

**Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН**

# **УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ**

***Выпуск 79  
Март 2019***

**СБОРНИК  
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл. №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

**Москва – 2019**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
*Институт проблем управления*  
*им. В.А. Трапезникова*

**УПРАВЛЕНИЕ  
БОЛЬШИМИ  
СИСТЕМАМИ**

**СБОРНИК ТРУДОВ**

*Выпуск 79*

**Москва – 2019**

### КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Кузнецов О.П., Кульба В.В., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Главный редактор:** член-корр. РАН Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Калимулина Э.Ю. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИПМ РАН), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), Галаев А.А. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук: Зоркальцев В.И. (ИСЭМ СО РАН), проф. Калашников А.О. (ИПУ РАН), проф. Калянов Г.Н. (ГУ ВШЭ), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ключков В.В. (ИПУ РАН), д-р техн. наук Коргин Н.А. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук: проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (МФТИ), д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р биол. наук проф. Михальский А.И., д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н. (ИПС РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Орлов А.И. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), проф. Райгородский А.М. (МГУ), проф. Савватеев А.В. (РЭШ), д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), Совлуков А.С. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ), проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

### РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

**Арзамас** – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – академик РАН Бычков И.В., д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ).

**Адрес редакции:** 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

**Адрес в интернете:** [ubs.mtas.ru](http://ubs.mtas.ru).

## СОДЕРЖАНИЕ

*80 лет Институту проблем управления  
имени В.А. Трапезникова РАН.....* 6

*Новые книги к 80-летию ИПУ РАН* 7

### ***Системный анализ***

---

**Агасандян Г.А.**  
*Об особенностях семейств функций рискованных  
предпочтений для CC-VaR.....* 10

**Агиева М.Т., Бабичева Ю.В., Окулист Н.М.,  
Угольницкий Г.А.**  
*Задачи анализа и прогноза при управлении целевой  
аудиторией в маркетинге.....* 27

### ***Управление в социально-экономических системах***

---

**Акинфиев В.К.**  
*Два подхода к решению динамической задачи  
расширения мощности производства на рынке  
олигополии.....* 65

**Шумов В.В.**  
*Иерархия моделей боевых действий и пограничных  
конфликтов.....* 86

***Управление подвижными объектами и навигация***

**Галяев А.А., Маслов Е.П., Яхно В.П.,**

**Абрамянц Т.Г.**

*Уклонение подвижного объекта от обнаружения  
в конфликтной среде .....*

112

***Технические и программные средства управления***

**Мельников С.И.**

*Архитектура распределенной базы данных системы  
управления процессом непрерывного  
корпоративного обучения в ООО «Газпром трансгаз  
Нижний Новгород» .....*

185

## **80 ЛЕТ ИНСТИТУТУ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМЕНИ В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН**

16 июня 2019 г. Институту проблем управления имени В. А. Трапезникова Российской академии наук исполнилось 80 лет.

Созданный в 1939 году как Институт автоматики и телемеханики (в дальнейшем добавилась детализация – «технической кибернетики») АН СССР, Институт прошел долгий и насыщенный путь, добился ярких теоретических и прикладных результатов. В 1969 году он был переименован в Институт проблем управления (автоматики и телемеханики).

80 лет – немалый исторический промежуток. Наука об управлении за это время обогатилась новыми направлениями, продемонстрировала свое важное место в современном обществе. И тем более приятно осознавать, что история Института тесно связана с этими достижениями.

В Институте работали или работают: 14 академиков, 10 членов-корреспондентов, три Героя Социалистического Труда, 10 лауреатов Ленинской премии, 43 лауреата Государственной премии, 5 лауреатов Премии Совета Министров СССР, 16 заслуженных деятелей науки и техники. Сегодня в Институте работают около 1000 сотрудников, в том числе более 120 докторов наук, более 250 кандидатов наук.

Поздравляем с юбилеем замечательный коллектив ИПУ РАН, который продолжает энергично и вдохновенно работать, храня и развивая славные традиции!

*Редколлегия и редакция  
Сборника «Управление большими системами»*

---

## НОВЫЕ КНИГИ К 80-ЛЕТИЮ ИПУ РАН

К своему 80-летнему юбилею Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН подготовил ряд изданий (свободно доступных на сайте Института [www.ipu.ru](http://www.ipu.ru)).

В книге **«ИПУ РАН: научные направления»** история Института описывается как история развития основных научных направлений теории управления:

- теория систем управления;
- управление подвижными объектами и навигация;
- технические средства управления;
- управление в промышленности, энергетике, транспорте и сельском хозяйстве;
- информационные технологии в управлении;
- управление системами междисциплинарной природы.

Каждое из направлений детализируется на ряд поднаправлений, со своими отцами-основателями и их научными школами. Книга большей частью составлена из очерков, подготовленных сотрудниками Института, авторами или соавторами многих фундаментальных результатов, корифеями или их учениками. Завершает книгу краткое описание научно-организационной и прикладной деятельности Института.

За 80 лет учеными Института получены результаты мирового уровня (многие из которых названы их именами), развиты целые научные направления, созданы научные школы, основаны добрые традиции. Все это отражено в книге **«ИПУ РАН: лаборатории»**.

В издании **«ИПУ РАН: прикладные разработки»** отражен опыт и (в большей степени) текущее состояние работ Института по приложениям теории управления

в самых разных областях (авиации и космосе, управлении морскими подвижными объектами, энергетике, промышленности, экономике и др.).

За последние годы в Институт пришло много молодёжи, и эти «исторические» книги позволят новым сотрудникам узнать, как зарождались самые современные направления теории управления, ныне доверенные их попечению, как Институт живет в настоящее время, каковы его научные интересы и достижения.

Ориентированными на молодежь являются и два учебных пособия.

В учебном пособии **«Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. – М.: ЛЕНАНД, 2019. – 504 с.»** излагаются основы теории управления в современной форме. Помимо традиционных разделов теории линейных систем в книгу включены вопросы управления в условиях неопределенности (робастность, внешние возмущения), управления нелинейными системами (абсолютная устойчивость, теоремы Ляпунова, хаос), техника линейных матричных неравенств. В приложениях содержится требуемый математический аппарат. Многочисленные примеры демонстрируют особенности применения теории.

Учебное пособие **«Теория управления (дополнительные главы) / Под ред. Д. А. Новикова. – М.: ЛЕНАНД, 2019. – 552 с.»** представляет собой «навигатор» по таким направлениям математической теории управления, как: неопределенность в системах управления (стохастические и адаптивные системы, идентификация, управление с итеративным обучением); оптимизация (в задачах большой размерности; распределенная, невыпуклая) и управление; системы



с распределенными параметрами, многоагентные и сетевые системы управления; интеллектуальное управление (системы с переключениями, нечеткие системы, искусственные нейронные сети); стратегическое поведение в системах управления, описываемое аппаратом дифференциальных, кооперативных, иерархических или рефлексивных игр. Его целью является расширить кругозор студентам магистратуры и аспирантам математических и технических специальностей, уже освоившим теорию автоматического управления по классическим учебникам, т.е. дать им общее представление о многообразии задач и направлений современной теории управления.

## ОБ ОСОБЕННОСТЯХ СЕМЕЙСТВ ФУНКЦИЙ РИСКОВЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ ДЛЯ CC-VAR<sup>1</sup>

Агасандян Г. А.<sup>2</sup>

(Вычислительный центр им. А.А. Дородницына  
ФИЦ ИУ РАН, Москва)

*Исследуются теоретические и качественные свойства параметрических семейств функций рискованных предпочтений (ф. р. п.) инвестора, придерживающегося континуального критерия VaR (CC-VaR). Инвестор в задаче инвестирования с таким критерием выбирает не семейство, а одну функцию. Однако знание свойств семейств должно помочь ему лучше формализовать свои рискованные предпочтения. Вводится важное для применения CC-VaR понятие корректности семейств, связанное с их доходностью. Корректными являются однопараметрические семейства, для которых доходность инвестиции является монотонной функцией параметра при любых возможных откликах рынка. Анализ семейств ведется на основе нормированных ф. р. п., для которых интеграл по всей области их определения уже не зависит от параметра. Приводится и доказывается теорема о необходимом и достаточном условии корректности, а также ряд полезных следствий из нее. Теорема позволяет эффективно во многих случаях определять корректность тех или иных семейств с целью использования в задачах с CC-VaR. Рассматривается пример двухпараметрического надсемейства линейных функций с одним изломом, порождающего корректные однопараметрические семейства со специальным свойством симметрии. Пример подтверждает гипотезу качественного характера, что более «доходная» в сравнении с конкурентной функция рискованных предпочтений порождает более низкие доходы в окрестности нуля аргумента и более высокие в окрестности единицы. Аналитические исследования сопровождаются расчетами и графиками.*

Ключевые слова: континуальный критерий VaR (CC-VaR), функции рискованных предпочтений, семейства функций рискованных предпочтений, процедура Неймана – Пирсона, доход, инвестиционная сумма, доходность, корректные и некорректные семейства.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-01-00816).

<sup>2</sup> Геннадий Аршавирович Агасандян, д.ф.-м.н. (agasant17@yandex.ru).

## 1. Основные формальные конструкции и их первичные свойства

В работе исследуются параметрические семейства функций рискованных предпочтений инвестора, используемые в задачах инвестирования с континуальным критерием VaR (CC-VaR), фактически означающим выдерживание в задаче инвестирования континуального множества вероятностных ограничений на реализуемые случайные доходы [1–5, 7]. Выбор инвестором своей функции рискованных предпочтений (ф. р. п.) является одним из основных элементов постановки задачи оптимизации рыночного портфеля. При решении разных задач, но с единым сроком инвестирования, ф. р. п. конкретного инвестора характеризует его отношение к риску и должна быть единой.

В связи с этим последующее исследование может показаться избыточным, поскольку имеет дело с семействами функций. Однако, как представляется, знание свойств семейств ф. р. п. позволяет инвестору лучше формализовать свои рискованные предпочтения. Основным свойством, изучаемым в работе, служит *корректность* однопараметрических семейств. Напомним кратко необходимые для нас сведения из упомянутых работ.

Заданы  $p(x)$  и  $c(x)$  – соответственно прогнозная (на конец периода) и стоимостная (на начало периода) плотности цены базового актива,  $X (\subset \mathfrak{R})$  – произвольный интервал на вещественной прямой. Здесь, как часто делалось и ранее, решается для простоты *задача СВ*, в которой инвестиционная сумма  $S (> 0)$  не задается, но ищется портфель, доставляющий  $\min S$  при выполнении требований CC-VaR, состоящих в выполнении неравенств  $\mathbf{P}\{q \geq \phi(\varepsilon)\} \geq 1 - \varepsilon$  для всех  $\varepsilon \in [0, 1]$ , где  $q$  – доход,  $\phi(\varepsilon)$  – функция рискованных предпочтений (ф. р. п.) инвестора ( $\mathbf{P}$  – вероятностная мера). Эта задача является базовой для решения прочих родственных задач. Ее решение основывается на переупорядочении по величине функции относительных доходов  $\rho(x) = p(x)/c(x)$ ,  $x \in X$ , посредством процедуры Неймана–Пирсона из математической статистики [6].

Рассматриваются семейства ф. р. п.  $\phi(\varepsilon; \lambda)$  по параметру  $\lambda \in \Lambda \subset \mathfrak{R}$ , который отражает степень толерантности инвестора

к риску (и не является параметром масштабирования). Например, можно принять за правило считать, что с ростом этого параметра степень расположенности к риску инвестора возрастает, и именно такими семействами рекомендовать инвестору руководствоваться. На функции семейства обычно налагаются ограничения, связанные с возможностью их интегрирования и дифференцирования по параметру  $\lambda$ . Функции из семейств подчиняются ограничению  $\phi(0; \lambda) \equiv 0$  и нормируются условием  $\phi(1; \lambda) \equiv 1$ . Они целиком располагаются в квадрате  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ . Некоторые особенности функций (бесконечность производных по  $\varepsilon$ ) разрешаются для  $\varepsilon = 0$  и  $\varepsilon = 1$ , где производные по  $\varepsilon$  могут быть неограниченными, а также при стремлении  $\lambda$  к (условному) нулю.

Средний доход  $R(\lambda)$ , инвестиционная сумма  $A(\lambda)$  и средний относительный доход  $r(\lambda)$  определяются формулами

$$R(\lambda) = \int_0^1 \phi(\varepsilon; \lambda) d\varepsilon, \quad A(\lambda) = \int_0^1 \phi(\varepsilon; \lambda) d\gamma(\varepsilon),$$

$$r(\lambda) = R(\lambda)/A(\lambda).$$

Здесь  $\gamma(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \in [0, 1]$ , – *диссонанта* оптимального портфеля. Как показывается в [2, 3], функция  $\gamma(\varepsilon)$  выпукла вверх (вогнута), ее производная – неотрицательная и невозрастающая функция  $\varepsilon$  (возможно, разрывная),  $\gamma(0) = 0$ ,  $\gamma(1) = 1$ . Функции  $g(\varepsilon)$  с такими свойствами и не зависящие от  $\lambda$  называются *допустимыми*.

В качестве типичного примера допустимых функций, используемых в иллюстративных целях и при проверке корректности семейств функций, можно применять функции

$$(1) \quad g(\varepsilon) = 1 - (1 - \varepsilon)^\tau, \quad g'(\varepsilon) = \tau(1 - \varepsilon)^{\tau-1}, \quad \tau > 1.$$

$$(2) \quad g(\varepsilon) = \begin{cases} \tau\varepsilon, & 0 \leq \varepsilon \leq 1/\tau, \\ 1, & 1/\tau < \varepsilon \leq 1, \end{cases} \quad g'(\varepsilon) = \begin{cases} \tau, & 0 \leq \varepsilon \leq 1/\tau, \\ 0, & 1/\tau < \varepsilon \leq 1, \end{cases} \quad \tau > 1.$$

Изучение семейств  $\phi$  р. п. проводится на основе *нормированных ф. р. п.*  $\phi_n(\varepsilon; \lambda) = \phi(\varepsilon; \lambda)/R(\lambda)$ . Наряду с их производными по  $\lambda$  (например, в случае разрыва) рассматриваются и разности

$$(3) \quad \partial \phi_n(\varepsilon; \lambda) / \partial \lambda, \quad \Delta \phi_n(\varepsilon; \lambda', \lambda'') = \phi_n(\varepsilon; \lambda') - \phi_n(\varepsilon; \lambda''),$$

при этом, очевидно,

$$\int_0^1 \phi_n(\varepsilon; \lambda) d\varepsilon \equiv 1, \quad \int_0^1 \frac{\partial \phi_n(\varepsilon; \lambda)}{\partial \lambda} d\varepsilon \equiv 0, \quad \int_0^1 \Delta \phi_n(\varepsilon; \lambda', \lambda'') d\varepsilon \equiv 0,$$

$$r(\lambda) = R(\lambda)/A(\lambda) = \left( \int_0^1 \phi_n(\varepsilon; \lambda) d\gamma(\varepsilon) \right)^{-1}.$$

*Корректным* называется семейство ф. р. п., для которого при *любой допустимой* функции  $g(\varepsilon)$  оптимальный относительный доход  $r(\lambda)$  является монотонной функцией  $\lambda$ . Остальные семейства – некорректные. Для *некорректного* семейства можно указать такие две пары вида  $\{\lambda', \lambda''\}$ ,  $\lambda' < \lambda''$ , что при некоторой *допустимой* функции  $g(\varepsilon)$  для одной из пар выполняется, например, неравенство  $r(\lambda') > r(\lambda'')$ , а для другой – обратное неравенство. Как правило, мы строим семейства, для которых  $r(\lambda)$  является монотонно *возрастающей* функцией  $\lambda$ , а убывающая функция становится возрастающей при замене  $\lambda \rightarrow 1/\lambda$ .

Далее приводится и доказывается *необходимое и достаточное условие* корректности семейства ф. р. п. с полезными дополнительными утверждениями, на нем основанными.

Некоторые примеры корректных и некорректных семейств рассматриваются в [2]. Уже по этим примерам создается впечатление, что повышенный риск, на который готов идти инвестор, в большей мере обусловлен поведением выбираемой им ф. р. п. в окрестности  $\varepsilon = 0$ , а не  $\varepsilon = 1$ . Именно при таком поведении инвестора средний доход будет больше.

Для более обоснованного подтверждения этой гипотезы подходящими представляются примеры с ф. р. п., симметричными относительно биссектрисы угла квадрата  $Q$  пар значений  $(\varepsilon, \phi)$  с координатами  $(1, 0)$ . Пример такого типа с семейством линейных функций с одним изломом и рассматривается далее.

## **2. Необходимое и достаточное условие корректности семейств**

Для анализа корректности семейств удобно рассмотреть упрощенную модель семейств, ограничиваясь  $\alpha$ -наборами  $\{\alpha_i, i = 1, \dots, k\}$  – *знакопеременными* наборами чисел, для которых

$$\alpha_i \neq 0, \quad i = 1, \dots, k; \quad \text{sign}[\alpha_i \alpha_{i+1}] = -1, \quad i = 1, \dots, k - 1; \quad \sum_{i=1, \dots, k} \alpha_i = 0.$$

Набор (не  $\alpha$ -набор!)  $k$  чисел  $\{\pi_i, i = 1, \dots, k\}$  называется допустимым, если  $\pi_1 > 0$ ,  $0 \leq \pi_i \leq \pi_{i-1}$ ,  $i = 2, \dots, k$ . Называем  $\alpha$ -набор корректным, если для любого допустимого набора  $\{\pi_i, i = 1, \dots, k\}$

$$(4) \quad \sum_{i=1, \dots, k} \pi_i \alpha_i \leq 0.$$

В противном случае, если существует допустимый набор  $\{\pi_i, i = 1, \dots, k\}$ , для которого выполняется противоположное неравенство,  $\alpha$ -набор называем некорректным. Имеет место

**Теорема 1.** Для корректности  $\alpha$ -набора  $\{\alpha_i, i = 1, \dots, k\}$  необходимо и достаточно, чтобы число  $k$  было четным и выполнялась совокупность неравенств

$$(5) \quad \alpha_1 < 0 \text{ и } \sum_{i=1, \dots, m} \alpha_i \leq 0 \text{ для всех четных } m \leq k - 2$$

(при  $k = 2$  требуется выполнение лишь первого неравенства).

**Доказательство.** Достаточность условия устанавливается индукцией по четным числам  $k$ . Сначала проверяется корректность  $\alpha$ -набора  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$  для  $k = 2$ . В этом случае условие теоремы сводится к единственному неравенству  $\alpha_1 < 0$ . Пусть  $\{\pi_1, \pi_2\}$  – произвольный допустимый набор, при этом  $\pi_1 > 0$ ,  $0 \leq \pi_2 \leq \pi_1$ . Поскольку  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ , для левой части (4) имеем

$$(6) \quad \pi_1 \alpha_1 + \pi_2 \alpha_2 \leq \pi_2 \alpha_1 + \pi_2 \alpha_2 = \pi_2 (\alpha_1 + \alpha_2) = 0,$$

что означает корректность набора для  $k = 2$ .

Пусть теперь для произвольного четного числа  $k > 2$  имеет место

$$(7) \quad \sum_{i=1, \dots, k} \pi_i \alpha_i \leq \pi_k \sum_{i=1, \dots, k} \alpha_i = 0.$$

Тогда из формулы (5), если придать в ней параметру  $k$  значение  $k + 2$ , с учетом (6) и предположения индукции (7) получим для левой части формулы (4)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1, \dots, k+2} \pi_i \alpha_i &= \sum_{i=1, \dots, k} \pi_i \alpha_i + \pi_{k+1} \alpha_{k+1} + \pi_{k+2} \alpha_{k+2} \leq \\ &\leq \pi_k \sum_{i=1, \dots, k} \alpha_i + \pi_{k+2} (\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) \leq \\ &\leq \pi_{k+2} \sum_{i=1, \dots, k} \alpha_i + \pi_{k+2} (\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) = \pi_{k+2} \sum_{i=1, \dots, k+2} \alpha_i = 0. \end{aligned}$$

Тем самым достаточность условия (5) установлена.

Доказательство необходимости проводится от противного. Пусть для некоторого  $m \in \{1, 2, \dots, k - 2\}$

$$\sum_{i=1, \dots, m} \alpha_i > 0.$$

Очевидно, набор  $\{\pi_i, i = 1, \dots, k\}$ ,  $\pi_i = \{1, i = 1, \dots, m; 0, i = m + 1, \dots, k\}$  является допустимым, и мы имеем

$$\sum_{i=1, \dots, k} \pi_i \alpha_i = \sum_{i=1, \dots, m} \alpha_i > 0,$$

что противоречит формуле (4). Теорема полностью доказана.

Из этой теоремы вытекают

**Следствия 1.**

(i) условие  $\alpha_1 < 0$  необходимо для корректности  $\alpha$ -набора; в случае  $k = 2$  оно также и достаточно;

(ii) при  $k = 3$  любой  $\alpha$ -набор некорректен;

(iii) при  $k = 4$   $\alpha$ -набор корректен тогда и только тогда, когда  $\alpha_1 < 0 < \alpha_2 \leq -\alpha_1$ ; из этих неравенств непосредственно вытекает, что также  $\alpha_3 < 0$ ,  $\alpha_4 > 0$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 0$ .

Вернемся к исходной задаче и обозначим через  $k$  количество интервалов постоянства знака, на которые разбивается интервал  $(0, 1)$  точками  $\varepsilon_i(\lambda', \lambda'') \in (0, 1)$  (или  $\varepsilon_i(\lambda) \in (0, 1)$ ),  $i = 1, \dots, k - 1$ , являющимися нулями функции  $\Delta\phi_n(\varepsilon; \lambda', \lambda'')$  (или  $\partial\phi_n(\varepsilon; \lambda)/\partial\lambda$ ), но лишь такими, в которых происходит изменение знака функции. Введем еще для удобства  $\varepsilon_0(\lambda', \lambda'') = 0$  ( $\varepsilon_0(\lambda) = 0$ ) и  $\varepsilon_k(\lambda', \lambda'') = 1$  ( $\varepsilon_k(\lambda) = 1$ ), но только на величину  $\varepsilon_k(\lambda', \lambda'')$  требование быть нулем функции не распространяется. Вводя параметры  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , получаем знакопеременную последовательность

$$(8) \quad \alpha_i = \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} \Delta\phi_n(\varepsilon; \lambda', \lambda'') d\varepsilon, \quad (\alpha_i = \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} \frac{\partial\phi_n(\varepsilon; \lambda)}{\partial\lambda} d\varepsilon), \quad \sum_{i=1, \dots, k} \alpha_i = 0.$$

Переход от допустимых функций исходной задачи к допустимым наборам модельной задачи будем осуществлять образованием взвешенных средних по правилу

$$(9) \quad \pi_i = \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} g'(\varepsilon) \Delta\phi_n(\varepsilon; \lambda', \lambda'') d\varepsilon / \alpha_i$$

$$(\text{или } \pi_i = \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} g'(\varepsilon) \frac{\partial\phi_n(\varepsilon; \lambda)}{\partial\lambda} d\varepsilon / \alpha_i), \quad i = 1, \dots, k.$$

Тем самым набор  $\{\alpha_i, i = 1, \dots, k\}$  становится  $\alpha$ -набором, и к нему можно применять теорему 1. Однако еще необходимо провести согласование двух понятий допустимости. Для исходной задачи мы имели дело с допустимыми функциями  $g(\varepsilon)$  и их

производными  $g'(\varepsilon)$ , для модельной – с допустимыми наборами  $\{\pi_i, i = 1, \dots, k\}$ . Переход от допустимых функций исходной задачи к допустимым наборам модельной задачи будем осуществлять посредством образования взвешенных средних по правилу

$$(10) \pi_i = \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} g'(\varepsilon) \Delta \phi_n(\varepsilon; \lambda', \lambda'') d\varepsilon / \alpha_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

При наличии частной производной по  $\lambda$  имеем

$$(11) \pi_i = \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} g'(\varepsilon) \frac{\partial \phi_n(\varepsilon; \lambda)}{\partial \lambda} d\varepsilon / \alpha_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Поскольку функция  $g(\varepsilon)$  допустима, то верны неравенства

$$g'_+(\varepsilon_{i-1}) \geq g'(\varepsilon) \geq g'_-(\varepsilon_i), \quad \varepsilon \in (\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i], \quad i = 1, \dots, k,$$

где в левой и правой частях неравенства суть производные справа и слева соответственно, при этом  $g'(0) > g'(1) \geq 0$ . Поэтому с учетом определения (8) имеем

$$(12) g'_+(\varepsilon_{i-1}) \geq \pi_i \geq g'_-(\varepsilon_i), \quad g'_-(\varepsilon_i) \geq g'_+(\varepsilon_i), \quad i = 1, \dots, k,$$

$$g'_+(\varepsilon_0) = g'(\varepsilon_0).$$

Очевидно также, что

$$\pi_i \geq \pi_{i+1} \geq 0 \quad \text{для всех } i = 1, \dots, k-1, \quad \pi_1 > 0.$$

Таким образом, правила (10), (11) преобразуют допустимую функцию в допустимый набор.

В результате устанавливается

**Теорема 2.** Для корректности семейства необходимо и достаточно, чтобы для  $\alpha$ -набора  $\{\alpha_i, i = 1, \dots, k\}$ , определяемого по любой паре  $\{\lambda', \lambda''\}$ ,  $\lambda' < \lambda''$  (или по  $\lambda$ ), формулой (8), число  $k$  было четным и выполнялась совокупность неравенств

$$(13) \alpha_1 < 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1, \dots, m} \alpha_i \leq 0 \quad \text{для всех четных } m \leq k-2$$

(при  $k = 2$  требуется выполнение лишь первого неравенства).

**Доказательство.** Обоснование достаточности условия корректности для исходной задачи после введения параметров  $\alpha_i$  и  $\pi_i, i = 1, \dots, k$ , почти буквально повторяет доказательство теоремы 1. И лишь при доказательстве необходимости остается



убедиться в том, что контрпример, предложенный в *теореме 1*, реализуем и в исходной задаче в терминах функции  $g(\varepsilon)$ .

