

УПРАВЛЕНИЕ СИНХРОНИЗАЦИЕЙ ДВУХ СВЯЗАННЫХ НЕИДЕНТИЧНЫХ СИСТЕМ ХИНДМАРШ–РОУЗ¹

Семенов Д. М.²

(Санкт-Петербургский государственный университет,
Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)

Рассмотрена задача управления синхронизацией между двумя связанными неидентичными системами Хиндмарш–Роуз, каждая из которых описывает поведение отдельного биологического нейрона. Важность решения данной задачи обусловлена множеством медико-биологических исследований, которые напрямую связывают появление некоторых заболеваний нервной системы (таких как эпилепсия) с наличием патологической синхронизации между нейронами в отдельных участках головного мозга. Таким образом, возможность управления синхронизацией между нейронами является перспективным методом лечения эпилепсии и активно применяется в медицинской практике. Очевидно, что разработка такого метода лечения требует использования качественных математических инструментов. В качестве таких инструментов в данной работе используются инструменты теории управления. Кроме того, необходимо учитывать наличие неточности современных моделей биологических нейронов. Для этого в настоящей работе предлагается рассматривать эту неточность как непрерывные, равномерно ограниченные функции, описывающие некоторые возмущения. Таким образом, используя предлагаемый в работе закон управления и соблюдая выполнение сформулированных теорем, можно гарантированно достичь синхронизированного поведения между исследуемыми системами в условиях отсутствия и наличия модельных возмущений в системах. Полученные результаты доказаны и подтверждены численными экспериментами.

Ключевые слова: синхронизация, связанные осцилляторы, система Хиндмарш–Роуз.

¹ Работа выполнена в ИПМаш РАН при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 14-29-00142).

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, доктору технических наук, профессору Фрадкову Александру Львовичу за ценные указания в ходе работы над статьёй и всяческую поддержку.

² Данила Михайлович Семенов, студент магистратуры, стажёр-исследователь (semenovdm90@gmail.com).

Введение

Благодаря огромному количеству исследований, посвящённых синхронизации в биологических системах, можно с уверенностью сказать, что явление синхронизации играет ключевую роль в функционировании биологических систем и их взаимодействии между собой [1, 2, 13, 14]. В качестве примеров можно привести популяции светлячков, синхронно вспыхивающих в ночном небе, или синхронную активность сердечных клеток, позволяющую сердцу сокращаться [20]. Кроме того, к таким системам относится мозг человека или животного. На настоящий момент известно, что синхронизация больших популяций нейронов является основным механизмом образования макроколебаний в мозге [14, 21, 24]. Также было установлено, что ряд патологических состояний и заболеваний центральной нервной системы, например таких, как эссенциальный тремор, эпилепсия, болезни Паркинсона и Альцгеймера, напрямую связаны с аномальной синхронизацией отдельных нейронных популяций [5, 12, 22]. Сейчас активно ведётся разработка методов лечения данных заболеваний путём подавления патологической синхронизации в мозге. Причём особый интерес представляют собой неинвазивные методы, основанные на биологической обратной связи [3, 4, 9]. Очевидно, что разработка таких методов требует качественного математического описания как моделей нейронов, так и условий их синхронизации в сетях.

На сегодняшний день существует множество исследований, посвящённых поиску условий синхронизации сетей, узлами которых являются математические модели биологических нейронов. При этом до недавнего времени практически все исследования ограничивались лишь поиском условий синхронизации для случая идентичных узлов в сети и отсутствия модельных возмущений в каждом отдельном узле [6, 10, 11, 18, 23]. Но поскольку популяции нейронов в мозге представляют собой гетерогенные сети (т.е. сети, состоящие из неидентичных узлов), возник интерес перенесения накопленного опыта на случай синхронизации в дан-

ных сетях. Например, продемонстрирована возможность синхронизации гетерогенной сети, узлы которой описываются динамической системой ФитцХью–Нагумо [15, 16, 17]. Настоящая работа продолжает исследования гетерогенных сетей и рассматривает синхронизацию простейшей сети, состоящей из двух связанных неидентичных динамических систем Хиндмарш–Роуз, причём как в условиях отсутствия, так и в условиях наличия возмущений в системах.

Статья организована следующим образом: в разделе 1 рассматривается динамическая система Хиндмарш–Роуз как модель биологического нейрона; в разделе 2.1 формулируется понятие синхронизации и приводятся её основные виды; в разделах 2.2 и 2.3 представлены доказательства синхронизации двух взаимосвязанных неидентичных систем Хиндмарш–Роуз в условиях отсутствия и наличия возмущений; результаты численного моделирования, подтверждающие теоретические результаты, приведены в разделе 3.

1. Система Хиндмарш–Роуз

Система Хиндмарш–Роуз представляет собой модель биологического нейрона и описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений 3-го порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t) - ax^3(t) + bx^2(t) - z(t) + u(t), \\ (1) \quad \dot{y}(t) &= c - dx^2(t) - y(t), \\ \dot{z}(t) &= \varepsilon[s(x(t) - r) - z(t)]. \end{aligned}$$

Здесь переменная $x(t)$ описывает динамику мембранного потенциала нейрона, а переменные $y(t)$ и $z(t)$ описывают калий-натриевый насос. Поскольку скорость изменения переменной $z(t)$ определяется малым параметром $0 < \varepsilon \ll 1$, то $z(t)$ описывает динамику медленного калиевого тока, а $y(t)$ – быстрого натриевого тока. Внешнее воздействие на нейрон определяется переменной $u(t)$.

