поля притяжения, а для препятствий – отталкивающие поля, и объекты управления движутся вдоль отрицательного градиента обобщённого потенциального поля.

В [4] автором предложен алгоритм, который обеспечивает формирование строя на основе достижения консенсуса в сетевой модели группового полета. Цель этой статьи – объединить этот алгоритм с алгоритмом защиты от столкновений между агентами в процессе формирования строя и доказать его работоспособность математическим моделированием. Для решения используется развитие предложенного в [17] метода искусственного потенциального поля. Этот метод является наиболее адекватным по отношению к рассматриваемой задаче, поскольку приводит к относительно простым алгоритмам. В то же время в силу того, что объекты управления, образующие строй, движутся с большими скоростями, управление с прогнозирующими моделями требует высокого быстродействия вычислителя, достичь которого на борту БПЛА разового применения технически сложно и нерационально. Другие методы, изложенные в перечисленных выше источниках, либо существенно привязаны к наземным объектам, либо связаны с конкретными задачами и не допускают развития на рассматриваемую далее задачу.

2. Постановка задачи

Рассмотрим N гипотетических беспилотных летательных аппаратов, которые являются агентами МАС. Они гомогенны и движутся в среде без статических препятствий. Полная линейная модель динамики каждого агента представлена следующей системой дифференциальных уравнений [1]:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\vartheta} + a_1 \dot{\vartheta} + a_2 \alpha + a_{32} \delta_2 + a_{33} \delta_3 = 0, \\ a_4 \alpha + a_{52} \delta_2 + a_{53} \delta_3 = \dot{\vartheta}, \\ \vartheta = \theta + \alpha, \\ \ddot{\psi} + b_1 \dot{\psi} + b_{11} \dot{\gamma} + b_2 \beta + b_{31} \delta_1 + b_{32} \delta_2 + b_{33} \delta_3 = 0, \\ b_4 \beta + b_{51} \delta_1 + b_{52} \delta_2 + b_{53} \delta_3 = \dot{\psi}, \\ \psi = \varphi + \beta, \\ \ddot{\gamma} + c_1 \dot{\gamma} + c_{11} \dot{\psi} + c_2 \beta + c_{31} \delta_1 + c_{32} \delta_2 + c_{33} \delta_3 = 0, \\ \sigma_{\vartheta} = i_{\text{в}} (n_y - n_{y\text{зад}}) + \rho_{\text{в}} \dot{\vartheta}, \\ \sigma_{\psi} = i_{\text{н}} (n_z - n_{z\text{зад}}) + \rho_{\text{н}} \dot{\psi}, \\ \sigma_{\gamma} = i_{\gamma} (\gamma - \gamma_{\text{зад}}) + \rho_{\gamma} \dot{\gamma}, \\ \delta_1 = k_{11} \sigma_{\vartheta} + k_{12} \sigma_{\psi} + k_{13} \sigma_{\gamma}, \\ \delta_2 = k_{21} \sigma_{\vartheta} + k_{22} \sigma_{\psi} + k_{23} \sigma_{\gamma}, \\ \delta_3 = k_{31} \sigma_{\vartheta} + k_{32} \sigma_{\psi} + k_{33} \sigma_{\gamma}, \end{array} \right.$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \vartheta, \psi, \theta, \varphi$ – углы атаки, скольжения, крена, тангажа, рыскания и траекторные углы; $\sigma_{\vartheta}, \sigma_{\psi}, \sigma_{\gamma}$ – каналные управляющие сигналы системы автоматического управления (САУ); n_y, n_z – текущие перегрузки; $n_{y\text{зад}}, n_{z\text{зад}}$ – заданные перегрузки; $\gamma_{\text{зад}}$ – заданный угол крена ($\gamma_{\text{зад}} = 0$); δ_i – углы отклонения рулей БПЛА; $i_{\text{в}}, i_{\text{н}}, i_{\gamma}, \rho_{\text{в}}, \rho_{\text{н}}, \rho_{\gamma}$ – передаточные числа САУ по позиционным и демпфирующим сигналам; k_{ij} – передаточные числа блока кинематической разводки рулей; $a_i, a_{ij}, b_i, b_{ij}, c_i, c_{ij}$ – аэродинамические коэффициенты.

Аналогично работе [4] предполагается, что пуск объектов (БПЛА) производится с носителя поочередно в разные моменты времени. Начальные координаты движения объектов соответствуют координатам носителя в момент пуска. Каждый объект движется за виртуальным лидером (следует заданной траектории). Алгоритмы управления продольным, боковым движением и движением в канале тяги выводят БПЛА на заданные координаты относительно виртуального лидера, что приводит к фор-

мированию строя, но не гарантирует защиту от взаимных столкновений.

В процессе формирования строя объекты управления должны избегать столкновения между собой. В частности каждый агент должен стремиться выйти на заданную позицию, не допуская при этом опасного сближения с соседними агентами. Заданная позиция определяется исходя из геометрической формы строя БПЛА.

Для достижения поставленной цели сделаны следующие допущения:

1. Каждый объект управления имеет информацию о виртуальном лидере (текущие координаты (x_v, y_v, z_v) и проекции скоростей (v_{vx}, v_{vy}, v_{vz})) и двунаправленный канал связи с каждым агентом в сети.