Действительно, если для *некоторого*  $m \in \{1, 2, \dots, k-1\}$  выполняется противоположное неравенство  $\sum_{i=1, \dots, m} \alpha_i > 0$ , где набор  $\{\alpha_i, i = 1, \dots, k\}$  определяется уже соотношением (8), то допустимый набор  $\{\pi_i, i = 1, \dots, k\}$  с  $\pi_i = \{1, i = 1, \dots, m; 0, i = m+1, \dots, k\}$  из доказательства необходимости в *теореме 1* с очевидностью трансформируется в допустимую функцию  $g(\varepsilon)$  ступенчатого типа по правилу  $g'(\varepsilon) = \{1, \varepsilon \leq \varepsilon_m; 0, \varepsilon > \varepsilon_m\}$ , что согласуется с (9). И мы получаем тот же результат:

$$\sum_{i=1..k} \pi_i \alpha_i = \sum_{i=1, \dots, m} \alpha_i > 0.$$

Из этой теоремы также вытекают простые, но и полезные

**Следствия 2.** Если производная по  $\varepsilon$  от  $\Delta\phi_n(\varepsilon; \lambda', \lambda'')$  (или от  $\partial\phi_n(\varepsilon; \lambda)/\partial\lambda$ )

(i) при  $\varepsilon = 0$  положительна хотя бы для одной пары  $\{\lambda', \lambda''\}$ ,  $\lambda' < \lambda''$ , (одного значения  $\lambda$ ), то семейство некорректно;

(ii) при  $\varepsilon = 0$  для любой пары  $\{\lambda', \lambda''\}$ ,  $\lambda' < \lambda''$ , (для всех  $\lambda \geq 0$ ) отрицательна, то при  $k = 2$  семейство корректно;

(iii) при  $\varepsilon = 1$  хотя бы для одной пары  $\{\lambda', \lambda''\}$ ,  $\lambda' < \lambda''$ , (одного значения  $\lambda \geq 0$ ) положительна, то семейство некорректно;

(iv) при  $\varepsilon = 0$  и  $\varepsilon = 1$  одного знака, то семейство некорректно.

*Замечание.* В связи с теоремами 1, 2 и следствиями из них отметим, что все предложенные конструкции допускают зеркальные формулировки: в формулах (4), (5), (13) и следствиях 1 знаки всех неравенств можно поменять на противоположные, а в следствиях 2 – слово «положительный» на «отрицательный» и наоборот.

Мы будем писать  $\lambda'' \succ \lambda'$  (также  $\phi(\varepsilon; \lambda'') \succ \phi(\varepsilon; \lambda')$ ) и говорить (условно), что  $\lambda''$  «*доходнее*»  $\lambda'$  (или  $\lambda' \prec \lambda''$ , а  $\lambda'$  «*консервативнее*»  $\lambda''$ ), если при *любой допустимой* функции  $r(\lambda'') > r(\lambda')$ .

Заметим, что отношение  $\succ$  (или  $\prec$ ) может быть установлено далеко не для любой пары: при некоторых допустимых функциях разность инвестиционных сумм будет положительной, а при других – отрицательной. Такой случай будет свидетельствовать лишь о *некорректности* семейства, содержащего такую пару.

Напротив, если, например, отношение  $\succ$  установлено для всех упорядоченных по величине параметра семейства пар ф. р. п., то оно корректно. Аналогично корректно семейство, для всех пар которого установлено отношение  $\prec$ . В таком случае при желании сохранить унификацию в обозначениях, следует произвести, например, замену  $\lambda \rightarrow 1/\lambda$ .

Кроме того, мы обычно принимаем в качестве области изменения параметра риска всю бесконечную положительную полуось  $(0, \infty)$ . И потому также в целях унификации обозначений можно трансформировать произвольный (возможно, конечный) интервал  $(a, b)$  значений некоторого параметра  $v$  в бесконечную полуось  $\lambda > 0$ . В зависимости от того, растет риск и доходность с ростом параметра или убывает, такое преобразование, например, обеспечивается соответственно правилами

$$(14) \lambda = \ln((b-a)/(v-a)), \quad \lambda = \ln((b-a)/(b-v)), \quad v \in (a, b).$$

(Второе из правил меняет характер зависимости  $\lambda$  от  $v$  с прямой на обратную.) Вместо логарифма можно взять любую другую растущую до бесконечности функцию, принимающую при  $v = a$  (или соответственно  $v = b$ ) нулевое значение.

При аналитическом задании семейства иногда возникают трудности в зоне доходов с небольшим риском, условно при  $\lambda < 1$ , а  $\phi(\varepsilon; 1) \equiv \varepsilon$ . В таком случае наиболее простым способом продолжения семейства на область  $\lambda < 1$  можно считать применение центрально-симметричного отображения, как правило, сохраняющего непрерывность самой функции  $\phi(\varepsilon; \lambda)$  по  $\lambda$ :

$$(15) \phi_{cs}(\varepsilon; \lambda) = 1 - \phi(1 - \varepsilon; 1/\lambda), \quad \lambda < 1.$$

Можно воспользоваться и образованием обратной функции

$$(16) \phi_{inv}(\varepsilon; \lambda) = \phi^{\leftarrow}(\varepsilon; 1/\lambda), \quad \lambda < 1,$$

однако это правило не всегда может быть реализовано.

### 3. Типовой пример корректного семейства

В качестве типового примера рассматривается семейство ф. р. п. инвестора вида  $\phi(\varepsilon, \lambda) = \varepsilon^\lambda$ ,  $\varepsilon \in [0, 1]$ ,  $\lambda > 0$ . Справедливы соотношения (см. также, например, [3])  $\lambda' \lambda''$

$$R(\lambda) = (1 + \lambda)^{-1}, \quad \phi_n(\varepsilon; \lambda) = \phi(\varepsilon; \lambda)/R(\lambda) = (1 + \lambda)\varepsilon^\lambda, \quad \lambda > 0,$$

$$\Delta\phi_n(\varepsilon; \lambda', \lambda'') = (1 + \lambda'')\varepsilon^{\lambda''} - (1 + \lambda')\varepsilon^{\lambda'}, \quad 0 < \lambda' < \lambda'',$$

$$\partial\phi_n(\varepsilon; \lambda)/\partial\lambda = \varepsilon^\lambda (1 + (1 + \lambda) \ln(\varepsilon)), \quad \lambda > 0.$$

Функция  $\Delta\phi_n(\varepsilon; \lambda', \lambda'')$  помимо  $\varepsilon = 0$  принимает нулевое значение лишь в точке  $\varepsilon_1$ , являющейся корнем уравнения  $(1 + \lambda'')\varepsilon^{\lambda''} = (1 + \lambda')\varepsilon^{\lambda'}$ ,

$$\varepsilon_1 = ((1 + \lambda')/(1 + \lambda''))^{1/(\lambda'' - \lambda')}.$$

Поскольку  $0 < \lambda' < \lambda''$ , то  $\varepsilon_1 \in (0, 1)$ . При этом производная функции  $\Delta\phi_n(\varepsilon)$  по  $\varepsilon$  при  $\varepsilon = \varepsilon_1$  равна

$$(1 + \lambda')\varepsilon_1^{\lambda'-1}(\lambda'' - \lambda') > 0.$$

К тому же и  $\Delta\phi_n(1; \lambda', \lambda'') = \lambda'' - \lambda' > 0$ . Все это с очевидностью говорит о том, что функция  $\Delta\phi_n(\varepsilon)$  при  $\varepsilon < \varepsilon_1$  отрицательна (не считая  $\varepsilon = 0$ ), а при  $\varepsilon > \varepsilon_1$  положительна. Поэтому в терминах теорем 1, 2 параметр  $k = 2$ ,  $\alpha_1 < 0$  и в  $\alpha$ -наборе смена знаков происходит единожды. Корректность семейства обеспечивается следствиями (ii) (обеих теорем).

На рис. 1 слева представлены графики функций данного семейства при  $\lambda = 0,125; 0,25; 1,0; 4,0; 8,0$ .

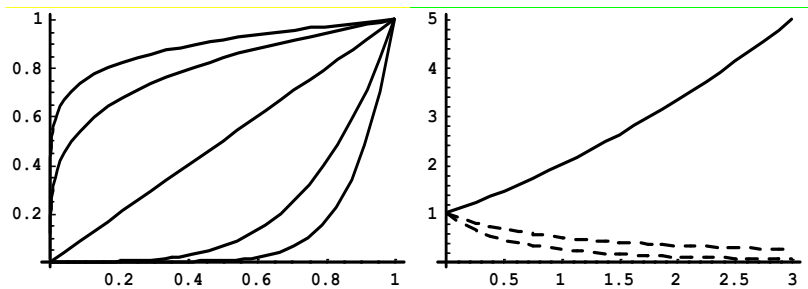


Рис. 1. Функции семейства  $\phi(\varepsilon, \lambda) = \varepsilon^\lambda$  (слева);  
функции  $R(\lambda)$ ,  $A(\lambda)$  и  $r(\lambda)$  (справа)

На том же рисунке справа изображаются графики функций среднего дохода  $R(\lambda)$  (верхняя штриховая линия), инвестиционной суммы  $A(\lambda)$  для допустимой функции (1) (нижняя штриховая линия) и среднего относительного дохода  $r(\lambda)$  для той же допустимой функции (сплошная линия) на интервале  $[0, 3]$  по  $\lambda$ .

Данный пример косвенно оправдывает применение общего правила экстраполяции (15), так как справедливо тождество

$$\phi^{\leftarrow}(\varepsilon; 1/\lambda) = \varepsilon^{\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

#### 4. Линейные функции с одним изломом

Рассматривается двухпараметрическое надсемейство кусочно-линейных функций от  $\varepsilon \in [0, 1]$  с одним изломом вида

$$(17) \phi(\varepsilon; \zeta, v) = \left\{ v\varepsilon/\theta, \varepsilon \leq \theta; v + (1-v)\frac{\varepsilon-\theta}{1-\theta}, \varepsilon > \theta \right\},$$

где  $\theta = 1 + v - 2\zeta$ ,  $\varepsilon = \theta$  – абсцисса точки излома функций,  $v$  – ее ордината. При  $\zeta = 0,5$  имеет место  $\phi(\varepsilon; \zeta, v) \equiv \varepsilon$  (независимо от  $v$ ).

Естественным образом возникают два случая:  $\zeta < 0,5$  и  $\zeta > 0,5$ . Вследствие того, что надсемейство располагается целиком в пределах квадрата  $Q$ , появляются очевидные ограничения на  $v$ : в первом случае должно быть  $0 < v < 2\zeta$ , во втором –  $2\zeta - 1 < v < 1$ .

Легко проверяется, что площадь под графиком функций (17) не зависит от  $v$  и равна

$$R(\zeta, v) = \int_0^1 \phi(\varepsilon; \zeta, v) d\varepsilon = \zeta.$$

Графики функций данного надсемейства для  $I = 11$  значений  $\zeta$ , параметра  $\zeta$  и  $J = 9$  значений  $v_{ij}$  параметра  $v$  для каждого значения  $\zeta$ , изображены на рис. 2 слева.

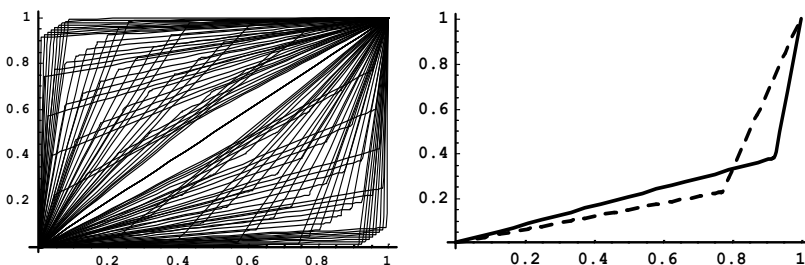


Рис. 2. Графики функций надсемейства  $\phi(\varepsilon; \zeta, v)$  и пары функций семейства  $\phi(\varepsilon; \zeta, v)$  при фиксации  $\zeta < 0,5$

При этом вводится вектор  $s = \{s_i = (i - \frac{1}{2})/I, i = 1, \dots, I\}$  тестируемых значений параметра  $\zeta$ , а также для каждого  $i = 1, \dots, I$  векторы  $v_i = \{v_{ij}, j = 1, \dots, J\}$  ординат точек излома функций, где  $v_{ij} = \{(2j - 1)/J, i \leq i_c; 2s_i - 1 + (1 - s_i)(2j - 1)/J, i > i_c\}$ ,  $i_c = 6$ .

На рисунке очевидно группирование функций с единым значением параметра  $\zeta$ , также выделяется одна прямая (без излома), образованная совпадающими  $J$  функциями с  $\zeta = 0,5$ .

Нас будут интересовать семейства  $\{\phi(\varepsilon; \zeta, v)\}$  по параметру  $v$  (играющему при этом роль рискового параметра  $\lambda$ ) для разных *фиксированных* значений  $\zeta \in [0, 1]$ . Каждое такое семейство удовлетворяет свойству симметрии относительно биссектрисы угла с вершиной в  $(1, 0)$ . Действительно, нетрудно видеть, что функции семейства (17) с точкой излома  $(\theta, v)$  при такой симметрии соответствует функция этого же семейства с точкой излома  $(1 - v, 1 - \theta)$ .

Как показывает несложный анализ, геометрическим местом точек излома функций надсемейства при фиксированном значении параметра  $\zeta$  является отрезок прямой в пределах квадрата  $Q$ , проходящей при  $0 < \zeta < \frac{1}{2}$  через точку  $1 - 2\zeta$  на оси абсцисс под углом  $\pi/4$  к ней, при  $\frac{1}{2} < \zeta < 1$  — через точку  $2\zeta - 1$  на оси ординат под тем же углом; его назовем  $\zeta$ -отрезком. Формально  $\zeta$ -отрезок имеет вид уравнения прямой  $v = \varepsilon - (1 - 2\zeta)$ ,  $\varepsilon \in [0, 1]$ , при этом ограничения на  $v$  сохраняются прежние: если  $\zeta < 0,5$ , то  $0 < v < 2\zeta$ , если  $\zeta > 0,5$ , то  $2\zeta - 1 < v < 1$ . При этом (18)  $\Delta\phi_n(\varepsilon; \zeta; v', v'') = (\phi(\varepsilon; \zeta; v'') - \phi(\varepsilon; \zeta; v'))/\zeta$ ,  $v'' > v'$ , и

$$\int_0^1 \Delta\phi_n(\varepsilon; \zeta; v', v'') d\varepsilon \equiv 0.$$

Разность  $\Delta\phi_n(\varepsilon; \zeta; v', v'')$  состоит из трех линейных участков, равна нулю на концах отрезка  $[0, 1]$ , и нулю равен интеграл от нее. Поэтому нуль функции образован средним участком и он единствен. В терминах теорем и следствий из раздела 2 в нашем случае  $k = 2$ . В связи с этим существенным для корректности становится знак разности на первом участке.

Из определения (17) наклон разности (коэффициент при  $\varepsilon$ ) в окрестности  $\varepsilon = 0$  равен  $v''/(1 + v'' - 2\zeta) - v'/(1 + v' - 2\zeta)$ . После

упрощений получаем, что знак наклона совпадает со знаком выражения  $v'(1 - 2\zeta) - v''(1 - 2\zeta)$ . Легко видеть, что этот результат сводится к правилу: при  $v'' > v'$  наклон в точке  $\varepsilon = 0$  отрицателен при  $\zeta < 1/2$ , положителен при  $\zeta > 1/2$  и обращается в нуль при  $\zeta = 1/2$ . Причем этот наклон не меняется при замене допустимой функции, участвующей в проверке корректности.

Очевидно, что разность, отрицательная при  $\zeta < 1/2$  вблизи  $\varepsilon = 0$ , становится положительной в окрестности  $\varepsilon = 1$ , и наоборот – при  $\zeta > 1/2$ . Напомним, что в соответствии со *следствиями* 1(i) и 2(ii) при  $k = 2$  соотношение  $v'' > v'$  («доходнее») выполняется тогда и только тогда, когда функция  $\Delta\phi_n(\varepsilon; \zeta; v', v'')$  в окрестности  $\varepsilon = 0$  отрицательна (например, когда производная по  $\varepsilon$  при  $\varepsilon = 0$  отрицательна).

Таким образом, при фиксации параметра  $\zeta$  для семейства (17) по параметру  $v$ , уже однопараметрического, мы получаем, что для любой пары  $(v', v'')$ ,  $v'' > v'$ , мы имеем  $v' > v''$  при  $\zeta < 1/2$  и  $v'' > v'$  при  $\zeta > 1/2$ ,  $v'' > v'$ . Иными словами, при  $\zeta < 1/2$  с ростом  $v$  доходность оптимального портфеля снижается, а при  $\zeta > 1/2$  – возрастает. А потому и семейство оказывается корректным.

На рис. 2 справа изображены две функции надсемейства (17) с единым значением  $\zeta$ , но с разными  $v$ : для индексов  $i = 3$ ,  $j = 5$  (штриховая линия) и  $i = 3$ ,  $j = 8$  (сплошная линия). Характер этих линий и их взаимное расположение типичны для зоны  $i < i_c$  ( $\zeta_i < 0,5$ ). На рис. 3 слева изображены две функции того же надсемейства для  $i = 8$ ,  $j = 5$  (штриховая линия) и  $i = 8$ ,  $j = 8$  (сплошная линия), а это типично для зоны  $i > i_c$ , ( $\zeta_i > 0,5$ ).

Сравнение двух рисунков одновременно демонстрирует и суть их различий: на рис. 2 сплошная линия выходит из нуля под большим углом, чем штриховая линия, а на рис. 3 – под меньшим. Это непосредственно сказывается на характере поведения функции  $\Delta\phi_n(\varepsilon) = (\phi_n(\varepsilon; \zeta_i, v_{j+1}) - \phi_n(\varepsilon; \zeta_i, v_j))/\zeta$  в нуле и единице. Суть различий с очевидностью демонстрируется на рис. 3 справа. На нем изображены две ломаные линии  $\Delta\phi_n(\varepsilon)$ , образованные из функций надсемейства с индексами  $i = 3$ ,  $j = 5$  (пунктирная линия),  $i = 8$ ,  $j = 5$  (сплошная линия).

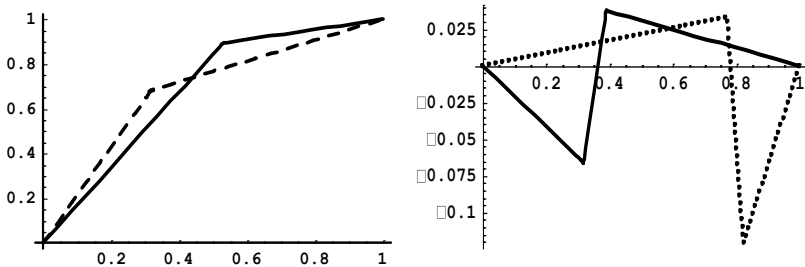


Рис. 3. Графики пары функций семейства  $\phi(\varepsilon; \zeta, \nu)$  при фиксации  $\zeta > 0,5$  и пары функций  $\Delta\phi_n(\varepsilon)$  для двух значений  $\zeta$

При желании (вновь для унификации обозначений) использовать трансформации (14) в соответствии с определением (17) при  $\zeta < 1/2$  следует принять второе соотношение в (14) с  $a = 0$ ,  $b = 2\zeta$ , а при  $\zeta > 1/2$  – первое с  $a = 2\zeta - 1$ ,  $b = 1$ .

Данный пример позволяет весьма наглядно продемонстрировать возможности проведения аналитического исследования посредством доказанного необходимого и достаточного условия корректности семейства функций.

Благодаря свойству симметрии семейства из примера подтверждается также гипотеза, что более «доходная» в сравнении с конкурентной ф. р. п. порождает более низкие доходы в окрестности  $\varepsilon = 0$  и более высокие – в окрестности  $\varepsilon = 1$ .

Тем не менее отметим, что пример не является, на наш взгляд, идеальным генератором семейств ф. р. п. для инвестора. Во-первых, фиксация параметра  $\zeta$  сильно ограничивает спектр возможностей для выбора инвестора. Во-вторых, трудно оправдать наличие излома у ф. р. п. Хотя, по-видимому, от этих недостатков можно избавляться, если допускать выход за рамки аналитического исследования и не фиксировать параметр  $\zeta$ . Но это предмет дополнительного исследования.

В этом отношении удачным для инвестора выглядит пример семейства ф. р. п. из разд. 3. Хотя оно не обладает важным для адекватной проверки гипотезы свойством симметрии.

## 5. Заключение

В работе дается определение корректности семейств, приводится и доказывается необходимое и достаточное условие корректности параметрических семейств функций рискованных предпочтений инвестора, придерживающегося континуального критерия VaR. В качестве следствий устанавливаются также полезные дополнительные утверждения, помогающие по некоторым простым свойствам нормированной ф.р.п. определять или опровергать корректность семейств.

С их помощью аналитически исследуется семейство непрерывных кусочно-линейных функций с одним изломом в качестве ф.р.п. и доказывается его корректность в случае, когда для всех функций семейства интеграл на отрезке  $[0, 1]$  одинаков.

При этом наличие у семейства ф.р.п. свойства симметрии относительно биссектрисы прямого угла с вершиной в точке  $(1, 0)$  подтверждает гипотезу качественного характера, что более «*доходная*» (т.е. приносящая инвестору более высокую доходность) в сравнении с конкурентной ф.р.п. порождает более низкие доходы в окрестности  $\varepsilon = 0$  и более высокие – в окрестности  $\varepsilon = 1$ .

В случае более сложного задания семейств ф.р.п. рассчитывать на возможность полного аналитического исследования не приходится. Поэтому следует развивать и применять вычислительные алгоритмы, которые могли бы дать аналогичные результаты, пусть и устанавливаемые приближенно.

### Литература

1. АГАСАНДЯН Г.А. *Финансовая инженерия и континуальный критерий VaR на рынке опционов* // Экономика и математические методы. – 2005. – Т. 41, №4. – С. 88–98.
2. АГАСАНДЯН Г.А. *Применение континуального критерия VaR на финансовых рынках*. – М.: ВЦ РАН, 2011. – 299 с.
3. АГАСАНДЯН Г.А. *Континуальный критерий VaR на многомерных рынках опционов*. – М.: ВЦ РАН, 2015. – 297 с.



4. АГАСАНДЯН Г.А. *О признаках корректности семейств функций рискованных предпочтений в CC-VaR* // Материалы X международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2017), Москва, 2–4 октября 2017 г. – М.: ИПУ РАН, 2017. – С. 184–187.
5. АГАСАНДЯН Г.А. *Континуальный критерий VaR и оптимальный портфель инвестора* // Управление большими системами. –2018. – Вып. 73. – С. 6–26.
6. КРАМЕР Г. *Математические методы статистики*. – М.: Наука, 1975. –750 с. Англ.: Cramer H. *Mathematical methods of statistics*. – Princeton University Press, 1946.
7. AGASANDYAN G.A. *Optimal Behavior of an Investor in Option Market* // Int. Joint Conference on Neural Networks. The 2002 IEEE World Congress on Computational Intelligence, Honolulu, Hawaii, Mai 12–17, 2002. – P. 1859–1864.

## ON PECULIARITIES OF FAMILIES OF RISK-PREFERENCE FUNCTIONS FOR CC-VAR

**Gennady A. Agasandyan**, Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, Doctor of Science, leading fellow (Moscow, Chertanovskaya st., 34, (495) 313-44-94).

*Abstract. The work investigates theoretical and qualitative properties of parametric families of risk-preference functions (r. p. f.) of an investor, who upholds the continuous VaR-criterion (CC-VaR). The investor in problems with such a criterion selects not family but only one function. Nevertheless, the knowledge of families' properties has to help the investor to better formalize risk preferences. The conception of families' correctness that is connected with their yield and important for applying CC-VaR is introduced. One-parametric families are correct, if their yields are monotone functions of the parameter at arbitrary possible answer of the market. The families' analysis is prosecuted on base of normalized r. p. f., for which the integral in its domain is independent of parameter. The theorem about necessary and sufficient condition of families' correctness with some useful consequences is formulated and proved. An example of two-parametric superfamily of linear r. p. f. with one fracture that generates one-parametric correct families with special property of symmetry is considered. The example substantiates the hypothesis of quality type that more «profitable» r. p. f. as compared with a rival one generates lower incomes near zero and higher incomes near one. Analytical investigations are accompanied by computations and diagrams.*

Keywords: continuous VaR-criterion (CC-VaR), risk preferences function, families of risk preferences functions, income, investment amount, yield, correct and incorrect families.

УДК 519.685

ББК 22.18

DOI: <https://doi.org/10.25728/ubs.2019.79.1>

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Ф.И. Ерешко.*

*Поступила в редакцию 18.06.2018.  
Опубликована 31.05.2019.*

## ЗАДАЧИ АНАЛИЗА И ПРОГНОЗА ПРИ УПРАВЛЕНИИ ЦЕЛЕВОЙ АУДИТОРИЕЙ В МАРКЕТИНГЕ<sup>1</sup>

Агиева М. Т.<sup>2</sup>

(Ингушский государственный университет, Назрань)

Бабичева Ю. В.<sup>3</sup>, Окулист Н. М.<sup>4</sup>, Угольницкий Г. А.<sup>5</sup>

(Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону)

*Рассмотрены задачи анализа и прогноза на сетях применительно к маркетингу. Приведен краткий обзор моделей влияния и управления в социальных сетях. К указанным задачам относятся выявление сильных подгрупп и спутников, вычисление количественных характеристик сети, определение финальных мнений членов целевой аудитории исходя из их начальных мнений с учетом взаимного влияния. Для решения задачи прогноза разработан оригинальный алгоритм, реализованный на языке программирования R. Алгоритм описан в деталях и охватывает частный случай сильно связного орграфа и общий случай. Проведена оценка сложности этого алгоритма. Другие поставленные задачи могут быть решены стандартными средствами этого языка, что проиллюстрировано на тестовых примерах вместе с результатами авторского алгоритма. Тестовые примеры используют орграфы влияний с 10-15 и более чем со ста вершинами. Вычислены значения различных мер близости для орграфа: центральность по степени, центральность по близости, центральность по посредничеству, дана их интерпретация. Решение задач анализа и прогноза существенно облегчает задачу управления мнениями целевой аудитории в маркетинге. Намечены пути дальнейших исследований по построению и анализу моделей управления мнениями в маркетинге.*

Ключевые слова: маркетинг, модели анализа и прогноза на сетях, управление целевой аудиторией.

### 1. Введение

Модель влияния в социальной группе впервые рассмотрена в работах [20, 24] и более детально изучена в [18]. Впоследствии

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, проект №17-19-01038.

<sup>2</sup> Мовлатхан Тугановна Агиева, к.т.н., доцент (agieva25@mail.ru).

<sup>3</sup> Юлия Витальевна Бабичева, бакалавр прикладной математики (yulya.babicheva1012@yandex.ru).

<sup>4</sup> Наталья Менахимовна Окулист, бакалавр прикладной математики (nata-0k@rambler.ru).

<sup>5</sup> Геннадий Анатольевич Угольницкий, д.ф.-м.н., профессор (ougoln@mail.ru).

рассматривались многочисленные обобщения и уточнения этой модели: случай меняющегося во времени взаимовлияния – в работах [23, 25, 28, 29], условия сходимости мнений – в [14, 16, 19], скорость сходимости – в [18, 23], условия единственности финального мнения – в [23, 25].