Изначально система Хиндмарш–Роуз описывалась нелинейной системой дифференциальных уравнений 2-го порядка и явля-

лась упрощённым вариантом модели Ходжкина–Хаксли [7]. Однако после ряда экспериментов, проведённых над клетками мозга пресноводной улитки *Lymnaea stagnalis*, были обнаружены новые режимы функционирования нейронов, которые не учитывались в модели [8]. Потому авторы модели, Джеймс Хиндмарш и Мальком Роуз, приняли решение о включении в модель третьего уравнения, что позволило учесть большинство новых режимов поведения биологического нейрона. В частности, модель (1) способна демонстрировать пачечную активность и посттормозную отдачу, а также адаптироваться к воздействию внешней среды [8, 19].

2. Синхронизация систем Хиндмарш–Роуз

2.1. ПОНЯТИЕ СИНХРОНИЗАЦИИ

Настоящая работа в значительной степени посвящена явлению синхронизации. Потому важно определить, что в дальнейшем понимается под термином «синхронизация». *Синхронизацией* будем называть согласованное во времени функционирование двух или нескольких объектов или процессов [2]. Также определение синхронизации может быть сформулировано математически.

Определение 1 [2, с. 78]. Будем говорить, что имеет место синхронизация процессов или объектов $x_i(t) \in \mathcal{X}$, $i = 1, 2, \dots, k$, относительно характеристики $C_t(\cdot)$ и вектор-функции $F_i(\cdot)$, если существуют числа $\tau_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, k$, такие, что $\forall t \geq 0$ выполняются соотношения

$$(2) \quad F_1(C_{t+\tau_1}(x_1)) = F_2(C_{t+\tau_2}(x_2)) = \dots = F_k(C_{t+\tau_k}(x_k)).$$

Здесь характеристика $C_t(\cdot)$ называется *показателем (индексом) синхронизации* и определяется как отображение $C_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}$, где \mathcal{C} есть множество возможных значений $C_t(\cdot)$. Необходимо отметить, что характеристика $C_t(\cdot)$ предполагается одинаковой для всех объектов или процессов. Принимаемое характеристикой $C_t(\cdot)$ значение может быть скаляром, вектором, матрицей и даже функцией. Сравнить характеристики различных процессов

между собой позволяют вектор-функции $F_i : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^m$, называемые *функциями сравнения*.

Под *приближённой синхронизацией* (ε -синхронизацией) понимается случай, когда соотношения (2) выполняются приближённо:

$$(3) \quad \|F_i(C_{t+\tau_i}(x_i)) - F_j(C_{t+\tau_j}(x_j))\|_2 \leq \varepsilon \quad \forall i, j, \quad t \geq 0,$$

а под *асимптотической синхронизацией* – случай, когда погрешность соотношений (2) со временем исчезает:

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|F_i(C_{t+\tau_i}(x_i)) - F_j(C_{t+\tau_j}(x_j))\|_2 = 0 \quad \forall i, j, \quad t \geq 0.$$

Представленное выше определение является достаточно общим и охватывает большинство из основных видов синхронизации. В данной работе же рассматривается вид синхронизации, называемый *координатной синхронизацией*. Под координатной синхронизацией взаимосвязанных подсистем понимается совпадения координат векторов состояний этих подсистем. Координатная синхронизация согласуется с приведённым выше определением, если определить показатель синхронизации как $C_{t+\tau_i}(x_i) = x_i(t + \tau_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, а функции сравнения взять тождественными своему аргументу: $F_i(x) = x$, $i = 1, 2, \dots, k$.

2.2. СИНХРОНИЗАЦИЯ СИСТЕМ БЕЗ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим гетерогенную сеть нейронов, представленную двумя связанными системами Хиндмарш-Роуз:

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1(t) = F_1(\mathbf{x}_1(t)) + B[\sigma(x_2(t) - x_1(t)) + u(t)], \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) = F_2(\mathbf{x}_2(t)) + B\sigma(x_1(t) - x_2(t)), \end{cases}$$

где

$$F_i(\mathbf{x}(t)) = \begin{pmatrix} y(t) - ax^3(t) + bx^2(t) - z(t) \\ c - dx^2(t) - y(t) \\ \varepsilon[s(x(t) - r_i) - z(t)] \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

Здесь $\mathbf{x}_i(t) = \text{col}(x_i(t), y_i(t), z_i(t))$, $i = 1, 2$, – вектора состояний связанных систем (5); $B = \text{col}(1, 0, 0)$; $u(t)$ – управляющее воздействие; σ – сила связи между нейронами; $a, b, c, d, \varepsilon, s, r_1$ и

r_2 – известные параметры нейронов. Будем проводить синхронизацию систем, предполагая известность параметров. Последовательно вычтя уравнения второй системы из первой и положив $\psi(t) = x_1^2(t) + x_1(t)x_2(t) + x_2^2(t)$, $\varphi(t) = x_1(t) + x_2(t)$, получим систему

$$(6) \quad \dot{\delta}(t) = \widehat{F}(\delta(t)) + Bu(t),$$

где

$$\widehat{F}(\delta(t)) = \begin{pmatrix} -(a\psi(t) - b\varphi(t) + 2\sigma)\delta_x(t) + \delta_y(t) - \delta_z(t) \\ -d\varphi(t)\delta_x(t) - \delta_y(t) \\ \varepsilon(s\delta_x(t) - \delta_z(t) - sr) \end{pmatrix}.$$