2. Моделируемый виртуальный лидер движется независимо от других агентов.

3. Предотвращение столкновений

3.1. ИДЕЯ МЕТОДА ИСКУССТВЕННОГО ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим алгоритм защиты от столкновений для группы БПЛА, основанный на методе искусственного потенциального поля.

Суть метода заключается в том, что при обнаружении риска столкновения между агентами в системе управления каждого агента автоматически формируются управляющие сигналы для продольного, бокового канала и канала тяги, в результате чего объекты управления выходят на безопасное расстояние друг относительно друга.

Как показано на рис. 1, область безопасности задаётся относительно центра масс БПЛА и представлена в виде сферы с радиусом R . Как только сферы двух и более агентов начинают пересекаться между собой, включается алгоритм предотвращения столкновений, который непрерывно действует до того момента, пока не будут изолированы области безопасности всех объектов управления в системе.

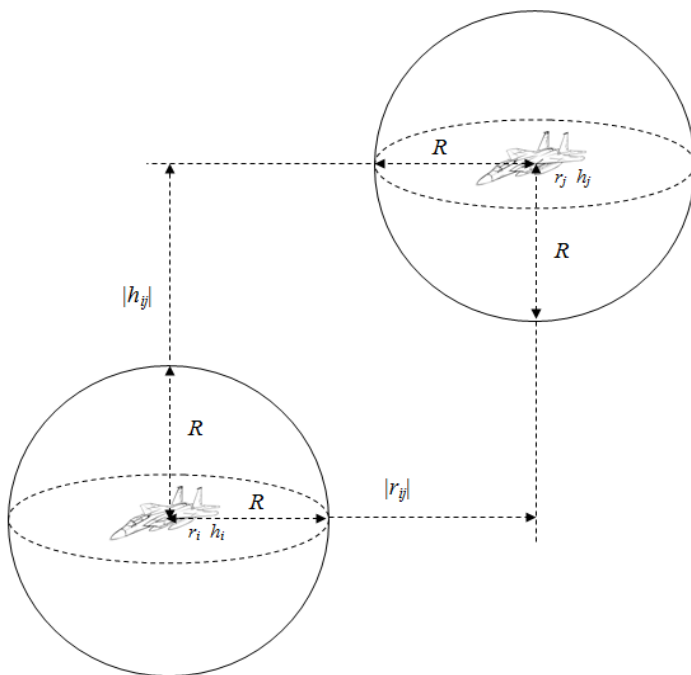


Рис. 1. Области безопасности БПЛА

Предлагаемый подход к решению задачи предотвращения столкновений между агентами основан на модификации подхода, предложенного в [17]. В [17] задача защиты от столкновений решается для систем квадрокоптеров и для одного высотного канала с цилиндрической областью безопасности. В данной же работе задача предотвращения столкновений между агентами должна решаться для всех трёх каналов, в связи с чем вводится сферическая область безопасности и разрабатываются алгоритмы защиты от столкновений для каждого канала в отдельности.

3.2. ПОКАНАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ЗАЩИТЫ ОТ СТОЛКНОВЕНИЙ

Рассмотрим алгоритм защиты от столкновений для продольного канала. Пусть r_i и h_i – позиция в горизонтальной плоскости и высота, на которой расположен i -й агент. Тогда и относительное расстояние в горизонтальной плоскости $|r_{ij}|$, и отклонение по высоте между i -м и j -м агентами $|h_{ij}|$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} |r_{ij}| &= \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (z_i - z_j)^2}, \\ (2) \quad |h_{ij}| &= |h_i - h_j|, \\ i, j &\in \{1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Для бокового канала и канала тяги получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} |s_{ij}| &= \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (h_i - h_j)^2}, \\ (3) \quad |z_{ij}| &= |z_i - z_j|, \\ i, j &\in \{1, \dots, N\}, \\ |d_{ij}| &= \sqrt{(h_i - h_j)^2 + (z_i - z_j)^2}, \\ (4) \quad |x_{ij}| &= |x_i - x_j|, \\ i, j &\in \{1, \dots, N\}, \end{aligned}$$

где s_i и z_i – позиция в вертикальной плоскости и боковое отклонение, на котором расположен i -й агент; $|s_{ij}|$ и $|z_{ij}|$ – относительное расстояние в вертикальной плоскости и боковое отклонение между i -м и j -м агентами; d_i и x_i – позиция в вертикальной плоскости и отклонение в канале тяги, на котором расположен i -й агент; $|d_{ij}|$ и $|x_{ij}|$ – относительное расстояние в вертикальной плоскости и отклонение в канале тяги между i -м и j -м агентами.