Одной из самых подробных монографий по моделированию сетей является [26]; см. также статью [27]. Применение сетевых моделей к анализу политических процессов описано в монографии [3]. Стохастические модели социальных сетей представлены в статье [4]; это направление впоследствии развито в монографии [5], посвященной математическим моделям коллективного поведения. Монография [7] посвящена моделям сетевой экспертизы. Вопросы коммуникации и координации в социальных сетях анализируются в [17]. Моделированию «сарафанного радио» посвящены работы [15, 21, 22]. Анализ относительного влияния вершин сети дан в [30]. Системный подход к сетям представлен в [31]. Сетевые модели социального влияния описаны также в [32, 33].

Подробный анализ моделей влияния представлен в монографии [6]. Авторы предлагают классификацию таких моделей. Приведен анализ динамики мнений для ряда характерных модельных примеров.

В статье [1] приведена постановка задач управления на сетях применительно к маркетингу с соответствующей интерпретацией элементов, в статье [2] – постановка задач анализа целевой маркетинговой аудитории.

Оставшаяся часть статьи организована следующим образом. Во втором разделе приводятся постановки задач анализа и синтеза на сетях и описывается базовый тестовый пример. В третьем разделе описываются ещё два примера большей размерности, даётся подробное описание количественных характеристик сети применительно к маркетингу и результаты вычисления их значений и выявления структуры целевой аудитории для тестовых примеров с помощью средств языка программирования R [8]. В четвёртом разделе представлен оригинальный алгоритм вычисления финальных мнений членов целевой аудитории и его реализация на языке R с расчётами по тестовым

примерам. В Заключении подводятся итоги и намечаются планы дальнейших исследований.

## 2. Постановки задач и базовый тестовый пример

Базовая модель влияния в социальной сети представляет собой взвешенный ориентированный граф, вершины которого соответствуют членам социальной группы, а дуги описывают их взаимное влияние. Каждой вершине приписывается вещественное значение (мнение члена группы), которое может меняться со временем, а каждой дуге – вещественное число (вес), характеризующее степень влияния одного члена группы на другого (или, что то же самое, степень доверия второго к первому).

Таким образом, в модели  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  – множество базовых агентов;  $x_i \rightarrow u_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , – мнение базового агента;  $u^0 = (u_1^0, \dots, u_n^0)$  – вектор начальных мнений базовых агентов;  $a_{ij}$  – коэффициент влияния  $i$ -го базового агента на мнение  $j$ -го базового агента;  $A = \|a_{ij}\|$  – матрица влияний (задает множество дуг социально-сетевой модели). Динамика мнений задается уравнением

$$(1) \quad u_j(t+1) = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i(t), \quad j=1, \dots, n;$$

или в векторной форме

$$u(t+1) = A^T u(t), \quad u(0) = u^0, \quad t=0, 1, \dots, T-1.$$

Показано, что все члены каждой  $i$ -й сильной подгруппы (невырожденной сильной компоненты сети) приходят к единому финальному мнению, определяемому формулой

$$(2) \quad u_i^\infty = \sum_{k=1}^{n_i} w_k^i u_k^{i0},$$

где  $w_k^i$  – компонента стационарного вектора для цепи Маркова с переходной матрицей  $A^T$ ,  $n_i$  – число членов  $i$ -й сильной подгруппы. Финальные мнения остальных агентов, не входящих в сильные подгруппы («спутников»), вычисляются как

$$(3) \quad u_j^\infty = \sum_{i=1}^r b_{ji} u_i^\infty,$$

где  $b_{ji}$  – вероятность перехода агента  $j$  в сильную подгруппу  $i$  как эргодическое множество,  $r$  – общее число сильных подгрупп.

Кроме того, для заданной сети можно вычислять различные количественные показатели: центральности, престижа и др. [9, 10].

Таким образом, с помощью моделей влияния на сетях можно решать задачи анализа и прогноза. К задачам анализа относятся выделение сильных подгрупп и спутников, а также вычисление количественных характеристик сети. Задачи прогноза позволяют предсказывать динамику мнений членов социальной группы с учетом ее структуры, выявленной при анализе.

Применительно к маркетингу оргграф влияний определяет взаимовлияние членов целевой аудитории некоторой фирмы. Участники целевой аудитории имеют начальные мнения, например, по поводу суммы денег, которую они готовы потратить на приобретение товаров или услуг данной фирмы в течение некоторого периода времени. В силу взаимодействия внутри целевой аудитории эти мнения могут меняться со временем. Выделение сильных подгрупп позволяет определить тех людей (группы, организации), на которых следует оказывать маркетинговое воздействие для получения желаемых финальных мнений (воздействовать на спутников бессмысленно). Количественные характеристики сети дают дополнительное, более детальное описание целевой аудитории.

На данном этапе исследование проводилось для следующего базового тестового примера. Пусть имеется небольшая компания, в которой десять сотрудников и руководитель. У руководителя скоро день рождения, и принято решение собрать деньги ему на подарок. Каждый сотрудник имеет своё мнение по поводу суммы взноса – это начальные мнения. Также в компании имеются социальные связи – некоторые сотрудники дружат между собой и прислушиваются к мнению друг друга. Матрица влияний представлена на следующей странице.

Пусть начальные мнения по поводу суммы подарка в рублях следующие: (500, 900, 500, 400, 400, 500, 800, 500, 600, 400, 100, 200, 200, 300, 500).

Тогда получаем сеть, изображенную на рис. 1.

Решим для этого тестового примера задачи выделения сильных подгрупп и спутников, вычисления характеристик сети и оценки финальных мнений членов группы.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

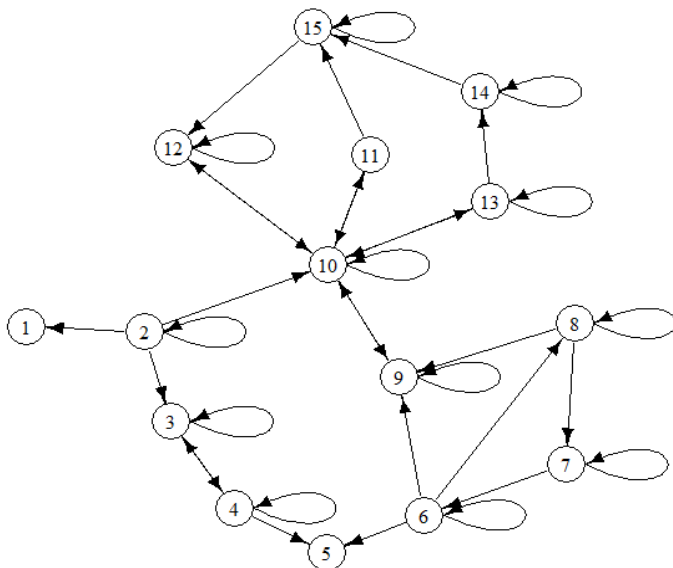


Рис. 1. Граф для тестового примера

### 3. Задачи анализа на сетях

Под социальной сетью на качественном уровне понимается социальная структура, состоящая из множества агентов (семьи, индивиды, организации) и определенного на нем множества отношений (совокупность связей между агентами). Математически сеть представляет собой ориентированный граф. Техника социометрии (представление социальных групп в виде графа) была впервые предложена в работах Я. Морено [11]. Термин «социальная сеть» был введен в 1954 г. социологом Джеймсом Барнсом [13].

Свойства социальных сетей: 1) наличие собственных мнений агентов; 2) возможность членов социальной сети влиять на мнения друг друга; 3) влиятельность и авторитет одних агентов для других; 4) различный уровень осведомленности агентов; 5) косвенное влияние агентов, например, «друг моего друга – мой друг»; 6) наличие лидеров, кумиров, агентов с максимальным «влиянием», формализация индексов влияния;



7) существование порога чувствительности к изменению мнения окружающих; 8) объединение агентов группы «по интересам»; 9) наличие специфических социальных норм; 10) учет факторов «социальной корреляции»; 11) существование внешних факторов влияния (реклама, маркетинговые акции) и, соответственно, внешних агентов (средства массовой информации, производители товаров), и т.д.

Сам по себе анализ социальных сетей (social network analysis, SNA) представляет собой направление, которое занимается описанием и анализом возникающих в ходе социального взаимодействия и коммуникации связей (сетей) различной плотности и интенсивности. Различные меры SNA используются для представления взаимодействия между участниками, учёта сильных или слабых связей, определения ключевых/центральных игроков и подгрупп в сети.

Для анализа социальной сети существует множество характеристик и метрик. Для их вычисления и представления в работе используется язык R, предназначенный для статистической обработки данных и работы с графикой и представляющий собой свободную программную среду вычислений. Язык R широко применяется как статистическое программное обеспечение для анализа данных и фактически стал стандартом для статистических программ [8].

В частности, задача выделения сильных компонент и спутников может быть решена стандартными встроенными средствами языка R. Для тестового примера результат будет иметь следующий вид (рис. 2).

Граф отображает коллектив, который договаривается о сумме на подарок начальнику. Вершина 10 оказывает сильное влияние на вершины 11–15, которые представляют собой: 10 – аналитик, 11–15 – программисты, т.е. люди из одной финансовой категории, с одинаковыми интересами, которые общаются только между собой и с аналитиком как связующим звеном между ними и всем остальным коллективом. Вершины 6–8 (сильная подгруппа) – отдел маркетинга и продаж. Вершина 9 – менеджер проекта, 2 – отдел внедрения.

Остановимся подробнее на вычислении метрик социальной сети на примере графа на рис. 1.

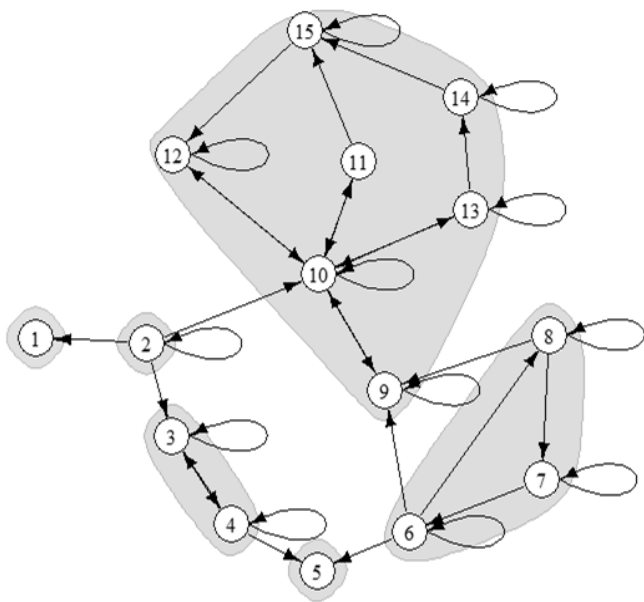


Рис. 2. Сильные компоненты и спутники

*Степень (Degree)*. В теории графов степень вершины графа – это число рёбер, проходящих через вершину. Чем больше связей у данной вершины, тем выше степень.

*Близость (Closeness)*. Эта величина показывает скорость передачи информации от одного узла (вершины) к другим.

*Плотность (Density) или коэффициент кластеризации*. Плотность измеряет степень, в которой узлы сети соединяются друг с другом [2].

### 3.1. МЕТРИКИ ЦЕНТРАЛЬНОСТИ (CENTRALITY METRICS)

Метрики центральности – количественная оценка конкретного лица в социальной сети. Мера центральности описывает положение конкретного узла по сравнению с другими узлами.

#### 3.1.1 СТЕПЕНЬ ЦЕНТРАЛЬНОСТИ /ЦЕНТРАЛЬНОСТЬ ПО СТЕПЕНИ (DEGREE CENTRALITY)

Степень центральности является одной из основных метрик, определяет количество связей агента, то есть число зна-

комств в конкретной группе лиц. Узел с более высоким значением степени центральности часто рассматривается как центр и активный субъект в сети [2].

Иногда возникает необходимость сравнивать степень центральности разных графов, тогда нормированную величину вычисляют по формуле

$$(4) \quad D = \frac{\sum_{i=1}^N (D^* - D_i)}{(N-1)(N-2)},$$

где  $D^*$  – максимальная степень центральности узла из всех рассчитанных.

Вершины с высоким показателем степени центральности имеют большое влияние на других объектов сети, т.е. они могут быть информаторами либо знаменитостями, быстро распространяющими информацию. Степень центральности иллюстрирует степень общительности индивида или группы. Также различают входящую (in-degree) и исходящую (out-degree) центральность. Входящая указывает число связей, направленных к узлу, а исходящая – число связей, направленных от узла. Например, если сайт имеет множество внешних ссылок на другие сайты, как Яндекс или Google, это – власть, а если много людей размещают ссылки на сайт, это – известность.

Вычислим некоторые макропараметры сети.

Плотность сети: 0,1714286. Значение плотности не очень велико, что свойственно данному коллективу.

Взаимность: 0,4166667. В большинстве случаев связи оказываются не взаимными.

Транзитивность: 0,1666667. Очень низкая транзитивность объясняется тем, что коллеги из разных отделов редко общаются друг с другом.

Найдем степень центральности для примера на рис. 1 (рис. 3).

Степени центральности вершин графа для каждой вершины:

$D_1 = 0,067$ ;  $D_2 = 0,333$ ;  $D_3 = 0,333$ ;  $D_4 = 0,333$ ;  $D_5 = 0,133$ ;  
 $D_6 = 0,400$ ;  $D_7 = 0,267$ ;  $D_8 = 0,333$ ;  $D_9 = 0,400$ ;  $D_{10} = 0,733$ ;  
 $D_{11} = 0,200$ ;  $D_{12} = 0,333$ ;  $D_{13} = 0,333$ ;  $D_{14} = 0,267$ ;  $D_{15} = 0,333$ .

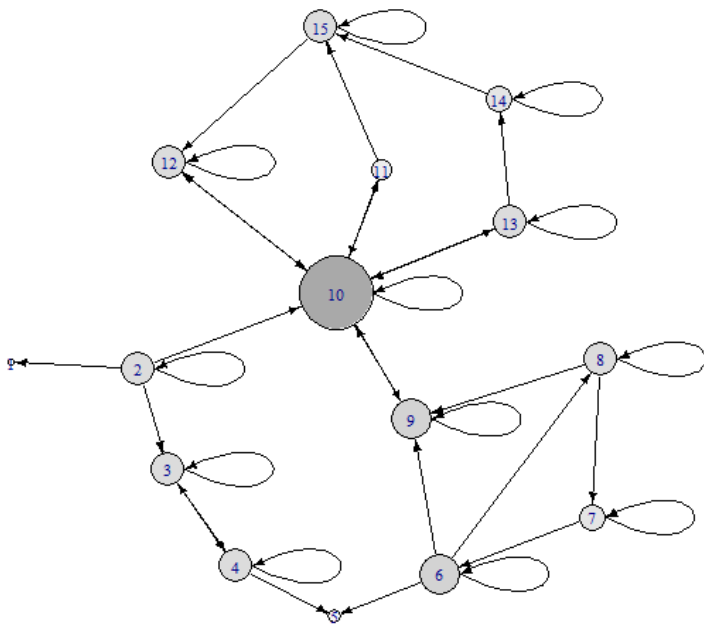


Рис. 3. График центральности по степени

Видим, что самый большой показатель центральности по степени у 10-й вершины, причём она обладает высокой и входящей, и исходящей центральностью, а это значит, что узел – «знаменитость» и «власть». Значит, за таким человеком будет следить много людей, он может быстро распространять информацию, а также быстро ее получать.

Этот узел можно использовать для продвижения продукта.

### 3.1.2. ЦЕНТРАЛЬНОСТЬ ПО БЛИЗОСТИ (CLOSENESS CENTRALITY)

Данная характеристика задаёт скорость распространения информации по сети. Если узел близок ко всем остальным узлам сети, то центральность по близости будет высокой, и чем дальше находится узел, тем меньше этот показатель [2].

Высоким уровнем центральности по близости обладают те узлы, которые имеют множество связей, при этом их должно

быть достаточно и у его соседей. Следовательно, такие узлы получают возможность доступа к большому количеству участников сети, и могут влиять на них.

Соответственно, мера достигнет своего максимума для заданной сети, когда субъект имеет доступ ко всем остальным вершинам в сети, и своего минимума, когда субъект изолирован. С увеличением сети эта величина будет уменьшаться. Это интуитивно понятно, так как чем больше компания, тем тяжелее поддерживать связь со всеми ее членами.

Рассчитаем значение центральности по близости для вершин нашего графа рис. 1 (рис. 4):  $C_1 = 0,005$ ;  $C_2 = 0,015$ ;  $C_3 = 0,005$ ;  $C_4 = 0,005$ ;  $C_5 = 0,005$ ;  $C_6 = 0,012$ ;  $C_7 = 0,011$ ;  $C_8 = 0,012$ ;  $C_9 = 0,008$ ;  $C_{10} = 0,008$ ;  $C_{11} = 0,008$ ;  $C_{12} = 0,008$ ;  $C_{13} = 0,008$ ;  $C_{14} = 0,007$ ;  $C_{15} = 0,007$ .

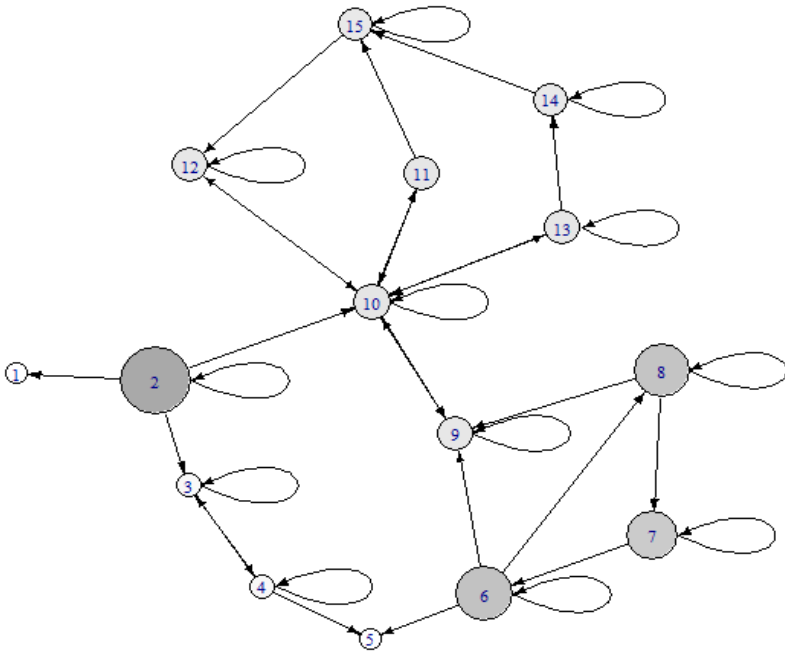


Рис. 4. Центральность по близости

Самый высокий показатель центральности по близости у вершины 2. Это значит, что она может получить быстрый доступ ко всем остальным узлам сети, следовательно, имеет возможность наиболее эффективно распространять информацию по сети.

### 3.1.3. ПРОМЕЖУТОЧНОСТЬ/ЦЕНТРАЛЬНОСТЬ ПО ПОСРЕДНИЧЕСТВУ (BETWEENNESS CENTRALITY)

Промежуточность позволяет найти те узлы, которые служат мостами для соединения с другими группами или сообществами в сети [2].

Узел с высоким значением промежуточности рассматривается как мощный узел с большим количеством влияния, чаще всего это единственная связь между различными частями сети.

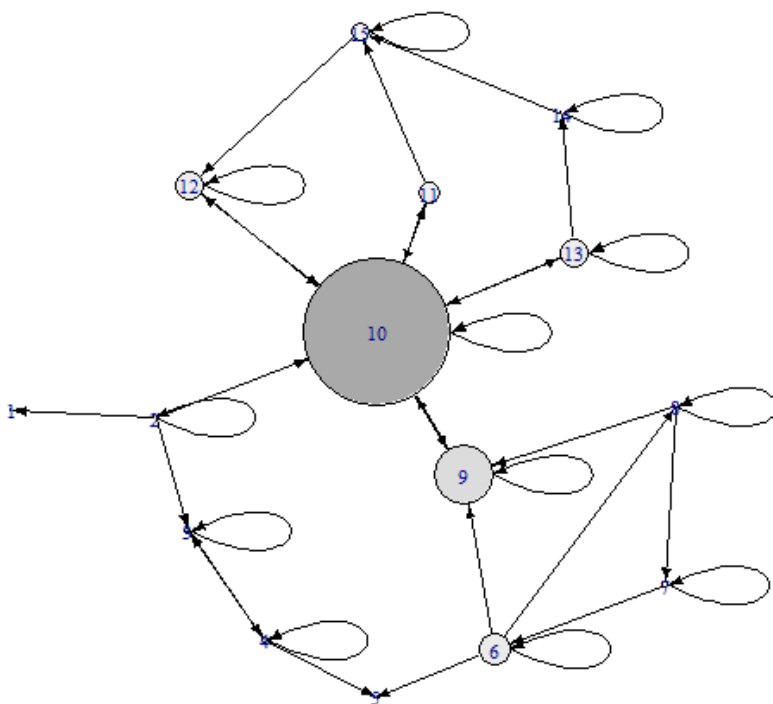


Рис. 5. Центральность по посредничеству

Значения промежуточности для вершин тестового графа:

$V_1 = 0,0$ ;  $V_2 = 0,0$ ;  $V_3 = 2,0$ ;  $V_4 = 2,0$ ;  $V_5 = 0,0$ ;  $V_6 = 10,0$ ;  
 $V_7 = 2,0$ ;  $V_8 = 1,0$ ;  $V_9 = 18,0$ ;  $V_{10} = 44,5$ ;  $V_{11} = 7,0$ ;  $V_{12} = 9,0$ ;  
 $V_{13} = 9,0$ ;  $V_{14} = 1,0$ ;  $V_{15} = 5,5$ .

Самый большой показатель промежуточности у вершины 10 (рис. 5) оправдан тем, что она является единственным связующим узлом между двумя частями сети. Данный участник обладает значительным социальным капиталом и системными компетенциями, позволяющими ему контролировать информационные потоки внутри системы совместной сетевой деятельности.

Рассмотрим еще два примера социальных сетей. Первый случай – группа друзей собирается пойти на футбольный матч и договаривается о цене билетов (мнения).

Вершина 1 – успешный бизнесмен; 2 – офисный работник, у которого есть молодой коллега (вершина 8) – тоже фанат футбола, а у него, в свою очередь, компания друзей из 4-х человек (вершины 9, 10, 11, 20). 4 – «душа компании» и блогер, у которого есть свои подписчики (13–16 вершины); 6 – друг детства 4 и 3. Вершина 3 – женатый человек и ему важно мнение его жены (вершина 5), также ему придётся взять выходной у начальника – тоже фаната футбола (вершина 7); 17 – узнал из видео-блога о предстоящем матче и позвал друга, но так как он тоже женат, ему придется согласовать поход на матч со своей женой. Итак, получаем следующий граф (рис. 6).

Каждый из участников данной сети преследует свои интересы, например, успешный бизнесмен хочет большего комфорта, жёны хотят меньших затрат, молодые специалисты хотят попасть на матч, но потратить как можно меньше. Билеты на матч продаются в диапазоне от 100 руб. до 10000 руб. Отсюда вектор начальных мнений имеет вид (10000, 5000, 5000, 5000, 1000, 5000, 8000, 1000, 1000, 1000, 1000, 300, 500, 800, 400, 900, 200, 1000, 1000, 1000).

Базовые макропараметры социальной сети:

Плотность сети: 0,09210526. Значение плотности невелико, так как состоит из людей чаще всего не знакомых друг с другом лично. Взаимность: 0,4705882. Связи чаще всего не взаимны.

Транзитивность: 0,2790698. Низкая транзитивность говорит о том, что друг моего друга не всегда и мой друг тоже.

Самая высокая центральность по степени у вершины 4, что объясняется его увлечением, блогеры быстро распространяют информацию (рис. 7).

Самый высокий показатель центральности по близости у вершин 1, 2 и 4 (рис. 8). Данные вершины так или иначе оказывают сильное влияние на все остальные вершины.

Вершина 4 обладает самым высоким показателем посредничества (рис. 9), так как является связующим узлом между двумя частями сети. Совершенно незнакомые люди узнали о матче, просто посмотрев видео-блог.

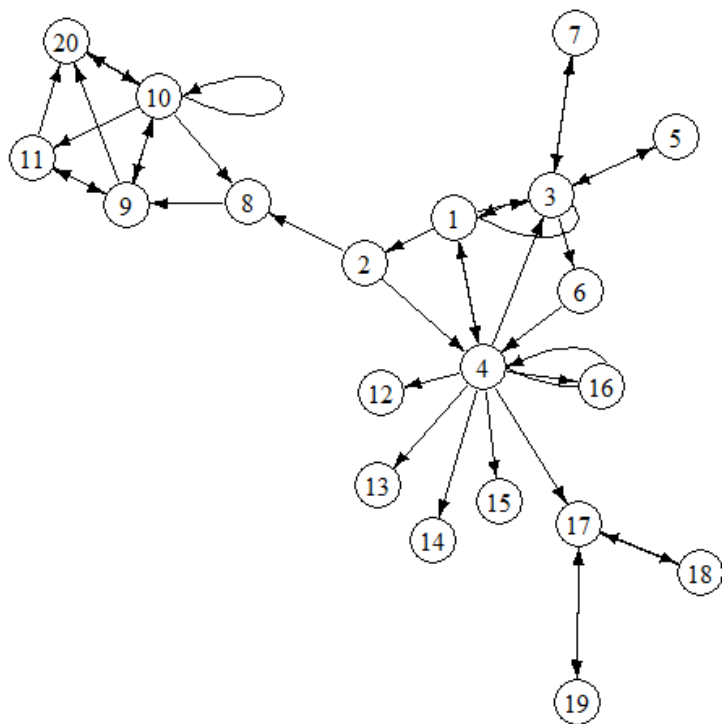


Рис. 6. Футбольный матч



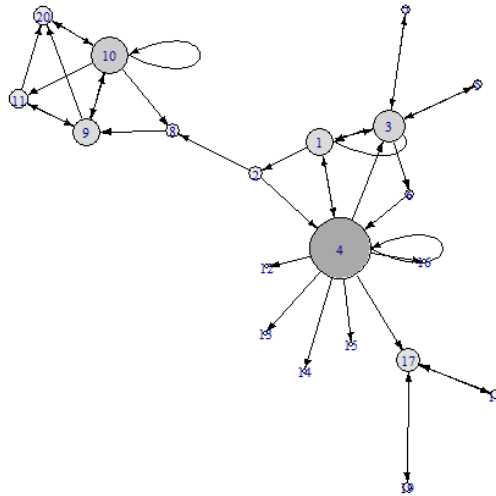


Рис. 7. График центральности по степени

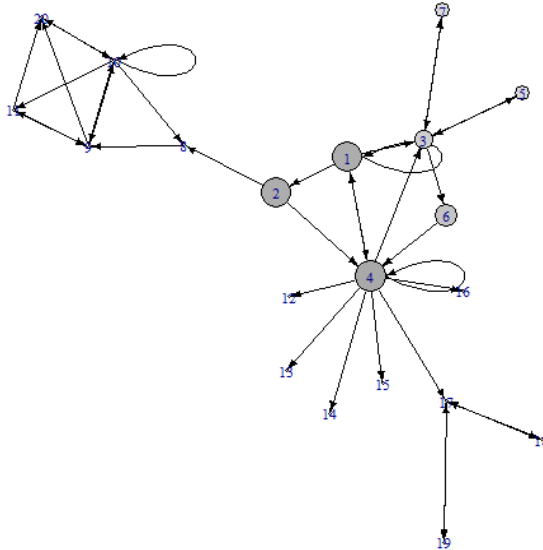


Рис. 8. График центральности по близости

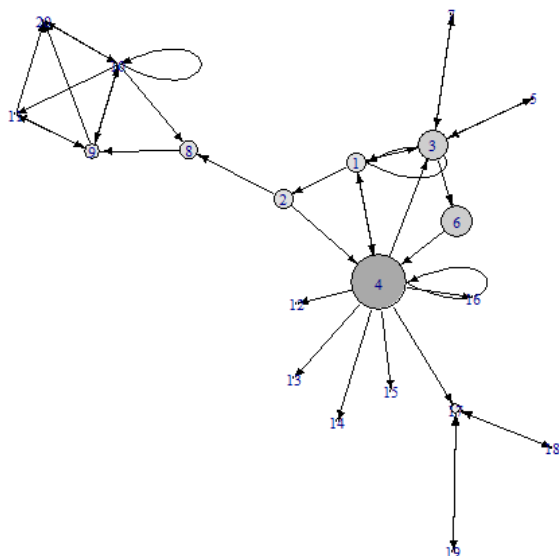


Рис. 9. График центральности по посредничеству

Наконец, вычислим сильные компоненты данной сети и их спутников (рис. 10).