Здесь $\delta(t) = \text{col}(\delta_x(t), \delta_y(t), \delta_z(t))$ – вектор состояния системы (6); $\delta_x(t) = x_1(t) - x_2(t)$, $\delta_y(t) = y_1(t) - y_2(t)$, $\delta_z(t) = z_1(t) - z_2(t)$ и $r = r_1 - r_2$. Теперь, чтобы гарантировать синхронизацию систем (5), необходимо обеспечить устойчивость системы (6). Это достигается посредством управления, определяемого функцией $u(t)$. Очевидно, что выбор конкретного вида синхронизации определяет конкретный вид цели управления, а значит и функции $u(t)$. В настоящей работе цель управления сформулирована следующим образом:

$$(7) \quad |\delta_x(t)| \rightarrow 0, \quad |\delta_y(t)| \rightarrow 0, \quad |\delta_z(t)| \rightarrow \text{const}, \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Далее перейдем к новым координатам: $e_x = \delta_x$, $e_y = \delta_y$, $e_z = \delta_z + sr$. Система (6) примет следующий вид:

$$(8) \quad \dot{e}(t) = \widetilde{F}(e(t)) + Bu(t),$$

где

$$\widetilde{F}(e(t)) = \begin{pmatrix} -(a\psi(t) - b\varphi(t) + 2\sigma)e_x(t) + e_y(t) - e_z(t) + sr \\ -d\varphi(t)e_x(t) - e_y(t) \\ \varepsilon(se_x(t) - e_z(t)) \end{pmatrix}.$$

Здесь $e(t) = \text{col}(e_x(t), e_y(t), e_z(t))$ – вектор состояния системы (8).

Введем функцию Ляпунова:

$$(9) \quad V(e(t)) = \frac{1}{2} \left(e_x^2(t) + e_y^2(t) + \frac{1}{\varepsilon s} e_z^2(t) \right).$$

Найдем производную $\dot{V}(e(t))$ в силу системы (8). Получим следующее:

$$(10) \quad \begin{aligned} \dot{V}(e(t)) = & -(a\psi(t) - b\varphi(t) + 2\sigma)e_x^2(t) - e_y^2(t) - \frac{1}{s}e_z^2(t) + \\ & + (1 - d\varphi)e_x(t)e_y(t) + sre_x(t) + u(t)e_x(t). \end{aligned}$$

В виду того, что функция $\psi(t)$ неотрицательна $\forall t \geq 0$, производную (10) можно оценить сверху:

$$(11) \quad \begin{aligned} \dot{V}(e(t)) \leq & -(2\sigma - b\varphi(t))e_x^2(t) - e_y^2(t) - \frac{1}{s}e_z^2(t) + \\ & + (1 - d\varphi)e_x(t)e_y(t) + sre_x(t) + u(t)e_x(t). \end{aligned}$$

Зададим следующий закон управления:

$$(12) \quad u(t) = -(\gamma + b\varphi(t))\delta_x(t) + d\varphi(t)\delta_y(t) - sr, \quad \gamma \geq 0.$$

Переходя к новым координатам e_x , e_y и e_z , управление (12) примет вид

$$(13) \quad u(t) = -(\gamma + b\varphi(t))e_x(t) + d\varphi(t)e_y(t) - sr, \quad \gamma \geq 0.$$

Подставляя закон управления (13) в оценку (11), получаем

$$(14) \quad \dot{V}(e(t)) \leq -(\gamma + 2\sigma)e_x^2(t) + e_x(t)e_y(t) - e_y^2(t) - \frac{1}{s}e_z^2(t).$$

Перепишем правую часть неравенства (14) в следующем виде:

$$(15) \quad \begin{aligned} \dot{V}(e(t)) \leq & -\left(\gamma + 2\sigma - \frac{1}{2}\right)e_x^2(t) + e_x(t)e_y(t) - \frac{1}{2}e_y^2(t) - \\ & - \frac{1}{2s}e_z^2(t) - \frac{1}{2}\left(e_x^2(t) + e_y^2(t) + \frac{1}{s}e_z^2(t)\right). \end{aligned}$$

Для правой части неравенства (15) имеет место оценка сверху:

$$(16) \quad \begin{aligned} \dot{V}(e(t)) \leq & -\left(\gamma + 2\sigma - \frac{1}{2}\right)e_x^2(t) + e_x(t)e_y(t) - \frac{1}{2}e_y^2(t) - \\ & - \frac{1}{2s}e_z^2(t) - \varepsilon V(e(t)). \end{aligned}$$

Далее в неравенстве (16) выделим квадратичную форму и перепишем её в матричном виде.

$$(17) \quad \dot{V}(e(t)) \leq e^*(t)W e(t) - \varepsilon V(e(t)),$$

где

$$W = \begin{bmatrix} -(\gamma + 2\sigma - 1/2) & 1/2 & 0 \\ & 1/2 & -1/2 & 0 \\ & & 0 & 0 & -1/2s \end{bmatrix}.$$

Теперь найдем такие γ и σ , при которых квадратичная форма в неравенстве (17) является отрицательно определённой. Используя критерий Сильвестра, получим следующее условие:

$$(18) \quad \gamma + 2\sigma - 1 > 0.$$

Если условие (18) выполнено, тогда квадратичная форма в неравенстве (16) является отрицательно определённой, а значит, её можно оценить сверху нулём. Получим следующее неравенство:

$$(19) \quad \dot{V}(e(t)) \leq -\varepsilon V(e(t)).$$

В силу неравенства (19), траектории системы (8) стремятся к нулевому решению. А это означает, что нулевое решение системы (8) является асимптотически устойчивым. Переходя к исходным координатам, получаем:

$$(20) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\delta_x(t)| = 0, \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\delta_y(t)| = 0, \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\delta_z(t)| = s|r|.$$

Полученный результат можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 1. Пусть σ – сила связи между системами (5), а γ – коэффициент усиления в законе управления $u(t)$. Тогда $\forall \mathbf{x}_i(0)$, $i = 1, 2$, систем, закон управления $u(t)$ в форме (13) обеспечивает достижение цели управления (7), если выполнено условие (18).