Искусственные потенциальные поля, создаваемые агентами i и j , зададим следующим образом:

$$(5) \quad U_{hij} = \begin{cases} K_h \cdot \left(\frac{1}{|h_{ij}|+1} - \frac{1}{2R+1} \right)^2, & (|h_{ij}| \leq 2R) \wedge (|r_{ij}| \leq 2R), \\ 0, & (|h_{ij}| > 2R) \vee (|r_{ij}| > 2R); \end{cases}$$

$$(6) \quad U_{zij} = \begin{cases} K_z \cdot \left(\frac{1}{|z_{ij}|+1} - \frac{1}{2R+1} \right)^2, & (|z_{ij}| \leq 2R) \wedge (|s_{ij}| \leq 2R), \\ 0, & (|z_{ij}| > 2R) \vee (|s_{ij}| > 2R); \end{cases}$$

$$(7) \quad U_{xij} = \begin{cases} K_x \cdot \left(\frac{1}{|x_{ij}|+1} - \frac{1}{2R+1} \right)^2, & (|x_{ij}| \leq 2R) \wedge (|d_{ij}| \leq 2R), \\ 0, & (|x_{ij}| > 2R) \vee (|d_{ij}| > 2R); \end{cases}$$

где U_{hij} , U_{zij} , U_{xij} – потенциалы искусственных полей в продольном, боковом каналах и канале тяги для i -го и j -го агентов; K_h , K_z , K_x – положительные коэффициенты усиления, определяющие допустимый уровень отклонения агента от границы области безопасности.

Согласно выражениям (5)–(7) с увеличением $|h_{ij}|$, $|s_{ij}|$ и $|d_{ij}|$ потенциалы полей между i -м и j -м агентами уменьшаются. Кроме того, потенциалы равны 0, когда области безопасности агентов i и j не пересекаются.

Пусть имеется M агентов ($M < N$), области безопасности которых пересекаются с соответствующей областью i -го агента. Тогда средние потенциалы U_{hi} , U_{zi} и U_{xi} определяются по формулам

$$(8) \quad U_{hi} = \frac{1}{M} \sum_{\substack{j=1, j \neq i, \\ U_{hij} \neq 0}}^N U_{hij},$$

$$(9) \quad U_{zi} = \frac{1}{M} \sum_{\substack{j=1, j \neq i, \\ U_{zij} \neq 0}}^N U_{zij},$$

$$(10) \quad U_{xi} = \frac{1}{M} \sum_{\substack{j=1, j \neq i, \\ U_{xij} \neq 0}}^N U_{xij}.$$

Результирующие искусственные потенциальные поля U_{hc} , U_{zc} , U_{xc} , создаваемые всеми БПЛА в продольных, боковых каналах и каналах тяги, вычисляются согласно выражениям

$$(11) U_{hc} = \sum_{i=1}^N U_{hi},$$

$$(12) U_{zc} = \sum_{i=1}^N U_{zi},$$

$$(13) U_{xc} = \sum_{i=1}^N U_{xi}.$$

Для предотвращения столкновения i -го агента с другими агентами в продольный, боковой каналы и канал тяги подаются управляющие сигналы f_{hcavi} , f_{zcvai} , f_{xcavi} :

$$(14) f_{hcavi} = -\nabla_{h_i} U_{hc},$$

$$(15) f_{zcvai} = -\nabla_{z_i} U_{zc},$$

$$(16) f_{xcavi} = -\nabla_{x_i} U_{xc}.$$

Для всей системы получаем

$$(17) f_{hcav} = -\nabla_h U_{hc} = -\left[\frac{\partial U_{hc}}{\partial h_1}, \frac{\partial U_{hc}}{\partial h_2}, \dots, \frac{\partial U_{hc}}{\partial h_N} \right]^T,$$

$$(18) f_{zcv} = -\nabla_z U_{zc} = -\left[\frac{\partial U_{zc}}{\partial z_1}, \frac{\partial U_{zc}}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial U_{zc}}{\partial z_N} \right]^T,$$

$$(19) f_{xcav} = -\nabla_x U_{xc} = -\left[\frac{\partial U_{xc}}{\partial x_1}, \frac{\partial U_{xc}}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial U_{xc}}{\partial x_N} \right]^T.$$

В результате управляющий сигнал действует в сторону уменьшения потенциала и увеличения отклонения по высоте, бокового отклонения и отклонения в канале тяги между агентами в системе.

Общее управление для i -го агента в продольном канале $h_{i \text{ зад}}$ (заданная высота полёта), в боковом канале $z_{i \text{ зад}}$ (заданное боковое отклонение) и в канале тяги $x_{i \text{ зад}}$ (заданное отклонение в канале тяги) вычисляются следующим образом:

$$(20) h_{i\text{зад}} = f_{h\text{formi}} + f_{hcavi},$$

$$(21) z_{i\text{зад}} = f_{z\text{formi}} + f_{zcavi},$$

$$(22) x_{i\text{зад}} = f_{x\text{formi}} + f_{xcavi},$$

где $f_{h\text{formi}}, f_{z\text{formi}}, f_{x\text{formi}}$ – управляющие сигналы для формирования строя (заданные высота, боковое отклонение и отклонение в канале тяги i -го агента в строю).

Продольное и боковое движение для i -го агента реализуется согласно законам управления, полученным в [4] на основе достижения консенсуса для группы агентов, описываемых моделями (1):

$$(23) n_{iy\text{зад}} = k_{ih} \cdot \Delta h_i + k_{idh} \cdot v_{iy} + \cos\theta_i, \quad \Delta h_i = h_i - h_{i\text{зад}},$$

$$(24) n_{iy\text{зад}} = \frac{v_i^2 \cdot (1 - \cos\theta_i)}{g \cdot \Delta h_i} + \cos\theta_i,$$

$$(25) n_{iz\text{зад}} = k_{iz} \cdot \Delta z_i + k_{idz} \cdot v_{iz}, \quad \Delta z_i = z_i - z_{i\text{зад}},$$

где $n_{iy\text{зад}}$ – заданная перегрузка для продольного канала; v_{iy} – проекция скорости; θ_i – траекторный угол; k_{ih}, k_{idh} – коэффициенты ПД-регулятора; v_i – модуль скорости полёта; g – ускорение свободного падения; $n_{iz\text{зад}}$ – заданная перегрузка для бокового канала; v_{iz} – проекция скорости; k_{iz}, k_{idz} – коэффициенты ПД-регулятора.

