СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ПРИЁМА И УВОЛЬНЕНИЯ СОТРУДНИКОВ

Белов М. В.[1]
(*Компания IBS, Москва*)

Работа продолжает исследования в области математического моделирования экономики человеческого капитала и жизненного цикла сотрудников, а также изучения зависимости экономических эффектов бизнеса от этих факторов. Исследуется движение сотрудников между фирмой и рынком труда. Рассматриваются характеристики процесса жизненного цикла сотрудника (ЖЦС), понимаемого как весь интервал времени с момента, когда сотрудник принял предложение о работе в фирме до момента его увольнения. Продемонстрирована существенность влияния продолжительности среднего времени работы в фирме, длительностей фазы адаптации сотрудника при приёме на работу и фазы, предшествующей увольнению, на экономику фирмы. Процесс увольнений сотрудников проанализирован непараметрическими методами. В результате показана невозможность высоко достоверного оценивания функции распределения вероятностей времени работы сотрудника в фирме на основании наблюдений. Предложены процедуры статического последовательного анализа для выявления момента изменения характеристик жизненного цикла сотрудников – вероятностей принятия предложений о приёме на работу и интенсивности увольнения по собственному желанию. Разработанные методы и полученные результаты проиллюстрированы численными примерами из практики автора в сфере экономики человеческого капитала и управления персоналом.

Ключевые слова: жизненный цикл сотрудника, процесс увольнений, цензурированные выборки, последовательный критерий, разладка.

1. Введение. Актуальность проблемы

Ключевым элементом любого бизнеса (фирмы, предприятия) являются сотрудники, поэтому вопросы управления человеческими ресурсами всегда находились и находятся в центре внимания и менеджеров-практиков, и исследователей. Значительное количество исследований посвящено не только работе с персоналом, вовлеченности, кадровому делопроизводству, но также экономике труда и учёту человеческих ресурсов (HR accounting) – см., например, [8, 17, 18, 19]. В последние десяти-

[1] *Михаил Валентинович Белов, к.т.н.* (mbelov@ibs.ru).

летия популярной стала проблематика «управления человеческим капиталом» [14, 16, 22, 23], подчёркивающая центральную роль персонала в любом бизнесе. Вместе с тем вопросы влияния характеристик деятельности сотрудников на экономический эффект[1], получаемый фирмой, изучены недостаточно полно.

Данная статья продолжает работы в области математического моделирования экономики человеческого капитала и жизненного цикла сотрудника [1, 2], а также изучения зависимости экономических эффектов бизнеса от этих факторов. Исследуется такой важный аспект бизнеса как движение сотрудников между фирмой и рынком труда, в частности, увольнения сотрудников по собственному желанию (в дальнейшем «увольнения», если не оговорено особо), предлагаются модели и методы исследования этого процесса.

Во втором разделе вводится математическая модель и доказывается утверждение о зависимости экономических эффектов бизнеса от характеристик ЖЦС, в частности, вероятности принятия предложений о работе и распределения времени работы в фирме. Третий раздел посвящён модели процесса увольнений и непараметрическим методам его статистического анализа. В четвёртом разделе предлагаются методы статистического оценивания и анализа характеристик жизненного цикла сотрудников. В заключении обсуждаются полученные методы и приводятся примеры практического использования предлагаемых подходов. В приложения П1–П5 вынесены выкладки, обосновывающие используемые соотношения.

---

[1] *Экономический эффект, следуя современным экономическим подходам* [3, 5, 12], *понимается как разность между результатом экономической деятельности и затратами, произведенными для его получения.*

2. Модель зависимости экономических эффектов бизнеса от характеристик жизненного цикла сотрудников

Будем представлять бизнес, как и в статьях [1, 2], в виде двух процессов с дискретным временем (дискретные единицы времени будем называть интервалами):

- процесса продаж продукции или услуг, порождающего потребность в персонале;
- процесса движения персонала.

Персонал рассматриваем как организованную совокупность специалистов, обладающих определёнными знаниями, навыками, квалификацией и мотивированных на решение ставящихся перед ними задач. Для описания процесса движения персонала (как и в [1, 2]) используем два понятия:

- «функциональных домов» (ФД) – групп специалистов, обладающих идентичными функциональными возможностями для решения бизнес-задач;
- жизненного цикла сотрудника, понимая под ним весь интервал времени с момента, когда сотрудник принял предложение о работе в фирме, до момента его увольнения из фирмы.

Проиллюстрируем значимость исследуемого в работе фактора – характеристик ЖЦС – на примере стационарного бизнеса для случая единственного ФД. Стационарность бизнеса будем понимать как постоянство характеристик процессов продаж и движения персонала, т.е. считаем среднюю потребность в персонале, интенсивность увольнений сотрудников и, соответственно, приёма постоянными. Единственность ФД предполагает однородность предмета бизнеса (продукта или сервиса) и, соответственно, однородность основного персонала. Запишем выражение для экономического эффекта V, получаемого за один интервал времени, сразу используя соотношение (5) из [1], полученное с учётом следующих ключевых предположений (сами предположения и адекватность их применения подробно обсуждены в [1]):

- стационарности условий бизнеса;
- статистической эквивалентности[1] и независимости поведения сотрудников друг от друга и на различных интервалах времени.

$$V = n_{\text{пред}} \pi \sum_{\theta=0}^{\infty} \left(S(\theta) \varphi_{\theta} \right) - n_{\text{пред}} S_{\text{пред}} - n_{\text{пред}} \pi S_{\text{найм}} + V^{*},$$

где

$n_{\text{пред}}$ – среднее количество предложений о работе кандидатам на приём актуальных в течение одного интервала времени;

π – вероятность того, что кандидат примет предложение в течение одного интервала времени;

φ_{θ} – доля сотрудников, отработавших фирме ровно θ интервалов времени с момента приёма на работу до увольнения;

$S(\theta)$ – средний экономический эффект за всё время работы сотрудника, отработавшего в фирме θ интервалов времени, равный его экономическому результату за минусом издержек на его содержание – компенсационного пакета, налогов и социальных выплат, затрат на обучение и др.;

$S_{\text{пред}}$ – средние затраты на подготовку одного предложения о работе, включая поиск кандидатов;

$S_{\text{зам}}$ – средние затраты на замещение уволившегося сотрудника включая транзакционные издержки на оформление, начальную адаптацию и другие[2];

V^{*} – часть экономического эффекта компании, не зависящая непосредственно от персонала (например, затраты на сырье, электроэнергию и т.д.).

Будем считать время работы сотрудника в фирме (от момента приёма до увольнения) случайной величиной, принимающей целочисленные неотрицательные значения. Набор

---

[1] *Статистическая эквивалентность сотрудников здесь и далее понимается в смысле возможности описания их поведения одинаково распределёнными случайными величинами.*

[2] *В состав этих затрат также имеет смысл включать стоимость временного привлечения человеческих ресурсов на период поиска постоянных. Например, за счёт организации сверхурочных работ штатных сотрудников.*

$\{\varphi_0; \varphi_1; \varphi_2; \varphi_3; \ldots\}$ является распределением[1] вероятностей времени работы сотрудника в фирме.

Очевидно, что $n_{\text{пред}}\pi$ будет равно среднему числу принимаемых на работу в течение каждого интервала новых сотрудников. А оно, в свою очередь, равно среднему числу увольняющихся в предположении стационарности процессов. $t_{\text{ср}} = \sum_{\theta=0}^{\infty} \theta\varphi_\theta$ – среднее время работы сотрудника в фирме, $n_{\text{пред}}\pi t_{\text{ср}} = n_{\text{пред}}\pi \sum_{\theta=0}^{\infty} \theta\varphi_\theta$ – среднее число работающих сотрудников, а $\sum_{\theta=0}^{\infty} \left(S(\theta)\varphi_\theta \right)$ – средний эффект от сотрудника за весь период работы в фирме (усреднённый по длительности срока работы в фирме).

Важно заметить, что менеджмент фирмы, если он действует рационально, обеспечивает значение численности сотрудников как можно более близким к уровню, необходимому для выполнения всего объёма деятельности соответственно объёму продаж [1, 2]. Поэтому среднее число работающих сотрудников определяется потребностью со стороны продаж:

(1) $n_{\text{пред}}\pi t_{\text{ср}} = D$,

где D – средний объем продаж за интервал времени, отнесённый к средней результативности одного сотрудника, т.е. объем продаж за интервал времени, выраженный в количестве сотрудников, необходимых для его реализации, или средняя численность ФД, необходимая для реализации бизнеса данного объема.

Экономический эффект $S(\cdot)$ от сотрудника за всё время работы в фирме, за весь жизненный цикл, складывается из эффектов на каждом из интервалов $S(\theta) = \sum_{\tau=1}^{\theta} s(\tau)$ и в общем случае может быть представлен следующим образом. Жизненный цикл

---

[1] *В силу естественной ограниченности срока человеческой жизни, случайная величина «время работы сотрудника в фирме» будет иметь конечные моменты любого порядка.*

сотрудника логично разделить на три фазы: а) адаптации, б) продуктивной работы и в) предшествующей увольнению. Причём также логично предполагать, что экономический эффект сотрудника на фазах а) и в) ниже, чем на фазе продуктивной работы:

$$s(\tau)=\begin{cases} s_{\text{прд}}-\Delta s_{\text{ад}} & \text{при } 0\le\tau\le t_{\text{ад}},\\ s_{\text{прд}} & \text{при } t_{\text{ад}}<\tau\le\theta-t_{\text{пр.ув}},\\ s_{\text{прд}}-\Delta s_{\text{ув}} & \text{при } max\left\{t_{\text{ад}};\theta-t_{\text{пр.ув}}\right\}<\tau\le\theta. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь

$s_{\text{прд}}$ – средний экономический эффект на продуктивной фазе;

$\Delta s_{\text{ад}}$ – среднее снижение эффекта на фазе адаптации;

$t_{\text{ад}}$ – длительность фазы адаптации;

$\Delta s_{\text{ув}}$ – среднее снижение эффекта на фазе, предшествующей увольнению;

$t_{\text{пр.ув}}$ – продолжительность фазы, предшествующей увольнению.

Подставив (1) и (2) в выражение для экономического эффекта, получим (соответствующие выкладки приведены в приложении П1):

$$V=Ds_{\text{прд}}-D\left(\Delta s_{\text{ад}}\frac{t^*_{\text{ад}}}{t_{\text{ср}}}+\Delta s_{\text{ув}}\frac{t^*_{\text{пр.ув}}}{t_{\text{ср}}}+S_{\text{зам}}\frac{1}{t_{\text{ср}}}+\frac{S_{\text{пред}}}{\pi}\frac{1}{t_{\text{ср}}}\right)+V^*, \tag{3}$$

где $t^*_{\text{ад}}=\sum_{\theta=0}^{t_{\text{ад}}}\theta\varphi_\theta+t_{\text{ад}}\sum_{\theta=t_{\text{ад}}+1}^{\infty}\varphi_\theta$ и $t^*_{\text{пр.ув}}=\sum_{\theta=t_{\text{ад}}+1}^{t_{\text{ад}}+t_{\text{пр.ув}}}\theta\varphi_\theta+t_{\text{пр.ув}}\sum_{\theta=t_{\text{ад}}+t_{\text{пр.ув}}+1}^{\infty}\varphi_\theta$.

Проанализируем с помощью (3), как характеристики деятельности сотрудников влияют на экономический эффект фирмы V.

Третий элемент выражения (3) V^* не зависит от персонала и в дальнейшем рассматриваться не будет.

Первый элемент выражения (3) $Ds_{\text{прд}}$ пропорционален объему продаж – требуемому количеству рабочих мест, замещённых сотрудниками, D, и среднему экономическому эффекту $s_{\text{прд}}$ от сотрудника в течение одного интервала времени на продуктивной фазе. Требуемое количество рабочих мест D является внешним по отношению к деятельности сотрудников и потому не зависит от характеристик их деятельности. Средний экономический эффект $s_{\text{прд}}$ зависит от результативности сотрудников, однако в рамках принятой концепции ФД как групп специалистов, обладающих идентичными функциональными возможностями, $s_{\text{прд}}$ имеет смысл также считать постоянным в рамках данной модели.