Таким образом, выполнение условий теоремы 1 является достаточным условием для синхронизации систем (5). Причем относительно переменных $x_i(t)$ и $y_i(t)$, $i = 1, 2$, синхронизация является асимптотической. А из неравенства (19) следует, что скорость синхронизации подчиняется экспоненциальному закону.

2.3. СИНХРОНИЗАЦИЯ СИСТЕМ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Несмотря на всю схожесть поведения системы Хиндмарш-Роуз с поведением биологических нейронов, её универсальность не позволяет учесть все физиологические особенности отдельного нейрона. Учесть данные особенности возможно, если известна некоторая априорная информация о них. Например известно, что они описываются возмущениями, которые представляют собой равномерно ограниченные функции от времени. Таким образом,

сеть (5), состоящая из двух неидентичных систем Хиндмарш-Роза, может быть переписана в следующем виде:

$$(21) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1(t) = F_1(\mathbf{x}_1(t)) + \xi_1(t) + B[\sigma(x_2(t) - x_1(t)) + u(t)], \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) = F_2(\mathbf{x}_2(t)) + \xi_2(t) + B\sigma(x_1(t) - x_2(t)), \end{cases}$$

где

$$F_i(\mathbf{x}(t)) = \begin{pmatrix} y(t) - ax^3(t) + bx^2(t) - z(t) \\ c - dx^2(t) - y(t) \\ \varepsilon[s(x(t) - r_i) - z(t)] \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

Здесь $\xi_i(t) = \text{col}(\xi_{x,i}(t), \xi_{y,i}(t), \xi_{z,i}(t))$, $i = 1, 2$, – вектор-функции возмущений связанных систем (21), причём

$$|\xi_{x,i}(t)| \leq \frac{\Delta_x}{2}, \quad |\xi_{y,i}(t)| \leq \frac{\Delta_y}{2}, \quad |\xi_{z,i}(t)| \leq \frac{\Delta_z}{2}, \quad i = 1, 2, \quad \forall t \geq 0.$$

Наличие возмущений в системах (21) требует такого управления, которое бы смогло обеспечить синхронизацию систем даже при их наличии. Далее покажем, что полученный закон управления (12) обладает данным свойством и обеспечивает синхронизацию систем (21). Для этого вычтем уравнения первой системы из второй и используем ранее введенные обозначения $\psi(t)$ и $\varphi(t)$:

$$(22) \quad \dot{\delta}(t) = \widehat{F}(\delta(t)) + \eta(t) + Bu(t),$$

где

$$\widehat{F}(\delta(t)) = \begin{pmatrix} -(a\psi(t) - b\varphi(t) + 2\sigma)\delta_x(t) + \delta_y(t) - \delta_z(t) \\ -d\varphi(t)\delta_x(t) - \delta_y(t) \\ \varepsilon(s\delta_x(t) - \delta_z(t) - sr) \end{pmatrix}.$$

Здесь $\eta(t) = \text{col}(\eta_x(t), \eta_y(t), \eta_z(t))$ – вектор-функция возмущений системы (22), такая, что

$$|\eta_x(t)| \leq \Delta_x, \quad |\eta_y(t)| \leq \Delta_y, \quad |\eta_z(t)| \leq \Delta_z \quad \forall t \geq 0.$$

Переходя к координатам $e_x = \delta_x$, $e_y = \delta_y$, $e_z = \delta_z + sr$, получим следующую систему:

$$(23) \quad \dot{e}(t) = \widetilde{F}(e(t)) + \eta(t) + Bu(t),$$

где

$$\tilde{F}(e(t)) = \begin{pmatrix} -(\alpha\psi(t) - b\varphi(t) + 2\sigma)e_x(t) + e_y(t) - e_z(t) + sr \\ -d\varphi(t)e_x(t) - e_y(t) \\ \varepsilon(se_x(t) - e_z(t)) \end{pmatrix}.$$

Здесь $e(t) = \text{col}(e_x(t), e_y(t), e_z(t))$ – вектор состояния системы (23).

Теперь покажем, что управление (12) обеспечивает синхронизацию системы (21). Для доказательства этого факта найдем производную функции Ляпунова (9) в силу системы (23). Получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= -(\alpha\psi(t) - b\varphi(t) + 2\sigma)e_x^2(t) - e_y^2(t) - \frac{1}{s}e_z^2(t) + \\ (24) \quad &+ (1 - d\varphi)e_x(t)e_y(t) + sre_x(t) + u(t)e_x(t) + \\ &+ \eta_x(t)e_x(t) + \eta_y(t)e_y(t) + \frac{1}{\varepsilon s}\eta_z(t)e(t). \end{aligned}$$

Подставим закон управления (13) в выражение (24):

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= -(\alpha\psi(t) + \gamma + 2\sigma)e_x^2(t) + e_x(t)e_y(t) - e_y^2(t) - \\ (25) \quad &- \frac{1}{s}e_z^2(t) + \eta_x(t)e_x(t) + \eta_y(t)e_y(t) + \frac{1}{\varepsilon s}\eta_z(t)e_z(t). \end{aligned}$$