Движение в канале тяги для i -го агента реализуется согласно закону управления, полученному в [4] на основе нечёткой логической системы со входом Δx_i :

$$(26) \Delta x_i = x_i - x_{i\text{зад}}.$$

Полученное в итоге управление для i -го агента обеспечивает защиту от столкновений и формирование строя в продольном, боковом каналах и канале тяги.

4. Моделирование

В рамках движения группы гипотетических БПЛА на основе полных нелинейных моделей каждого агента [1] было проведено моделирование алгоритма предотвращения столкновений между объектами управления.

На первом этапе было проведено моделирование алгоритма предотвращения столкновений для каждого канала отдельно. На протяжении всего времени полёта агенты движутся по заданным координатам относительно виртуального лидера, формируя при этом строй. Затем выбираются два БПЛА, координаты которых отличаются между собой только по одному каналу, и в определённый момент один из агентов производит отклонение в сторону другого. Тем самым возникает риск столкновения БПЛА, которое система управления должна предотвратить. В таблице 1 приведены заданные координаты этих агентов до сближения по каждому каналу отдельно.

Таблица 1. Заданные координаты (одноканальное моделирование)

№№ агента j	Смещение в канале тяги $x_{\text{зад } j}$, м	Высота $h_{\text{зад } j}$, м	Боковое отклонение $z_{\text{зад } j}$, м
1	x_v	$y_v + 2000$	$z_v - 50$
2	$x_v - 100$	$y_v + 1900$	$z_v + 50$

В таблице 1 x_v , y_v , z_v – текущие координаты виртуального лидера.

Результаты моделирования представлены на рис. 2–9. Рис. 2, 4 и 8 демонстрируют защиту от столкновений в боковом и продольном каналах соответственно (сплошная линия – траектория агента 1, пунктирная линия – траектория агента 2). Видно, что при опасном сближении траектории начинают расходиться. На рис. 3, 5–7 и 9 можно наблюдать ненулевое расстояние между двумя агентами в боковом канале, канале тяги и продольном канале.

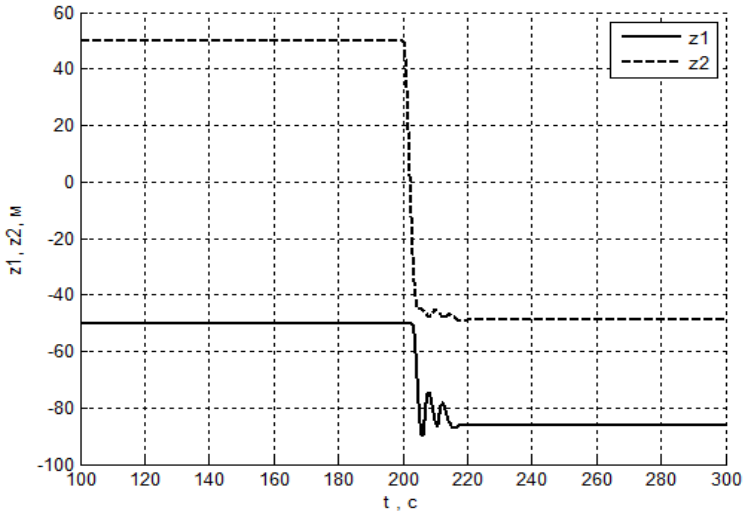


Рис. 2. Боковой канал (отклонение второго агента в сторону первого)

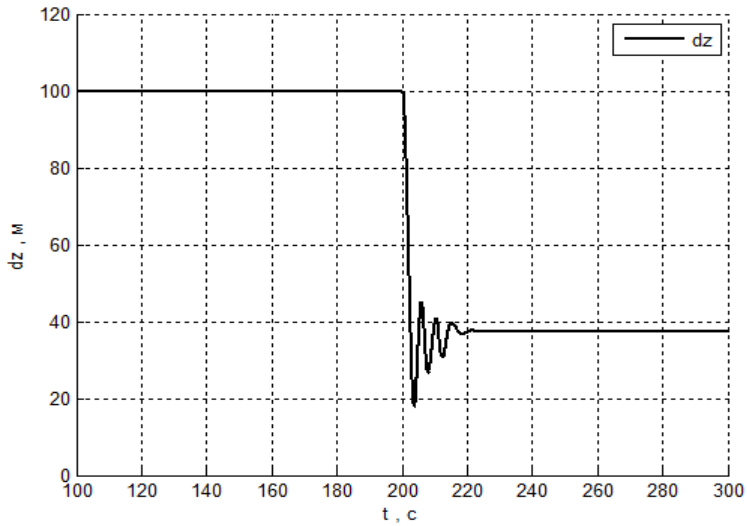


Рис. 3. Расстояние между агентами в боковом канале (отклонение второго агента в сторону первого)