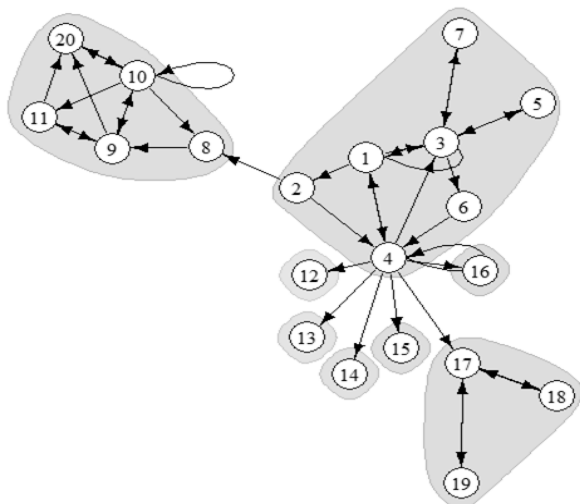


Рис. 10. Сильные компоненты и спутники

Рассмотрим следующий пример, иллюстрирующий довольно распространенный вид деятельности в социальных сетях, а именно набирающее популярность блогерство. Вершины графа представляют пять подруг в декретном отпуске, ведущих блоги о красоте, здоровье и своих детях (вершины 1–5), а также их подписчики, которые обсуждают сумму на покупку коляски (мнения). Так как данный граф содержит несколько сотен тысяч вершин, его сложно изобразить. Возьмем для наглядности граф со 100 вершинами (рис. 11) и вычислим характеристики для такой социальной сети.

Очевидно, что в такой сети сильной подгруппой будут являться сами блогеры, а их подписчики – спутниками (рис. 12).

Плотность сети: 0,03464646. Взаимность: 0,03292181. Транзитивность: 0,09532888.

Очень низкие показатели характеристик объясняются структурой сети и типом взаимосвязи ее объектов (рис. 13).

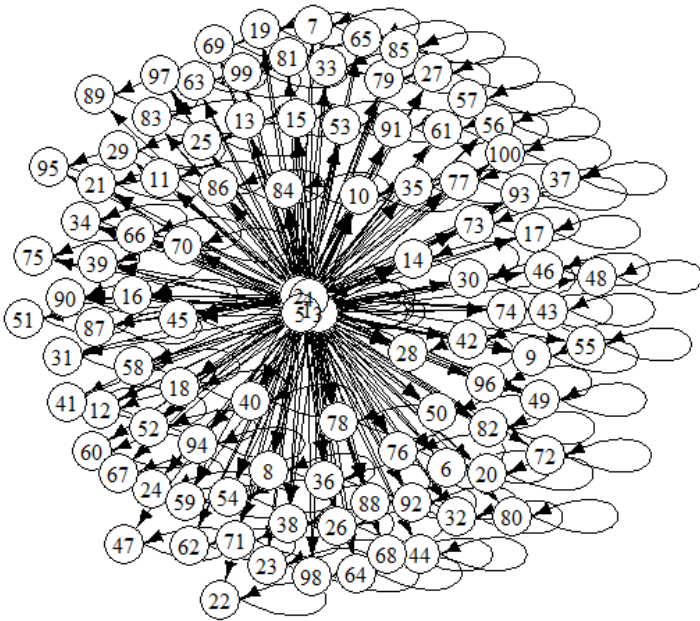


Рис. 11. Социальный граф блогеров и их подписчиков

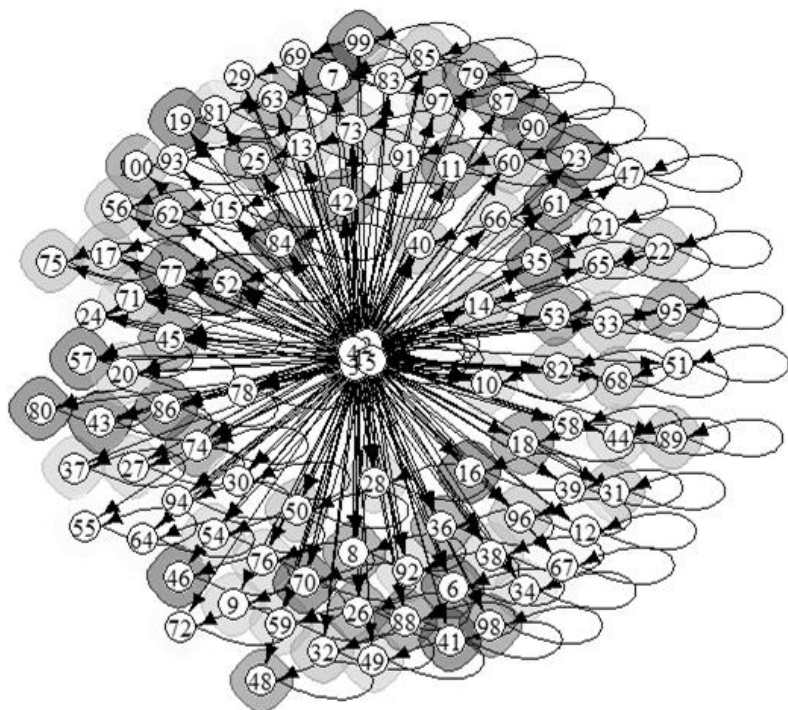


Рис. 12. Сильные компоненты и спутники

Аналогичная ситуация с микропараметрами сети. Блогеры обладают властью над своими подписчиками, которые прислушиваются к их мнению. Блоги служат хорошим инструментом для рекламы.

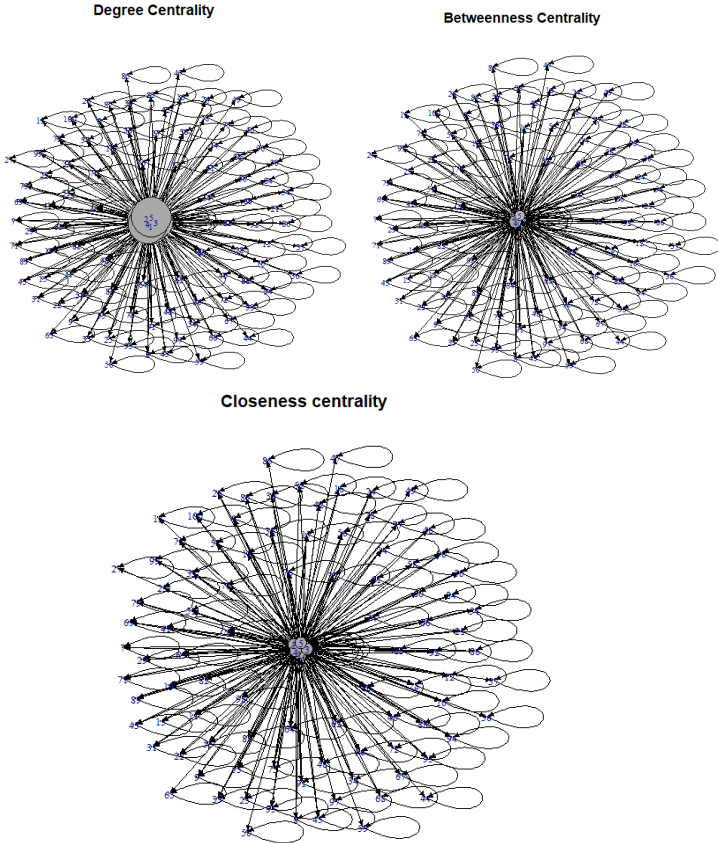


Рис. 13. Центральность

#### 4. Задачи прогноза на сетях

Для решения задачи прогноза разработан и программно реализован с помощью языка R оригинальный алгоритм. Он базируется на таких понятиях, как эргодическое множество, поглощающие состояния и спутники [6, 12].

Находим обращение графа  $P$ . Сначала необходимо выяснить, сильно связный граф или нет. Если да, то финальное мнение группы будет единым. Тогда необходимо решить систему

$$\begin{aligned}
 a_1 \cdot w_1 + b_1 \cdot w_2 + \dots + m_1 \cdot w_n &= w_1, \\
 a_2 \cdot w_1 + b_2 \cdot w_2 + \dots + m_2 \cdot w_n &= w_2, \\
 &\dots \\
 a_{n-1} \cdot w_1 + b_{n-1} \cdot w_2 + \dots + m_{n-1} \cdot w_n &= w_{n-1}, \\
 w_1 + w_2 + \dots + w_n &= 1,
 \end{aligned}$$

где

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_n \\ b_1 & b_2 & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ & & \dots & \\ m_1 & m_2 & m_n \end{pmatrix} \text{ — обращение орграфа влияний.}$$

В данной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) неизвестными служат элементы матрицы  $W$ . Перенос всех неизвестных в правую часть равносильна операции в два шага:

1.  $P^T - E$ ,  $P^T$  — транспонированная матрица, которая является исходным орграфом влияний, а  $E$  — единичная матрица.
2. Замена последней строки полученной матрицы на единицы.

Таким образом реализуется нахождение матрицы  $W$ : из исходной матрицы вычитается единичная и последняя строка заменяется на единицы. Получаем матрицу  $A$  в СЛАУ  $AX = b$ . В векторе  $b$  все элементы равны 0, кроме последнего, который равен 1. Далее решаем СЛАУ с помощью встроенных методов языка R и получаем матрицу  $W$ .

Если граф не сильно связный, то поиск финальных мнений делится на а) поиск сильных подгрупп (эргодических множеств) и б) поиск спутников:

- а. Для поиска эргодических множеств будем сначала искать сильные компоненты. Если из сильной компоненты не выходит никакая дуга в другие вершины, то множество эргодическое. Также заметим, что если множество содержит только одну вершину, то такое состояние называется поглощающим.

б. Вершины, которые не входят в эргодические множества – переходные, иначе говоря – спутники.

3. Для каждого из эргодических множеств можно найти финальное мнение, используя алгоритм для сильно связного графа.

4. Далее строим канонический вид обращения исходной матрицы

	$S_1$	$S_2$	...	$S_r$	$T$
$S_1$	1				0
$S_2$		1			
...			1		
$S_r$				1	
$T$	$R$				$Q$

где  $S$  – сильные подгруппы (в том числе поглощающие состояния),  $T$  – спутники.

В матрице  $R$  строки – это номера вершин, которые являются *переходными* состояниями, а столбцы – это *поглощающие* состояния и *эргодические* множества. В матрице  $Q$  и строки, и столбцы – это номера вершин, которые являются *переходными* состояниями.

Если первоначально цепь Маркова находится в переходном состоянии  $y_{r+1,j}$ , то вероятность ее перехода в эргодическое множество  $S_i$  равна значению элемента  $b_{ji} \in B = NR$ .

Фундаментальная матрица  $N$  поглощающей цепи Маркова находится по формуле  $N = (E - Q)^{-1}$ , где  $E$  – единичная матрица. Формула для  $B$  имеет вид  $B = NR$ .

Финальное мнение *поглощающих* состояний остается равным их начальному мнению.

Осталось найти финальное мнение *переходных* состояний

$$x_{r+1,j}^\infty = \sum_{i=1}^r b_{ji} \left( \sum_{k=1}^{n_i} w_k^{(i)} x_{ik}(0) \right).$$

Вернемся к тестовому примеру из раздела 2. Разберём подробно алгоритм на примере с сотрудниками. Сотрудникам можно дать неделю на размышления, но секретарю нужно знать сразу, в какой ценовой категории искать подарок. Поэтому важно спрогнозировать финальное мнение каждого сотрудника.

Сначала необходимо найти обращение матрицы влияний:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Для реализации общего случая понадобится вычислять сильные компоненты орграфа. Для этого в языке R есть специальный инструмент, который имеет три составляющие: показывает общее количество компонент, число вершин в каждой компоненте, а также к какой компоненте принадлежит каждая вершина. Выполняя поиск сильных компонент, получим

```
$membership
[1] 5 6 4 4 2 3 3 3 1 1 1 1 1 1 1
$size
[1] 7 1 3 2 1 1
$no
[1] 6
```



Membership: Первая вершина принадлежит 5-й компоненте, вторая компонента принадлежит 6-й компоненте, третья и четвертая принадлежат 4-й компоненте, пятая – 2-й компоненте, шестая, седьмая и восьмая принадлежат 3-й, с девятой по пятнадцатую – 1-й компоненте.

Csize: вторая, пятая и шестая компоненты содержат по одной вершине, четвертая – две вершины, третья компонента имеет три вершины, а первая – семь вершин.

No: всего 6 компонент.

Для дальнейшей реализации понадобится каждую компоненту выделять в отдельный вектор. Так как все компоненты могут иметь различную длину вектора, поступим следующим образом. Создадим матрицу (назовём её  $G$ ), где каждая строка обозначает свою компоненту. В начале каждой строки идут номера вершин, которые принадлежат данной компоненте, далее идут нули. Вершины обязательно должны идти в начале, чтобы в дальнейшем при обходах строк в матрице идти не до конца строки, а сразу по значащим вершинам. Номера вершин в матрице уникальны и не могут повторяться в другой строке. Количество строк в такой матрице возьмем равным значению No (количество компонент).

Для примера выше матрица с векторами будет выглядеть следующим образом:

$$G = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Также понадобится вектор для поглощающих состояний, который будет содержать номера вершин.

По определению поглощающее состояние – это эргодическое множество с одним состоянием. Можно сказать, что это та вершина, из которой не выходит ни одной дуги в другие вершины, есть только петля. В матрице  $P$  (транспонированной к ис-

ходной) собраны те вершины, где на диагонали стоят единицы. Заметим, что не обязательно такие состояния должны быть.

В нашем примере одно поглощающее состояние – вершина 2, так как только элемент  $(2, 2)$  имеет значение 1.

Далее необходимы матрица, где будут собираться отдельно эргодические множества, и вектор, который будет собирать *только* переходные состояния, т.е. поглощающие состояния собираются отдельно (выше был описан алгоритм). Напомним, что не любая сильная компонента соответствует эргодическому множеству.

Чтобы проверить, что множество эргодическое, будем использовать следующий алгоритм. Возьмём матрицу  $G$ , в которую собраны компоненты. Напомним, что каждой строке соответствует отдельная компонента. Будем проверять, сколько вершин находится в каждой строке. Напомним, что в начале каждой строки идут номера вершин, которые принадлежат данной компоненте, далее идут нули. Таким образом, можно подсчитать число вершин, просто сосчитав количество положительных элементов.

Если в строке находится только одна вершина, то она подозрительна на занесение в вектор с *переходными* состояниями. Необходимо проверить ещё, что данная отдельная вершина не была занесена в вектор с *поглощающими* состояниями. Если нет, то эта вершина заносится в вектор, содержащий переходные состояния.

Если в строке матрицы  $G$  находится более одной вершины, то теперь необходимо проверить, что данная сильная компонента является эргодическим множеством. Для этого проверим, что ни из одной вершины сильной компоненты не выходит дуга в другие вершины. Для каждой сильной компоненты создается отдельный вектор с вершинами, не входящими в эту сильную компоненту. Далее проверяем, что в обращении исходной матрицы нет элементов, равных нулю, у которых номер строки — это вершина из компоненты, а номер столбца – это вершина, не входящая в сильную компоненту. Если всё это выполняется, то множество эргодическое и можно сразу вычислить финальное мнение группы (т.е. вершин, входящих в эргодическое множество), используя алгоритм для сильно связного графа.

Если множество оказалось не эргодическим, то заносим вершины в вектор с *переходными* вершинами. Заметим, что не нужно проверять, что эти вершины не являются поглощающими состояниями.

Весь алгоритм по поиску эргодических, переходных вершин и поглощающих состояний можно представить в виде структурной схемы (рис. 14 и рис. 15)

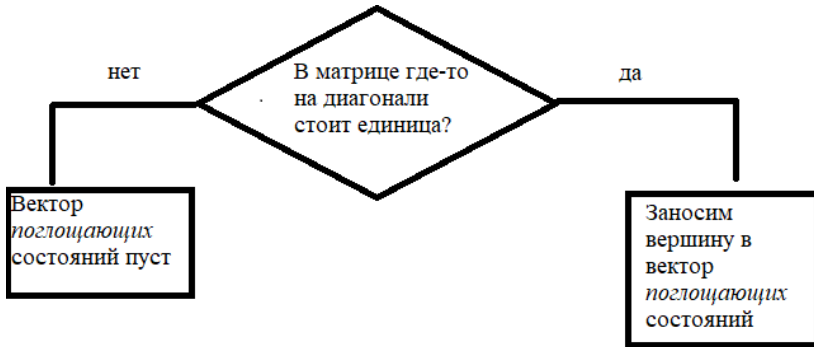


Рис. 14. Этап 1

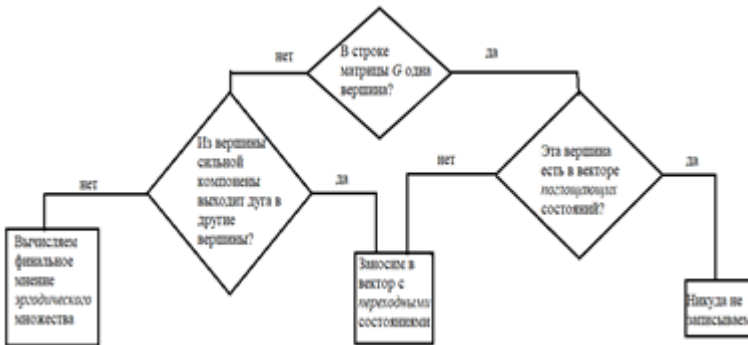


Рис. 15. Этап 2

Проиллюстрируем вышесказанное на тестовом примере из раздела 2.

Вершины 5, 1 и 2 подозрительны на внесение в вектор с *переходными* состояниями. Однако вершина 2 уже попала в вектор

поглощающих состояний. Значит, пока вектор переходных состояний состоит из вершин 5 и 1.

Рассмотрим теперь строки, где больше одной вершины. Это первая строка с вершинами 9–15, четвёртая строка с вершинами 6, 7 и 8, а также пятая строка с вершинами 3 и 4.

Проверим, что в компоненте с вершинами 6, 7 и 8 нет ни одной дуги в другие вершины. Вектор с другими вершинами `Not_Point_in_D` содержит вершины 1, 2, 3, 4, 5, 9 и 10. Пройдя всю матрицу  $P$ , можно заметить, что нет ни одного элемента с координатами  $P[D[i], \text{Not\_Point\_in\_D}[j]] = 0$ , т.е. нет ни одной дуги, выходящей из вершин сильной компоненты в другие вершины. Следовательно, это *эргодическое* множество.

Если проделать то же самое с сильной компонентой с вершинами 3, 4, то можно увидеть, что есть дуга из 3 в 2, где 2 не входит в данную сильную компоненту. Следовательно, это не эргодическое множество и вершины 3, 4 записываются в вектор с *переходными* состояниями.

То же видно и у первой сильной компоненты с вершинами 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. Из 9 вершины есть дуги в вершины 6 и 8, а также из 10 выходит дуга во 2 вершину. Следовательно, это не эргодическое множество и вершины 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 тоже записываются в вектор с *переходными* состояниями.

Итак, вектор с *поглощающими* состояниями состоит из единственной вершины 2; вектор с *переходными* состояниями состоит из вершин 1, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. *Эргодическое* множество здесь одно и состоит из вершин 6, 7 и 8.

Вычислим финальное мнение группы с вершинами 6, 7 и 8. Для этого используем алгоритм для сильно связного графа. Необходимо выписать матрицу  $P$  – обращение орграфа влияний. Всегда будем получать СЛАОУ вида

$$a_1 \cdot w_1 + b_1 \cdot w_2 + \dots + m_1 \cdot w_n = w_1,$$

$$a_2 \cdot w_1 + b_2 \cdot w_2 + \dots + m_2 \cdot w_n = w_2,$$

...

$$a_{n-1} \cdot w_1 + b_{n-1} \cdot w_2 + \dots + m_{n-1} \cdot w_n = w_{n-1},$$

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1,$$

где

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_n \\ b_1 & b_2 & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ & \dots & & \\ m_1 & m_2 & m_n \end{pmatrix}.$$

В данной СЛАУ неизвестные включены в матрицу  $W$ . Перенос всех неизвестных в правую часть равносильна операции в два шага:

1.  $P^T - E$ ,  $P^T$  – транспонированная матрица, которая является исходным оргграфом влияний, а  $E$  – единичная матрица;

2. Замена последней строки полученной матрицы на единичную строку.

Таким образом, будем реализовать нахождение матрицы  $W$ : из исходной матрицы вычитаем единичную и последнюю строку заменяем единичной. Получим матрицу  $A$  в СЛАУ  $AX = b$ . Вектор  $b$  – это вектор, в котором все элементы равны 0, кроме последнего, который равен 1. Далее решаем СЛАУ с помощью встроенных методов языка R и получаем матрицу  $W$ .

Получается следующая матрица:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Транспонируем эту матрицу, чтобы получить исходную. В данном случае

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Вычитаем из неё единичную матрицу и заменяем последнюю строку на единичную:

$$L = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решаем полученное СЛАУ  $LW = b$  и получаем

$$W = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Осталось вычислить общее финальное мнение группы:

$$\begin{aligned} x^\infty &= \sum_{i=1}^n w_i x_i(0) = \\ &= \frac{1}{3} x_6(0) + \frac{1}{3} x_7(0) + \frac{1}{3} x_8(0) = \frac{1}{3} 500 + \frac{1}{3} 800 + \frac{1}{3} 600. \end{aligned}$$

Далее перейдём к построению матриц  $R$  и  $Q$ .

Матрица  $R$  – матрица, у которой строки – это номера вершин, которые являются *переходными* состояниями, а столбцы – это *поглощающие* состояния и *эргодические* множества.

Матрица  $Q$  – матрица, у которой и строки, и столбцы – это номера вершин, которые являются *переходными* состояниями.

Начнём с матрицы  $Q$ . Схематично она будет выглядеть как

$$Q = \begin{pmatrix} A[a,a] & A[a,b] & \cdots & A[a,c] \\ A[b,a] & A[b,b] & \cdots & A[b,c] \\ & \dots & & \\ A[c,a] & A[c,b] & \cdots & A[c,c] \end{pmatrix}.$$

где  $P$  – обращение исходной матрицы;  $a, b, \dots, c$  – *переходные* состояния.

В примере, рассмотренном выше, матрица  $Q$  имеет вид

$$\begin{pmatrix}
 9 & \left( \begin{array}{cccccccccccc}
 \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 11 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 12 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 14 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\
 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\
 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\
 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right) \\
 (9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 5 & 3 & 4 & 1)
 \end{pmatrix}$$

где слева и внизу указаны номера вершин.

Перейдём к построению матрицы  $R$ . Её схема выглядит как

$$R = \begin{pmatrix}
 P[a,u] & \cdots & P[a,v] & P[a,d] + \dots + P[a,f] & \cdots & P[a,g] + P[a,z] \\
 P[b,u] & \cdots & P[b,v] & P[b,d] + \dots + P[b,f] & \cdots & P[b,g] + P[b,z] \\
 \cdots & & & & & \\
 P[c,u] & \cdots & P[c,v] & P[c,d] + \dots + P[c,f] & \cdots & P[c,g] + P[c,z]
 \end{pmatrix},$$

где  $P$  – обращение исходной матрицы;  $a, b, \dots, c$  – переходные состояния;  $u, \dots, v$  – поглощающие состояния;  $d, \dots, f$  – вершины, входящие в первое эргодическое множество;  $g, \dots, z$  – вершины, входящие в  $n$ -е эргодическое множество.

В нашем примере матрица  $R$  выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{c}
 9 \\
 10 \\
 11 \\
 12 \\
 13 \\
 14 \\
 15 \\
 5 \\
 3 \\
 4 \\
 1
 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c}
 \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad 0 \\
 0 \quad \frac{1}{6} \\
 0 \quad 0 \\
 0 \quad 0 \\
 0 \quad 0 \\
 0 \quad 0 \\
 \frac{2}{3} \quad 0 \\
 0 \quad \frac{1}{4} \\
 0 \quad 0 \\
 0 \quad 1
 \end{array} \right) \\
 (S \quad 2)
 \end{array}$$

Слева – вершины переходных состояний (строки), а внизу  $S$  – сильная компонента, она включает в себя вершины 6, 7 и 8. Вершина 2 – поглощающее состояние. Как можно заметить, элемент  $[9, S]$  получен путём сложения элементов обращения исходной матрицы: просуммировали элементы  $P[9, 6] + P[9, 7] + P[9, 8]$ .

После того как получены матрицы  $R$  и  $Q$ , можно перейти к нахождению матриц  $N$  и  $B$ . Формула для  $N$ :  $N = (E - Q)^{-1}$ , где  $E$  – единичная матрица. Инструменты языка R позволяют быстро найти матрицу  $N$  через функцию *solve*. Формула для  $B$ :  $B = NR$ .