Далее выражение (25) будем оценивать сверху. Исключим слагаемое, содержащее функцию $\psi(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &\leq -(\gamma + 2\sigma)e_x^2(t) + e_x(t)e_y(t) - e_y^2(t) - \frac{1}{s}e_z^2(t) + \\ (26) \quad &+ \eta_x(t)e_x(t) + \eta_y(t)e_y(t) + \frac{1}{\varepsilon s}\eta_z(t)e_z(t). \end{aligned}$$

Значения слагаемых, содержащих функции $\eta_x(t)$, $\eta_y(t)$ и $\eta_z(t)$, можно оценить сверху значениями модулей этих слагаемых. Тогда получим оценку:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &\leq -(\gamma + 2\sigma)e_x^2(t) + e_x(t)e_y(t) - e_y^2(t) - \frac{1}{s}e_z^2(t) + \\ (27) \quad &+ |\eta_x(t)e_x(t)| + |\eta_y(t)e_y(t)| + \frac{1}{\varepsilon s}|\eta_z(t)e_z(t)|. \end{aligned}$$

Рассмотрим вспомогательное неравенство $\left(\sqrt{\nu}\alpha + \frac{1}{\sqrt{\nu}}\beta\right)^2 \geq 0$, оно равносильно неравенству $|\alpha\beta| \leq \frac{\nu}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2\nu}\beta^2$. А значит, име-

ет место следующее выражение:

$$(28) \quad \begin{aligned} \dot{V}(e(t)) \leq & -(\gamma + 2\sigma) e_x^2(t) + e_x(t)e_y(t) - e_y^2(t) - \frac{1}{s} e_z^2(t) + \\ & + \frac{\nu_x}{2} e_x^2(t) + \frac{1}{2\nu_x} \eta_x^2(t) + \frac{\nu_y}{2} e_y^2(t) + \\ & + \frac{1}{2\nu_y} \eta_y^2(t) + \frac{\nu_z}{2\varepsilon s} e_z^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon s\nu_z} \eta_z^2(t). \end{aligned}$$

Представим правую часть неравенства (28) в следующем виде:

$$(29) \quad \begin{aligned} \dot{V}(e(t)) \leq & -\left(\gamma + 2\sigma - \frac{1}{2}\right) e_x^2(t) + e_x(t)e_y(t) - \frac{1}{2} e_y^2(t) - \\ & - \frac{1}{2s} e_z^2(t) - \frac{1}{2} \left[\left(e_x^2(t) + e_y^2(t) + \frac{1}{s} e_z^2(t) \right) + \nu_x e_x^2(t) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\nu_x} \eta_x^2(t) + \nu_y e_y^2(t) + \frac{1}{\nu_y} \eta_y^2(t) + \frac{\nu_z}{\varepsilon s} e_z^2(t) + \frac{1}{\varepsilon s\nu_z} \eta_z^2(t) \right]. \end{aligned}$$

Как и ранее, выделим квадратичную форму в неравенстве (29), а ν_x , ν_y и ν_z положим равными $1/2$, $1/2$ и $\varepsilon/2$ соответственно. Отсюда получаем следующую оценку:

$$(30) \quad \begin{aligned} \dot{V}(e(t)) \leq & e^*(t)W e(t) - \frac{\varepsilon}{2} V(e(t)) + \\ & + \left(\eta_x^2(t) + \eta_y^2(t) + \frac{1}{\varepsilon^2 s} \eta_z^2(t) \right), \end{aligned}$$

где

$$W = \begin{bmatrix} -(\gamma + 2\sigma - 1/2) & 1/2 & 0 \\ & 1/2 & -1/2 \\ & 0 & 0 & -1/2s \end{bmatrix}.$$

Ранее показано, что при выполнении условий (18), квадратичная форма $e^*(t)W e(t)$ является отрицательно определённой. Кроме того, функции $\eta_x(t)$, $\eta_y(t)$ и $\eta_z(t)$ являются равномерно ограниченными. Поэтому правую часть неравенства (30) можно вновь оценить сверху:

$$(31) \quad \dot{V}(e(t)) \leq -\frac{\varepsilon}{2} V(e(t)) + h,$$

где

$$h = \left(\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \frac{1}{\varepsilon^2 s} \Delta_z^2 \right).$$

Разрешая неравенство (31) и устремляя t к бесконечности, получаем верхний предел:

$$(32) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} V(e(t)) = \frac{2h}{\varepsilon}.$$

Следовательно, траектории системы (22) ограничены эллипсоидом:

$$(33) \quad \frac{\delta_x^2(t)}{\left(\sqrt{\frac{4h}{\varepsilon}}\right)^2} + \frac{\delta_y^2(t)}{\left(\sqrt{\frac{4h}{\varepsilon}}\right)^2} + \frac{(\delta_z(t) + sr)^2}{\left(\sqrt{4sh}\right)^2} = 1.$$

Ограниченность траекторий в системе (22) свидетельствует о наличии приближённой синхронизации между связанными системами (21). Следует отметить, что точность такой синхронизации прямо пропорциональна величинам Δ_x , Δ_y и Δ_z . Как и ранее, сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 2. Пусть $\xi_{x,i}(t)$, $\xi_{y,i}(t)$ и $\xi_{z,i}(t)$, $i = 1, 2$, – равномерно ограниченные функции возмущений в системе (21). Тогда $\forall \mathbf{x}_i(0)$, $i = 1, 2$, системы, закон управления $u(t)$ в форме (13) обеспечивает достижение приближённой синхронизации, если выполнены условия теоремы 1.