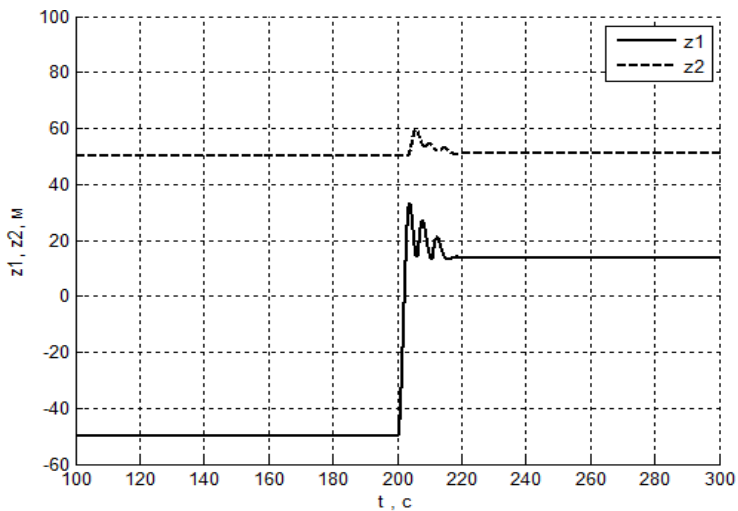


Рис. 4. Боковой канал (отклонение 1-го агента в сторону 2-го)

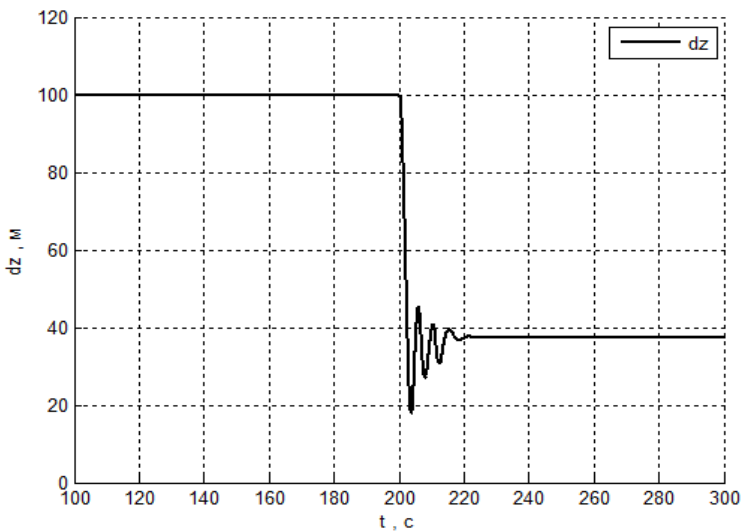


Рис. 5. Расстояние между агентами в боковом канале (отклонение 1-го агента в сторону 2-го)

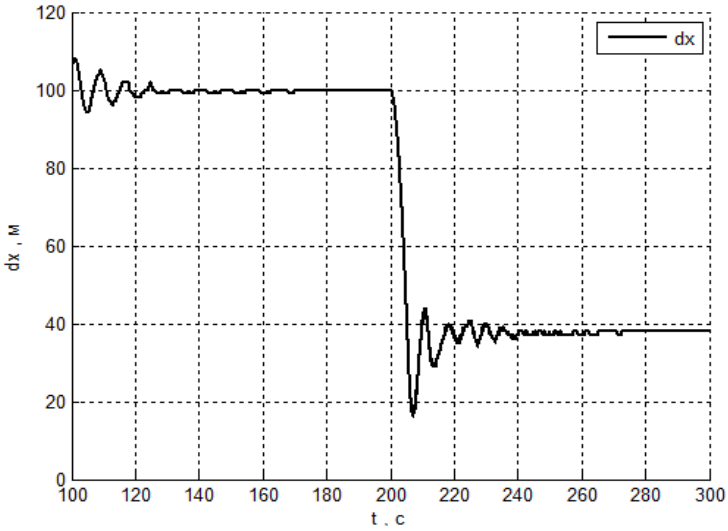


Рис. 6. Расстояние между агентами в канале тяги (отклонение 2-го агента в сторону 1-го)

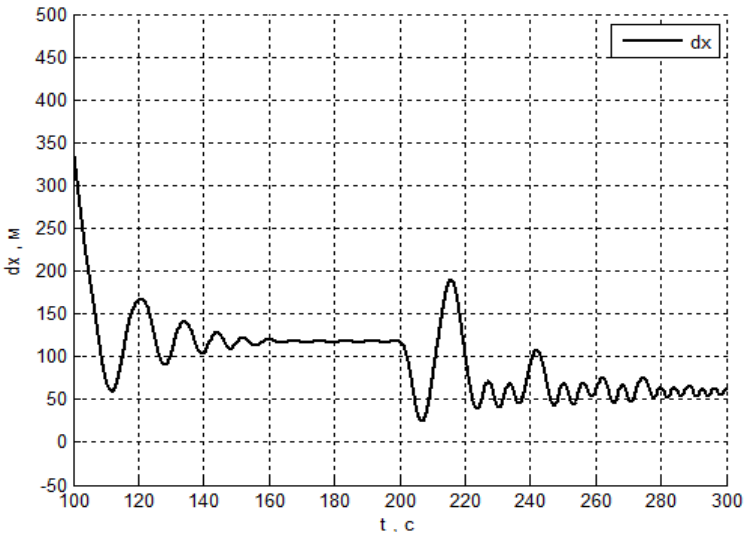


Рис. 7. Расстояние между агентами в канале тяги (отклонение 1-го агента в сторону 2-го)