Второй элемент выражения (3) пропорционален D и сумме четырёх слагаемых, рассмотрим их.

Величины снижения эффекта $\Delta s_{\text{ад}}$ и $\Delta s_{\text{ув}}$ в силу сделанного выше замечания об идентичности сотрудников также будем считать постоянными. Издержки на приём каждого сотрудника $S_{\text{найм}}$ и подготовку одного предложения о работе $S_{\text{пред}}$ не зависят от деятельности сотрудников. Фактически все эти параметры являются априорными нормативными характеристиками функциональных домов, которые в свою очередь определяются потребностями и характеристиками бизнеса.

Таким образом, в рамках принятой концепции ФД экономический эффект V зависит от вероятности π и временных характеристик жизненного цикла сотрудников (ЖЦС) $t^*_{\text{ад}}$, $t^*_{\text{пр.ув}}$ и $t_{\text{ср}}$, зависящих от $t_{\text{ад}}$, $t_{\text{пр.ув}}$, и распределения $\left\{\varphi_\theta; \theta=0, 1, ..., \infty; \sum_{\theta=0}^{\infty}\varphi_\theta \equiv 1\right\}$.

Будем обозначать зависимость экономического эффекта от характеристик ЖЦС как $V(\pi, \{\varphi_\theta\}, t_{\text{ад}}, t_{\text{пр.ув}})$. В приложении П2 выполнен анализ функции $V(\pi, \{\varphi_\theta\}, t_{\text{ад}}, t_{\text{пр.ув}})$ от своих аргументов. Проинтерпретируем полученные свойства с точки зрения бизнеса.

Во-первых, $\frac{\partial}{\partial\pi}V\left(\pi,\left\{\varphi_\theta\right\},t_{\text{ад}},t_{\text{пр.ув}}\right)>0$. Причём при уменьшении π экономический эффект становится отрицательным, начиная с некоторых π. А при стремлении π к нулю V может неограниченно уменьшаться, будучи отрицательным $\lim_{\pi\to 0}\left\{V\left(\pi,\left\{\varphi_\theta\right\},t_{\text{ад}},t_{\text{пр.ув}}\right)\right\}=-\infty$. Содержательно это означает, что низкая эффективность процедур поиска и найма новых сотрудников (низкая доля кандидатов, принимающих предложение по сравнению с рассматриваемыми и приглашаемыми) – малые значения π – негативно сказывается на экономическом эффекте бизнеса V. Хотя, конечно же, неограниченное – неконтролируемое – уменьшение экономического эффекта, в том числе из-за неэффективного найма, является скорее исключением из правил.

Во-вторых, $\frac{\partial}{\partial t_{\text{ад}}} V\left(\pi, \{\varphi_\theta\}, t_{\text{ад}}, t_{\text{пр.ув}}\right) < 0$ и $\frac{\partial}{\partial t_{\text{пр.ув}}} V\left(\pi, \{\varphi_\theta\}, t_{\text{ад}}, t_{\text{пр.ув}}\right) < 0$. С точки зрения бизнеса монотонное убывание экономического эффекта при росте продолжительности интервала адаптации и/или фазы снижения производительности, предшествующей увольнению, является интуитивно очевидным, так как это «вынужденные» фазы ЖЦС, основной эффект от сотрудника фирма получает не в течение них.

Вид распределения вероятностей времени работы сотрудников в фирме $\{\varphi_\theta\}$ влияет на экономический эффект более сложным образом, для исследования этого влияния использованы «малые изменения» $\delta\varphi_\theta(x, i)$. В приложении П2 показано, что влияние на экономический эффект «малых изменений» $\delta\varphi_\theta(x, i)$ в области $0 \le i < t_{\text{ад}} + t_{\text{пр.ув}}$ проявляется неоднозначно. При длительности работы менее $t_{\text{ад}} + t_{\text{пр.ув}}$ сотрудник не «успевает» достичь продуктивной фазы и, следовательно, произвести требуемый фирме эффект. Наличие таких сотрудников свидетельствует о неэффективных процессах и найма, и адаптации, и удержания. То есть сотрудников, увольняющихся ранее $t_{\text{ад}} + t_{\text{пр.ув}}$ интервалов должно быть как можно меньше, «в идеале» – ни одного. Поэтому детальный анализ экономики жизненного цикла таких сотрудников не имеет смысла – достаточно оценивать их долю и стремиться уменьшить эту долю.

Однако для «малых изменений» в области времени работы больше $t_{\text{ад}} + t_{\text{пр.ув}}$ справедливо $\frac{\partial}{\partial t_{\text{ср}}} V\left(\pi, \{\varphi_\theta\}, t_{\text{ад}}, t_{\text{пр.ув}}\right) > 0$ (вообще говоря, независимо от вида распределения вероятностей времени работы в фирме $\{\varphi_\theta\}$), что также соответствует логике бизнеса: увеличение среднего времени работы в этом случае увеличивает относительную продолжительность продуктивной фазы по отношению к общей продолжительности ЖЦС.

Выполненный анализ выражения (3) для экономического эффекта легко расширяется на случай нескольких функциональных домов, а также на случай известного нестационарного процесса $D(t)$ изменения потребности в персонале, необходимом для реализации всех продаж.

Таким образом, на основании выполненного анализа можно сформулировать ***утверждение 1*** «О зависимости экономического эффекта фирмы от характеристик жизненного цикла сотрудников в рамках концепции функциональных домов»:

Экономический эффект фирмы (независимо от вида распределения вероятностей времени работы сотрудников фирмы до увольнения по собственному желанию) монотонно возрастает при:

- увеличении вероятности того, что кандидат принимает предложение о приёме на работу;
- уменьшении длительность фазы адаптации и длительности фазы, предшествующей увольнению;
- увеличении среднего времени работы в фирме (за счет изменения вероятностей увольнения позднее суммарной длительности фазы адаптации и фазы, предшествующей увольнению).

Сформулированное утверждение 1 иллюстрирует важность оперативного контроля характеристик ЖЦС для обеспечения эффективного функционирования фирмы, то есть актуальность задачи моделирования и контроля характеристик ЖЦС, поставленной во введении.

3. *Модель процесса увольнения и непараметрические методы его анализа*

Рассмотрим более детально процесс увольнений сотрудников из функционального дома с точки зрения отвечающего за него менеджера.

ФД рассматривается как пул эквивалентных и статистически независимых сотрудников, численность которых необходимо поддерживать на требуемом (в общем случае меняющимся со временем) уровне. То есть в случае увольнения сотрудника по собственному желанию его место восполняется в течение того же интервала времени, в котором он уволился[1], что в целом пренебрежимо мало сказывается на значении численности. Адекватной метафорой в данном случае является следующая: ФД состоит из одинаковых функциональных ролей, каждая из которых постоянно заполнена сотрудниками, поведение которых статистически эквивалентно и независимо друг от друга. Тогда события увольнений сотрудников на каждой из ролей образуют независимые процессы, заключающиеся в том, что если предыдущее увольнение (и восполнение) произошло на t_d-м интервале времени, то следующее увольнение произойдёт на t-м интервале с вероятностью φ_{t-t_d}. Так как менеджер ФД знает, в какой момент t_d произошло предыдущее увольнение на каждой из функциональных ролей, можно, используя распределение $\{\varphi_\theta\}$, определять вероятность следующего увольнения на t-м интервале как $\varphi_{t-t_d}\left(\sum_{\theta=t-t_d}^{\infty}\varphi_\theta\right)^{-1}$ (если между интервалами t_d и t увольнений на данной роли не было).

Использование вычисленных таким образом вероятностей[2] для всех ролей ФД удобно для получения и аналитического исследования различных зависимостей. Однако их использование затрудняется тем, что распределение вероятностей $\{\varphi_\theta\}$ времени работы сотрудника априори не известно и основывается не на

---

[1] *Такая модель замещения увольняющихся корректна, например, при: а) неограниченно большом пуле кандидатов; б) возможности фирмы формировать также неограниченно большое количество предложений о приёме на работе; в) после чего отбирать требуемое количество новых сотрудников.*

[2] *Вычисленные таким образом вероятности отвечают случаю невозможности более одного увольнения на каждой роли в течение одного интервала времени, то есть* $\varphi_0 = 0$. *Если это не так, значения вероятностей одного и более увольнений будут другими, что, однако, никак не сказывается на всех остальных результатах работы и выводах.*

объективных фундаментальных закономерностях, а на активном выборе субъектов-сотрудников. То есть распределение $\{\varphi_\theta\}$ (или его характеристики) необходимо оценивать на основании наблюдений. Кроме того, есть основания считать, что бизнес-условия отличаются определённой изменчивостью: можно говорить о существовании сменяющих друг друга периодов стационарности с характерной продолжительностью в нескольких лет, что принципиально ограничивает доступные интервалы наблюдений и объемы получаемых данных.

Поэтому рассмотрим методики оценивания характеристик процесса увольнения и использования оценок для анализа экономического эффекта фирмы. Распределение вероятностей $\{\varphi_\theta\}$ наиболее полно характеризует процесс увольнений, поэтому рассмотрим возможность непосредственно оценивания его значений.

Известно, что в общем случае выборочная функция распределения случайной величины сходится почти наверное к теоретической функции распределения (если её четвёртый момент конечен), а также является её асимптотически нормальной оценкой со скоростью убывания величины доверительного интервала обратно пропорционально квадратному корню объёма выборки (теоремы Гливенко–Кантелли и Колмогорова, см. например, §13 главы III в [9]).

Однако для оценивания распределения вероятностей времени работы в фирме целесообразно использовать процедуру, предложенную в классической работе [20] для анализа «выживаемости» на основе цензурированных данных, широко применяемую и известную сейчас как «процедура Каплана–Мейера» [7]. Процедура [7, 20] позволяет получить оценку «функции выживания», равной вероятности того, что увольнение сотрудника произойдёт позже t интервалов времени с момента прихода в фирму ($\Phi(t) = \sum_{\theta=t+1}^{\infty} \varphi_\theta$).

В приложении П3 проанализированы свойства процедуры «Каплана–Мейера» и зависимость от t и N (количества сотрудников, работающих и работавших в ФД) относительного доверительного интервала оценки функции выживания в сравнении с относительным доверительным интервалом оценки интенсивности $\lambda(t)$. Показано, что оба интервала имеют характер зависимости от t и N вида $(N\varphi_t)^{-1/2}$, т.е. заметно растут по t – длительности срока работы сотрудников – даже при значительных объёмах выборки N (потому что на практике φ_t существенно убывает с ростом t). Например, для геометрического распределения времени работы $\varphi_t = \varphi(1-\varphi)^{t-1}$ зависимость относительных доверительных интервалов от t и N будут иметь характер $O\left(N^{-1/2}(1-\varphi)^{-t/2}\right)$ для обеих рассматриваемых оценок – и для функции выживания, и для интенсивности.

Из этого следует, что оценить распределение вероятностей $\{\varphi_\theta\}$ с приемлемой точностью для больших θ времён работы сотрудников в ФД в принципе невозможно: отмеченная выше изменчивость бизнес-условий не позволит «накопить» настолько большие N (количества сотрудников, работающих и работавших в ФД) которые обеспечили бы приемлемо малые значения $(N\varphi_t)^{-1/2}$. Данный тезис иллюстрируется графиками оценок интенсивностей увольнения сотрудников двух российских фирм («фирма А» и «фирма Б») из различных индустрий (рис. 1 и 2).

На обоих графиках вертикальная ось соответствует интенсивности увольнений в течение одного интервала времени, интервалы времени отложены по горизонтальной оси. Штриховой линией показаны оценки интенсивности, более тонкими сплошными линиями – верхняя и нижняя границы доверительных интервалов, принятых в иллюстративных целях равными плюс-минус три среднеквадратичных отклонения.