Таким образом, результат, полученный в пункте 3.2, удастся расширить на случай наличия модельных возмущений, описываемых детерминированными, равномерно ограниченными функциями.

3. Численные эксперименты

В рамках данной работы было проведено два численных эксперимента, целью которых являлось подтверждение адекватности полученных теорем, а следовательно и подтверждение существования такого закона управления $u(t)$, который обеспечит синхронизацию между двумя связанными системами Хиндмарш-Роуз как при отсутствии возмущений в этих системах (5), так и при их наличии (21). Далее рассмотрим каждый из экспериментов в отдельности, но прежде определим априорные данные эксперимента: начальные значения векторов состояния систем

$\mathbf{x}_1(0) = \text{col}(-1,81; -1; 1,6008)$ и $\mathbf{x}_2(0) = \text{col}(-1,8; -1,005; 0,8)$, а также их параметры $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 5$, $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-3}$, $s = 4$, $r_1 = -1$, $r_2 = -0,8$, $\gamma = 4$, $\sigma = 0,4$.

Теперь перейдем к рассмотрению результатов первого эксперимента. Поскольку значения γ и σ заранее известны и удовлетворяют условиям теоремы 1, то для выбранных начальных значений переменных состояния систем (5) закон управления (12) гарантирует достижение цели управления (7). Другими словами, системы (5) под воздействием управления (7) переходят в синхронный режим функционирования за конечное время, что проиллюстрировано на рис. 1. Причём относительно переменных $x_i(t)$ и $y_i(t)$, $i = 1, 2$, синхронизация является асимптотической (рис. 1б и 1г). Отсюда можно заключить верность теоремы 1.

Как отмечалось ранее, модели Хиндмарш-Роуз свойственна некоторая неопределённость. В данном эксперименте будем предполагать, что эта неопределённость представляет собой возмущения, описываемые непрерывными и равномерно ограниченными функциями от времени. Основываясь на данных предположениях, для проведения второго эксперимента были выбраны следующие функции, моделирующие возмущения:

$$\begin{aligned}\xi_{x,1}(t) &= 0,02\varepsilon^2 \sin(100t), & \xi_{x,2}(t) &= 0,01\varepsilon^2 \sin(100t), \\ \xi_{y,1}(t) &= 0,02\varepsilon^2 \sin(t), & \xi_{y,2}(t) &= 0,01\varepsilon^2 \sin(t), \\ \xi_{z,1}(t) &= 0,2\varepsilon^2 \sin(0,01t), & \xi_{z,2}(t) &= 0,1\varepsilon^2 \sin(0,01t).\end{aligned}$$

Из равномерной ограниченности функций-возмущений и выполнения условий теоремы 1 следует выполнение теоремы 2. А значит, закон управления (12) обеспечивает достижение приближённой синхронизации систем в сети (21), что показано на рис. 2. Как можно видеть, область допустимой разницы между траекториями систем ограничена эллипсоидом (рис. 2б, 2г, 2е и 2ж), который, в свою очередь, описывается уравнением (33). А следовательно, теорема 2 верна.

4. Заключение

В статье рассмотрена задача управления синхронизацией двух неидентичных взаимосвязанных систем Хиндмарш-Роуз в условиях отсутствия и наличия модельных возмущений, описываемых непрерывными, равномерно ограниченными функциями. Математически доказана достижимость такой синхронизации посредством управления, предложенного в данной работе. Причём в случае отсутствия модельных возмущений наблюдается асимптотическая синхронизация систем относительно переменных $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $y_1(t)$, $y_2(t)$. Кроме того, для случая присутствия возмущений в системах была получена множественная оценка области допустимой разницы между траекториями синхронизируемых систем, представляющая собой эллипсоид.

Проведённые численные эксперименты подтвердили адекватность полученных теоретических результатов для обоих исследуемых случаев.