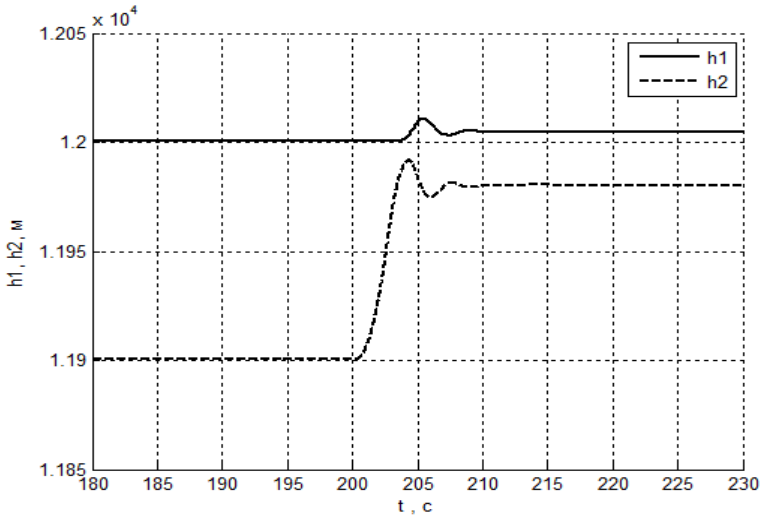


Рис. 8. Продольный канал (отклонение 2-го агента в сторону 1-го)

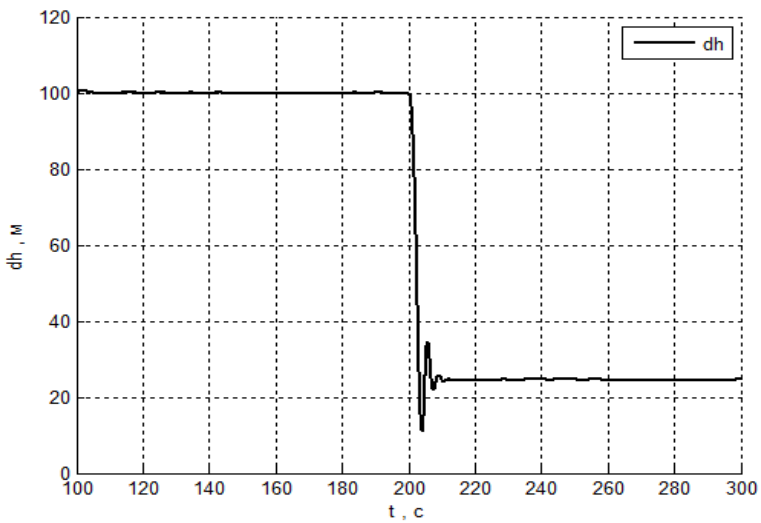


Рис. 9. Расстояние между агентами в продольном канале (отклонение 2-го агента в сторону 1-го)

Затем была промоделирована работа алгоритмов предотвращения столкновений для всех каналов одновременно. Рассматривались 3 агента, которые на протяжении всего времени полёта двигались по заданным координатам относительно виртуального лидера, формируя при этом строй. Затем в определённый момент времени 2 и 3 агенты производят отклонение в сторону 1. Тем самым возникает риск столкновения БПЛА, которое система управления должна предотвратить. В таблице 2 приведены заданные координаты этих агентов до сближения.

Таблица 2. Заданные координаты (трёхканальное моделирование)

№№ агента j	Смещение в канале тяги $x_{зад j}$, м	Высота $h_{зад j}$ м	Боковое отклонение $z_{зад j}$, м
1	x_v	y_v	z_v
2	$x_v - 50$	$y_v - 100$	$z_v - 50$
3	$x_v - 50$	$y_v - 100$	$z_v + 50$

Результаты моделирования представлены на рис. 10–12.