На рис. 1 «фирма А», интервал времени соответствует 1 неделе, а численность сотрудников рассматриваемого ФД имеет порядок 50–70 тыс. человек.

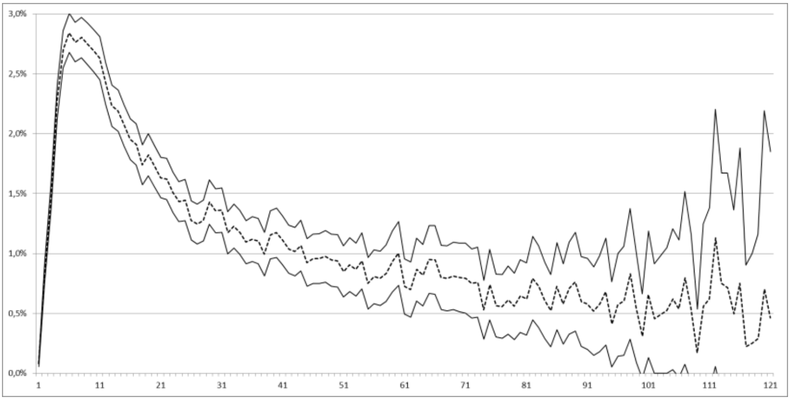

Рис. 1. Оценка интенсивности увольнений и её доверительный интервал для «фирмы А»

Количество увольняющихся на начальных интервалах имеет порядок несколько тысяч человек в течение одного интервала, спадает до сотен и далее до десятков человек. Это позволяет получить относительно точную оценку для первых 20–30 интервалов. Начиная со значений стажа 90–100 интервалов количество увольнений в выборке уменьшается до десяти-двадцати, что приводит к тому, что доверительный интервал становится вдвое больше самого значения оценки. Такую оценку вряд ли можно считать достоверной.

Во втором случае («фирма Б») интервал времени соответствует одному месяцу, численность сотрудников имеет порядок 8–10 тыс. человек. В результате существенно меньшее количество увольняющихся в течение одного интервала времени значительно ухудшает точность оценки даже для малых значений стажа.

Это означает, что даже для фирм с численностью однородных сотрудников в несколько десятков тысяч человек возможности точного оценивания распределение вероятностей времени работы сотрудников являются ограниченными: относительно достоверно могут быть оценены интенсивности увольнений только для малых значений стажа сотрудников, когда доля таких сотрудников относительно велика, а для больших значений стажа оценки становятся мало достоверными.

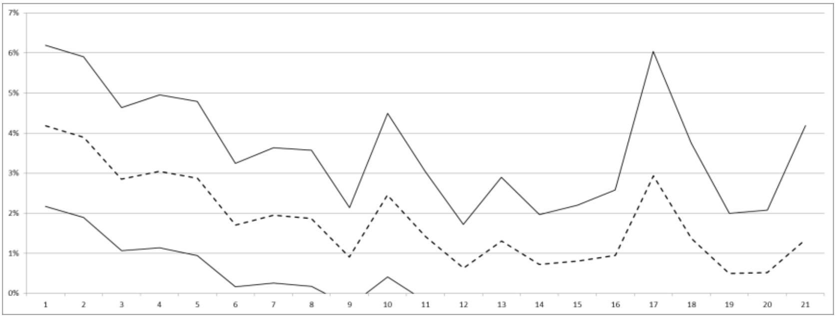

Рис. 2. Оценка интенсивности увольнений и её доверительный интервал для «фирмы Б»

Практическое следствие этого заключается в том, что непосредственно распределение вероятностей (или функция интенсивности) увольнений сотрудников может использоваться для анализа и принятия управленческих решений только для относительно малых длительностей стажа работы сотрудников. Но в разделе 2 выше было показано, что количество сотрудников, увольняющихся при малых значениях стажа, должно быть как можно меньше, в идеальном случае их вообще не должно быть. Поэтому достоверное оценивание и детальный анализ распределение вероятностей для малых значениях стажа может использоваться для анализа именно этой группы сотрудников и принятия управленческих решений с целью уменьшения их доли. В частности уместно использование для этого регрессионных методик Кокса [15] для анализа факторов, влияющих на «ранние» увольнения.

Во всех иных случаях целесообразно использовать другие статистические инструменты, рассмотрим их в следующем разделе.

4. Последовательная задача выявления изменения характеристик жизненного цикла сотрудников

Конечной целью деятельности практического менеджера, отвечающего за ФД, является обеспечение его экономической эффективности на определённом промежутке времени. Данная задача была решена в постановке поиска равновесных оптимальных решений [1] и для стационарных условий [2]. Для обеспечения этих решений необходимо контролировать нарушение стационарности процессов ЖЦС сотрудников; рассмотрим эту задачу в последовательной постановке. Выше было отмечено, что бизнес-условия на длительном периоде не могут считаться стационарными: для бизнес-среды свойственны периодические смены ключевых факторов – переходы от одного периода стационарности к другому. Поэтому, безусловно, важной с практической точки зрения является задача как можно более оперативного и в то же время достоверного выявления таких переходов.

Рассмотрим задачу оптимального обнаружения момента изменения («разладки») характеристик жизненного цикла сотрудников (вероятности π и распределения вероятностей $\{\varphi_\theta\}$) в рамках моделей, представленных в разделах 1 и 2. Считаем, что до разладки характеристики ЖЦС имели одни постоянные значения, а после – другие, также постоянные. Характеристики ЖЦС ни до, ни после разладки априори неизвестны, а их значения должны быть оценены на основании наблюдений за процессами ζ_t^1 – приема новых сотрудников и ζ_t^2 – увольнения сотрудников по собственному желанию. Сохраним предположение о статистической эквивалентности и независимости поведения сотрудников друг от друга и на различных интервалах времени. Априори имеются наблюдения в течение предварительного промежутка времени, про который известно, что весь он относится к единому периоду стационарности условий бизнеса. На основании накопленных в течение предварительного промежутка наблюдений характеристики ЖЦС должны быть оценены, а начиная с текущего момента необходимо на основании оперативных наблюдений последовательно принимать решение о наличии или отсутствии разладки.

Учитывая вывод, сделанный в заключении раздела 3, о невозможности достоверной идентификации распределение вероятностей $\{\varphi_\theta\}$, процесс увольнений ζ_t^2 будем рассматривать не детально, по каждому сотруднику, а агрегировано – по всему функциональному дому в целом. В качестве характеристик ЖЦС будем использовать интенсивность потока увольнений в целом $\lambda(t)$, идентифицировать стационарные значения интенсивности и выявлять их изменения. Очевидно, при таком подходе – преднамеренном «загрублении модели» – теряется некоторая информация, которая теоретически могла бы быть учтена, если бы распределение вероятностей $\{\varphi_\theta\}$, было достоверно известно, однако на практике эта потеря неизбежна.

Наблюдаемые процессы определяют изменения фактической численности N_t (также наблюдаемой) ФД во времени (некоторые свойства N_t приведены в приложении П4):

(4) $N_{t+1} = N_t + \zeta_t^1 - \zeta_t^2$,

где ζ_t^1 – последовательность независимых случайных величин, распределённых биномиально с параметрами $n_{\text{пред}}(t)$ и $\pi(t)$ и отражающих процесс найма сотрудников; ζ_t^2 – последовательность независимых случайных величин с пуассоновским распределением с параметром $\Lambda_t = \lambda(t)N_t$, отражающих процесс увольнений.

Тогда формально задача выявления разладки может быть поставлена следующим образом: ненаблюдаемый двумерный процесс $x(t) = (\pi(t); \lambda(t))^{\mathrm{T}}$ изменяет свои значения в априори неизвестные моменты времени, сохраняя значения постоянными между моментами изменений. Необходимо обнаруживать момент изменения значений процесса $x(t)$ на основании последовательных наблюдений процесса $\zeta_t = \left(\zeta_t^1; \zeta_t^2\right)^{\mathrm{T}}$, связанного с $x(t)$ закономерностями, описываемыми соотношениями (4). Начальное значение процесса $x(t)$ должно быть идентифицировано на основании ζ_t в течение предварительного периода наблюдений длительностью $T_{\text{апр}}$ (условно в моменты времени $-T_{\text{апр}}$; $-T_{\text{апр}} + 1$; $-T_{\text{апр}} + 2$; …; 0)

Для решения будем использовать оценки максимального правдоподобия.

Введём обозначения:

$$\zeta^1_{[u,v]} = \sum_{\tau=u}^{v} \zeta^1_\tau; \quad \zeta^2_{[u,v]} = \sum_{\tau=u}^{v} \zeta^2_\tau; \quad n_{\text{пред}[u,v]} = \sum_{\tau=u}^{v} n_{\text{пред}}(\tau); \quad N_{[u,v]} = \sum_{\tau=u}^{v} N_\tau .$$

Оценка $\left(\hat{\pi}_0;\hat{\lambda}_0\right)^{\text{T}}$ начального значения процесса $x(t)$ с учётом (4) имеет следующий вид и характеристики:

$$\hat{\pi}_0 = \left(n_{\text{пред}\left[-T_{\text{апр}};0\right]}\right)^{-1} \zeta^1_{\left[-T_{\text{апр}};0\right]},\ E\left[\hat{\pi}_0\right] = \pi_0,$$

$$var\left[\hat{\pi}_0\right] = \pi_0\left(1-\pi_0\right)\left(n_{\text{пред}\left[-T_{\text{апр}};0\right]}\right)^{-1},\ \hat{\lambda}_0 = \left(N_{\left[-T_{\text{апр}};0\right]}\right)^{-1} \zeta^2_{\left[-T_{\text{апр}};0\right]},$$

$$E\left[\hat{\lambda}_0\right] = \lambda_0,\ var\left[\hat{\lambda}_0\right] = \lambda_0\left(N_{\left[-T_{\text{апр}};0\right]}\right)^{-1},\ cov\left[\hat{\pi}_0;\hat{\lambda}_0\right] = 0.$$

Имеет смысл отметить, что в практически интересных случаях величины $n_{\text{пред}\left[-T_{\text{апр}};0\right]}$; $\zeta^1_{\left[-T_{\text{апр}};0\right]}$; $N_{\left[-T_{\text{апр}};0\right]}$ и $\zeta^2_{\left[-T_{\text{апр}};0\right]}$ имеют порядок нескольких сотен, поэтому распределения обеих величин $\zeta^1_{\left[-T_{\text{апр}};0\right]}$ и $\zeta^2_{\left[-T_{\text{апр}};0\right]}$ хорошо аппроксимируются нормальными, а оценка $\left(\hat{\pi}_0;\hat{\lambda}_0\right)^{\text{T}}$ является несмещённой и состоятельной.

Решение о выявлении разладки в каждый момент времени t фактически заключается в проверке семейства гипотез $\mathbf{H}_\tau$ о том, что разладка произошла в момент времени $t - \tau$ $(\tau \geq 1)$ против гипотезы $\mathbf{H}_0$, что разладки не было.