Для тестового примера



$$N = \begin{pmatrix} 1,5 & 1,5 & 0,146 & 0,167 & 0,292 & 0,833 & 0,0625 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 4,5 & 0,437 & 0,5 & 0,875 & 0,25 & 0,1875 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 4,5 & 1,437 & 0,5 & 0,875 & 0,25 & 0,1875 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 4,5 & 0,604 & 1,833 & 1,208 & 0,917 & 0,6875 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 4,5 & 0,4375 & 0,5 & 2,875 & 0,25 & 0,1875 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 4,5 & 0,4375 & 0,5 & 2,875 & 4,25 & 0,1875 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 4,5 & 0,9375 & 0,5 & 1,875 & 2,25 & 1,6875 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1,3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{3} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Осталось найти финальное мнение *поглощающих* состояний и финальное мнение *переходных* состояний.

Финальное мнение поглощающих состояний равно своему первоначальному мнению:  $x_2^\infty = 900$ .

Финальное мнение *переходных* состояний

$$x_{r+1, j}^\infty = \sum_{i=1}^r b_{ji} \left( \sum_{k=1}^{n_i} w_k^{(i)} x_{ik}(0) \right),$$

$$x_9^\infty = \frac{3}{4} \cdot S + \frac{1}{4} \cdot x_2^\infty = 450 + 225 = 675,$$

$$x_{10}^\infty = \frac{1}{4} \cdot S + \frac{3}{4} \cdot x_2^\infty = 150 + 675 = 825,$$

$$x_{11}^\infty = \frac{1}{4} \cdot S + \frac{3}{4} \cdot x_2^\infty = 825,$$

$$x_{12}^\infty = \frac{1}{4} \cdot S + \frac{3}{4} \cdot x_2^\infty = 825,$$

$$x_{13}^\infty = \frac{1}{4} \cdot S + \frac{3}{4} \cdot x_2^\infty = 825,$$

$$x_{14}^{\infty} = \frac{1}{4} \cdot S + \frac{3}{4} \cdot x_2^{\infty} = 825,$$

$$x_{15}^{\infty} = \frac{1}{4} \cdot S + \frac{3}{4} \cdot x_2^{\infty} = 825,$$

$$x_5^{\infty} = \frac{2}{3} \cdot S + \frac{1}{3} \cdot x_2^{\infty} = \frac{2}{3} \cdot 600 + \frac{1}{3} \cdot 900 = 700,$$

$$x_3^{\infty} = 0 \cdot S + 1 \cdot x_2^{\infty} = 900,$$

$$x_4^{\infty} = 0 \cdot S + 1 \cdot x_2^{\infty} = 900,$$

$$x_1^{\infty} = 0 \cdot S + 1 \cdot x_2^{\infty} = 900.$$

Итого получаем:

$$x_1^{\infty} = 900; x_2^{\infty} = 900; x_3^{\infty} = 900; x_4^{\infty} = 900; x_5^{\infty} = 700; x_6^{\infty} = 600; \\ x_7^{\infty} = 600; x_8^{\infty} = 600; x_9^{\infty} = 675; x_{10}^{\infty} = 825; x_{11}^{\infty} = 825; x_{12}^{\infty} = 825; \\ x_{13}^{\infty} = 825; x_{14}^{\infty} = 825; x_{15}^{\infty} = 825.$$

Таким образом, полностью реализован алгоритм по поиску финальных мнений. Найдены финальные мнения всех групп состояний – *поглощающих*, *переходных* и *эргодических* множеств.

По результатам тестового примера можно сделать вывод, что «влиятельными» членами данной компании (руководителя в счёт не берём) являются сотрудники 2, 6, 7 и 8. Несмотря на то, что группа из сотрудников 9–15 достаточно большая и тесно общается, в данном случае их конечные мнения всё равно формируются благодаря влиятельным сотрудникам, так как работники 10 и 9 являются своеобразным мостом между их группой и влиятельными членами компании. Соответственно, сотрудники 2, 6, 7, 8 косвенно влияют на 11–15, формируя их мнение.

Таким образом, так или иначе все коллеги прислушиваются к мнению «влиятельных» работников, изменяя своё собственное, в то время как влиятельные сотрудники прислушиваются или только к мнению друг друга – как в случае с работниками 6, 7, 8 – или вообще своего мнения не меняют, как в случае с работником 2. Поэтому если секретарь захочет поменять мнение всего коллектива (например увеличить сумму подарка), то достаточно будет повлиять на мнения сотрудников 2, 6, 7 и 8, а не всех пятнадцати человек.

Теперь введём данные второго примера из раздела 2 (футбольный матч) в программу на языке R и интерпретируем полученные результаты. При векторе начальных мнений (10000, 5000, 5000, 5000, 1000, 5000, 8000, 1000, 1000, 1000, 1000, 300, 500, 800, 400, 900, 200, 1000, 1000, 1000) получаем следующие результаты. Вершины 1–7 образуют эргодическое множество, их финальное мнение равно 6876,079. Внутри этой группы люди влияют друг на друга, хотя не все члены между собой обязаны быть знакомы лично (например, жена работника 3 и начальник этого же работника). Но на эту группу никто извне не влияет. Неженатые и не имеющие друзей – фанатов футбола подписчики блогера 4 находятся под полным его влиянием и также готовы потратить на билет 6876,079 рублей. Вершины 17–19 образуют сильную компоненту, однако не являются эргодическим множеством. На семьянина 17 оказывает влияние блогер 4. Несмотря на то, что 17 должен посоветоваться с женой перед покупкой билета, можно видеть, что жена всецело доверяет мужу. Соответственно 17–19 также готовы потратить 6876,079 рублей. Вершины 8–11, 20 также образуют сильную компоненту, но на них извне влияет вершина 2. В их случае 8 готов потратить 7410,387 рублей, 9-й – 7392,495 рублей, 10-й – 7650,439, 11-й – 7451,822 и 20-й – 7520,356 рублей.

Можно сделать вывод, что блогер имеет очень большое влияние не только на своих непосредственных друзей и подписчиков, но и на их жён и друзей.

Программа на R хорошо работает и на третьем примере, показывая итоговые финальные мнения у каждой вершины графа. Подруги-блогеры формируют мнение внутри своей группы и оказывают огромное влияние на своих непосредственных подписчиц, а также на их подруг, которые не являются подписчицами. Можно сказать, что если производитель колясок захочет дать свою рекламу, то лучше обратиться напрямую к этим блогерам, нежели воздействовать непосредственно на покупательниц.

Хотя отдельные действия алгоритма, такие как транспонирование матриц и решение СЛАУ, решаются стандартными инструментами языка R, в совокупности реализация алгоритма

оригинальна, поскольку до сих пор ещё не была написана программа, вычисляющая финальные мнения.

Наиболее сложной частью алгоритма является выполнение циклов. Самая сложная в данной реализации – это вложенный цикл (глубина равна 2, т.е. внутренний и внешний цикл). Оценивая сложность алгоритма, необходимо использовать только ту часть, что растёт больше всего. В итоге получим, что сложность алгоритма вычисляется как  $O(n^2)$ , где  $n$  – число вершин графа. Такая сложность вполне приемлема, соответственно программу можно применять и для графов с куда большим количеством вершин.

## **5. Заключение**

В статье рассмотрены задачи анализа и прогноза на социальных сетях применительно к решению задачи управления целевой аудиторией в маркетинге. Предложен оригинальный алгоритм вычисления финальных мнений членов целевой аудитории для частного случая сильно связанного орграфа влияний и общего случая произвольного орграфа. Этот алгоритм и другие методы анализа реализованы на языке программирования R и апробированы на тестовых примерах.

В дальнейшем предполагается опробовать предложенную методику исследования целевой аудитории на реальных предприятиях, а также рассмотреть задачи управления мнениями, использующие выявленную на этапе анализа структуру целевой аудитории.

## **Литература**

1. АГИЕВА М.Т. *Модели управления на социальных сетях в маркетинге* // Инженерный вестник Дона. – 2018. – №1. – URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2018/4670](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2018/4670).
2. АГИЕВА М.Т. *Задачи анализа на социальных сетях в маркетинге* // Инженерный вестник Дона. – 2018. – №2. – URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2018/4889](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2018/4889).

3. АЛЕСКЕРОВ Ф.Т., БЛАГОВЕЩЕНСКИЙ Н.Ю., САТАРОВ Г.А. и др. *Влияние и структурная устойчивость в Российском парламенте (1905–1917 и 1993–2005 гг.)*. – М.: Физматлит, 2007. – 312 с.
4. БРЕЕР В.В. *Стохастические модели социальных сетей* // Управление большими системами. – 2009. – Вып. 27. – С. 169–204.
5. БРЕЕР В.В., НОВИКОВ Д.А., РОГАТКИН А.Д. *Управление толпой. Математические модели порогового коллективного поведения*. – М.: ЛЕНАНД, 2016. – 168 с.
6. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства*. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2010. – 228 с.
7. ГУБАНОВ Д.А., КОРГИН Н.А., НОВИКОВ Д.А., РАЙКОВ А.Н. *Сетевая экспертиза*. – М.: Эгвес, 2011. – 166 с.
8. КАБАКОВ Р.И. *R в действии. Анализ и визуализация данных в программе R*. – М.: ДМК Пресс, 2016. – 588 с.
9. КУЗНЕЦОВ А.Л. *Об анализе социальных сетей и их метриках* // Материалы VIII Международной студенческой электронной научной конференции «Студенческий научный форум». – URL: [www.scienceforum.ru/2017/2830/31138](http://www.scienceforum.ru/2017/2830/31138) (дата обращения: 14.03.2018).
10. ЛИФИНЦЕВ Д.В. *Оценка связей индивида в микросоциуме на основе методов анализа социальных сетей* // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Серия: Филология, педагогика, психология. – 2013. – №5. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/otsenka-svyazey-individual-v-mikrosotsiume-na-osnove-metodov-analiza-sotsialnyh-setey> (дата обращения: 14.03.2018).
11. МОРЕНО Я.Л. *СОЦИОМЕТРИЯ: Экспериментальный метод и наука об обществе*. – М.: Академический Проект, 2001. – 384 с.
12. РОБЕРТС Ф. *Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам*. – М.: Наука, 1986. – 496 с.
13. BARNES J.A. *Classes and Committees in a Norwegian Island Parish* // Human Relations. – 1954. – No. 7. – P. 39–58.

14. BERGER R.J. *A Necessary and Sufficient Conditions for Reaching a Consensus using De Groot's method* // J. of American Statistical Association. – 1981. – Vol. 76. – P. 415–419.
15. BUTTLE F.A. *Word-of-Mouth: Understanding and Managing Referral Marketing* // J. of Strategic Marketing. – 1998. – Vol. 6. – P. 241–254.
16. CHATTERJEE S., SENETA E. *Toward Consensus: Some Convergence Theorems on Repeated Averaging* // J. of Applied Probability. – 1977. – No. 14. – P. 159–164.
17. CHWE M.S. *Communication and Coordination in Social Networks* // Review of Economic Studies. – 2000. – Vol. 67 – No. 1– P. 1–16.
18. DE GROOT M.H. *Reaching a Consensus* // J. of American Statistical Association. – 1974. – Vol. 69. – P. 118–121.
19. DE MARZO P., VAYANOS D., ZWIEBEL J. *Persuasion Bias, Social Influence and Unidimensional Opinions* // Quaterly J. of Economics. – 2003. – No. 118(3) . – P. 909–968.
20. FRENCH J.R. *A formal theory of social power* // The Psychological Review. – 1956. – No. 63. – P. 181–194.
21. GODES D., MAYZLIN D. *Using Online Conversations to Study Word of Mouth Communication* // Marketing Science. – 2004. – No. 23. – P. 545–560.
22. GOLDENBERG J., LIBAI B., MULLER E. *Talk of the Network: A Complex Systems Look at the Underlying Process of Word-of-Mouth* // Marketing Letters. – 2001. – No. 2. – P. 11–34.
23. GOLUB B., JACKSON M. *Naive Learning in Social Networks and the Wisdom of Crowds* // American Economic J.: Microeconomics. – 2010. – No. 2(1). – P. 112–149.
24. HARARY F. *A Criterion for Unanimity in French's Theory of Social Power* // Studies in Social Power. – Michigan: Institute of Sociological Research, 1959. – P.168–182.
25. HEGSELMAN R., KRAUSE U. *Opinion Dynamics and Bounded Confidence Models: Analysis and Simulation* // J. of Artificial Societies and Social Simulation. – 2002. – Vol.5 – No. 3– P. 226–229.

26. JACKSON M. *Social and Economic Networks*. – Princeton University Press, 2008. – 504 p.
27. JACKSON M., WOLINSKY A. *A strategic model of social and economic networks* // J. Economic Theory. – 1996. – Vol. 71(1). – P. 44–74.
28. KRAUSE U. *A Discrete Nonlinear and Non-autonomous Model of Consensus Formation* / Communications in Difference Equations. – Amsterdam: Gordon and Breach Publishers, 2000. – P. 227–236.
29. LORENZ J. *A Stabilization Theorem for Dynamics of Continuous Opinions* // Physica A. – 2005. – Vol. 355. – P. 217–223.
30. MASUDA N., KAWAMURA Y., KORI H. *Analysis of relative influence of nodes in directed networks* // Physical Review. – 2009. – E80, 046114.
31. NEWMAN M. *The Structure and Function of Complex Networks* // SIAM Review. – 2003. – Vol. 45(2). – P. 167–256.
32. ROBINS G., PATTISON P., ELLIOT P. *Network Models for Social Influence Processes* // Psychometrica. – 2001. – No. 66(2). – P. 161–190.
33. WATTS D. *The "New" Science of Networks* // Annual Review of Sociology. – 2004. – Vol. 30. – P. 243–270.

## ANALYSIS AND FORECASTING PROBLEMS IN THE CONTROL OF TARGET AUDIENCE IN MARKETING

**Movlatkhan Agieva**, Ingush State University, Nazran, Cand. Sc., Associate Professor (agieva25@mail.ru).

**Julia Babicheva**, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Bachelor of Science (yulya.babicheva@yandex.ru).

**Natalya Okulist**, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Bachelor of Science (nata-0k@rambler.ru).

**Guennady Ougolnitsky**, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doctor of Sc., Professor (ougoln@mail.ru).

*Abstract: Some networks analysis and forecasting models are considered in the paper relative to marketing. A brief survey of the control and influence models on social networks is presented. Namely, the problems include determination of the strong subgroups and satellites, calculation of quantitative characteristics of the network, determination of the final opinions of the members of the target audience*

*based on their initial opinions and mutual interactions. For the solution of the forecasting problem an original algorithm is developed and implemented by means of the programming language R. The algorithm is described in details and considers a specific case of a strongly connected digraph and the general case. The complexity of the algorithm is estimated. Other named problems can be solved by embedded functions of the language that is illustrated by test examples together with the results of the authors' algorithm. The model examples use influence digraphs with 10-15 and more than 100 vertices. Such closeness measures as degree centrality, closeness centrality, and betweenness centrality are calculated for the model example, their interpretation is given. Solution of the analysis and forecasting problems essentially facilitates the problem of control of the opinions of target audience in marketing. The directions of future research in building and analysis of the models of opinion control in marketing are outlined.*

**Keywords:** marketing, network analysis and forecasting models, control of target audience.

УДК 519:301

ББК 60.54; 32.81

DOI: <https://doi.org/10.25728/ubs.2019.79.2>

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.*

*Поступила в редакцию 06.10.2018.*

*Опубликована 31.05.2019.*



# ДВА ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ РАСШИРЕНИЯ МОЩНОСТИ ПРОИЗВОДСТВА НА РЫНКЕ ОЛИГОПОЛИИ

Акинфиев В. К.<sup>1</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Производственная мощность компании является одним из определяющих факторов ее успеха в конкурентной борьбе, так как позволяет удовлетворить текущий и будущий рыночный спрос. В статье предлагается количественная модель для определения инвестиций в развитие производственных мощностей компаний на конкурентных олигополистических рынках на основе равновесия Нэша, сформулированная как проблема оптимизации. Рассматривается два типа рынка: рынок с эластичным спросом (рынок Курно) и рынок с неэластичным спросом. Второй тип рынка характерен для рынков сырьевых товаров (нефти, газа, металлургического угля и др.), которые находятся в начале производственной цепочки создания конечного продукта. В первом случае задача формулируется как совокупность взаимосвязанных квадратичных задач оптимизации. Для ее решения предложен метод сведения исходной задачи к решению смешанной задачи дополнительности (MCP). Во втором случае предложен метод решения задачи, основанный на совместном использовании многоагентного имитационного моделирования и анализа матричных игр. Разработана имитационная модель, которая учитывает взаимосвязь между инвестициями компаний (агентов) и динамикой рынка. Предложенный метод позволяет получить приближенное решение исходной задачи, так как при построении имитационной модели используются эвристические принципы и алгоритмы поведения агентов.*

Ключевые слова: задача расширения производства, многоагентное моделирование, матричные игры.

## 1. Введение

Любая компания в процессе своей жизнедеятельности стремится повысить свою конкурентоспособность, долю рынка, стоимость и прибыльность своего бизнеса. Одним из основных способов достижение этих целей являются инвестиции в расширение и модернизацию производственных мощностей компании.

---

<sup>1</sup> Валерий Константинович Акинфиев, д.т.н., в.н.с. (akinf.valery@yandex.ru).

Традиционный подход к оценке эффективности и выбору инвестиционных решений компаний основан на методе моделирования и оценки дисконтированных денежных потоков (DCF). В этих моделях прогноз динамики цен и спроса на продукцию компаний являются экзогенными переменными. Следует отметить, что оценки эффективности вариантов инвестиционных стратегий существенным образом зависят от достоверности и обоснованности этих прогнозов. Как правило, компании решают две взаимосвязанные задачи: долгосрочную – развитие производственных мощностей и краткосрочную – определение объемов производства и поставок продукции на рынок [1].

Большинство рынков в современной экономике относятся к рынкам несовершенной конкуренции, где каждый производитель в состоянии существенно влиять на цену продукции. Наиболее интересным для исследования типом рыночных структур является олигополия. Предполагается, что компании принимают инвестиционные решения в условиях неопределенности и независимо друг от друга и их выбор влияет на соотношение спроса и предложения на рынке и, соответственно, на рыночную цену продукции. Каждая компания стремится выбрать такую инвестиционную стратегию, которая обеспечит ей максимальный выигрыш в соответствии с заданным критерием.

Следует отметить, что основным побудительным мотивом выбора компаниями той или иной инвестиционной стратегии является прогнозируемая динамика рыночного спроса на продукцию. При растущем рынке компании инвестируют, как правило, в развитие производственных мощностей и расширение производства. В противном случае более эффективной является инвестиционная стратегия, направленная на модернизацию существующего производства и сокращение производственных издержек. Как правило, компании используют обе этих стратегии одновременно [2].

Различным аспектам олигополистического поведения посвящено большое количество как зарубежной, так и российской литературы, включая исследование классических моделей (Курно, Бертран и др.). Как правило, в этих работах

анализируются рыночные стратегий компаний, которые состоят либо в выборе объема производства (поставок продукции на рынок), либо в выборе цены поставки продукции. В этих работах мощность производства компании считается заданной и выступает в качестве ограничения на выбор объема производства.

Последние годы появились работы, в которых мощность производства также рассматривается в качестве управляемой переменной задачи. При этом приращение мощности производства, необходимое для производства оптимальных объемов предложения продукции на рынок, определяется выбором инвестиционных стратегий компании [6–8, 11]. Исследуемая в работе задача лежит в русле данного научного направления и развивает методы анализа рыночных стратегий компаний в области инвестиционных решений, направленных на повышение их конкурентных преимуществ (увеличение производственных мощностей и сокращения производственных издержек). Новизной рассматриваемой в работе задачи является также учет в модели особенностей рынка с неэластичным спросом, который характерен для добывающих отраслей промышленности.

Рассмотрим локальный рынок, на котором присутствует  $N$  компаний ( $i = 1, \dots, N$ ), производящих однородную продукцию. Прогнозный горизонт равен  $T$  периодам,  $t = 1, \dots, T$ . Пусть  $D(t)$  – рыночный спрос на продукцию,  $P(t)$  – рыночная цена в период  $t$ ,  $S(t)$  – суммарное предложение (объем поставок продукции) со стороны компаний-производителей.

В работе рассматривается два типа рынка:

#### **Рынок с эластичным спросом (рынок Курно).**

Рыночная цена продукции описывается линейной обратной функцией спроса  $P(t) = a - b \cdot S(t)$ , где  $a$  и  $b$  являются константами. В данной модели предполагается, что спрос на продукцию со стороны потребителей  $D(t)$  линейно зависит от ее рыночной цены, которая определяется предложением продукции со стороны компаний-производителей  $S(t)$ .

#### **Рынок с неэластичным спросом.**

Для данного типа рынка характерно, что спрос на продукцию  $D(t)$  в краткосрочной перспективе не зависит от

изменения ее рыночной цены и задается в модели экзогенно в виде некоторой наперед заданной функции времени  $D(t)$  или набора таких функций (сценариев).

Таким свойством обладают рынки сырьевых товаров (нефти, газа, металлургического угля и др.), которые находятся в начале производственной цепочки создания конечного продукта. При этом рыночная цена, которая формируется, как правило, с использованием биржевых механизмов, зависит в каждый период  $t$  от баланса спроса и предложения.

В отличие от рынка с эластичным спросом, в каждый период времени рыночная цена формируется на основе соотношения спроса на продукцию  $D(t)$  и суммарного предложения со стороны компаний  $S(t)$ . Тогда

$$(1) P(t) = P(0) \left( 1 + \gamma \frac{D(t) - S(t)}{D(t)} \right)$$

где  $P(0)$  – цена на начало прогнозного периода;  $\gamma$  – эластичность цены по величине превышения спроса над предложением. Предполагается, что  $D(t) = S(t)$ . В случае если  $D(t) - S(t) \geq 0$  (возникает дефицит предложения на рынке), то рыночная цена растет, в противном случае – избыток предложения и, соответственно, цена падает.

С учетом особенности данного типа рынка и прогноза динамики спроса  $D(t)$  компания выбирает стратегии инвестиций в развитие производства, которые включает выбор в каждый период времени общего размера инвестиций, а также выбор направлений инвестирования. Последнее может включать выбор соотношения финансовых средств, направляемых на реализацию инвестиционных проектов двух типов:

– проектов развития производственных мощностей и расширения производства и, соответственно, увеличения предложения продукции на рынке;

– проектов, направленных на сокращение производственных издержек, которые не увеличивают предложение продукции на рынке, а влияют только на себестоимость и рентабельность ее производства.

В работе задача выбора стратегического поведения компаний на конкурентных рынках формулируется как

совокупность взаимосвязанных нелинейных задач оптимизации. В зависимости от типа рынка рассмотрены и проанализированы два варианта задачи и предложены подходы к ее решению:

**Рынок с эластичным спросом (рынок Курно).** Использование методов точного и приближенного решения задач математического программирования с равновесными ограничениями (Mathematical Programs with Equilibrium Constraints (МРЕС)) [9].

**Рынок с неэластичным спросом.** Совместное использование методов многоагентного имитационного моделирования и методов анализа матричных игр.

## **2. Постановка задачи для рынка с эластичным спросом**

Далее предполагается, что выбор компаниями стратегий инвестиций в расширение своего производства сводится к решению некоторой задаче математического программирования. Рассмотрим постановку задачи для компании  $i$ .

Искомые переменные:

$x_i(t)$  – объем поставок (производство) продукции компанией  $i$ . Тогда суммарный объем поставок на рынок  $S(t) = x_i(t) + x_{-i}(t)$ , где  $x_{-i}(t)$  – суммарный объем поставок другими компаниями. Производственные издержки компании  $i$  зависят от объема производства и поставок продукции и равны  $c_i(t) \cdot x_i(t)$ , где  $c_i(t)$  – удельные производственные издержки.

Пусть рыночная цена продукции описывается линейной обратной функцией спроса, а именно  $P(t) = a - b \cdot (x_i(t) + x_{-i}(t))$ , где  $a$  и  $b$  являются константами.

Инвестиционная стратегия.

$y_i(t)$  – прирост производственной мощности компании  $i$  в период  $t$ , связанный с инвестициями в расширение производства. Тогда  $I_i(t) = k_i \cdot y_i(t + \tau_i)$  – объем инвестиций в период  $t$ , необходимый для увеличения мощности производства, где  $\tau_i$  – временной лаг между периодом инвестирования и периодом прироста мощности производства.

Здесь для простоты предполагается, что необходимый объем инвестиций и прирост мощности производства линейно зависят друг от друга.

Предположим, что компания стремится максимизировать свой суммарный чистый денежный поток за прогнозный период  $t = 1, \dots, T$ , который равен чистой прибыли, полученной за этот период, за вычетом средств, направленных на инвестиции. Чтобы не усложнять формулировку задачи, мы сознательно не будем учитывать фактор дисконтирования денежного потока. Хотя это легко сделать, добавив в выражение (2) в качестве множителя коэффициент дисконтирования  $k_d = \frac{1}{(1+d)^t}$ , где  $d$  – заданная ставка дисконтирования. Задача выбора искомым переменных стратегического поведения компании  $i$  сводится к поиску решения следующей задачи оптимизации:

$$(2) \max_{x_i(t), y_i(t)} \sum_{t=1}^T ((a - b \cdot (x_i(t) + x_{-i}(t))) \cdot x_i(t) - c_i(t) \cdot x_i(t) - k_i \cdot y_i(t + \tau_i)),$$

$$(3) x_i(t) \leq C_i(0) + \sum_{t=1}^t y_i(t) \quad \forall t,$$

$$(4) y_i(t) \leq y_i^{\max}(t) \quad \forall t,$$

$$(5) x_i(t) \geq 0, y_i(t) \geq 0 \quad \forall t,$$

где  $C_i(t)$  – мощность производства на начало прогнозного периода. Неравенство (3) задает технологическое ограничение на объем поставки (производства) продукции, а неравенство (4) – на прирост мощности производства. Здесь  $y_i^{\max}(t)$  – максимально возможный прирост мощности производства в период  $t$ . Заметим, что, как правило,  $y_i^{\max}(t)$  зависит также и от наличия финансовых ресурсов у компании, которое, в свою очередь, определяется величиной накопленного денежного потока компании к периоду  $t$ . При этом должно выполняться следующее условие:

$$(6) y_i(t + \tau) \leq \frac{1}{k_i} \sum_{t=1}^t (a - b(t) \cdot (x_i(t) + x_{-i}(t))) \cdot x_i(t) - c_i(t) \cdot x_i(t) - \sum_{t=1}^{t-1} k_i \cdot y_i(t + \tau_i).$$

Выполнение неравенства (6) гарантирует финансовую реализуемость инвестиционной стратегии компании, т.е. все необходимые инвестиции для принятой стратегии расширения производства будут профинансированы компанией из накопленных собственных денежных средств. Компании для финансирования выбранной инвестиционной стратегии могут также использовать разнообразные долговые инструменты. Однако учет в постановке задачи этих возможностей существенно бы усложнило задачу.