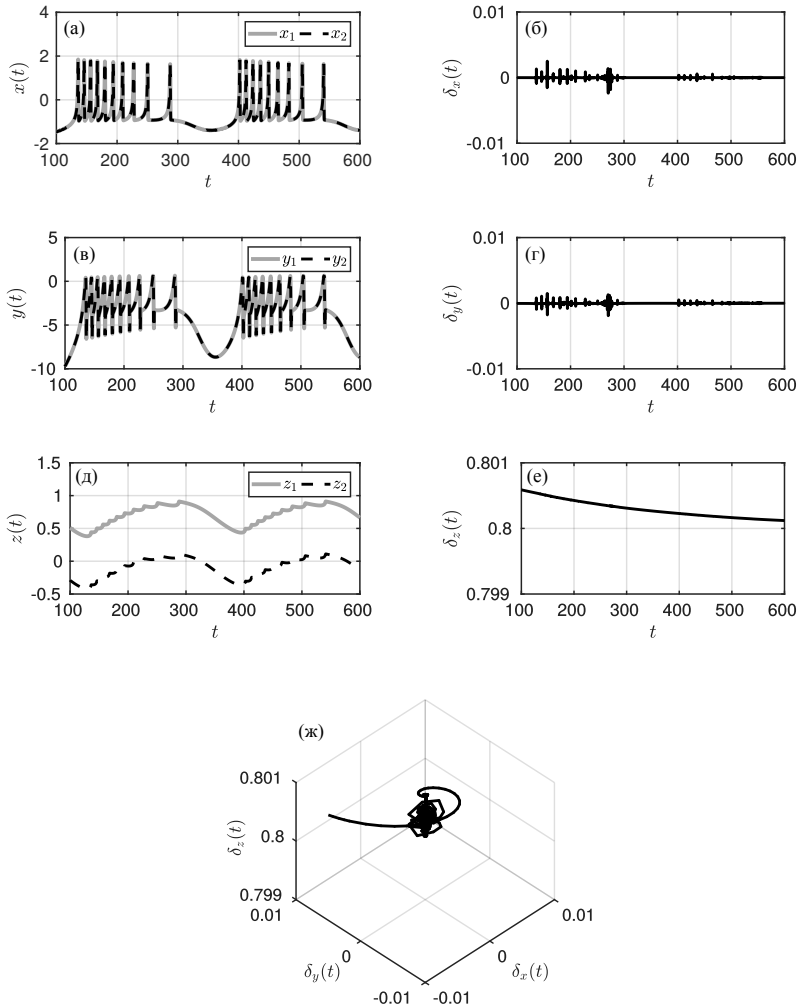


Рис. 1: Синхронизация двух связанных систем Хиндмарш-Роуз без возмущений: (а) поведение переменных $x_1(t)$ и $x_2(t)$; (б) разница между $x_1(t)$ и $x_2(t)$; (в) поведение переменных y_1 и y_2 ; (г) разница между y_1 и y_2 ; (д) поведение переменных z_1 и z_2 ; (е) разница между z_1 и z_2 ; (ж) разница между траекториями

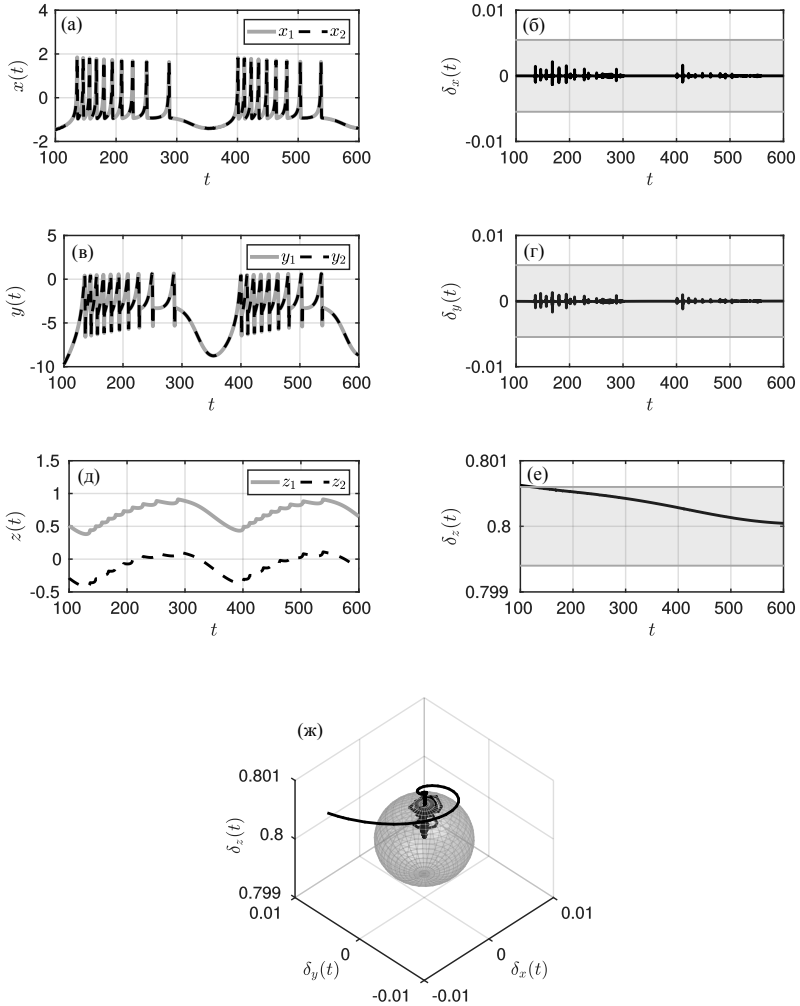


Рис. 2: Синхронизация двух связанных систем Хиндмарш-Роуз с возмущениями: (а) поведение переменных $x_1(t)$ и $x_2(t)$; (б) разница между $x_1(t)$ и $x_2(t)$; (в) поведение переменных y_1 и y_2 ; (г) разница между y_1 и y_2 ; (д) поведение переменных z_1 и z_2 ; (е) разница между z_1 и z_2 ; (ж) разница между траекториями

Литература

1. БЛЕХМАН И.И. *Синхронизация в природе и технике*. – М.: Наука, 1981. – 352 с.
2. ФРАДКОВ А.Л. *Кибернетическая физика: принципы и примеры*. – СПб.: Наука, 2003. – 208 с.
3. CORTESE S., FERRIN M., BRANDEIS D. *Neurofeedback for attention-deficit/hyperactivity Disorder: meta-analysis of clinical and neuropsychological outcomes from randomized controlled trials* // Journal of The American Academy of Child and Adolescent Psychiatry. – 2016. – Vol. 55, Issue 6. – P. 444–455.
4. FERNÁNDEZ T., BOSCH-BAYARD J., HARMONY T. *Neurofeedback in learning disabled children: visual versus auditory reinforcement* // Applied Psychophysiology And Biofeedback. – 2016. – Vol. 41, Issue 1. – P. 27–37
5. GOLOMB D., HANSEL D., MATO G. *Mechanisms of synchrony of neural activity in large networks* // Neuroinformatics and neural modeling, Handbook of biological physics. – Vol. 4. / Eds.: F. Moss, S. Gielen. – Amsterdam: Elsevier, 2001. – P. 887–968.
6. GUZENKO P.Y., LEHNERT J., SCHÖLL E. *Application of adaptive methods to chaos control of networks of Rössler systems* // Cybernetics and Physics. – 2013. – Vol. 2, Issue 1. – P. 15–24.
7. HINDMARSH J.L., ROSE R.M. *A model of the nerve impulse using two first-order differential equations* // Nature. – 1982. – Vol. 296, Issue 5853. – P. 162–164.
8. HINDMARSH J.L., ROSE R.M. *A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations* // Royal Society. – 1984. – Vol. 221, Issue 1222. – P. 87–102.