Тогда последовательный критерий выявления разладки на основе относительного правдоподобия может быть построен в следующем виде:

$$(5)\quad \begin{cases} H_0:\ \max\limits_{\theta}\left\{ln\left(\Pr\left(\left(\zeta^1_{[-T_{\text{апр}};t]};\zeta^2_{[-T_{\text{апр}};t]}\right);t;\theta\right)\right)\right\}\le \text{C};\\ H_\tau:\ \max\limits_{\theta}\left\{ln\left(\Pr\left(\left(\zeta^1_{[-T_{\text{апр}};t]};\zeta^2_{[-T_{\text{апр}};t]}\right);t;\theta\right)\right)\right\}> \text{C};\end{cases}$$

$$\tau=arg\left\{\max\limits_{\theta}\left\{ln\left(\Pr\left(\left(\zeta^1_{[-T_{\text{апр}};t]};\zeta^2_{[-T_{\text{апр}};t]}\right);t;\theta\right)\right)\right\}\right\};$$

где $ln\left(\Pr\left(\left(\zeta^1_{[-T_{\text{апр}};t]};\zeta^2_{[-T_{\text{апр}};t]}\right);t;\theta\right)\right)$ – логарифмическая функция относительного правдоподобия (л.ф.о.п.) вычисленная в момент времени t на основании наблюдений на интервале $[-T_{\text{апр}}; t]$ для пары гипотез: а) что разладка произошла в момент времени t - θ, и б) разладка до текущего момента не произошла. Л.ф.о.п. может быть записана также в виде суммы $ln\left(\Pr(\cdot)\right)=\sum\limits_{\omega=t-\theta}^{t}\Delta l(\omega)$, где $\Delta l(\omega)$ – частные л.ф.о.п. на каждом интервале времени ω.

Используя функции $\Delta l(\omega)$, образуем критерий, эквивалентный (5), но имеющий иной вид, традиционно используемый в задачах о разладке (см. например, [6, 10, 11, 13, 21]):

$$(6)\quad \begin{cases} L(t)=max\{0;\, L(t-1)+\Delta l(t)\};\quad L(0)=0;\\ H_0\!: L(t)\le \text{C};\\ H_\tau\!: L(t)>\text{C};\qquad \tau=arg\left\{\min\limits_{\theta}\left\{L(t-\theta)=0\right\}\right\}.\end{cases}$$

Исследование характеристик последовательных критериев (ошибок первого и второго рода в последовательной интерпретации) всегда является трудной задачей, что отмечается всеми исследователями, начиная с основополагающей работы Вальда [4]. К текущему моменту накоплено значительное количество результатов в области последовательного анализа и предложены различные методики, имеющие практическое значение, например, в работах [6, 10, 11, 13, 21]. В частности, в [6] разбирается проблематика получения аналитических выражений характеристик критериев, аналогичных (6), и отмечается невозможность получения для них точных аналитических выражений. Вместе с тем, в [6] предлагаются (стр. 67, (4.2.14–16)) граничные оценки для среднего времени между ложными выявлениями разладки и среднего времени от момента наступления разладки до момента её выявления. Упомянутые граничные оценки основываются на значениях первых и вторых моментов приращений решающих функций $\Delta l(t)$ до и после разладки, когда $\Delta l(t)$ являются независимыми нормально распределёнными случайными величинами.

При отсутствии разладки средние значения процесса $\Delta l(t)$ отрицательны, а после наступления разладки – положительны, соответственно, до разладки процесс $L(t)$ образует супермартингал, а после – субмартингал. В этих условиях для границ каждой из характеристик критерия $T_{\text{лт}}$ – среднего времени между ложными выявлениями разладки и $T_{\text{в.р.}}$ – среднего времени от момента наступления разладки до момента её выявления могут быть получены аналитические выражения.

Введём (используя выражения (4.2.14–16) из [6], стр. 67) функцию $a(m, h)$, зависящую от нормированного среднего значения m и порога критерия h, имеющую вид

$$a(m, h) = \frac{1}{2m^2}\left(e^{-2mh} - 1 + 2mh\right) + \frac{\varphi(m)}{m\Phi(m)} + 1, \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

и $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(\chi) d\chi$.

Функция $a(m, h)$ позволяет получить следующие граничные значения характеристик каждого из критериев, подставляя моменты процесса $\Delta l(t)$:

$$T_{\text{лт}} > a\left(\frac{E\left[\Delta l(t) \middle| H_0\right]}{\sqrt{var\left[\Delta l(t) \middle| H_0\right]}}; \frac{C}{\sqrt{var\left[\Delta l(t) \middle| H_0\right]}}\right)$$

(7)

$$T_{\text{в.р.}} < a\left(\frac{E\left[\Delta l(t) \middle| H_\tau\right]}{\sqrt{var\left[\Delta l(t) \middle| H_\tau\right]}}; \frac{C}{\sqrt{var\left[\Delta l(t) \middle| H_\tau\right]}}\right)$$

Выражения (7) позволяют получить оценки характеристик критериев и выбрать параметры критерия – порог принятия решения C и уровень γ ожидаемого изменения характеристик ЖЦС.

Следует заметить, что решение задачи происходит в условиях, когда значения изменений процесса $x(t)$ априори неизвестны. Практически значимым является выявление увеличения интенсивности увольнений $\hat{\lambda}_0 \to \hat{\lambda}_0 + \Delta\lambda$ и снижение вероятности принятия предложений $\hat{\pi}_0 \to \hat{\pi}_0 - \Delta\pi$. При этом не всегда имеются априорные основания, рассматривать одновременные изменений обеих компонентов $\Delta\pi$ и $\Delta\lambda$, в общем случае следует считать, что они могут меняться независимо. Поэтому рассмотрим несколько сценариев изменения характеристик ЖЦС – в одном или нескольких функциональных домах, независимое или одновременное изменение $\hat{\lambda}_0 \to \hat{\lambda}_0 + \Delta\lambda$ и $\hat{\pi}_0 \to \hat{\pi}_0 - \Delta\pi$, соответственно, несколько вариантов построений приращений решающей функции $\Delta l(t)$.

<u>Сценарий 1.</u> Выявление независимых изменений характеристик ЖЦС $\hat{\lambda}_0 \to \hat{\lambda}_0 + \Delta\lambda$ и $\hat{\pi}_0 \to \hat{\pi}_0 - \Delta\pi$ одного функционального дома, причём детектировать относительно существенные изменения не менее чем, скажем, на γ = 10%. В этом случае задача естественным образом распадается на две параллельные задачи – выявления изменения $\left\{\hat{\pi}_0 \to (1-\gamma)\hat{\pi}_0;\ \gamma \geq 0{,}1\right\}$ на основании наблюдений за $\zeta^1_{[-T_{\text{апр}};t]}$ и $\left\{\hat{\lambda}_0 \to (1+\gamma)\hat{\lambda}_0;\ \gamma \geq 0{,}1\right\}$ – на основании $\zeta^2_{[-T_{\text{апр}};t]}$. Тогда вместо критерия (6) используются два параллельных и независимых, имеющих вид (6), но отличающихся значениями порогов C_1 и C_2, а также видом функций частных л.ф.о.п.:

$$\Delta l^1(t) = \zeta^1_t \, ln(1-\gamma) + \left(n_{\text{пред},t} - \zeta^1_t\right) ln\left(1 + \frac{\gamma\hat{\pi}_0}{1-\hat{\pi}_0}\right);$$

$$\Delta l^2(t) = \zeta^2_t \, ln(1+\gamma) - N_t \hat{\lambda}_0 \gamma.$$

Каждый из процессов $\Delta l^1(t)$, $\Delta l^2(t)$ образует последовательность независимых случайных величин, распределение которых адекватно аппроксимируется нормальным с параметрами:

$$E\left[\Delta l^1(t)\right]=E\left[\zeta_t^1\right]ln\left(\frac{(1-\gamma)(1-\hat{\pi}_0)}{1-\hat{\pi}_0+\gamma\hat{\pi}_0}\right)+n_{\text{пред},t}\,ln\left(\frac{1-\hat{\pi}_0+\gamma\hat{\pi}_0}{1-\hat{\pi}_0}\right);$$

$$var\left[\Delta l^1(t)\right]=\left(ln\left(\frac{(1-\hat{\pi}_0)(1-\gamma)}{1-\hat{\pi}_0+\gamma\hat{\pi}_0}\right)\right)^2 var\left[\zeta_t^1\right];$$

$$E\left[\Delta l^2(t)\right]=E\left[\zeta_t^2\right]ln(1+\gamma)-N_t\hat{\lambda}_0\gamma;$$

$$var\left[\Delta^2 l(t)\right]=\left(ln(1+\gamma)\right)^2 var\left[\zeta_t^2\right].$$

Сценарий 2. Выявление одновременных изменений характеристик ЖЦС $\hat{\lambda}_0\to\hat{\lambda}_0+\Delta\lambda$ и $\hat{\pi}_0\to\hat{\pi}_0-\Delta\pi$ одного функционального дома также на $\gamma = 10\%$. Если есть веские основания полагать, что изменения $\Delta\pi$ и $\Delta\lambda$ произойдут одновременно $\left\{\hat{\lambda}_0\to(1+\gamma)\hat{\lambda}_0;\ \hat{\pi}_0\to(1-\gamma)\hat{\pi}_0;\ \gamma\ge 0{,}1\right\}$, то решение принимается на основании единственного критерия, в котором функция частных л.ф.о.п. имеет вид:

$$\Delta l(t)=\Delta l^1(t)+\Delta^2 l(t)=$$

$$=\zeta_t^1\,ln(1-\gamma)+\left(n_{\text{пред},t}-\zeta_t^1\right)ln\left(1+\frac{\gamma\hat{\pi}_0}{1-\hat{\pi}_0}\right)+\zeta_t^2\,ln(1+\gamma)-N_t\hat{\lambda}_0\gamma,$$

где первые два слагаемые детектируют уменьшение вероятности $\hat{\pi}_0\to\hat{\pi}_0-\Delta\pi$, а вторые два – увеличение интенсивности $\hat{\lambda}_0\to\hat{\lambda}_0+\Delta\lambda$.

Процесс $\Delta l(t)$ образует последовательность независимых случайных величин, распределение которых адекватно аппроксимируется нормальным с параметрами:

$$E\left[\Delta l(t)\right]=E\left[\Delta l^1(t)\right]+E\left[\Delta l^2(t)\right];$$

$$var\left[\Delta l(t)\right]=var\left[\Delta l^1(t)\right]+var\left[\Delta l^2(t)\right].$$

Сценарий 3. Практически интересными является случай, когда фирма состоит из существенного числа независимых ФД, причём есть бизнес-основания считать, что в нормальном состоянии характеристики ЖЦС всех ФД идентичны. А разладкой считается появление аномалий в поведении сотрудников отдельных ФД независимо по $\hat{\lambda}_0 \to \hat{\lambda}_0 + \Delta\lambda$ и $\hat{\pi}_0 \to \hat{\pi}_0 - \Delta\pi$, в то время как в нормальном состоянии такое поведение стационарно по времени и идентично для всех ФД. То есть для каждого i-го ($i = 1, 2, \ldots, I$) функционального дома необходимо проверять семейство гипотез $\mathbf{H}_\tau$ о том, что начиная с момента времени $t - \tau$ ($\tau \geq 1$) характеристики ЖЦС данного ФД стали отличаться от характеристик ЖЦС всех остальных ФД против гипотезы $\mathbf{H}_0$, что характеристики ЖЦС данного ФД равны характеристикам ЖЦС всех остальных ФД. В этом случае для всех ФД целесообразно сформировать частные л.ф.о.п. $\Delta l_i^{1,2}(t)$ на каждом интервале времени и применять критерий вида (6). Рассмотрим вид частных л.ф.о.п. $\Delta l_i^1(t)$ и $\Delta l_i^2(t)$ в этом случае, аналогично сценарию 1.

$$\Delta l_i^1(t) = \zeta_{i,t}^1 \, ln(1-\gamma) + \left(n_{пред,i,t} - \zeta_{i,t}^1\right) ln\left(1 + \frac{\gamma \hat{\pi}_{0,i}}{1-\hat{\pi}_{0,i}}\right);$$

$$\Delta l_i^2(t) = \zeta_{i,t}^2 \, ln(1+\gamma) - N_{i,t}\hat{\lambda}_{0,i}\gamma;$$

где

$$\hat{\pi}_{0,i} = \left(\sum_{j\neq i} n_{\text{пред},j,\left[-T_{\text{апр}};0\right]}\right)^{-1} \sum_{j\neq i} \zeta^1_{j,\left[-T_{\text{апр}};0\right]}; \; E\left[\hat{\pi}_{0,i}\right] = \pi_0;$$

$$var\left[\hat{\pi}_{0,i}\right] = \pi_0\left(1-\pi_0\right)\left(n_{\text{пред},i,\left[-T_{\text{апр}};0\right]}\right)^{-1};$$

$$\hat{\lambda}_{0,i} = \left(\sum_{j\neq i} N_{j,\left[-T_{\text{апр}};0\right]}\right)^{-1} \sum_{j\neq i} \zeta^2_{j,\left[-T_{\text{апр}};0\right]}; \quad E\left[\hat{\lambda}_{0,i}\right] = \lambda_0;$$

$$var\left[\hat{\lambda}_{0,i}\right] = \lambda_0\left(N_{i,\left[-T_{\text{апр}};0\right]}\right)^{-1}; \; cov\left[\hat{\pi}_0;\hat{\lambda}_0\right] = 0.$$

Выражения для моментов $\Delta l_i^1(t)$ и $\Delta l_i^2(t)$ также аналогичны выражениям, приведённым для сценария 1.