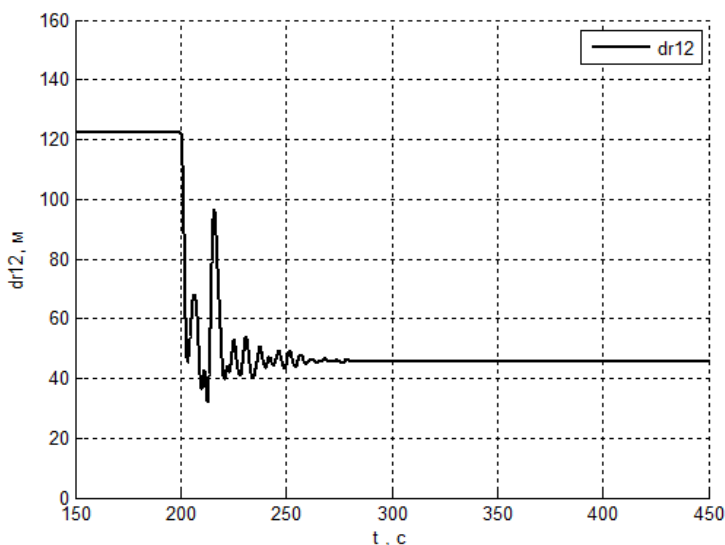


Рис. 10. Расстояние между 1 и 2 агентами

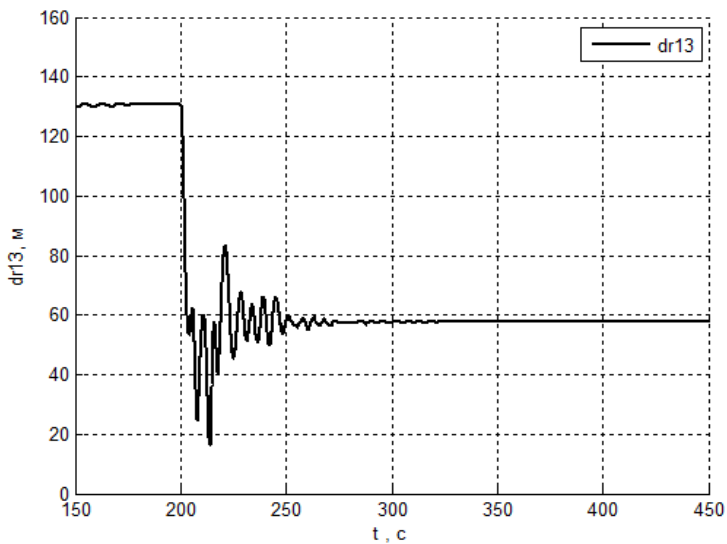


Рис. 11. Расстояние между 1 и 3 агентами

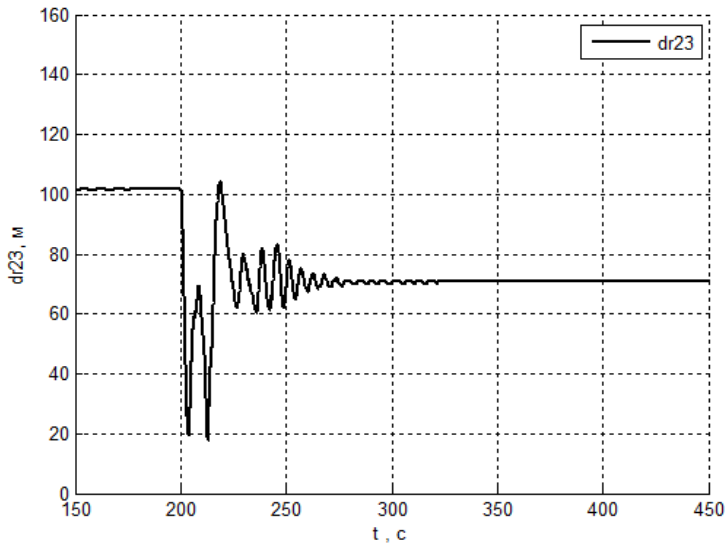


Рис. 12. Расстояние между 2 и 3 агентами

На этих рисунках можно наблюдать графики ненулевых расстояний между агентами. Видно, что в определённый момент времени агенты начинают опасное сближение, но система управления своевременно выводит их на безопасное расстояние, которое затем стабилизируется.

5. Заключение

1. На основе развития предложенного в [17] метода искусственного потенциального поля в рамках сетевой модели решена задача защиты от столкновений БПЛА при групповом полете в процессе формирования строя.

2. Результаты моделирования на основе полных нелинейных моделей объектов подтверждают работоспособность предложенного метода предотвращения столкновений по каждому из рассмотренных каналов.

3. Предложенный алгоритм может быть применен для решения задачи наведения группы БПЛА на заданную цель, в которой формирование строя является первым подготовительным этапом.

Литература

1. АБАДЕЕВ Э.М., ЛЯПУНОВ В.В., ТРУСОВ В.Н. *Основы формирования облика систем управления авиационного ракетного вооружения.* – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2012. – 176 с.
2. ЕВДОКИМЕНКОВ В.Н., КРАСИЛЬЩИКОВ М.Н. *Распределённая система интеллектуального управления группой беспилотных летательных аппаратов: методы и алгоритмы* // Аналитическая механика, устойчивость и управление: труды XI Международной Четаевской конференции: пленарные доклады. – Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. – С. 113–124.
3. ЕВДОКИМЕНКОВ В.Н., КРАСИЛЬЩИКОВ М.Н., ОРКИН С.Д. *Управление смешанными группами пилотируемых и беспилотных летательных аппаратов в условиях единого информационно-управляющего поля.* – М.: Изд-во МАИ, 2015. – 272 с.
4. КАЗАНИН Д.К. *Частный алгоритм управления мультиагентной системой* // Авиакосмическое приборостроение. – 2015. – №11. – С. 27–34.
5. ATINC G.M. *Collision-Free Trajectory Tracking While Preserving Connectivity in Unicycle Multi-Agent Systems* // American Control Conference. – 2013. – P. 5392–5397.
6. BOIVIN E., DESBIENS A., GAGNON E. *UAV Collision Avoidance Using Cooperative Predictive Control* // 16th Mediterranean Conference on Control and Automation Congress Centre. – 2008. – P. 682–688.
7. CAO Y., REN W. *Optimal Linear-Consensus Algorithms: An LQR Perspective* // IEEE T. On Systems, Man, And Cybernetics. Part B: Cybernetics. – 2010. – Vol. 40, No. 3. – P. 819–830.