9. LEEMAN-MARKOWSKI B.A., SCHACHTER S.C. *Cognitive and behavioral interventions in epilepsy* // Current Neurology And Neuroscience Reports. – 2017. – Vol. 17, Issue 5. – P. 42.
10. LEHNERT J., HÖVEL A., SELIVANOV A.A., FRADKOV A.L., SCHÖLL E. *Controlling cluster synchronization by adapting the topology* // Physical Review E. – 2014. – Vol. 90, Issue 4. – 042914.
11. LU J., KURTHS J., CAO J. *Synchronization control for nonlinear stochastic dynamical networks: pinning impulsive strategy* // IEEE Trans. on Neural Networks and Learning Systems – 2012. – Vol. 23, Issue 2. P. 285–292.
12. MILTON J., JUNG P. *Epilepsy as a dynamic disease*. – Berlin: Springer, 2003. – 417 p.
13. OSIPOV G.V., KURTHS J., ZHOU C. *Synchronization in oscillatory networks*. – Berlin: Springer Verlag, 2007. – 370 p.
14. PESKIN C.S. *Mathematical aspects of heart physiology*. – New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, 1975. – 278 p.
15. PLOTNIKOV S. *Controlled synchronization in two Fitzhugh–Nagumo systems with slowly-varying delays* // Cybernetics and Physics. – 2015. – Vol. 4, Issue 1. – P. 21–25.
16. PLOTNIKOV S.A., LEHNERT J., FRADKOV A.L., SCHÖLL E. *Adaptive control of synchronization in delay-coupled heterogeneous networks of FitzHugh–Nagumo nodes* // Int. Journal Bifurcation and Chaos. – 2016. – Vol. 26, Issue 4. – 1650058.
17. PLOTNIKOV S.A., LEHNERT J., FRADKOV A.L., SCHÖLL E. *Synchronization in heterogeneous FitzHugh–Nagumo networks with hierarchical architecture* // Physical Review E. – 2016. – Vol. 94 – 012203.

18. SELIVANOV A.A., LEHNERT J., DAHMS T., HÖVEL P., FRADKOV A.L., SCHÖLL E. *Adaptive synchronization in delay-coupled networks of Stuart-Landau oscillators* // Physical Review E. – 2012. – Vol. 85, Issue 1. – 016201.
19. SHILNIKOV A., KOLOMIETS M. *Methods of the qualitative theory for the Hindmarsh–Rose model: A case study. A tutorial* // Int. Journal Bifurcation and Chaos. – 2008. – Vol. 18, Issue 8. – P. 2141–2168.
20. STEUR E., TYUKIN I., NIJMEIJER H. *Semi-passivity and synchronization of diffusively coupled neuronal oscillators* // Physica D. – 2009. – Vol. 238, Issue 21. – P. 2119–2128.
21. STROGATZ S., STEWART I. *Coupled oscillators and biological synchronization* // Scientific American. – 1993. – Vol. 269, Issue 6. – P. 102–109.
22. TASS P.A. *Phase resetting in medicine and biology: stochastic modelling and data analysis*. – Berlin: Springer, 1999. – 329 p.
23. WANG Z., SHI X. *Lag synchronization of two identical Hindmarsh-Rose neuron systems with mismatched parameters and external disturbance via a single sliding mode controller* // Applied Mathematics and Computation. – 2012. – Vol. 218, Issue 22. – P. 10914–10921.
24. WINFREE A.T. *The geometry of biological time* – 2nd edition. – Berlin: Springer, 2001. – 803 p.

SYNCHRONIZATION CONTROL OF TWO COUPLED NON-IDENTICAL HINDMARSH–ROSE SYSTEMS

Danila Semenov, Saint Petersburg State University, student;
Institute for Problems of Mechanical Engineering of RAS,
Saint Petersburg, trainee researcher (semenovdm90@gmail.com).

Abstract: The problem of controlled synchronization between two coupled non-identical Hindmarsh-Rose systems, each of which describes the behavior of a biological neuron, was considered. The importance of solving this problem is caused by a variety of medical and biological research that determines the correlation between the certain diseases of the nervous system (such as epilepsy) and pathological synchronization between neurons in the brain areas. Thus, the ability to control synchronization between neurons is a promising method for the therapy of epilepsy and has been actively used in medical practice. Obviously, the development of this method of therapy requires the usage of qualitative mathematical tools. Our approach is based on the applying of the tools of control theory. In addition, it is necessary to take into account an inaccuracy of the modern neural models. In order to do this, we propose to consider this inaccuracy in the form of the continuous functions which describe the disturbances. Thus, using the control law, which was suggested in this article, and abiding by the theorems, which were formulated here, it is possible to achieve synchronized behavior of the systems in the conditions of absence and presence of the disturbances. The results were proved and confirmed by simulations.

Keywords: synchronization, coupled oscillators, Hindmarsh–Rose system.

УДК 62.50

ББК Ж 30

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.Г. Лебедевым.*

Поступила в редакцию 20.10.2017.

Дата опубликования 30.09.2018.