<u>Сценарий 4.</u> Множество независимых ФД и одновременное изменение $\hat{\lambda}_0 \to \hat{\lambda}_0 + \Delta\lambda$ и $\hat{\pi}_0 \to \hat{\pi}_0 - \Delta\pi$. Для этого случая частные л.ф.о.п. равны $\Delta l_i(t) = \Delta l_i^1(t) + \Delta l_i^2(t)$, а их моменты аналогичны сценарию 2.

$$\Delta l(t) = \Delta l^1(t) + \Delta^2 l(t) =$$

$$= \zeta_t^1 \, ln(1-\gamma) + \left(n_{\text{пред},t} - \zeta_t^1\right) ln\left(1 + \frac{\gamma \hat{\pi}_0}{1-\hat{\pi}_0}\right) + \zeta_t^2 \, ln(1+\gamma) - N_t \hat{\lambda}_0 \gamma.$$

Покажем теперь, что для каждого из сценариев решающие функции до разладки образуют супермартингалы, а после неё – субмартингалы.

Если условия в действительности отвечают условиям гипотезы $\mathbf{H_0}$, то есть $x(u) = \left(\hat{\pi}_0; \hat{\lambda}_0\right)^{\text{T}}$ при всех $-T_{\text{апр}} \le u \le t$ тогда моменты процессов $\Delta l_1(t)$ и $\Delta l_2(t)$ принимают значения ($\Delta l_i^1(t)$ и $\Delta l_i^2(t)$ – аналогично):

$$E\left[\Delta l^1(u) \middle| H_0\right] = \left(ln(1-\gamma)\hat{\pi}_0 + ln\left(1 + \frac{\gamma\hat{\pi}_0}{1-\hat{\pi}_0}\right)(1-\hat{\pi}_0) \right) n_{\text{пред},u};$$

$$var\left[\Delta l^1(u) \middle| H_0\right] = \left(ln\left(\frac{(1-\gamma)(1-\hat{\pi}_0)}{1-\hat{\pi}_0 + \gamma\hat{\pi}_0} \right) \right)^2 \hat{\pi}_0 (1-\hat{\pi}_0) n_{\text{пред},u};$$

$$E\left[\Delta l^2(u) \middle| H_0\right] = \left(ln(1+\gamma) - \gamma \right) N_u \hat{\lambda}_0;$$

$$var\left[\Delta l^2(u) \middle| H_0\right] = \left(ln(1+\gamma) \right)^2 N_u \hat{\lambda}_0.$$

И среднее значение любого из процессов $\Delta l^1(t)$, $\Delta l^2(t)$, $\Delta l(t)$ отрицательно при любых γ, $\hat{\pi}_0$ и $\hat{\lambda}_0$ (см. приложение П5), а каждая и решающих функций $L^1(t)$, $L^2(t)$, $L(t)$ образует супермартингал ($\Delta l_i^1(t)$, $\Delta l_i^2(t)$ и $\Delta l_i(t)$ – аналогично).

Если условия отвечают условиям гипотезы $\mathbf{H_\tau}$ $x(u) = \left(\hat{\pi}_0; \hat{\lambda}_0\right)^{\text{T}}$ при $-T_{\text{апр}} \le u \le t - \tau$ и $x(u) = \left(\pi_p; \lambda_p\right)^{\text{T}}$ при $t - \tau \le u \le t$, причём $\pi_p \le (1-\gamma)\,\hat{\pi}_0$ и $\lambda_p \ge (1+\gamma)\,\hat{\lambda}_0$, тогда моменты процессов $\Delta l^1(t)$, $\Delta l^2(t)$ принимают значения ($\Delta l_i^1(t)$ и $\Delta l_i^2(t)$ – аналогично):

$$E\left[\Delta l^1(u)\middle|H_\tau\right] = \left(\hat{\pi}_0(1-\gamma)ln(1-\gamma) + \left(1-\hat{\pi}_0(1-\gamma)\right)ln\left(1+\frac{\gamma\hat{\pi}_0}{1-\hat{\pi}_0}\right)\right)n_{\text{пред},u};$$

$$var\left[\Delta l^1(u)\middle|H_\tau\right] = \left(ln\left(1-\frac{\gamma}{1-\hat{\pi}_0+\gamma\hat{\pi}_0}\right)\right)^2 \hat{\pi}_0(1-\gamma)\left(1-\hat{\pi}_0(1-\gamma)\right)n_{\text{пред},u};$$

$$E\left[\Delta l^2(u)\middle|H_\tau\right] = \left((1+\gamma)ln(1+\gamma)-\gamma\right)N_u\hat{\lambda}_0;$$

$$var\left[\Delta l^2(u)\middle|H_\tau\right] = (1+\gamma)\left(ln(1+\gamma)\right)^2 N_u\hat{\lambda}_0.$$

В этом случае все средние значения $\Delta l^1(t)$, $\Delta l^2(t)$, $\Delta l(t)$ положительны при любых γ, $\hat{\pi}_0$ и $\hat{\lambda}_0$ и монотонно возрастают по γ (см. приложение П5), а решающие функции $L^1(t)$, $L^2(t)$, $L(t)$ образует субмартингал ($\Delta l_i^1(t)$, $\Delta l_i^2(t)$ и $\Delta l_i(t)$ – аналогично).

5. Примеры практического применения разработанных процедур

Проиллюстрируем применение предложенных методик на практических примерах «фирмы А» и «фирмы Б», которые были кратко описаны в разделе 2 при обсуждении достоверности оценивания распределения вероятностей $\{\varphi_\theta\}$.

Пример 1, «фирма А».

Для «фирмы А», как видно из иллюстративного рис. 1, характерна существенная доля сотрудников, увольняющихся в течение первых 6 недель после приёма на работу. На рис. 3 представлена гистограмма распределения времени работы сотрудников до увольнения. Устойчивое увольнение в течение таких малых сроков работы в фирме свидетельствует о явных проблемах в процедурах найма и адаптации сотрудников. Это означает, что, начав работать в фирме, сотрудник обнаруживает, что условия его не устраивают, или это является результатом неудачной адаптации на рабочем месте, в частности, линейный менеджер выясняет, что сотрудник не соответствует требуемому профилю. Экономическая модель (1)–(3) позволяет оценить, какие потери несёт «фирма А» из-за проблем в процедурах найма и адаптации. На основании оценок все сотрудники разбиты на группы по стажу работы (на момент увольнения), в таблице 1 представлены доли сотрудников и среднее время работы внутри групп. В столбце «фактическое» показано среднее время работы в неделях, полученное в результате оценок по фактическим данным. В столбцах «возможное» проставлены ожидаемые менеджментом экспертные оценки возможного среднего времени после улучшения процедур найма и адаптации. Соотношения (1)–(3) позволяют получить в таком случае численные финансовые оценки влияния улучшения бизнес-процессов на финансовый результат фирмы. В случае «фирмы А» изменение среднего времени для рассматриваемой группы с 3,9 недель до 7 приводит к повышению среднего эффекта от одного сотрудника на 0,7%, а с 3,9 до 12,8 недель – на 2%. При численности сотрудников порядка нескольких десятков тысяч эти незначительные относительные изменения влекут за собой существенные суммарные эффекты. И, что очень важно, эти эффекты достигаются за счёт улучшения вспомогательных бизнес-процессов, т.е. не требуют затрат в области основных процессов, которые всегда велики.

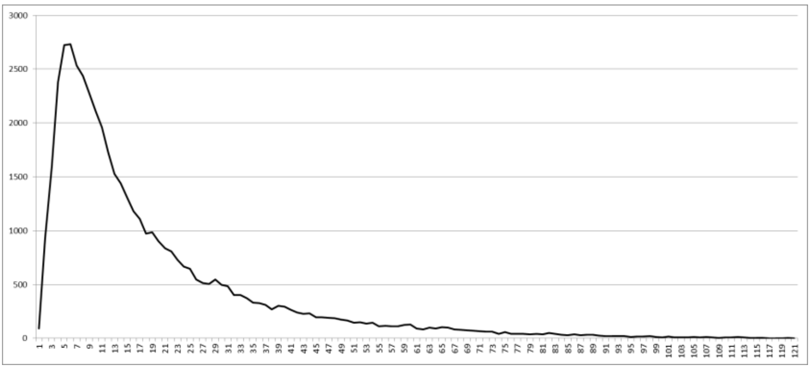

Рис. 3. Гистограмма распределения времени работы сотрудников до увольнения (среди уже уволившихся) «фирмы А»

Таблица 1. Распределения времени работы сотрудников до увольнения

Группы: (недели)	Доля	Среднее время работы (недели)		
		Факт	Возможное 1	Возможное 2
0–6	27%	3,9	7,0	12,8
7–22	46%	12,8	12,8	12,8
23 и более	26%	41,6	41,6	41,6
Всего:	100%	18,5	19,3	20,9

Пример 2, «фирма Б».

Для «фирмы Б» не свойственно большое количество увольнений на ранних стадиях, для неё актуальной является задача оперативного контроля характеристик ЖЦС, чтобы управленческими решениями устранять угрозы потери эффективности при возникновении системных изменений интенсивности увольнений λ и вероятности принятия предложений новыми сотрудниками π.

Особенностью «фирмы Б» является наличие большого количества функциональных домов – более тысячи, по которым необходимо оперативно контролировать характеристики ЖЦС. То есть группа менеджеров, отвечающая за бизнес «фирмы Б» в целом, должна на каждом интервале времени оперативно сопоставлять более тысячи кортежей:

- численность N_t;
- количество уволившихся ζ_t^2;
- количество актуальных предложений $n_{\text{пред}}(t)$;
- количество принятых предложений ζ_t^1.

Поставленная задача решается с помощью предложенной в разделе 3 методики, применяемой параллельно ко всем ФД в варианте сценария 3.

Результаты выявления служат основанием для более детального анализа ситуации в функциональных домах, по которым сформировано решение об обнаружении разладки. Для наглядности результаты отображаются не только в численной, но также и в графической форме (рис.4).

На рис. 4 представлен пример результатов выявления в виде трёхмерной поверхности. По вертикали отложено относительное правдоподобие наличия разладки против его отсутствия, одна из горизонтальных осей соответствует функциональным домам, а другая – текущему времени. Пики на трёхмерной поверхности показываю значительное превышение правдоподобия разладки над её отсутствием и служат индикаторами для менеджмента для детального рассмотрения ситуации в соответствующих функциональных домах.