Совместное решение задач (2)–(6) для всех компаний  $i = 1, \dots, N$  сводится к выбору искомым переменных  $x_i(t)$  и  $x_{-i}(t)$ , удовлетворяющих некоторым условиям равновесия. Для поиска рыночного равновесия принято использовать концепцию равновесия Нэша. Решение называется равновесным, если ни одна из компаний не может увеличить выигрыш (2), изменив свое решение в одностороннем порядке, не вызвав при этом реакцию других игроков.

Пусть  $X_i$  – вектор, который включает все искомые переменные задачи (2)–(6) для компании  $i$ . Обозначим целевую функцию (2) через  $U_i(X_1, \dots, X_i, \dots, X_N)$ . Тогда  $(X_1^*, \dots, X_N^*)$  является равновесной точкой Нэша, если для всех  $i$  выполняется неравенство  $U_i(X_1^*, \dots, X_i^*, \dots, X_N^*) \geq U_i(X_1^*, \dots, X_i, \dots, X_N^*)$ . Проблема поиска равновесных точек Нэша в такой постановке сводится к совместному решению совокупности нелинейных задач оптимизации (2)–(6) которая относится к классу задач математического программирования с равновесными ограничениями (МРЕС)) [9]. Существует два основных подхода к решению задач данного типа. Первый из них состоит в сведении исходной задачи оптимизации к решению смешанной задачи дополнителности (МСП). Второй подход состоит в сведении задачи к решению системы вариационных неравенств [9]. Отметим, что оба этих подхода взаимозависимы и дополняют друг друга.

В общем случае задачи данного типа являются довольно сложными, для них не существует хороших методов решения. Методы решения хорошо разработаны в основном для случая задач выпуклого программирования. Рассмотрим применение первого подхода к решению задачи (2)–(5).

### 3. Сведение к задаче МСР

Задача (2)–(5) для каждого агента  $i$  представляет собой квадратичную задачу оптимизации относительно переменных  $x_i(t)$  и линейную относительно переменных  $y_i$ . Вместо прямого использования целевой функции (2) в данном случае используется метод сведения задачи к МСР, которая состоит из условий первого порядка для максимизации суммарного денежного потока каждой компании. В соответствии с [9] любое решение указанной выше задачи оптимизации должно удовлетворять условиям Каруша – Куна – Таккера (ККТ), записанным для каждой переменной. Назовем условия ККТ для переменных  $x_i(t)$  краткосрочными, а для переменных  $y_i$  – долгосрочными. В искомой точке равновесия Нэша все условия ККТ должны выполняться одновременно. В данном случае существование и единственность решения гарантируется благодаря выпуклости целевых функций и ограничений задачи. Таким образом, полученные ККТ-условия необходимы и достаточны для существования решения. Запишем эти условия.

Краткосрочные условия ККТ должны выполняться для всех  $i, t$ :

$$0 \leq c_i - (a - b \cdot (x_i(t) + x_{-i}(t))) + \lambda_i(t) \perp x_i(t) \geq 0,$$

$$0 \leq C_i(0) + y_i - x_i(t) \perp \lambda_i(t) \geq 0.$$

Долгосрочные условия ККТ должны выполняться для всех  $i$ :

$$0 \leq k_i - \sum_{t \in T} \lambda_i(t) + \theta_i \perp y_i \geq 0,$$

$$0 \leq y_i^{\max} - y_i \perp \theta_i \geq 0,$$

где под записью  $\perp$  понимается условие дополняющей нежёсткости, которое означает, что по крайней мере одно из неравенств в каждой строке условий ККТ должно быть выполнено как равенство,  $\lambda_i(t)$  и  $\theta_i$  являются множителями Лагранжа.

Чтобы решить исходную задачу (2)–(5), необходимо объединить все выписанные условия ККТ в одной МСР. Ее численное решение может быть получено, например,



с использованием пакета PATH Solver, входящего в систему моделирования GAMS [5]. Алгоритмы решения задач в PATH Solver основаны на обобщении классического метода Ньютона и его модификациях.

Следует отметить, что данный подход к решению задач поиска рыночного равновесия в задаче расширения производства оказался весьма плодотворным и породил разработку разнообразных новых методов и их применения к решению ряда прикладных задач [6–8].

Как правило, подобные задачи не являются выпуклыми, и поэтому стандартные методы решения задачи в форме МРЭС не гарантируют нахождение точного решения. В этом случае часто приходится использовать приближенные методы. Один из них сводится к процедурам поиска равновесия на дискретном множестве инвестиционных решений компаний. Применение сеточных методов поиска упрощает решение последовательности задач МСР. Другой метод решения основан на переформулировании задачи МРЭС в виде смешанной целочисленной задачи линейного программирования (MILP), которая может быть решена существующими пакетами оптимизации [6, 11].

В целом следует отметить, что постановка задачи расширения производства на конкурентных рынках в виде МРЭС подразумевает ряд предположений, которые могут исказить реальную картину поведения компаний на рынке. Прежде всего предполагается что все компании обладают полной информацией о будущих рыночных событиях, таких как возможные инвестиционные затраты и издержки производства других игроков и рыночный спрос на их продукцию.

Кроме того, предполагается, что игроки обладают идеальной дальновидностью. Они могут предвидеть рыночные шоки, такие как срыв поставок или неожиданное падение спроса. Еще одним важным фактором является использование модели рыночного спроса. Так, например, моделирование олигополии Курно требует линейной модели функции спроса, что, как будет показано далее, не всегда соответствует реальным рынкам.

#### 4. Рынок с неэластичным спросом.

Рассмотрим модификацию задачи (2)–(6) в условиях рынка с неэластичным спросом. Перепишем формулу (1) в виде

$$P(t) = a - b(t) \cdot S(t),$$

где  $a = P(0) \cdot (1 + \gamma)$  и  $b(t) = \gamma \cdot \frac{P(0)}{D(t)}$ .

Заметим, что в отличие от стандартной обратной функции спроса, используемой в разделе 2, коэффициент  $b(t)$  является функцией времени, которая зависит от заданной динамики изменения спроса  $D(t)$ . Напомним, что  $D(t)$  не зависит от цены.

Пусть, как и в задаче (2)–(6),  $x_i(t)$  – объем поставок (производство) товара,  $c_i(t)$  – удельные производственные издержки, которые в модели могут зависеть от активных действий агентов. Тогда задача выбора искомых параметров стратегического поведения агентов сводится к поиску решения следующей задачи оптимизации:

$$(7) \quad \max_{x_i(t), y_i(t)} \sum_{t=1}^T ((a - b(t) \cdot (x_i(t) + x_{-i}(t))) \cdot x_i(t) - c_i(t) \cdot x_i(t) - k_i \cdot y_i,$$

$$(8) \quad x_i(t) \leq C_i(0) + y_i, \quad t = \overline{1, T},$$

$$(9) \quad y_i \leq y_i^{\max},$$

$$(10) \quad y_i(t + \tau) \leq \frac{1}{k_i} \sum_{t=1}^t (a - b(t) \cdot (x_i(t) + x_{-i}(t))) \cdot x_i(t) - c_i(t) \cdot x_i(t) - \sum_{t=1}^{t-1} k_i \cdot y_i(t + \tau_i),$$

$$(11) \quad x_i(t) \geq 0, \quad y_i \geq 0.$$

Далее рассмотрим расширение задачи (7)–(11) на случай, когда компания инвестирует не только в проекты увеличения мощности производства, но и в проекты его модернизации, которые позволяют снизить производственные издержки.

Пусть  $z_i(t)$  – сокращение удельных производственных издержек в период  $t$  за счет инвестиций в модернизацию производства ( $z_i(t) \geq 0$ ). Тогда  $c_i(t) = c_i(0) - \sum_{t=1}^t z_i(t)$ , где  $c_i(0)$  – начальные удельные производственные издержки. При

этом объем инвестиций, необходимый для сокращения удельных производственных издержек, равен  $I_i^*(t) = k_i^* \cdot z_i(t + \tau_i^*)$ , где  $\tau_i^*$  – временной лаг.

Оптимизируемая функция в задаче (7)–(11) будет зависеть уже от выбора трех переменных. Запишем ее следующим образом:

$$(12) \quad \max_{x_i(t), y_i(t), z_i(t)} \sum_{t=1}^T (a - b(t) \cdot (x_i(t) + x_{-i}(t))) \cdot x_i(t) - c_i(z_i(t)) \cdot x_i(t) - k_i \cdot y_i(t + \tau_i) - k_i^* \cdot z_i(t + \tau_i^*).$$

При этом ограничение (10) будет иметь следующий вид:

$$(13) \quad y_i(t + \tau) \leq \frac{1}{k_i} \sum_{t=1}^t (a - b(t) \cdot (x_i(t) + x_{-i}(t))) \cdot x_i(t) - c_i(z_i(t)) \cdot x_i(t) - \sum_{t=1}^{t-1} k_i \cdot y_i(t + \tau_i) - \sum_{t=1}^{t-1} k_i^* \cdot z_i(t + \tau_i).$$

Совместное решение задач (7)–(13) для всех компаний  $i = 1, \dots, N$  сводится к выбору искомым переменных  $x_i(t)$ ,  $y_i(t)$  и  $z_i(t)$ , удовлетворяющих некоторым условиям равновесия. Как видно из соотношений (7)–(13) задача расширения производства для рынка с неэластичным спросом содержит существенные нелинейности, и ее решение не удастся свести к методам, используемым в разделе 3.

Рассмотрим подход к решению задачи (7)–(13), основанный на методологии многоагентного имитационного моделирования. Модели данного типа позволяют описывать динамику систем посредством имитации поведения ее компонентов – агентов. Агенты взаимодействуют между собой, пользуясь ограниченным набором правил, которые определяют их индивидуальное поведение. Глобальное поведение возникает как результат деятельности многих агентов.

Данный подход к моделированию предполагает задание:

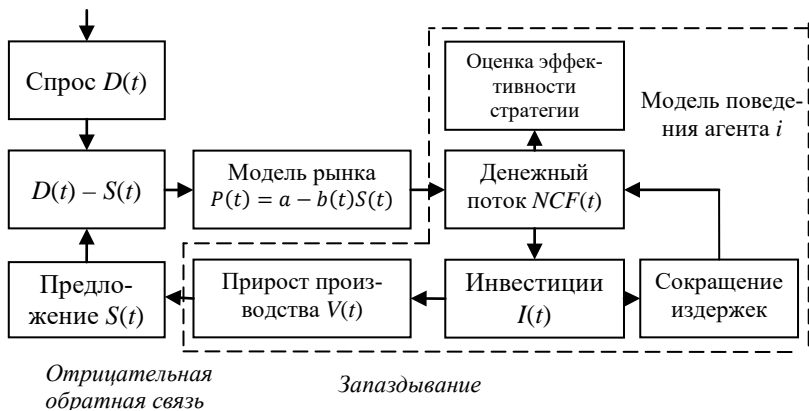
- начального состояния системы.
- атрибуции агентов, которая включает: задание информации доступной агенту в процессе принятия решений, а также задание моделей поведения агентов (алгоритмов принятия решений) на основе этой информации.

Различают простые и сложные модели поведения агентов. Простые модели поведения агентов включают, как правило, «жесткие» алгоритмы принятия решений в зависимости от информации о внешней среде, поступающей агенту. Сложные модели могут включать алгоритмы адаптации, искусственного интеллекта, а также алгоритмы прогнозирования состояния внешней среды.

Задача рассматривается в условиях неопределенности динамики спроса на продукцию  $D(t)$ , производимую агентами. Агенты инвестируют в развитие производства, что увеличивает предложение товара на рынке и, в зависимости от динамики спроса, приводит к увеличению или к уменьшению рыночной цены товара. Предлагаемый подход к моделированию конкуренции основан на учете взаимосвязи между инвестиционной активностью агентов, которая может дополнительно провоцировать нестабильность рынков, и динамикой рынков, которая определяет выбором агентами своих инвестиционных стратегий. Излишняя инвестиционная активность агентов, как правило, приводит к появлению «лишних» производственных мощностей и, в периоды снижения спроса, к значительному снижению цены на продукцию [2].

Метод решения задачи сводится к совместному использованию при моделировании моделей поведения агентов и модели рынка (рис 1). Модель агента  $i$  представляет собой сочетание модели выбора инвестиционных решений в зависимости от прогноза динамики спроса и предложения на рынке и производственно-финансовой модели, которая позволяет оценить финансовые результаты тех или иных вариантов его инвестиционных решений.

Опишем простой алгоритм поведения агентов. Предположим, что агенты в каждом периоде  $t$  выбирают свои инвестиционные решения в соответствии с некоторым алгоритмом на основе анализа информации, поступающей с рынка, в том числе динамики рыночной цены, спроса и объема продаж [2]. Модель поведения агентов задается с помощью некоторого итеративного алгоритма вычисления искомым переменных задачи (7)–(13) на основе наблюдения на каждой итерации за динамикой рыночных параметров.



*Рис 1. Схема моделирования*

Идея предлагаемого метода решения задачи (7)–(13) состоит в замене искомых переменных  $x_i(t)$ ,  $y_i(t)$  и  $z_i(t)$  на переменную  $\alpha_i(t)$  – параметр инвестиционной активности агента,  $0 \leq \alpha_i(t) \leq 1$ . И далее  $x_i(t)$ ,  $y_i(t)$  и  $z_i(t)$  определяются на основе выбора  $\alpha_i(t)$  и некоторых «рациональных» правил принятия агентами инвестиционных решений. Равновесные точки в задаче ищутся в пространстве переменных  $\alpha_i(t)$ . Заметим, что множество возможных инвестиционных стратегий каждой компании совпадает с множеством точек единичного  $n$ -мерного куба в  $R_+^n$ . Поскольку параметр «инвестиционная активность» носит в некотором смысле качественный характер, то мы можем приписать этой переменной ряд нечисловых значений, например, высокая, средняя, низкая и пр. [2]. Чем больше величина  $\alpha_i$ , тем выше ее инвестиционная активность. Поэтому, без потери общности, можно рассматривать в данной задаче конечный набор стратегий.

Пусть далее, если в период  $t$   $P(t) - P(t-1) > 0$  или  $x_i(t) - x_i(t-1) > 0$  (что сигнализирует компании о повышательном тренде на рынке), то часть накопленного к периоду  $t$  чистого денежного потока компании (7) в доле,

равной величине  $\alpha_i(t)$ , может быть направлено на инвестиции в ее развития  $I_i^*(t)$ ,  $I_i^*(t) = \alpha_i(t) \cdot \sum_{t=1}^{t-1} NCF_i(t)$ .

Как было отмечено ранее, общий объем инвестиций агента может быть направлен в проекты двух типов: проекты, направленные на расширение производства –  $I_i^1(t)$ , и проекты, направленные на сокращение издержек –  $I_i^2(t)$ , в некотором соотношении  $\alpha_i^1(t)$  и  $\alpha_i^2(t)$ , ( $\alpha_i^2(t) = 1 - \alpha_i^1(t)$ ). Величины  $\alpha^1(t)$ ,  $\alpha_i^1(t)$  и  $\alpha_i^2(t)$  являются искомыми параметрами, которые могут выбирать агенты в зависимости от их прогноза динамики рынка.

### **Выбор инвестиций в расширение производства.**

Алгоритм выбора инвестиционных решений в расширение производства состоит в следующем. Если в период  $t$  наблюдается восходящий тренд на рынке, то компания инвестирует в проекты расширения производства следующим образом:

$$I_i^1(t) = \min\{\alpha_i^1(t) \cdot \sum_{t=1}^t NCF_i(t), I_i^{max}\},$$

где  $I_i^{max}$  – предельный за период уровень инвестиций. Если наблюдается нисходящий тренд на рынке, то в этом периоде  $I_i^1(t) = 0$ . Тогда  $y_i(t) = k_i^1 \cdot I_i^1(t - \tau_i^1)$ , где  $k_i^1$  характеризует прирост производственных мощностей на единицу инвестиционных вложений,  $\tau_i^1$  – временной лаг. Соответственно, производственная мощность агента рассчитывается с помощью рекуррентного соотношения  $C_i(t) = C_i(t-1) + y_i(t)$ ,  $t = \overline{1, T}$ .

**Выбор инвестиций в сокращения издержек.** Пусть  $z_i(t)$  – искомое сокращение себестоимости продукции и  $z_i(t) = k_i^2(t) \cdot I_i^2(t - \tau_i^2)$ , где  $k_i^2(t)$  – удельная эффективность инвестиций,  $\tau_i^2$  – временной лаг. Себестоимость продукции агента в период  $t$  рассчитывается по следующей формуле:

$$c_i(t) = c_i(0) - \sum_{t=1}^t z_i(t) \text{ и } c_i(t) = c_i(t-1) - k_i^2(t) \cdot I_i^2(t - \tau_2).$$

В расчетах используется модель «снижающейся эффективности инвестиций». В соответствии с этой моделью  $k_i^2(t)$  снижается при приближении  $c_i(t)$  к некому пороговому

значению. При этом  $k_i^2(t) = k_i^2(0) \cdot \left(1 - \frac{c_i(0) - c_i(t)}{c_i^{np}}\right)$ , где  $c_i^{np}$  – оценка предельно возможного сокращения себестоимости продукции, при достижении которого эффективность инвестиций становится равной нулю.

Агенты инвестирует в проекты сокращения издержек в соответствии со следующим алгоритмом:

$$I_i^2(t) = \min \left\{ \left(1 - \alpha_i^1\right) \cdot \frac{k_i^2(t)}{k_i^2(0)} \cdot I_i^*(t), I_i^{np} \right\}, \text{ где } I_i^{np} \text{ – предельно}$$

допустимый за период уровень инвестиций.

**Выбор поставок продукции.** Пусть, как и прежде,  $x_i(t)$  – объем поставок (производство) продукции агентом  $i$ . Тогда суммарный объем поставок  $S(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t)$ .  $C(t)$  – суммарная мощность производства агентов, которая определяет потенциальное предложение товара на рынок.

Если спрос не эластичен, то нельзя поставить продукции больше, чем требуется рынку. Поэтому  $S(t) = \min\{D(t); C(t)\}$ . Если  $D(t) \geq C(t)$ , то агенты полностью загружают свои мощности и  $x_i(t) = C_i(t)$ . Если  $D(t) \leq C(t)$ , то агенты загружают свои мощности не полностью и  $x_i(t) = S(t) \frac{C_i(t)}{C(t)}$ . Здесь

предполагается, что загрузка мощностей для всех агентов одинакова.

Тогда

$$x_i(t) = \min \left\{ D(t); \sum_{i=1}^N (C_i(0) + \sum_{t=1}^t y_i(t)) \right\} \cdot \frac{C_i(0) + \sum_{t=1}^t y_i(t)}{\sum_{i=1}^N (C_i(0) + \sum_{t=1}^t y_i(t))}.$$

Приведенный алгоритм позволяет, варьируя переменные  $\alpha_i(t)$ , определить  $x_i(t)$ ,  $y_i(t)$ ,  $z_i(t)$  и на их основе рассчитать значения целевой функции (7) каждого агента. Заметим, что в таком подходе не требуется свойств непрерывности, компактности и выпуклости задачи и в расчетах могут быть

использованы любые логические и нелинейные соотношения. Далее, исходная задача сводится к поиску решения матричной игры с ненулевой суммой, в которой матрица выигрышей агентов формируется на основе проведения серии расчетов.

Рассмотрим для простоты рынок, на котором представлены две компании. Пусть множество инвестиционных стратегий компании 1 ( $k = 1, \dots, K$ ) и компании 2 ( $j = 1, \dots, J$ ). По результатам проведения серии расчетов на модели можно построить матрицы выигрышей компаний  $NPV_{k,j}^1, NPV_{k,j}^2$ . В данной постановке решение задачи сводится к анализу биматричной игры с платежными матрицами  $NPV_{k,j}^1, NPV_{k,j}^2$ . Даная задача достаточно хорошо исследована. Как известно, условием существования хотя бы одной равновесной точки Нэша в чистых стратегиях  $(k_0, j_0)$  является выполнение следующих неравенств:

$$NPV_{k_0 j_0}^1 \geq \overline{NPV_{k j_0}^1}, k = \overline{1, K};$$

$$NPV_{k_0 j_0}^2 \geq \overline{NPV_{k_0 j}^2}, j = \overline{1, J}.$$

Если такая точка существует, то она считается решением данной задачи. Возможность получения решения (равновесной точки Нэша) биматричной игры в чистых стратегиях в общем случае не гарантировано и зависит от свойств матрицы  $NPV_{k,j}^1, NPV_{k,j}^2$ . Метод решения данной задачи включает проведение численных расчетов на имитационной модели, построение платежной матрицы, ее анализ и поиск решения.

Если предположить, что агенты на протяжении прогнозного периода могут менять свои инвестиционные стратегии, т.е., например, до некоторого периода времени придерживаются «агрессивной» инвестиционной политики, а затем сокращают объем инвестиций и постепенно «сворачивают бизнес», то множество возможных инвестиционных стратегий каждого агента существенно возрастает. Рассмотрим в качестве набора возможных вариантов инвестиционных стратегий агента 1 множество путей на многодольном графе, где  $K$  – число вершин в каждой доле;  $n$  – число долей графа (число периодов изменения инвестиционных стратегий агентов). Соответственно, для агента 2 многодольный граф содержит в каждой доле  $J$  вершин. В таком случае задача может быть сведена к поиску



равновесных точек биматричной игры, в которой размерность матриц выигрышей агентов будет равна  $K^n \times J^n$ . Алгоритм решения задачи состоит в следующем. Последовательно генерируются комбинации инвестиционных стратегий (путей на многодольных графах). Для каждой комбинации проводится моделирование и расчет критерия оптимальности инвестиционной стратегии и формируются матрицы выигрышей агентов. Далее стандартным методом осуществляется анализ и поиск равновесных точек Нэша, которые и являются искомым решением задачи.

Предложенный подход успешно использован для решения ряда практических задач, в частности, задачи выбора инвестиционных стратегий металлургических компаний на рынке стального проката, а также задачи анализа стратегического поведения нефтяных компаний на глобальном рынке [2, 3].

В [3] приведены результаты практического использования предлагаемого подхода для моделирования конкуренции, анализа и выбора инвестиционных стратегий нефтяных компаний с традиционным и нетрадиционным способом добычи нефти. Расчеты показывают, что во многих случаях существуют решения исследуемой задачи (равновесные точки Нэша) в чистых стратегиях, анализ которых позволяет сделать ряд интересных для практики выводов. В частности, на основе проведенных в начале 2016 года расчетов на реальных данных глобального нефтяного рынка дан прогноз динамики нефтяных цен на среднесрочную перспективу, который с достаточной точностью совпадает с реальной динамикой нефтяного рынка за период 2016 г. – IV кв. 2018 г.

Следует отметить, что в последние годы появился интерес к разработке новых подходов и методов решения задач поиска равновесия, в частности применительно к решению полиматричных игр и игр с дискретным набором стратегий [4, 10]. Данные типы игр являются хорошим инструментом моделирования рыночного поведения игроков в рассматриваемой задаче расширения производства на конкурентном рынке.

В полиматричных играх взаимодействие между игроками задается графом, в котором каждая дуга, соединяющая две вершины, моделирует биматричную игру соответствующих игроков. Каждый игрок играет одновременно несколько биматричных игр с игроками, которые непосредственно связаны с ним дугами. Выигрыш игрока является функцией его выигрышей во всех биматричных играх. Следует заметить, что, несмотря на многочисленные теоретические работы, практические аспекты вычислительных методов поиска равновесий в полиматричных играх пока еще не достаточно разработаны, так как в общем случае они являются NP-полными. Кроме того, существование равновесных точек в таких играх является также проблемой. В этой связи появились работы, в которой изучаются понятия и методы поиска приближенных равновесий Нэша [4, 10].

## **5. Заключение**

В работе рассмотрена задача выбора оптимальных инвестиционных стратегий компаний на олигополистическом рынке, включающая выбор инвестиций в приращение производственных мощностей компании, а также выбор инвестиций, направленных на модернизацию производства и сокращение производственных издержек. Задача формулируется как совокупность взаимосвязанных нелинейных задач оптимизации. В зависимости от типа рынка рассмотрены два варианта постановки задачи и предложены подходы к их решению.

Для рынка с эластичным спросом (рынок Курно) предлагается использовать методы точного или приближенного решения задач математического программирования с равновесными ограничениями (МРЕС).

Для рынка с неэластичным спросом предложен подход, основанный на совместном использовании методов многоагентного имитационного моделирования и методов анализа матричных игр. Имитационная модель, используемая в данном подходе, учитывает взаимосвязи между инвестиционной активностью агентов, которая может дополнительно

провоцировать нестабильность рынков, и динамикой рынков, которая определяется во многом выбором агентами своих инвестиционных стратегий. Предложенный метод позволяет получить приближенное решение исходной задачи, так как при построении модели используются эвристические принципы и алгоритмы поведения агентов. Дальнейшее развитие предложенного подхода предусматривает включение в имитационную модель более сложных моделей поведения агентов с использованием адаптивных алгоритмов, искусственного интеллекта и алгоритмов прогнозирования состояния внешней среды.

### **Литература**

1. АКИНФИЕВ В.К. *Управление развитием интегрированных промышленных компаний: теория и практика*. – М.: ЛЕНАНД, 2011.
2. АКИНФИЕВ В.К. *Моделирование инвестиционных стратегий компаний в условиях неопределенности // Управление большими системами*. – 2016. – Вып. 61. – С. 136–167.
3. АКИНФИЕВ В.К. *Модель конкуренции между нефтедобывающими компаниями с традиционным и нетрадиционным способом добычи // Управление большими системами*. – 2017. – Вып. 67. – С. 52–80.
4. DELIGKAS A., FEARNLEY J., IGWE T., SAVANI R. *An empirical study on computing equilibria in polymatrix games // Proc. Int. Conference on Autonomous Agents & Multiagent Systems*. Singapore, 2016. – P. 186–195.
5. FERRIS M., MUNSON T.S. *Complementarity Problems in GAMS and the PATH Solver // J. of Economic Dynamics and Control*. – 2000. – Vol. 24, Iss. 2. – P. 165–188.
6. GABRIEL S.A., CONEJO A.J., FULLER J.D., HOBBS B.F., RUIZ C. *Complementarity Modeling in Energy Markets // Int. Series in Operations Research & Management Science*. – New York, USA: Springer, 2012. – P. 630

7. GERAS'KIN M.I., CHKHARTISHVILI A.G. *Game-Theoretic Models of an Oligopoly Market with Nonlinear Agent Cost Functions* // Autom. and Remote Control. – 2017. – Vol. 78, No. 9. – P. 1631–1650.
8. LORENCZIKA ST., MALISCHEK R., TRÜBY J. *Modeling Strategic Investment Decisions in Spatial Markets* // EWI Working Paper. – 2014. – No 14. – P. 20.
9. LUO Z.Q., PANG J.S., RALPH D. *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*. – Cambridge University Press, 1996.
10. SAGRATELLA S. *Computing all solutions of Nash equilibrium problems with discrete strategy sets* // SIAM J. on Optimization. – 2016. – Vol. 26, Iss. 4. – P. 2190–2218.
11. WOGRIN S., HOBBS B.F., RALPH D., CENTENO E., BARQUIN J. *Open versus closed loop capacity equilibria in electricity markets under perfect and oligopolistic competition* // Mathematical Programming. – 2013. – Vol. 140(2). – P. 295–322.