8. FAX J., OLFATI-SABER R., MURRAY R. *Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems* // Proc. of the IEEE. – 2007. – Vol. 95, No. 1. – P. 215–233.
9. GHADAMI R., SHAFAI B. *Distributed H2 Control of Multi-Agent Dynamic Systems: Continuous-Time Case* // American Control Conference. – 2010. – P. 3969–3974.
10. GUERRERO A., LOZANO R. *Flight formation control* // Wiley. – 2012. – Vol. 342.
11. HAFREZ A.T. *Encirclement of Multiple Targets using Model Predictive Control* // American Control Conference. – 2013. – P. 3147–3152.
12. JOEL G., DEBASISH G. *A Reactive Inverse PN Algorithm for Collision Avoidance among Multiple Unmanned Aerial Vehicles* // American Control Conference. – 2009. – P. 3890–3895.
13. LEONARD N., FIORELLI E. *Virtual Leaders, Artificial Potentials Control of Groups and Coordinated* // Proc. of the 40th IEEE Conference on Decision and Control. – 2001. – P. 2968–2973.
14. LIN Y., SARIPALLI S. *Collision Avoidance for UAVs Using Reachable Sets* // Int. Conference on Unmanned Aircraft Systems. – 2015. – Vol. 10. – P. 226–235.
15. MENG Z., REN W. *Leaderless and Leader-Following Consensus With Communication and Input Delays Under a Directed Network Topology* // IEEE T. on Systems, Man, and Cybernetics. – 2011. – Vol. 41, No. 1. – P. 75–88.
16. MURRAY R. *Recent Research in Cooperative Control of Multivehicle Systems* // J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control. – 2007. – Vol. 129. – P. 571–583.
17. NAMERIKAWA T., KURIKI Y. *Consensus-based Cooperative Formation Control with Collision Avoidance for a Multi-UAV System* // American Control Conference. – 2014. – P. 2077–2082.

18. OLFATI-SABER R., MURRAY R. *Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays* // IEEE T. on Automatic Control. – 2004. – Vol. 49, No. 9. – P. 1520–1532.
19. PANAGOUD D., STIPANOVIC M., VOULGARIS G. *Distributed Coordination Control for Multi-Robot Networks Using Lyapunov-Like Barrier Functions* // IEEE T. on Automatic Control. – 2016. – Vol. 61, No. 3. – P. 617–632.
20. PARK J., OH H., TAHK M. *UAV Collision Avoidance Based on Geometric Approach* // SICE Annual Conference. – 2008. – P. 2122–2126.
21. REN W. *Consensus Tracking Under Directed Interaction Topologies: Algorithms and Experiments* // IEEE T. on Control Systems Technology. – 2010. – Vol. 18, No. 1. – P. 230–237.
22. REN W. *Information consensus in multivehicle cooperative Control* // IEEE Control Systems magazine. – 2007. – Vol. 27, No. 2. – P. 71–82.
23. RICHARDS A., HOW J. *Decentralized Model Predictive Control of Cooperating UAVs* // Decision and Control (CDC), IEEE 43rd Annual Conference. – 2004. – P. 4286–4291.
24. SORESEN N., REN W. *Distributed coordination architecture for multi-robot formation control* // Robotics and Autonomous Systems. – 2008. – Vol. 56. – P. 324–333.
25. TORRE G.D.L., YUCELEN T., JOHNSON E. *Constrained Formation Protocols for Networked Multiagent Systems* // Int. Conference on Unmanned Aircraft Systems. – 2013. – P. 824–830.
26. ZAVLANOS M.M., PAPPAS G.J. *Potential Fields for Maintaining Connectivity of Mobile Networks* // IEEE T. on Robotics. – 2007. – Vol. 23, No. 4. – P. 812–816.

MUTUAL COLLISION AVOIDANCE IN THE FORMATION OF THE UNMANNED AERIAL VEHICLES

Dmitriy Kazanin, «Temp-Avia», Arzamas Polytechnical institute, Arzamas, engineer-mathematician, post-graduate student (kazanindk@gmail.com).

Abstract: A group flight of hypothetical unmanned aerial vehicles is considered, during which mutual collisions are possible. A collision avoidance strategy is proposed during the group flight formation of these vehicles. This strategy is based on the method of artificial potential field. The method consists in that when a collision risk is detected between agents, control signals for the longitudinal, lateral channel and thrust channel are automatically generated in the control system of each agent and the control objects reach a safe distance relative to each other. Collision avoidance algorithms have been simulated. At the first stage, collision avoidance algorithms for each channel are simulated separately. Agents move at specified coordinates relative to the virtual leader. Then two UAVs are selected, the coordinates of which differ only on one channel, and one of the agents deviates towards the other. Then collision avoidance algorithms are simulated for all channels simultaneously. Three agents are considered, which move along given coordinates relative to the virtual leader, thus forming a system. Then the second and third agents deviate towards the first. Thus the risk of UAV collision arises. The simulation results demonstrate that these control algorithms prevent all possible collisions.

Keywords: unmanned aerial vehicle, multi-agent system, control system, collision avoidance, artificial potential field.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии И.Б. Фуртатом.

Поступила в редакцию 30.05.2017.

Опубликована 30.09.2017.