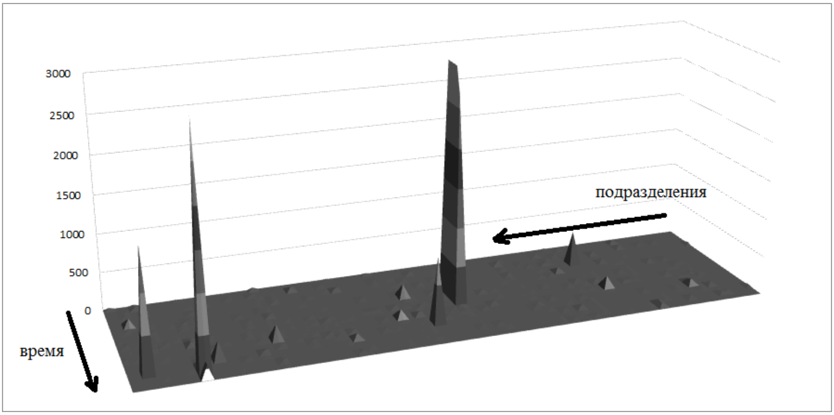

Рис. 4. Пример отображения результатов выявления изменений характеристик ЖЦС на множестве функциональных домов «фирмы Б»

6. Заключение

В первом разделе рассмотрена актуальность задачи оценивания и анализа таких характеристик жизненного цикла сотрудников, как распределение вероятностей $\{\varphi_\theta\}$ времени работы до увольнения и вероятность π принятия предложений о работе в ходе найма.

Во втором разделе проанализирована зависимость экономической эффективности бизнеса от характеристик жизненного цикла сотрудников. Показано наличие существенного влияния рассматриваемых характеристик ЖЦС на эффективность бизнеса, отражённое в утверждении 1.

Третий раздел посвящён более детальному рассмотрению процесса увольнения сотрудников по собственному желанию. Показана невозможность оценивания распределения $\{\varphi_\theta\}$ с высокой достоверностью и предложено использовать агрегированный параметр интенсивности увольнений λ вместо распределения $\{\varphi_\theta\}$. Поэтому на практике следует использовать агрегированные характеристики ЖЦ сотрудников, не рассчитывая на детальные модели, а также использовать «экспертные» модели, сочетать параметры, значения которых известно из отчётности фирм, с оцениваемыми и задаваемыми экспертно.

В четвёртом разделе предложены процедуры последовательного выявления моментов изменения (разладки) характеристик ЖЦС π, λ для четырёх сценариев таких изменений, а также на основании известных результатов получены граничные значения характеристик последовательных критериев обнаружения разладки.

В пятом разделе приведены примеры практического применения разработанных процедур.

Приложения

П.1. ПОЛУЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА РАЗДЕЛА 2

$$s(\tau)=\begin{cases} s_{\text{прд}}-\Delta s_{\text{ад}} & \text{при } 0\le\tau\le t_{\text{ад}}, \\ s_{\text{прд}} & \text{при } t_{\text{ад}}<\tau\le\theta-t_{\text{пр.ув}}, \\ s_{\text{прд}}-\Delta s_{\text{ув}} & \text{при } max\left\{t_{\text{ад}};\theta-t_{\text{пр.ув}}\right\}<\tau\le\theta. \end{cases}$$

$$S(\theta)=s_{\text{прд}}\theta-\begin{cases} \Delta s_{\text{ад}}\theta & \text{при } 0\le\theta\le t_{\text{ад}}, \\ \Delta s_{\text{ад}}t_{\text{ад}}+\Delta s_{\text{ув}}\left(\theta-t_{\text{ад}}\right) & \text{при } t_{\text{ад}}<\theta\le t_{\text{ад}}+t_{\text{пр.ув}}, \\ \Delta s_{\text{ад}}t_{\text{ад}}+\Delta s_{\text{ув}}\ t_{\text{пр.ув}} & \text{при } t_{\text{ад}}+t_{\text{пр.ув}}<\theta. \end{cases}$$

$$\sum_{\theta=0}^{\infty}\left(S(\theta)\varphi(\theta)\right)=s_{\text{прд}}\sum_{\theta=0}^{\infty}\left(\theta\varphi(\theta)\right)-\Delta s_{\text{ад}}\sum_{\theta=0}^{t_{\text{ад}}}\left(\theta\varphi(\theta)\right)-\Delta s_{\text{ад}}t_{\text{ад}}\sum_{\theta=t_{\text{ад}}+1}^{\infty}\varphi(\theta)-$$

$$-\Delta s_{\text{ув}}\sum_{\theta=t_{\text{ад}}+1}^{t_{\text{ад}}+t_{\text{пр.ув}}}\left(\theta\varphi(\theta)\right)-\Delta s_{\text{ув}}t_{\text{пр.ув}}\sum_{\theta=t_{\text{ад}}+t_{\text{пр.ув}}+1}^{\infty}\varphi(\theta).$$

Обозначим $t^*_{\text{ад}}=\sum_{\theta=0}^{t_{\text{ад}}}\left(\theta\varphi(\theta)\right)+t_{\text{ад}}\sum_{\theta=t_{\text{ад}}+1}^{\infty}\varphi(\theta)$ и

$$t^*_{\text{пр.ув}}=\sum_{\theta=t_{\text{ад}}+1}^{t_{\text{ад}}+t_{\text{пр.ув}}}\left(\theta\varphi(\theta)\right)+t_{\text{пр.ув}}\sum_{\theta=t_{\text{ад}}+t_{\text{пр.ув}}+1}^{\infty}\varphi(\theta).$$

Заметим, что $t^*_{\text{ад}}<t_{\text{ад}}$; $t^*_{\text{ад}}<t_{\text{ср}}$; $t^*_{\text{пр.ув}}<t_{\text{пр.ув}}$; $t^*_{\text{пр.ув}}<t_{\text{ср}}$.

П.2. АНАЛИЗ ЗАВИСИМОСТИ ФУНКЦИИ $V\left(\pi,\{\varphi_\theta\},t_{\text{ад}},t_{\text{пр.ув}}\right)$ ОТ АРГУМЕНТОВ

Проанализируем зависимость функции $V\left(\pi,\{\varphi_\theta\},t_{\text{ад}},t_{\text{пр.ув}}\right)$ от всех своих аргументов.

$$V\left(\pi,\{\varphi_\theta\},t_{ад},t_{пр.ув}\right)=Ds_{прд}-D\left(\Delta s_{ад}\frac{t^*_{ад}}{t_{ср}}+\Delta s_{ув}\frac{t^*_{пр.ув}}{t_{ср}}+S_{зам}\frac{1}{t_{ср}}+\frac{S_{пред}}{\pi}\frac{1}{t_{ср}}\right)+V^*,$$

где $t^*_{\text{ад}}=\sum_{\theta=0}^{t_{\text{ад}}}\theta\varphi_\theta+t_{\text{ад}}\sum_{\theta=t_{\text{ад}}+1}^{\infty}\varphi_\theta$; $t^*_{\text{пр.ув}}=\sum_{\theta=t_{\text{ад}}+1}^{t_{\text{ад}}+t_{\text{пр.ув}}}\theta\varphi_\theta+t_{\text{пр.ув}}\sum_{\theta=t_{\text{ад}}+t_{\text{пр.ув}}+1}^{\infty}\varphi_\theta$ и

$$t_{\text{ср}}=\sum_{\theta=0}^{\infty}\theta\varphi_\theta.$$

Во-первых, вероятность π влияет на значение функции $V(\cdot)$, только входя в элемент $-D\frac{S_{\text{пред}}}{t_{\text{ср}}}\frac{1}{\pi}$. Поэтому очевидно, что функция $V(\cdot)$ монотонно возрастает по π, т.е. $\frac{\partial}{\partial\pi}V\left(\pi,\{\varphi_\theta\},t_{\text{ад}},t_{\text{пр.ув}}\right)>0$. Напротив, при уменьшении π становится отрицательным, начиная с некоторых малых π, и при стремлении π к нулю может неограниченно уменьшаться, будучи отрицательным $\lim_{\pi\to0}\left\{V\left(\pi,\{\varphi_\theta\},t_{\text{ад}},t_{\text{пр.ув}}\right)\right\}=-\infty$.

Во-вторых, длительность периода адаптации $t_{\text{ад}}$ влияет на функцию $V(\cdot)$только через элемент $-D\Delta s_{\text{ад}}\dfrac{t^*_{\text{ад}}}{t_{\text{ср}}}$. Причём $t_{\text{ср}}$ не зависит от $t_{\text{ад}}$, а из $t^*_{\text{ад}} = \sum_{\theta=0}^{t_{\text{ад}}} \theta\varphi_\theta + t_{\text{ад}} \sum_{\theta=t_{\text{ад}}+1}^{\infty} \varphi_\theta$ непосредственно следует, что $t^*_{\text{ад}}$ монотонно растёт с ростом $t_{\text{ад}}$. Поэтому $\dfrac{\partial}{\partial t_{\text{ад}}} V\left(\pi, \{\varphi_\theta\}, t_{\text{ад}}, t_{\text{пр.ув}}\right) < 0$. Аналогичные соображения также справедливы и для продолжительности фазы, предшествующей увольнению, следовательно $\dfrac{\partial}{\partial t_{\text{пр.ув}}} V\left(\pi, \{\varphi_\theta\}, t_{\text{ад}}, t_{\text{пр.ув}}\right) < 0$. С точки зрения бизнеса монотонное убывание функции $V(\cdot)$при росте продолжительности интервала адаптации и/или фазы снижения производительности, предшествующей увольнения является интуитивно очевидным.

Вид распределения вероятностей времени работы сотрудников в фирме $\{\varphi_\theta\}$ влияет на функцию $V(\cdot)$ более сложным образом. Изучим это влияние, для чего используем «изменения» функции $\{\varphi_\theta\}$ следующего вида:

$$\delta\varphi_\theta(x,i) = x\varepsilon_\theta(i);\ \text{где } \varepsilon_\theta(i) = \begin{cases} 1 & \text{при } \theta = i \\ -1 & \text{при } \theta = i+1 \\ 0 & \text{при } \theta < i \text{ или } \theta > i+1 \end{cases}$$

Несложно показать, что разность между любыми распределениями вероятностей $\{\varphi_\theta\}$ и $\{\tilde{\varphi}_\theta\}$ может быть представлена в виде суммы счётного числа «изменений» $\delta\varphi_\theta(x,i)$.

Рассмотрим влияние «малых изменений» $\delta\varphi_\theta(x,i)$ ($x \to 0$) при различных i на функцию $V(\cdot)$, т.е. оценим $\dfrac{\partial}{\partial x} V\left(\pi, \{\varphi_\theta + \delta\varphi_\theta(x,i)\}, t_{\text{ад}}, t_{\text{пр.ув}}\right)$.

Из (3) следует: $\dfrac{\partial}{\partial x} V\left(\pi, \{\varphi_\theta + \delta\varphi_\theta(x,i)\}, t_{\text{ад}}, t_{\text{пр.ув}}\right) =$

$$= -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta s_{\text{ад}}\frac{t_{\text{ад}}^{*}}{t_{\text{ср}}} + \Delta s_{ув}\frac{t_{\text{пр.ув}}^{*}}{t_{\text{ср}}} + S_{зам}\frac{1}{t_{\text{ср}}} + \frac{S_{\text{пред}}}{\pi}\frac{1}{t_{\text{ср}}} \right) =$$

$$= -D\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{t_{\text{ад}}^{*}}{t_{\text{ср}}} + b\frac{t_{\text{пр.ув}}^{*}}{t_{\text{ср}}} + c\frac{1}{t_{\text{ср}}} \right),$$

где $a = \Delta s_{\text{ад}}$, $b = \Delta s_{\text{ув}}$ и $c = S_{\text{зам}} + S_{\text{пред}} / \pi^{+}$ не зависят от x.