## **TWO APPROACHES TO DYNAMIC CAPACITY EXPANSION PROBLEM IN OLIGOPOLY**

**Valerij Akinfiev**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (akinf@ipu.ru).

*Abstract: The productive capacity is determinant of a company's success once it allows meeting the current and future demand. This article proposes quantitative models for determining investments in the development of the productive capacity in competitive oligopolistic markets, based on the Nash Equilibrium, formulated as an optimization problem. Two types of markets are considered: the market with elastic demand (Cournot market) and the market with inelastic demand. The second type of market is characteristic of commodity markets (oil, gas, metallurgical coal, etc.), which are located at the beginning of the production chain for the final product creation. In the first case, the problem is formulated as a set of interrelated quadratic optimization problems. To solve this problem, a method of converting the original problem to the mixed complementarity problem (MCP) is proposed. In the second case, methods based on multi-agent simulation and matrix games analyses are proposed. A simulation model of the company (agent) has been developed, which models the mutual influence of agents investment and market dynamics. The proposed method allows obtaining an approximate solution of the original problem, since the heuristic principles and algorithms of the behavior of agents are used in the construction of the model.*

Keywords: capacity expansion problem multi-agent modeling, matrix games.

УДК 021.8 + 025.1

ББК 78.34

DOI: <https://doi.org/10.25728/ubs.2019.79.3>

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Р.М. Нижегородцевым.*

*Поступила в редакцию 03.12.2018.*

*Опубликована 31.05.2019.*

## ИЕРАРХИЯ МОДЕЛЕЙ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ И ПОГРАНИЧНЫХ КОНФЛИКТОВ

Шумов В. В.<sup>1</sup>

(Отделение погранологии

Международной академии информатизации, Москва)

*Обсуждаются содержательные аспекты войн, сражений, военных и пограничных конфликтов и взгляды на них военных теоретиков. Выделено три уровня моделей. На нижнем уровне для моделирования боя подразделений используется вероятностная функция конфликта, основанная на определении боя (совокупность согласованных по цели, месту и времени ударов, огня и маневра войск), в которой учитываются численности боевых единиц сторон и параметр боевого превосходства. Его статистическая оценка найдена методом максимального правдоподобия. Боевое превосходство есть превосходство моральное (учитывается через проценты выдерживаемых сторонами кровавых потерь) и технологическое (превосходство в организации взаимодействия, в маневре, разведке и огневых возможностях). Решена теоретико-игровая задача распределения ресурсов по объектам обороны. Модели среднего уровня являются расширениями классических уравнений боя Осипова–Ланчестера, учитывающих моральные потенциалы сторон с использованием основного закона психофизики. Результаты расчетов не противоречат положениям военной науки о боевой способности войск. В моделях верхнего уровня общественные издержки на ход и исход войн. В частности, проигрыш США во вьетнамской войне может быть объяснен неготовностью американского общества нести людские потери в войне с неясными целями.*

Ключевые слова: математическое моделирование, модели Осипова–Ланчестера, иерархия моделей, моральный фактор.

### 1. Введение

Систематическим изучением проблем подготовки и ведения военных и боевых действий занимается военная наука, под которой понимается «система знаний о стратегическом характере и закономерностях войны, строительстве и подготовке вооруженных сил и страны к войне и способах ведения вооруженной борьбы» [4, с. 90]. Разновидностью боевых действий являются пограничные конфликты – столкновения групп лиц

---

<sup>1</sup> Владислав Вячеславович Шумов, к.т.н., доцент (vshum59@yandex.ru).

или пограничных формирований сопредельных стран на государственной границе и ее нарушение. Нередко пограничные конфликты перерастают в серьезные военные столкновения [19].

Математические методы при планировании боя (сражения) и для изучения природы военных действий применяются с давних времен [6, 16]. В годы второй мировой войны возник научный метод «исследование операций», дающий в распоряжение военного командования или другого исполнительного органа количественные основания для принятия решений по действию войск или других организаций, находящихся под их управлением [12]. Классификация математических моделей военных действий представлена в работе Д.А. Новикова [13].

Составной частью исследования операций является теория игр – «математическая теория принятия решения в конфликтных ситуациях» [2, с. 5]. По Н.Н. Воробьеву теория игр, являясь теорией моделей принятия решений, «не занимается этими решениями как психологическими, волевыми актами; не занимается она и вопросами их фактической реализации» [17, с. 7]. Вместе с тем, с точки зрения военной науки, всякий бой кончается отказом от него одной из сражающихся сторон, т.е. является чисто психологическим актом [5, с. 182]. Н.Н. Головин отмечает: «Значение духовных свойств бойца всегда высоко оценивалось полководцами всех времен и народов. Привести имена тех, которые верили в их главенствующее значение, было бы равносильно составлению списка всем выдающимся военачальникам» [5, с. 41]. По К. Клаузевицу войну можно понять и объяснить через триединство действий народа, армии и правительства в войне. Моральные величины на войне («таланты полководца, воинская доблесть армии, дух народа, комплекующего ее») занимают самое важное место [8] и подлежат учету в математических моделях боя.

В настоящей работе обсуждаются формальные модели, находящиеся «на стыке» исследования операций и военной науки (военной социологии и тактики). По масштабу участвующих в войне, бою, конфликте боевых и других единиц модели подразделяются на три уровня. На нижнем уровне моделируются действия небольших групп, на среднем – частей и соединений, на верхнем – вооруженных сил государства.

## **2. Модели боя на основе метода динамики средних**

Одним из возможных способов (и исторически первым) описания процесса боевых действий многочисленных группировок является метод динамики средних. К достоинствам этого метода относятся простота, возможность учета многих факторов, наличие аналитических решений [3]. При построении моделей боя вводятся следующие допущения. Согласно закону больших чисел, количественные составы сохранившихся боевых единиц противоборствующих сторон в каждый момент времени близки к средним (математическим ожиданиям), что дает возможность не рассматривать подробности, связанные со случайным состоянием отдельно взятой боевой единицы (т.е. не записывать уравнения Колмогорова), и рассматривать процесс боевых действий как детерминированный. Последовательность выстрелов каждой боевой единицы представляется в виде пуассоновского потока событий.

Пусть имеются две стороны, участвующие в боевых действиях. Обозначим через  $x(t)$  ( $y(t)$ ) численность войск первой (второй) стороны в момент времени  $t > 0$ , численности в нулевой момент времени –  $x_0$  и  $y_0$  соответственно. Исключив из рассмотрения операционные потери (пропорциональные численности своих войск) и ввод (вывод) резервов, получим следующую систему дифференциальных уравнений (модель боя с переносом огня М. Осипова, 1915 [16]):



$$(1) \quad \frac{dx(t)}{dt} = -a_y y(t), \quad \frac{dy(t)}{dt} = -a_x x(t),$$

где  $a_x$  и  $a_y$  – коэффициенты эффективной скорострельности боевых единиц первой и второй стороны.

Аналитическим решением системы (1) является так называемая квадратичная модель боя:

$$(2) \quad a_y (y^2(t) - y_0^2) = a_x (x^2(t) - x_0^2).$$

Обычно проигравшей признается та сторона, чья численность войск первая обратится в ноль. Условие «равенства сил» имеет вид [13]

$$(3) \quad y_0 = x_0 \sqrt{a_x/a_y}.$$

Отметим некоторую условность выражений типа (3). Во-первых, уравнения (1) описывают динамику боя только на начальных его стадиях, когда средние численности сторон еще не малы по сравнению с их начальными численностями. Во-вторых, условие (3) не учитывает известного факта, что существует определенный критический процент потерь, при которых сторона отказывается от продолжения боя. Этот факт в военной науке называется боеспособностью войск, в военной статистике – моральным духом или выдерживаемым процентом «кровавых» потерь, в математическом моделировании – фактором Л.Н. Толстого [18].

В военной социологии показателем морального потенциала сражающихся войск является процент выдерживаемых ими «кровавых потерь» (потерь убитыми и ранеными), при котором они еще способны вести боевые действия [5]. Обозначим через  $0 < \lambda_x < 1$  ( $0 < \lambda_y < 1$ ) показатель боевого духа первой (второй) стороны. Пусть  $u(t)$  и  $v(t)$  есть доли пораженных бойцов первой и второй стороны в момент времени  $t$ :

$$(4) \quad u(t) = \frac{x_0 - x(t)}{x_0}, \quad v(t) = \frac{y_0 - y(t)}{y_0}.$$

Участники боя делятся на три группы: 1) убитые и раненные в бою; 2) уклоняющиеся от ведения боя; 3) активно участвующие в бою. Способы уклонения от боя многообразны [5]. Полагая, что реакция бойцов на «кровавые потери» подчиняется основному закону психофизики в форме С. Стивенса [26], запишем вероятности отказа бойцов первой и второй стороны от ведения боя:

$$(5) \quad \pi_x(u(t)) = u(t)^A, \quad \pi_y(v(t)) = v(t)^B$$

или (по определению медианы)

$$(6) \quad 0,5 = (\lambda_x)^A, \quad 0,5 = (\lambda_y)^B$$

(медианная схема оценки процентов выдерживаемых потерь выбрана в силу ее неманипулируемости [11]).

С точки зрения психофизики  $u(t)$  и  $v(t)$  являются стимулами,  $\pi_x(u(t))$  и  $\pi_y(v(t))$  – реакцией бойцов на кровавые потери,  $A$  и  $B$  – параметрами модальности.

Из выражения (6) находим:

$$(7) \quad A = \ln(0,5)/\ln(\lambda_x), \quad B = \ln(0,5)/\ln(\lambda_y).$$

По Н. Головину значения показателя моральной устойчивости войск меняются в пределах от 2–3 % до 50–60 %. Им соответствуют значения параметра модальности  $A_1 = 0,18$ – $0,2$  и  $A_2 = 1$ – $1,36$ . При  $\lambda_x = 0,5$  наблюдается линейная зависимость между стимулом (процентом кровавых потерь) и реакцией на него (активное участие в бою). При малых значениях  $\lambda_x$  прирост реакции бойцов существенно опережает прирост наблюдаемых ими потерь.

С учетом морального фактора вероятность активного участия бойцов  $P_x(t)$  первой ( $P_y(t)$  – второй) стороны в бою в момент времени  $t$  равна

$$(8) \quad P_x(t) = 1 - u(t)^A, \quad P_y(t) = 1 - v(t)^B.$$

На рис. 1 при  $\lambda_x = 0,4$  (первая сторона, сплошная линия) и  $\lambda_y = 0,1$  (вторая сторона, пунктирная линия) показаны зависимо-

сти вероятностей активного участия в бою от доли пораженных участников.

Из рисунка видно, что вторая сторона с показателем морального духа (самопожертвования), равным 0,1, уже на начальных этапах боя имеет низкую долю сражающихся участников.

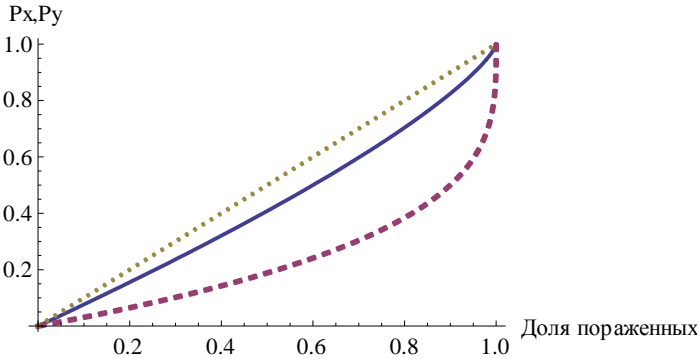


Рис. 1. Зависимость вероятности активного участия в бою от доли пораженных

Запишем систему уравнений динамики высокоорганизованного конфликта (модель боя с переносом огня), учитывающих психологические качества бойцов:

$$(9) \quad \frac{dx(t)}{dt} = -a_y y(t) P_y(t), \quad \frac{dy(t)}{dt} = -a_x x(t) P_x(t),$$

или

$$(10) \quad \frac{dx(t)}{dt} = -a_y y(t) \left( 1 - \left( \frac{y_0 - y(t)}{y_0} \right)^B \right),$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -a_x x(t) \left( 1 - \left( \frac{x_0 - x(t)}{x_0} \right)^A \right).$$

При исходных данных  $a_x = a_y = 1$ ,  $x_0 = 1000$ ,  $y_0 = 1200$ ,  $\lambda_x = 0,4$ ,  $\lambda_y = 0,1$  на рис. 2 показана динамика боя (численное решение уравнений). Сплошная жирная линия – численность

непораженных участников первой стороны. Горизонтальная сплошная линия – численность  $(1 - \lambda_x)x_0$ . Пунктирные линии характеризуют результат боя второй стороны.

Важным показателем являются доли активно участвующих в бою бойцов каждой стороны (рис. 3) в моменты времени  $t$ .

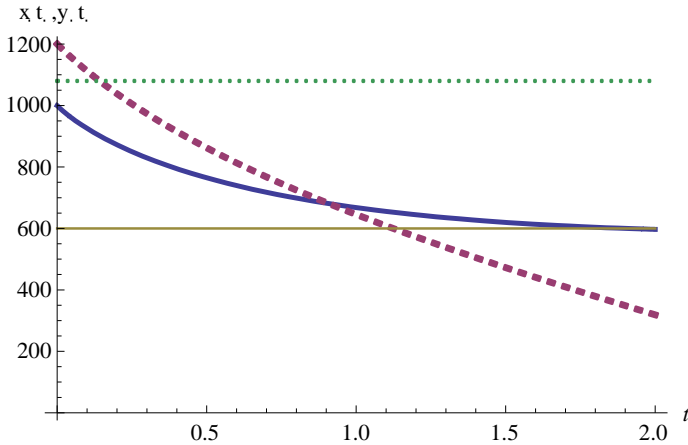


Рис. 2. Динамика боя (количество непораженных бойцов)

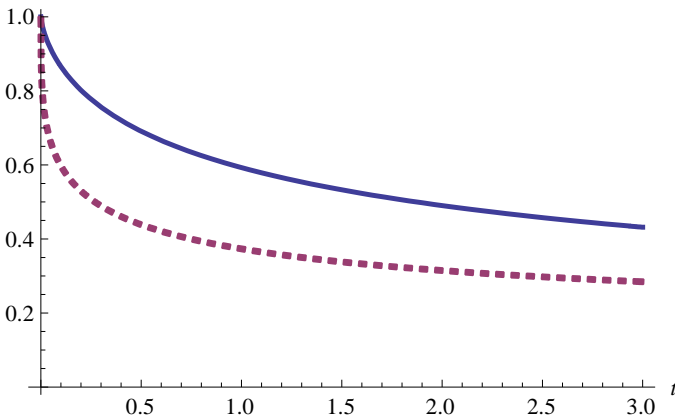


Рис. 3. Доли активных участников боя

У первой стороны ( $\lambda_x = 0,4$ , сплошная линия) в ходе боя доля активных участников выше 0,5. Тогда как соответствующая доля активных участников второй стороны ( $\lambda_y = 0,1$ , пунктирная линия) уже на начальном этапе боя опускается ниже 0,4, что можно считать признаком завершения боя с победой первой стороны.

Таким образом, нами получены уточненные уравнения модели Осипова, позволяющие учесть в бою (пограничном конфликте) морально-волевые качества индивидов. Аналогичные модификации можно внести в модель ланчестеровского типа [24]:

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -ax(t) - bx(t)y(t) - cy + d, \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -ey(t) - fy(t)x(t) - gx(t) + h, \end{aligned}$$

где  $a$  и  $e$  определяют скорость небоевых потерь,  $b$  и  $f$  – скорость потерь из-за воздействия по площадным целям,  $c$  и  $g$  – скорость потерь от воздействия противника на переднем крае,  $d$  и  $h$  – подходящие (отходящие) резервы.

Верификация и оценка параметров моделей боя обычно выполняется на основе анализа военных операций и сражений периода Второй мировой войны и локальных войн. В частности, установлена почти линейная зависимость темпов наступления от начального соотношения сил и средств, выявлена статистическая зависимость потерь наступающей стороны от начального соотношения сил в операции. На основе данных военной статистики [22] можно предположить, что зависимость суточных потерь  $0 < L < 1$  наступающей стороны от начального соотношения сил  $\delta > 0$  имеет вид

$$(12) \quad L = \frac{k_n}{\delta}, \quad k_n \approx 0,15,$$

где  $k_n$  – статистический параметр.

Например, при соотношении сил 3 : 1 суточные потери наступающих будут примерно равны:  $L = 0,15/3 = 0,05$ , т.е. 5% от начальной численности.

В работе [27] рассмотрена иерархия моделей боя, где на нижнем уровне методом Монте–Карло оцениваются боевые эффективности отдельных боевых единиц, на среднем уровне – модели боя на основе дискретных и непрерывных цепей Маркова [1], на верхнем – дифференциальные уравнения.

В дополнение к предложенной иерархии моделей нижнего уровня рассмотрим модель, основанную на использовании функций конфликта и принципов боя.

### **3. Вероятностная модель пограничного конфликта (боя)**

Отметим следующие особенности пограничного конфликта:

- 1) относительно малые численности участников (в сравнении с боем, сражением);
- 2) технологический фактор менее значим в сравнении с моральным фактором (меньше видов боевого обеспечения).

Пограничные конфликты подразделяются (основание классификации – географическая среда) на морские, речные, сухопутные конфликты, конфликты в городской среде (в пункте пропуска).

С. Скапердас [25] предложил следующую функцию успеха в конфликте (вероятность победы первого игрока):

$$(13) \quad p_x(x, y) = \frac{g(x)}{g(x) + g(y)},$$

где  $x$  – количество материального ресурса (усилий) в распоряжении первого игрока;  $y$  – количество материального ресурса (усилий) в распоряжении второго игрока;  $g$  – функция, задающая технологию конфликта.

Оперируя показателями  $\lambda_x$  и  $\lambda_y$ , характеризующими моральный дух сторон, выражение (13) можно переписать в виде

$$(14) \quad p_x(x, y) = \frac{\alpha \lambda_x x}{\alpha \lambda_x x + \lambda_y y} = \frac{\alpha \rho x}{\alpha \rho x + y}, \quad \rho = \lambda_x / \lambda_y,$$

где  $\alpha$  – параметр технологического превосходства первой стороны над второй.

Выражение (14) имеет прозрачную тактическую интерпретацию. Допустим, что исход боя определяется результатами боестолкновений отдельных боевых единиц сторон, а сами боевые единицы с точки зрения их боевых возможностей однородны (т.е. каждая боевая единица в равной степени пользуется результатами обеспечения боя, разведки, наведения и т.д.). Тогда вероятность победы в бою первой стороны оценивается с использованием классического определения вероятности.

Исходя из определения боя (совокупность согласованных по цели, месту и времени ударов, огня и маневра войск [4]) и его принципов параметр боевого превосходства  $\alpha$  вычислим с использованием определения среднего геометрического:

$$(15) \quad \alpha = \sqrt[4]{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}, \quad \alpha_j > 0, j = 1, \dots, 4,$$

где

$\alpha_1$  – коэффициент превосходства первой стороны во всестороннем обеспечении и опыте командования;

$\alpha_2$  – коэффициент превосходства первой стороны в средствах разведки, навигации и связи;

$\alpha_3$  – коэффициент превосходства первой стороны в маневренности;

$\alpha_4$  – коэффициент превосходства первой стороны в огневых возможностях.

Коэффициент  $\alpha_1$  отражает опыт и мастерство командиров по подготовке к бою разнородных подразделений (групп), обеспечению непрерывного боевого и других видов обеспечения.

Использование среднего геометрического дает пессимистическую оценку параметра  $\alpha$  (среднее геометрическое не больше среднего арифметического, неравенство Коши). Так как коэффициенты  $\alpha_j > 0, j = 1, \dots, 4$ , являются относительными величинами, то для определения среднего следует использовать среднее геометрическое.

Преобразуем выражение (14) к виду

$$(16) \quad p_x = \frac{\alpha \rho x}{\alpha \rho x + y} = \frac{\beta x}{\beta x + y},$$

где  $\beta$  – параметр боевого (морального и технологического) превосходства первой стороны над второй.

Для оценки параметра  $\beta$  воспользуемся функцией правдоподобия  $L$ :

$$(17) \quad L = \prod_{i=1}^m (p_i)^s (1 - p_i)^{1-s} = \prod_{i=1}^m \left( \frac{\beta x_i}{\beta x_i + y_i} \right)^s \left( \frac{y_i}{\beta x_i + y_i} \right)^{1-s},$$

где  $m$  – количество наблюдений за ходом и результатами боев (объем выборки);  $p_i$  – вероятность победы первой стороны в  $i$ -м бою (неизвестная величина);  $s$  – доля боев, в которых победила первая сторона;  $x_i > 0$  – количество боевых единиц первой стороны, участвовавших в  $i$ -м бою;  $y_i > 0$  – количество боевых единиц второй стороны, участвовавших в  $i$ -м бою.

Оценивание параметра можно выполнить максимизацией логарифмической функции правдоподобия:

$$(18) \quad l = \ln L = \sum_{i=1}^m \left\{ s \ln \left( \frac{\beta x_i}{\beta x_i + y_i} \right) + (1 - s) \ln \left( \frac{y_i}{\beta x_i + y_i} \right) \right\}.$$

Необходимым условием экстремума является равенство нулю первой производной правдоподобия по параметру. Вычислим первую производную:

$$(19) \quad \frac{\partial l}{\partial \beta} = \frac{ms}{\beta} - \sum_{i=1}^m \frac{x_i}{\beta x_i + y_i}.$$



Решая численным методом уравнение (равенство нулю первой производной)

$$(20) \frac{ms}{\beta} - \sum_{i=1}^m \frac{x_i}{\beta x_i + y_i} = 0,$$

находим искомое значение параметра  $\beta$ .

В точке, где значение первой производной равно нулю, проверяем значение второй производной:

$$(21) \frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2} = -\frac{ms}{\beta^2} + \sum_{i=1}^m \frac{(x_i)^2}{(\beta x_i + y_i)^2}.$$

Если оно отрицательно, нами найден максимум функции правдоподобия и, следовательно, искомое значение параметра.

#### **4. Теоретико-игровая задача распределения ресурса по объектам охраны**

Задача распределения ограниченных ресурсов обороны и нападения (игра полковника Блотто) известна в нашей стране с 1961 г. [20]. Рассмотрим постановку теоретико-игровой задачи распределения ресурса по объектам охраны с использованием расширенной вероятностной модели конфликта, учитывающей моральные потенциалы сторон.

Обозначим через  $N = \{1, \dots, n\}$  множество объектов охраны, через  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  – действие первого игрока (охраны), через  $y = \{y_1, \dots, y_n\}$  – действие второго игрока (нападающих), где  $x_i \geq 0$  ( $y_i \geq 0$ ) – количество ресурса, выделенного первым (вторым) игроком на объект  $i$ . На ресурсы наложены ограничения:

$$(22) \sum_{i \in N} x_i \leq R_x,$$

$$(23) \sum_{i \in N} y_i \leq R_y.$$

Заданы целевые функции сторон (охраны и нападающего):

$$(24) F_x(x, y) = \sum_{i \in N} V_i p_i(x_i, y_i) = \sum_{i \in N} V_i \frac{\alpha_i \rho x_i}{\alpha_i \rho x_i + y_i} \rightarrow \max ,$$

$$(25) F_y(x, y) = \sum_{i \in N} V_i (1 - p_i(x_i, y_i)) = \sum_{i \in N} V_i \frac{y_i}{\alpha_i \rho x_i + y_i} \rightarrow \max ,$$

где  $\rho > 0$  – отношение моральных потенциалов сторон;  $\alpha_i > 0$  – параметр боевого превосходства первой стороны (охраны) на объекте  $i$ . Вероятность  $p_i(x_i, y_i)$  победы первого игрока на объекте  $i$  является расширением вероятностной модели конфликта, учитывающей моральные потенциалы сторон.

**Равновесие Нэша.** Положим, что ожидаемые продолжительности тактических циклов действий сторон (охраны и нападения) примерно одинаковы. Тогда есть основания считать, что решения сторонами (игроками) принимаются одновременно и независимо. Известно, что ситуация игры равновесна по Нэшу, если отклонение от нее одного из игроков не может увеличить его выигрыша.

Замечаем, что целевая функция  $F_x(x, y)$  непрерывна и вогнута по  $x$  при любом фиксированном  $y$ , а функция  $F_y(x, y)$  – непрерывна и выпукла по  $y$  при любом фиксированном  $x$ , ограничения (22) задают выпуклые компакты евклидового пространства  $E^n$ . Следовательно, в игре существует равновесие Нэша. Для нахождения решения игры рассмотрим эквивалентные задачи выпуклой оптимизации:

$$(26) f_x(x) = - \sum_{i \in N} V_i \frac{\alpha_i \rho x_i}{\alpha_i \rho x_i + y_i} \rightarrow \min , \quad \sum_{i \in N} x_i - R_x \leq 0 ,$$

$$(27) f_y(y) = - \sum_{i \in N} V_i \frac{y_i}{\alpha_i \rho x_i + y_i} \rightarrow \min , \quad \sum_{i \in N} y_i - R_y \leq 0$$

с функциями Лагранжа (задачи удовлетворяют условию Слейтера):

$$(28) L_x(x, \lambda) = - \sum_{i \in N} V_i \frac{\alpha_i \rho x_i}{\alpha_i \rho x_i + y_i} + \lambda \left( \sum_{i \in N} x_i - R_x \right) ,$$

$$(29) L_y(y, \mu) = -\sum_{i \in N} V_i \frac{y_i}{\alpha_i \rho x_i + y_i} + \mu \left( \sum_{i \in N} y_i - R_y \right),$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – множители Лагранжа.

Необходимыми условиями экстремума являются условия стационарности, дополняющей нежесткости и неотрицательности множителя Лагранжа. Запишем эти условия для задачи первого игрока (охраны):

$$(30) -V_i \frac{\alpha_i \rho y_i}{(\alpha_i \rho x_i + y_i)^2} + \lambda = 0, \quad i \in N,$$

$$(31) \lambda \left( \sum_{i \in N} x_i - R_x \right) = 0, \quad i \in N,$$

$$(32) \lambda \geq 0.$$

В силу положительности ценностей объектов и неотрицательности ресурса игроков, из (30) следует, что  $\lambda > 0$ . Тогда условие (22) выполняется как равенство, что следует из (31).