Также из выражений для $t_{\text{ср}}$, $t_{\text{ад}}^{*}$ и $t_{\text{пр.ув}}^{*}$ следует:

$$t_{\text{ср}}\left(\left\{\varphi_\theta + \delta\varphi_\theta(x,i)\right\}\right) = \sum_{\theta=0}^{\infty}\theta\varphi_\theta + xi - x(i+1) = t_{\text{ср}}\left(\left\{\varphi_\theta\right\}\right) - x$$ для всех i.

$$t_{\text{ад}}^{*}\left(\left\{\varphi_\theta + \delta\varphi_\theta(x,i)\right\}\right) = \begin{cases} t_{\text{ад}}^{*}\left(\left\{\varphi_\theta\right\}\right) - x & \text{для } 0 < i < t_{\text{ад}} \\ t_{\text{ад}}^{*}\left(\left\{\varphi_\theta\right\}\right) & \text{для } t_{\text{ад}} \le i \end{cases}$$

$$t_{\text{пр.ув}}^{*}\left(\left\{\varphi_\theta + \delta\varphi_\theta(x,i)\right\}\right) = \begin{cases} t_{\text{ад}}x & \text{для } i = t_{\text{ад}} \\ t_{\text{пр.ув}}^{*}\left(\left\{\varphi_\theta\right\}\right) - x & \text{для } t_{ад} < i < t_{\text{ад}} + t_{\text{пр.ув}} \\ t_{\text{пр.ув}}^{*}\left(\left\{\varphi_\theta\right\}\right) & \text{для } t_{\text{ад}} + t_{\text{пр.ув}} \le i \text{ или } i < t_{\text{ад}} \end{cases}$$

Откуда видно, что при $i < t_{\text{ад}} + t_{\text{пр.ув}}$ знак производной $\frac{\partial}{\partial x}V\left(\pi,\left\{\varphi_\theta + \delta\varphi_\theta(x,i)\right\},t_{\text{ад}},t_{\text{пр.ув}}\right)$ может быть различным в зависимости от соотношений a, b, и c, то есть влияние «малых изменений» $\delta\varphi_\theta(x,i)$ на функцию $V(\cdot)$ в области $0 \le i < t_{\text{ад}} + t_{\text{пр.ув}}$ проявляется неоднозначно.

Однако при $t_{\text{ад}} + t_{\text{пр.ув}} \le i$ справедливо

$$\frac{\partial}{\partial x}V\left(\pi,\left\{\varphi_\theta + \delta\varphi_\theta(x,i)\right\},t_{\text{ад}},t_{\text{пр.ув}}\right) = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{t_{\text{ад}}^{*}}{t_{\text{ср}}} + b\frac{t_{\text{пр.ув}}^{*}}{t_{\text{ср}}} + c\frac{1}{t_{\text{ср}}} \right) =$$

$$= D\frac{\left(at_{\text{ад}}^{*} + bt_{\text{пр.ув}}^{*} + c\right)}{t_{\text{ср}}^{\;2}}\frac{\partial t_{\text{ср}}}{\partial x}$$

Откуда

$$\frac{\partial\!\big/\!\partial x\, V\left(\pi,\left\{\varphi_\theta+\delta\varphi_\theta\left(x,i\right)\right\},t_{\text{ад}},t_{\text{пр.ув}}\right)}{\partial t_{\text{ср}}\!\big/\!\partial x}=\frac{\partial V\left(\pi,\left\{\varphi_\theta\right\},t_{\text{ад}},t_{\text{пр.ув}}\right)}{\partial t_{\text{ср}}}=$$

$$=D\frac{\left(at^*_{\text{ад}}+bt^*_{\text{пр.ув}}+c\right)}{t_{\text{ср}}{}^2}>0$$

П3. СВОЙСТВА ОЦЕНОК ФУНКЦИИ ВЫЖИВАНИЯ И ПРОЦЕДУРЫ «МЕЙЕРА-КАПЛАНА»

Процедура [7, 20] позволяет получить оценку «функции выживания», равной вероятности того, что увольнение сотрудника произойдёт позже t интервалов времени с момента прихода в фирму ($\Phi(t)=\sum\limits_{\theta=t+1}^{\infty}\varphi_\theta$).

Процедура заключается в следующем:

На временной оси своими границами задаются интервалы $(0, u_1)$; (u_1, u_2); …; (u_{j-1}, u_j); …; (u_{J-1}, u_J).

На основании наблюдений формируется выборка $\{n_1; n_2; \ldots; n_j; \ldots; n_J\}$, где n_j – количество сотрудников, проработавших в фирме время, не меньшее u_{j-1}. Обозначим N – общее число сотрудников, работавших и работающих в фирме. Среди n_j будут и сотрудники продолжающие работать в фирме, стаж которых на момент наблюдений не меньше u_{j-1}, и уже уволившиеся, но стаж которых на момент увольнения был не меньше u_{j-1}. Аналогично формируется выборка $\{n_1; n_2; \ldots; n_j; \ldots; n_J\}$, где m_j – количество сотрудников, у которых стаж работы на момент увольнения принадлежал интервалу (u_{j-1}, u_j). Тогда оценка «функции выживания» будет иметь вид $\hat{\Phi}(t)=\prod\limits_{j=1}^{k}\left(1-{m_j}\!\big/\!{n_j}\right)$, где $k=\max\limits_{u_j\le t}\left\{u_j\right\}$. Данная оценка является состоятельной и несмещённой, с дисперсией $var\left[\hat{\Phi}(t)\right]=\Phi^2(t)\sum\limits_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{n_j-m_j}-\frac{1}{n_j}\right)$ [20], т.е. относительный доверительный интервал оценки $\hat{\Phi}(t)$ равен $\sqrt{\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{n_j - m_j} - \frac{1}{n_j}\right)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{m_j}{n_j\left(n_j - m_j\right)}\right)}$.

Так как средние выборочных значений $E\left[n_k\right] = N\Phi\left(t-1\right) = N\sum_{\theta=t}^{\infty}\varphi_\theta$ и $E\left[m_k\right] = N\varphi_t$, то характер зависимости относительного доверительного интервала оценки $\hat{\Phi}(t)$ может быть аппроксимирован

$$\hat{\Phi}(t) \sim \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{t}\left(\frac{\varphi_j}{\sum_{\theta=j}^{\infty}\varphi_\theta \sum_{\theta=j+1}^{\infty}\varphi_\theta}\right)} \sim \left(N\varphi_t\right)^{-1/2}.$$

«Функция выживания» связана с интенсивностью соотношением:

$$\lambda(t) = \varphi_t\left(\sum_{\theta=t}^{\infty}\varphi_\theta\right)^{-1} = \varphi_t\Phi\left(t-1\right)^{-1} = 1 - \Phi\left(t\right)\Phi\left(t-1\right)^{-1}.$$

Поэтому выражение для оценки интенсивности $\lambda(t)$, которое может быть получено с помощью процедуры Каплана-Мейера, совпадает с «прямой» оценкой интенсивности $\hat{\lambda}(t) = 1 - \hat{\Phi}(t)\hat{\Phi}(t-1)^{-1} =$

$$= 1 - \prod_{j=1}^{k}\left(1 - {}^{m_j}\!\!/_{n_j}\right)\left(\prod_{j=1}^{k-1}\left(1 - {}^{m_j}\!\!/_{n_j}\right)\right)^{-1} = {}^{m_k}\!/_{n_k}.$$

Оценка интенсивности $\lambda(t) = {}^{m_k}\!/_{n_k}$ также является несмещённой и состоятельной с дисперсией $var\left[\lambda(t)\right] = \lambda(t)\left(1 - \lambda(t)\right)n_k$. Соответственно, относительный доверительный интервал аппроксимируется $\left(1 - \lambda(t)\right)^{1/2}\left(\lambda(t)n_k\right)^{-1/2} \approx \left(\lambda(t)n_k\right)^{-1/2} \sim \left(N\varphi_t\right)^{-1/2}$.

П4. СВОЙСТВА ПРОЦЕССА N_T ИЗ РАЗДЕЛА 4

Приведём некоторые свойства процесса N_t (5).

Среднее значение численности будет изменяться как $E\left[N_{t+1}\right]=\left(1-\lambda\left(t\right)\right)E\left[N_t\right]+\pi\left(t\right)n_{\text{пред}}\left(t\right)$,

или

$$E\left[N_{t+T}\right]=E\left[N_t\right]\prod_{\omega=1}^{T}\left(1-\lambda\left(t+\omega\right)\right)+\sum_{\tau=1}^{T}\pi\left(t+\tau\right)n_{\text{пред}}\left(t+\tau\right)\prod_{\omega=\tau}^{T}\left(1-\lambda\left(t+\omega\right)\right).$$

Для стационарного случая, когда $\lambda(t) = \lambda = const$; $n_{\text{пред}}\left(t\right)=n_{\text{пред}}=const$ и $\pi\left(t\right)=\pi=const$, имеем $E\left[N_{t+T}\right]=N_{\text{ст}}+\left(1-\lambda\right)^T\left(E\left[N_t\right]-N_{\text{ст}}\right)$ и $\lim\limits_{T\to\infty}E\left[N_{t+T}\right]=N_{\text{ст}}$, где $N_{\text{ст}}=\pi n_{\text{пред}}\lambda^{-1}$ – стационарное значение численности.

П5. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ К РАЗДЕЛУ 4

Покажем, что если условия бизнеса в действительности отвечают условиям гипотезы $\mathbf{H_0}$, то средние значения $\Delta l^1(t)$, $\Delta l^2(t)$, $\Delta l(t)$ отрицательны при любых γ, $\hat{\pi}_0$ и $\hat{\lambda}_0$:

Рассмотрим $E\left[\Delta l^1\left(u\right)\middle|H_0\right]=ln\left(1-\gamma\right)\hat{\pi}_0+ln\left(1+\dfrac{\gamma\hat{\pi}_0}{1-\hat{\pi}_0}\right)\left(1-\hat{\pi}_0\right)$.

Обозначим $F\left(\hat{\pi}_0;\gamma\right)=ln\left(1-\gamma\right)\hat{\pi}_0+ln\left(1+\dfrac{\gamma\hat{\pi}_0}{1-\hat{\pi}_0}\right)\left(1-\hat{\pi}_0\right)$ и исследуем поведение функции $F(x; y)$

Во-первых, $F(0; y) = 0$. Вычислим производную по x.

$$\frac{\partial}{\partial x}F\left(x;y\right)=ln\left(1-y\right)-ln\left(1+\frac{xy}{1-x}\right)+\left(1-x\right)\frac{\partial}{\partial x}ln\left(1+\frac{xy}{1-x}\right)=$$

$$=ln\left(1-y\right)-ln\left(1+\frac{xy}{1-x}\right)+\left(1-x\right)\left[\frac{\partial}{\partial x}ln\left(1-x+xy\right)-\frac{\partial}{\partial x}ln\left(1-x\right)\right]=$$

$$=ln\left(1-y\right)-ln\left(\frac{1-x+xy}{1-x}\right)+\left(1-x\right)\left[-\frac{1-y}{1-x+xy}+\frac{1}{1-x}\right]=$$

$$=ln\left(1-y\right)-ln\left(\frac{1-x+xy}{1-x}\right)+1-\frac{\left(1-x\right)\left(1-y\right)}{1-x+xy}=$$

$$=ln\left(1-y\right)-ln\left(\frac{1-x+xy}{1-x}\right)+\frac{1-x+xy-1+x+y-xy}{1-x+xy}=$$

$$= ln\left(1-y\right) - ln\left(\frac{1-x+xy}{1-x}\right) + \frac{y}{1-x+xy} =$$

$$= ln\left(\frac{\left(1-y\right)\left(1-x\right)}{1-x+xy}\right) + \frac{y}{1-x+xy} = ln\left(1-\frac{y}{1-x+xy}\right) + \frac{y}{1-x+xy} < 0$$

То есть $F(x; y)$ монотонно убывает по x при любых y. Также найдём предел $F(x; y)$ при $x \to 1$:

$$\lim_{x\to1}\left\{ln\left(1-y\right)x + ln\left(1+\frac{yx}{1-x}\right)\left(1-x\right)\right\} = ln\left(1-y\right) + \lim_{x\to1}\left\{ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(1-x\right)\right\} =$$

$$= ln\left(1-y\right) + \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{ln\left(x\right)}{x}\right\} = ln\left(1-y\right) < 0$$

Таким образом, $E\left[\Delta l^1\left(u\right)\middle|H_0\right]$ всегда отрицательно.

Рассмотрим $E\left[\Delta l^2\left(u\right)\middle|H_0\right] = N_u\hat{\lambda}_0\left(ln\left(1+\gamma\right)-\gamma\right)$: для любых $\gamma > 0$ справедливо $\gamma > ln(1 + \gamma)$, поэтому $E\left[\Delta l^2\left(u\right)\middle|H_0\right]$ второе слагаемое также всегда отрицательно.

Так как $E\left[\Delta l^1\left(u\right)\middle|H_0\right] < 0$ и $E\left[\Delta l^2\left(u\right)\middle|H_0\right] < 0$, тогда и $E\left[\Delta l\left(u\right)\middle|H_0\right] < 0$.

Если условия бизнеса отвечают условиям гипотезы $\mathbf{H_\tau}$ – $x\left(u\right) = \left(\hat{\pi}_0;\hat{\lambda}_0\right)^{\mathrm{T}}$ при $-T_{\text{апр}} \le u \le t-\tau$ и $x\left(u\right) = \left(\pi_p;\lambda_p\right)^{\mathrm{T}}$ при $t-\tau \le u \le t$, причём $\pi_p \le (1-\gamma)\,\hat{\pi}_0$ и $\lambda_p \ge (1+\gamma)\,\hat{\lambda}_0$, тогда

$$E\left[\Delta l^1\left(u\right)\middle|H_\tau\right] = \left(\hat{\pi}_0\left(1-\gamma\right)ln\left(1-\gamma\right) + \left(1-\hat{\pi}_0\left(1-\gamma\right)\right)ln\left(1+\frac{\gamma\hat{\pi}_0}{1-\hat{\pi}_0}\right)\right)n_{преди};$$

$$E\left[\Delta l^2\left(u\right)\middle|H_\tau\right] = \left(\left(1+\gamma\right)ln\left(1+\gamma\right)-\gamma\right)N_u\hat{\lambda}_0;$$

Рассмотрим первое среднее значение $E\left[\Delta l^1\left(u\right)\middle|H_\tau\right]$.

Обозначим

$$G\left(\hat{\pi}_0;\gamma\right)=\hat{\pi}_0\left(1-\gamma\right)ln\left(1-\gamma\right)+\left(1-\hat{\pi}_0\left(1-\gamma\right)\right)ln\left(1+\frac{\gamma\hat{\pi}_0}{1-\hat{\pi}_0}\right)$$

и исследуем поведение функции $G(x; y)$.

Во-первых, $G(0; y) = 0$. Вычислим производную по x.

$$\frac{\partial}{\partial x}G\left(x;y\right)=\left(1-y\right)ln\left(1-y\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(1-x\left(1-y\right)\right)ln\left(1+\frac{xy}{1-x}\right)=$$

$$=\left(1-y\right)ln\left(1-y\right)-\left(1-y\right)ln\left(1+\frac{xy}{1-x}\right)+\left(1-x\left(1-y\right)\right)\frac{\partial}{\partial x}ln\left(\frac{1-x+xy}{1-x}\right)=$$

$$=\left(1-y\right)\left(ln\left(1-y\right)-ln\left(\frac{1-x+xy}{1-x}\right)\right)+\left(1-x\left(1-y\right)\right)\left(-\frac{1-y}{1-x+xy}+\frac{1}{1-x}\right)=$$

$$=\left(1-y\right)ln\left(\frac{\left(1-y\right)\left(1-x\right)}{1-x+xy}\right)+\left(1-x\left(1-y\right)\right)\frac{1-x+xy-\left(1-y\right)\left(1-x\right)}{\left(1-x\left(1-y\right)\right)\left(1-x\right)}=$$

$$=\left(1-y\right)ln\left(\frac{\left(1-y\right)\left(1-x\right)}{1-x+xy}\right)+\frac{y}{\left(1-x\right)}$$

Итак,

$$\frac{\partial}{\partial x}G\left(x;y\right)=\left(1-y\right)ln\left(1-x\right)+\left(1-y\right)ln\left(1-y\right)-\left(1-y\right)ln\left(1-x+xy\right)+\frac{y}{\left(1-x\right)}$$

Покажем, что производная положительна.

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}G\left(x;y\right)\right|_{x=0}=\left(1-y\right)ln\left(1-y\right)+y=$$

$$=-\left(1-y\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n}+y=y-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{y^n}{n-1}=$$

$$=y-y-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{y^n}{n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{y^n}{n-1}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)y^n=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{y^n}{\left(n-1\right)n}>0$$

Рассмотрим вторую производную:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x;y)=\frac{\partial}{\partial x}\{(1-y)ln(1-y)+(1-y)ln(1-x)\}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left\{-(1-y)ln(1-x(1-y))+\frac{y}{(1-x)}\right\}=$$

$$=\frac{1-y}{1-x}+\frac{(1-y)^2}{1-x+xy}+\frac{y}{(1-x)^2}>0$$

Первая производная в точке $x = 0$ положительна, а вторая – положительна при $x \geq 0$, откуда следует, что $G(x; y) > 0$ при $x > 0$ и первое среднее значение $E\left[\Delta l^1(u)|H_\tau\right]$ всегда больше нуля.

Рассмотрим второе среднее значение $E\left[\Delta l^2(u)|H_\tau\right]$.

Функция $(1+\gamma)ln(1+\gamma)-\gamma$ обращается в 0 при $\gamma = 0$. Вычислим её производную $\frac{d}{d\gamma}(1+\gamma)ln(1+\gamma)-\gamma=ln(1+\gamma)+\frac{(1+\gamma)}{(1+\gamma)}-1=ln(1+\gamma)>0$. Тогда $(1+\gamma)ln(1+\gamma)-\gamma$ при всех $\gamma > 0$, следовательно второе среднее значение $E\left[\Delta l^2(u)|H_\tau\right]>0$.

Откуда $E\left[\Delta l(u)|H_\tau\right]=E\left[\Delta l^1(u)|H_\tau\right]+E\left[\Delta l^2(u)|H_\tau\right]>0$

Литература

1. БЕЛОВ М.В. *Модель управления человеческим капиталом фирмы* // Проблемы управления. – 2016. – №5. – С. 24–34.
2. БЕЛОВ М.В. *Модели управления численностью сотрудников предприятия* // Проблемы управления. – 2017. – №1 – С. 19–30.
3. БОРИСОВ А.Б. *Большой экономический словарь* / А.Б. Борисов. – М.: Книжный мир, 2003. – 895 с.
4. ВАЛЬД А. *Последовательный анализ*. – М.: Физматлит, 1960. — 328 с.

5. ЛОПАТНИКОВ Л.И. *Экономико-математический словарь: Словарь современной экономической науки*. – М.: Дело, 2003. – 520 с.
6. НИКИФОРОВ И.В. *Последовательное обнаружение изменения свойств временных рядов*. – М.: Наука, 1983. – 199 с.
7. *Процедура Каплана-Мейера. MachineLearning.ru. Профессиональный информационно-аналитический ресурс, посвященный машинному обучению, распознаванию образов и интеллектуальному анализу данных*. – URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Процедура_Каплана-Мейера (дата обращения: 12.12.2017).
8. СМИРНОВ В.Т., СОШНИКОВ И.В., РОМАНЧИН В.И., СКОБЛЯКОВА И.В. *Человеческий капитал: содержание и виды, оценка и стимулирование: монография* / Под ред. В.Т. Смирнова. – М.: Машиностроение-1; Орел: ОрелГТУ, 2005. – 513 с.
9. ШИРЯЕВ А.Н. *Вероятность:* В 2-х кн. – М.: МЦНМО, 2007.
10. ШИРЯЕВ А.Н. *Вероятностно-статистические методы в теории принятия решений*. – М.: МЦНМО, 2014. — 144 с.
11. ШИРЯЕВ А.Н. *Стохастические задачи о разладке*. – М.: МЦНМО, 2016. – 392 с.
12. *Экономический словарь* / Е.Г. Багудина и др. – М.: ТК Велби; Проспект, 2004. – 624 с.
13. BARTROFF J., FINKELMAN M., TZE LEUNG LAI *Modern Sequential Analysis and Its Applications to Computerized Adaptive Testing* // Psychometrika. – September 2008. – Vol. 73, Iss. 3. – P. 473–486.
14. BLACKBURN K., VARVARIGOS D. *Human Capital Accumulation in a Stochastic Environment: Some New Results on the Relationship Between Growth and Volatility*. – URL: http://www.socialsciences.manchester.ac.uk/medialibrary/cgbcr/discussionpapers/dpcgbcr74.pdf (дата обращения: 15.02.2016).
15. COX D.R. *Regression models and life tables (with discussion)* // J. of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). – 1972. – Vol. 34, No. 2. – P. 187–220.

16. FAN X., SESHADRI A., TABER C. *Estimation of a Life-Cycle Model with Human Capital, Labor Supply and Retirement. University of Chicago. Department of Economics. Workshops*. – URL: http://www.ssc.wisc.edu/~aseshadr/WorkingPapers/FST.pdf (дата обращения: 12.09.2016).
17. FLAMHOLTZ E. *Human resource accounting: advances in concepts, methods, and applications*. – N.-Y.: Springer Seience+Business Media, 1999. – 390 p.
18. FLAMHOLTZ E., BULLEN M., HUA W. *Human resource accounting: a historical perspective and future implications* // Management Decision. – 2002. – Vol. 40, Iss. 10. – P. 947–954.
19. KAHN W.A. *Psychological Conditions of Personal Engagement and Disengagement at Work* // Academy of Management Journal. – 1990. – Vol. 33, No. 4. – P. 692–724.
20. KAPLAN E.L., MEIER P. *Nonparametric Estimation from Incomplete Observations* // J. of the American Statistical Association. – June 1958. – Vol. 53, No. 282. – P. 457–481.
21. NIKIFOROV I.V. *Sequential detection/isolation of abrupt changes* // Sequential Analysis. Design Methods and Applications. – 2016. – Vol. 35, Iss. 3. – P. 268–301.
22. PALACIOSY M. *Human Capital as an Asset Class Implications From a General Equilibrium Model*. – Owen Vanderbilt University. Graduate School of Management. – URL: http://www2.owen.vanderbilt.edu/miguel.palacios/index_files/Palacios_Human_Capital_as_an_Asset_Class.pdf (дата обращения: 12.02.2016).
23. SMITH D., SILVERSTONE Y., LAJTHA A. *A new lens on business advantage: Human capital strategy and the drive for high performance* // Accenture, 2013.

STATISTICS OF HIRING AND ATTRITION PROCESSES

Mikhail Belov, IBS, Moscow, Cand.Sc. (mbelov@ibs.ru).

Abstract: The paper presents research in the field of mathematical modeling of the economy of human capital and the life cycle of employees, as well as studying the dependency of the economic effects of business on these factors. The traffic of employees between the firm and the labor market is studied. The characteristics of the life cycle process of the employee (LCE), considered as the total time from the moment when the employee accepted the job offer from the company until he leaves the company. The materiality of the influence of the duration of the average work time in the firm, the duration of the employee's adaptation phase in hiring and the phase preceding the dismissal on the firm's economy is demonstrated. The process of dismissal of employees is analyzed by non-parametric methods. As a result, the impossibility of a highly reliable assessment of the probability distribution function of the employee's time in the firm based on observations was shown. The procedures of statistic sequential analysis are proposed to identify the moment of change in the characteristics of the life cycle of employees - the probability of accepting job offers and the intensity of dismissal at will. The developed methods and the results obtained are illustrated by numerical examples from the author's practice in the field of human capital economics and personnel management.

Keywords: attrition process, poison estimation, censored sampling, sequential analysis, fault detection.

УДК 519.21; 681.518
ББК 22.18

DOI: https://doi.org/10.25728/ubs.2019.77.5

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Д.А. Новиковым.*

*Поступила в редакцию 25.12.2017.
Опубликована 31.01.2019.*