Необходимые условия экстремума для второго игрока (нападающих):

$$(33) -V_i \frac{\alpha_i \rho x_i}{(\alpha_i \rho x_i + y_i)^2} + \mu = 0, \quad i \in N,$$

$$(34) \mu \left( \sum_{i \in N} y_i - R_y \right) = 0, \quad i \in N,$$

$$(35) \mu \geq 0.$$

и условие (23) выполняется как равенство.

Разделив (30) на (33), получим

$$(36) \frac{y_i}{x_i} = \frac{\lambda}{\mu}, \quad i \in N.$$

С учетом ограничений-равенств (22)–(23) из (36) имеем

$$(37) \frac{R_y}{R_x} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Подставим  $x_i = y_i R_x / R_y$  в (30) и найдем:

$$(38) \quad y_i = V_i \frac{\alpha_i \rho (R_y)^2}{\lambda (\alpha_i \rho R_x + R_y)^2}, \quad i \in N,$$

или (с учетом ограничения (22))

$$(39) \quad R_y = \frac{\rho (R_y)^2}{\lambda} \sum_{i \in N} V_i \frac{\alpha_i}{(\alpha_i \rho R_x + R_y)^2},$$

$$(40) \quad \lambda = \rho R_y \sum_{i \in N} \frac{V_i \alpha_i}{(\alpha_i \rho R_x + R_y)^2}.$$

Аналогично находим значение  $\mu$ :

$$(41) \quad x_i = V_i \frac{\alpha_i \rho (R_x)^2}{\mu (\alpha_i \rho R_x + R_y)^2}, \quad i \in N,$$

или (с учетом ограничения (23))

$$(42) \quad R_x = \frac{\rho (R_x)^2}{\mu} \sum_{i \in N} V_i \frac{\alpha_i}{(\alpha_i \rho R_x + R_y)^2},$$

$$(43) \quad \mu = \rho R_x \sum_{i \in N} \frac{V_i \alpha_i}{(\alpha_i \rho R_x + R_y)^2}.$$

Подставим значения множителей Лагранжа в (30) и (33):

$$(44) \quad V_i \frac{\alpha_i \rho y_i}{(\alpha_i \rho x_i + y_i)^2} = \rho R_y \sum_{j \in N} \frac{V_j \alpha_j}{(\alpha_j \rho R_x + R_y)^2}, \quad i \in N,$$

$$(45) \quad V_i \frac{\alpha_i \rho x_i}{(\alpha_i \rho x_i + y_i)^2} = \rho R_x \sum_{j \in N} \frac{V_j \alpha_j}{(\alpha_j \rho R_x + R_y)^2}, \quad i \in N.$$

Из выражений (40) и (43) следует, что множители Лагранжа строго положительны. Следовательно, нами получены необходимые условия экстремума. Учитывая равенство  $x_i = y_i R_x / R_y$ , находим оптимальное распределение ресурсов:

$$(46) \quad x_i^* = \frac{V_i \alpha_i R_x}{S (\alpha_i \rho R_x + R_y)^2}, \quad i \in N, \quad S = \sum_{j \in N} \frac{V_j \alpha_j}{(\alpha_j \rho R_x + R_y)^2},$$

$$(47) \quad y_i^* = \frac{V_i \alpha_i R_y}{S (\alpha_i \rho R_x + R_y)^2}, \quad i \in N.$$

Оптимальные выигрыши сторон равны:

$$(48) F_x(x^*, y^*) = \sum_{i \in N} V_i \frac{\alpha_i \rho R_x}{\alpha_i \rho R_x + R_y}, \quad F_y(x^*, y^*) = \sum_{i \in N} V_i \frac{R_y}{\alpha_i \rho R_x + R_y}.$$

Таким образом, оптимальное распределение ресурса охраны и нападающих по объектам зависит от имеющихся суммарных ресурсов сторон, ценностей объектов охраны, соотношения моральных потенциалов сторон и значений параметра превосходства на объектах.

### **5. Влияние общественных издержек на ход и исход войн**

Победа в войнах не всегда определяется соотношением военных потенциалов государств-участников, чему в истории имеется множество подтверждений (война США во Вьетнаме, война СССР в Афганистане и др.). Для анализа и прогноза исхода войн необходимо учитывать отношение народов к войне.

В таблице 1 представлены данные по потерям США в крупных войнах [10].

*Таблица 1. Потери США в ходе войн*

	Убито, тыс. чел.	Ранено, тыс. чел.	Общая численность ВС, тыс. чел.*	% потерь ВС	% потерь населения
Вторая мировая война 1939–1945 гг.	407,3	671,8	14903,2	7,2	0,8
Корейская война 1950–1953 гг.	36,6	103,3	5764,1	2,4	0,09
Вьетнамская война 1964–1973 гг.	58,2	153,4	8752,0	2,4	0,11
Война в Персидском заливе	0,383	0,467	665,5	0,1	0,0003

\* Общее количество военнослужащих, принимавших участие в военной операции.

Проценты потерь (убитыми и ранеными) в Корее и Вьетнаме: 2,4% от общей численности вооруженных сил (ВС) США и, соответственно, 0,09% и 0,11% от численности населения. Существенное отличие между двумя войнами заключается в масштабах антивоенных выступлений, дезертирства и отказа от призыва. В годы войны во Вьетнаме антивоенное движение оказалось более мощным и превзошло антивоенные выступления в годы корейской войны по всем показателям: общее количество участников, размах, количество акций протеста, формы и их распространение [10].

В таблице 2 представлены данные по годам о потерях вооруженных сил и количестве протестующих [23].

Таблица 2. Потери США в годы вьетнамской войны и протесты

Год	Потери ВС США	Средний % поддержки	Количество протестующих
1965	1 000	62,50	50 000
1966	6 000	51,75	100 000
1967	16 000	48,00	400 000
1968	30 000	39,00	625 000
1969	40 000	35,50	850 000
1970	44 000	33,75	925 000
1971	45 000	29,50	1 000 000

Из таблицы видно, что с ростом боевых потерь (убитыми) росло количество протестующих против войны и снижалась поддержка правительства со стороны общества. Переломным моментом в сломе поддержки войны со стороны СМИ считается 27 февраля 1968 г. (передача телеведущего У. Кронкайта, который военный успех армии США представил как «ничью», «тупик», «мертвую точку») [10].

Пусть имеются две стороны, участвующие в конфликте. Обозначим через  $x(t)$  ( $y(t)$ ) численность участников первой (второй) стороны в момент времени  $t > 0$ , численности в нуле-

вой момент времени –  $x_0$  и  $y_0$  соответственно. Пусть первая сторона имеет решающее превосходство в силах и средствах над второй стороной и, вместе с тем, является агрессором, тогда как вторая сторона считает конфликт справедливым, а победу в нем – крайне важной. Обозначим через  $X_0$  и  $Y_0$  численности населения первой и второй страны в момент начала конфликта. Положим, что за время конфликта естественным приростом (убылью) населения можно пренебречь. Обозначим  $\Lambda_x$  и  $\Lambda_y$  выдерживаемую обществом первой и второй страны долю потерь. Рассмотрим модель с вводом резервов – стороны поддерживают численности своих войск на одном уровне, компенсируя потери. Из уравнений Осипова–Ланчестера (модель с переносом огня) и условия постоянства численности войск получим

$$(49) \quad x_R(t) - a_y y(t) = 0, \quad y_R(t) - a_x x(t) = 0,$$

$$x_R(t) = x_0 - x(t), \quad y_R(t) = y_0 - y(t),$$

где  $a_x$  и  $a_y$  – коэффициенты боевой эффективности первой и второй стороны;  $x_R(t)$  и  $y_R(t)$  – количество введенного в сражение резерва (равного потерям в ходе боев).

Решение уравнений (49):

$$(50) \quad x_R(t) = x_0 - x(t) = a_y \frac{y_0 - a_x x_0}{1 - a_x a_y},$$

$$y_R(t) = y_0 - y(t) = a_x \frac{x_0 - a_y y_0}{1 - a_x a_y}.$$

Рассмотрим *пример*. Пусть численности населения воюющих государств равны  $X_0 = 200\,000\,000$  чел.,  $Y_0 = 40\,000\,000$  чел.; численности их войск:  $x_0 = 500\,000$  чел.,  $y_0 = 2\,500\,000$  чел., военные потери за  $t = 9$  лет:  $x_R(t) = 60\,000$  чел.;  $y_R(t) = 1\,000\,000$  чел.

Из (49) при  $t = 9$  находим:

$$a_x = \frac{y_R(t)/9}{x_0 - x_R(t)/9} \approx 0,225, \quad a_y = \frac{x_R(t)/9}{y_0 - y_R(t)/9} \approx 0,003$$

(коэффициент боевой эффективности боевой единицы первой стороны в 80 раз выше соответствующего коэффициента второй стороны).

Нижние оценки потерь стран (без учета раненых) равны

$$\Lambda_x = 0,03\%; \Lambda_y = 2,5\%.$$

Несмотря на значительное технологическое превосходство первой страны (США) над второй (Вьетнамом), первая страна проиграла войну, что можно объяснить неспособностью и неготовностью американского общества нести высокие социальные издержки в войне, цели которой народу не близки.

## **6. Модель социально-информационного влияния**

В соответствии с концепцией Д. Бойда [7] войны с современную информационную эпоху состоят из трех элементов: *Moral warfare* (разрушение воли противника к достижению победы); *Mental warfare* (искажение восприятия противником реальности) и *Physical warfare* (традиционные военные действия). По оценке В.Т. Третьякова, во всех современных демократических обществах существуют и эффективно действуют механизмы мобилизации свободной прессы для выполнения задач, которые ставит перед страной (нацией) официальная власть, в том числе и задач военных [21].

Рассмотрим модель социально-информационного влияния, позволяющую оценить эффективность социально-информационных воздействий. Пусть  $0 \leq \theta \leq 1$  есть показатель, характеризующий отношение индивидов к войне (социальному конфликту и т.д.). Для учета социально-информационных воздействий на индивидов определим *функцию представления*  $B(y_+, y_-, \theta) = B(\theta)$  о показателе  $\theta \in [0, 1]$  в условиях воздействий  $y_+ \geq 0$  ( $y_- \geq 0$ ), направленных на увеличение (уменьшение) представления о значении показателя, как функцию вида  
(51)  $B(\cdot): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ .



В условиях разнонаправленных воздействий определим функцию представления в виде

$$(52) B(y_+, y_-, \theta) = \alpha B_+(y_+, \theta) + (1 - \alpha) B_-(y_-, \theta),$$

где  $0 < \alpha < 1$  – параметр, позволяющий учесть степень усвоения индивидами воздействий определенной направленности. Применительно к военным конфликтам параметр  $\alpha$  может отражать долю «милитаристов» в обществе.

Сформулируем *гипотезу*. Предположим, что изменение представления подчиняется основному психофизическому закону в форме С. Стивенса и стремится к нулю при  $\theta = 0$  и  $\theta = 1$ . Иными словами, достоверное (невозможное) событие остается таковым в условиях социально-информационных воздействий. Тогда получим следующие дифференциальные уравнения:

$$(53) \frac{d}{dy_+} B_+(\cdot) = \alpha k_{y_+} (y_+)^{\nu} B_+(\cdot) (1 - B_+(\cdot)),$$

$$\frac{d}{dy_-} B_-(\cdot) = -(1 - \alpha) k_{y_-} (y_-)^{\nu} B_-(\cdot) (1 - B_-(\cdot)),$$

где  $k_{y_+} \geq 0$  ( $k_{y_-} \geq 0$ ) – параметр размерности воздействий, направленных на увеличение (уменьшение) представления;  $\nu \geq 0$  ( $\nu \geq 0$ ) характеризует модальность воздействия.

Параметры размерности  $k_{y_+}$  и  $k_{y_-}$  характеризуют среднюю долю суточного времени, затрачиваемого индивидами на удовлетворение той или иной базовой потребности.

Решениями уравнений (53) являются следующие выражения:

$$(54) B_+(y_+, \theta) = \frac{\theta \exp(z_{y_+})}{1 - \theta + \theta \exp(z_{y_+})}, \quad z_{y_+} = \frac{k_{y_+}}{\nu + 1} (y_+)^{\nu + 1},$$

$$(55) B_-(y_-, \theta) = \frac{\theta \exp(-z_{y_-})}{1 - \theta + \theta \exp(-z_{y_-})}, \quad z_{y_-} = \frac{k_{y_-}}{\nu + 1} (y_-)^{\nu + 1}.$$

Для оценки параметра модальности можно использовать выражение [9]

$$(56) \nu = \frac{\ln R_{max} - \ln R_{min}}{\ln S_{max} - \ln S_{min}},$$

где  $S_{max}$  ( $S_{min}$ ) – максимальное (минимальное) значение интенсивности раздражителя;  $R_{max}$  ( $R_{min}$ ) – максимальное (минимальное) значение стимула.

Применительно к реакции американского общества на войну в Корее и войну во Вьетнаме получено [23]  $\nu = \nu = 1,3$ .

Имея модель социально-информационного влияния, можно ставить и решать задачи социально-информационного управления и противоборства.

Рассмотрим *пример* задачи социально-информационного управления. Допустим, что в обществе имеется консенсус о важности военной кампании, характеризуемый показателем  $\theta = 0,6$ . Доли «милитаристов» и «пацифистов» в обществе одинаковы, т.е.  $\alpha = 0,5$ . Под воздействием военных потерь формируются социальные действия размера  $y_- = 5$  с параметром модальности  $\nu = 1,3$ . При  $k_{y_+} = k_{y_-} = 0,1$  и параметре модальности  $\nu = 0,8$  найти количество социально-информационных воздействий, направленных на увеличение представления о параметре  $\theta$ , при котором значение функции представления  $B(\theta)$  будет не ниже 0,6.

Из выражения (55) находим:  $B_-(y_-, \theta) = 0,21$ . Из условия (52) получаем

$$0,5B_+(y_+, \theta) + 0,5 \cdot 0,21 = 0,6$$

или

$$B_+(y_+, \theta) = 0,99, \exp(z_{y_+}) = 0,219.$$

Решая последнее уравнение, получим  $y_+ = 11,04$ . Таким образом, в условиях примера для компенсации воздействий  $y_- = 5$ , направленных на снижение представлений о параметре  $\theta$ , необ-

ходимо сформировать воздействия противоположной направленности размера  $u_+ > 11$ .

Отметим, что наряду с рассмотренной моделью социально-информационного влияния известно множество других моделей, обзор которых можно найти в работах [14, 15].

## **7. Заключение**

Рассмотрена иерархия моделей боевых действий и пограничных конфликтов.

На нижнем уровне оперируют имитационными моделями, данными войсковых испытаний, что позволяет выполнить переход от физических и технических характеристик к тактическим (модели операционного уровня). Данные модели лежат в основе построения предтактических моделей (боевые группы от подразделения) и тактических моделей нижнего уровня (ротные и батальонные тактические группы, группы пограничного конфликта). Эти модели могут строиться, в частности, с использованием вероятностных функций конфликта. Предложено использовать вместо функции конфликта С. Скапердаса ее расширение, позволяющее учесть моральные характеристики и боевую устойчивость участников боя (конфликта).

На тактическом и оперативно-тактическом уровне обычно используются модели, использующие метод динами средних (модели Осипова–Ланчестера и их модификации). Рассмотрено расширение модели Осипова–Ланчестера, учитывающее морально-волевые качества (процент выдерживаемых потерь) бойцов.

На уровне государства и общества применяются социально-политические, социально-экономические и рефлексивные модели, модели социально-информационного влияния для оценки военных потенциалов, уровней национальной, общественной и

государственной безопасности, готовности общества выдерживать связанные с войной издержки.

Имея модели динамики военного сражения, боя, пограничного конфликта, издержек общества, можно ставить и решать задачи управления и противоборства.

### **Литература**

1. АЛЕКСЕЕВ О.Г., АНИСИМОВ В.Г., АНИСИМОВ Е.Г. *Марковские модели боя* : Учебное пособие. – М.: Министерство обороны СССР, 1985. – 85 с.
2. ВАСИН А.А., МОРОЗОВ В.В. *Теория игр и модели математической экономики* : Учеб. пособие. – М.: Макс-Пресс, 2005. – 278 с.
3. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С. *Исследование операций*. – М.: Советское радио, 1972. – 552 с.
4. *Война и мир в терминах и определениях* : военно-политический словарь / Под общ. ред. Д. Рогозина. – М.: ПоРог, 2004. – 334 с.
5. ГОЛОВИН Н.Н. *Исследование боя. Исследование деятельности и свойств человека как бойца*. Кн. 2. Статьи и письма. – М.: ВАГШ, 1995. – 303 с.
6. ГОЛОВИН Н.Н. *Наука о войне. О социологическом изучении войны*. – Париж: Издательство газеты «Сигнал», 1938. – 242 с.
7. ИВЛЕВ А.А. *Основы теории Бойда. Направления развития, применения и реализации* : Монография. – М.: 2008. В рукописи. – 64 с.
8. КЛАУЗЕВИЦ К. *О войне*. – М.: Госвоениздат, 1934. Англ.: Clausewitz K. *Vom Krieg*. 1832/34.
9. КРЫЛОВ А.А. *Психология* : Учебник. – М.: Проспект, 2005. – 744 с.

10. КУЗНЕЦОВ Д.В. *Использование военной силы во внешней политике США* : Учебное пособие. – Благовещенск: Изд-во БГПУ, 2010. – 430 с.
11. *Механизмы управления*: Учебное пособие / Под ред. Д.А. Новикова. – М.: УРСС (Editorial URSS), 2011. – 216 с.
12. МОРЗ Ф.М., КИМБЕЛЛ Дж.Е. *Методы исследования операций* / Пер. с англ. И.А. Полетаева и К.Н. Трофимова под ред. А.Ф. Горохова. – М.: Советское радио, 1956. – 308 с. Англ.: Morse P.M., Kimball G.E. *Methods of Operations Research*. – Cambridge, MA: Technology Press of MIT / New York: John Wiley & Sons, 1951. – 158 p.
13. НОВИКОВ Д.А. *Иерархические модели военных действий* // Управление большими системами. – 2012. – Вып. 37. – С. 25–62.
14. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Прикладные модели информационного управления*. – М.: ИПУ РАН, 2004. – 129 с.
15. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Рефлексия и управление: математические модели*. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2013. – 412 с.
16. ОСИПОВ М.П. *Влияние численности сражающихся сторон на их потери* // Военный сборник. – 1915. – №6. – С. 59–74; №7. – С. 25–36; №8. – С. 31–40; №9. – С. 25–37.
17. ОУЭН Г. *Теория игр* / Пер. с англ. под ред. А. А. Корбута со вступ. статьей Н.Н. Воробьева. – М.: Мир, 1971. – 230 с.
18. ПАВЛОВСКИЙ Ю.Н. *О факторе Л. Н. Толстого в вооруженной борьбе* // Математическое моделирование. – 1993. – Т. 5, №1. – С. 3–15.
19. ПЛЕХОВ А.М. *Словарь военных терминов*. – М.: Военное издательство, 1988. – 335 с.
20. *Применение теории игр в военном деле* / Сборник переводов. – М.: Советское радио, 1961. – 360 с.

21. ТРЕТЬЯКОВ В.Т. *Как стать знаменитым журналистом: курс лекций по теории и практике современной русской журналистики*. – М.: Ладомир, 2004. – 623 с.
22. ЦЫГИЧКО В.И., СТОИЛИ Ф. *Метод боевых потенциалов: история и настоящее* // Военная мысль. – 1997. – №4. – С. 23–28.
23. ШУМОВ В.В. *Анализ социально-информационного влияния на примере войн США в Корее, Вьетнаме и Ираке* // Компьютерные исследования и моделирование. – 2014. – Т. 6, №1. – С. 167–184.
24. LANCHESTER F.W. *Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm*. – London : Constable and Co, Ltd., 1916. – 243 p.
25. SKARPEDAS S. *Contest success functions* // Economic Theory. – 1996. – No. 7. – P. 283–290.
26. STEVENS S.S. *On the psychophysical law* // Psychol Rev. – 1957. – No. 64(3). – P. 153–181.
27. TAYLOR J., YILDIRIM U., MURPHY W. *Hierarchy-of-Models Approach for Aggregated-Force Attrition* // Proc. of the 2000 Winter Simulation Conference. – Orlando, 2000. – P. 925–932.

## **HIERARCHY OF MODELS OF MILITARY ACTIONS AND BORDER CONFLICTS**

**Vladislav Shumov**, International Informatizational Academy, Moscow, Cand.Sc., senior lecturer (vshum59@yandex.ru).

*Abstract: The substantive aspects of wars, battles, military and border conflicts and the views on them of military theorists are discussed. Three levels of models are highlighted. At the lower level, a probabilistic conflict function based on the definition of a battle (a set of coordinated targets, place and time of strikes, fire and maneuver of troops) is used to simulate the combat of subunits, which takes into account the numbers of combat units of the parties and the parameter of combat superiority. His statistical estimate was found by the maximum likelihood method. Military superiority is moral superiority (taken into account through the percentages of bloody losses sustained by the parties) and technological (superiority in the organization of interaction, in maneuver, reconnaissance and fire capabilities). The*

*game-theoretic problem of 26 resource allocation among the objects of defense has been solved. Models of the middle level are extensions of the classical Osipov – Lanchester fight equations that take into account the moral potentials of the parties using the basic law of psychophysics. The results of the calculations do not contradict the provisions of the military science of the combat capabilities of the troops. In the top-level models, the social costs of the course and outcome of wars. In particular, the loss of the United States in the Vietnam War can be explained by the lack of readiness of American society to bear casualties in a war with unclear objectives.*

Keywords: mathematical modeling, Osipov-Lanchester model, hierarchy of models, moral factor.

УДК 519.876.2

ББК 32.81

DOI: <https://doi.org/10.25728/ubs.2019.79.4>

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Г.А. Угольником.*

*Поступила в редакцию 04.12.2017.*

*Опубликована 31.05.2019.*

## УКЛОНЕНИЕ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА ОТ ОБНАРУЖЕНИЯ В КОНФЛИКТНОЙ СРЕДЕ

Галяев А. А.<sup>1</sup>, **Маслов Е. П.**<sup>2</sup>, Яхно В. П.<sup>3</sup>,  
Абрамянц Т. Г.<sup>4</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Представлены формализация и результаты решения ряда задач об уклонении на плоскости подвижного объекта от обнаружения наблюдателем (системой однородных и / или разнородных наблюдателей), осуществляющих обнаружение объекта по излучаемым этим объектом сигналам первичного (пассивный режим) и переизлученного вторичного (активный режим) полей. Приведены результаты моделирования.*

Ключевые слова: уклонение подвижного объекта, конфликтная среда, система разнородных наблюдателей, оптимальный закон уклонения от обнаружения.

### 1. Введение

Рассматриваемые в настоящем обзоре задачи относятся к классу задач об управлении, получившему в англоязычной литературе название «Path Planning in the Threat Environment» [16–22]; в русскоязычной литературе – название задач управления подвижными объектами (ПО) в конфликтной среде [5]. Под конфликтной средой понимается совокупность объектов (они называются конфликтующими), сближение с которыми для управляемого ПО нежелательно в ходе выполнения им основной задачи. Целью управления ПО при движении его в конфликтной среде является минимизация негативного воздействия конфликтующих объектов на управляемый объект путем выбора маршрута и параметров движения последнего. К числу негативных воздействий принято относить обнаружение объекта. Зада-

---

<sup>1</sup> Андрей Алексеевич Галяев, чл.-корр. РАН, г.н.с. (galaev@ipu.ru).

<sup>2</sup> Евгений Петрович Маслов, д.т.н., в.н.с.

<sup>3</sup> Виктор Павлович Яхно, к.т.н., с.н.с. (vic\_iakhno@ipu.ru).

<sup>4</sup> Тамара Гургеновна Абрамянц, к.т.н., вед.инженер (abramtc@ipu.ru).



чи об оптимизации закона уклонения подвижного объекта от обнаружения рассматривались в целом ряде работ. Постановки задач отличаются предположениями о характеристиках информационных полей, в которых происходит обнаружение, классами допустимых законов управления, видом критериев качества, количеством обнаружителей, объемом и характером информации, доступной конфликтующим сторонам (см. [6, 15, 16–22] и библиографию к указанным статьям).

Совокупность конфликтующих объектов формирует карту угроз для ПО, которая должна учитываться при построении закона уклонения от обнаружения.

Для описания механизмов обнаружения в литературе наиболее часто используются два подхода.

Первый подход состоит в оценке интегрального уровня сигнала, излученного ПО и поступившего на вход относительно большой информационно-наблюдательной системы за все время наблюдения. В литературе такую систему принято называть сенсором.

Оценка интегрального уровня сигнала на входе сенсора определяется с учетом решения задачи об оптимизации закона управления ПО, перемещающимся в течение промежутка времени  $T$  по маршруту из начальной точки  $A(x_A, y_A)$  в конечную точку  $B(x_B, y_B)$  и уклоняющимся при этом от обнаружения сенсором (группой сенсоров), расположенных в районе. Интегральный уровень сигнала получил название энергетического риска.

Второй подход к описанию механизма обнаружения состоит в том, что наблюдатель отождествляется с точечным объектом, снабженным круговой зоной обнаружения фиксированного радиуса, центр которой совпадает с текущей позицией наблюдателя. В литературе такой наблюдатель принято называть информационным детектором (или просто детектором). В простейшем случае предполагается, что цели, попавшие внутрь круга, обнаруживаются мгновенно и достоверно; цели, не попавшие в круг, не обнаруживаются. Детектор является устройством, производящим обнаружение вторичного поля ПО. Указанный подход описан, например, в [18, 21].

## 2. Математические модели в задачах уклонения от обнаружения

При построении математических моделей предполагается, что, в общем случае, в состав разнородных сил и средств обнаружения входят стационарные и маневренные средства. Особенность задач уклонения от обнаружения состоит в том, что во всех случаях текущий уровень сигнала  $I$  на входе наблюдателя зависит от текущей дистанции  $D$  до уклоняющегося объекта, а для некоторых полей – и от величины текущей скорости  $v$  объекта. Для описания указанной зависимости в литературе широко используется степенная модель, в которой уровень сигнала пропорционален отношению:

$$I \approx v^m / D^k.$$

Величина показателя степени  $k$  является характеристикой физического поля, в котором осуществляется обнаружение. Содержательный смысл имеют значения  $k = 1, 2, 3, 4$ . Значение  $k = 1$  соответствует процессу затухания волн на поверхности жидкости и убыванию уровня интенсивности гидроакустического поля в мелком море;  $k = 2$  – убыванию уровней интенсивностей теплового поля, первичного электромагнитного поля и первичного гидроакустического поля в глубоком море при их распространении в пространстве;  $k = 3$  – убыванию уровня магнитного поля;  $k = 4$  – убыванию уровней интенсивностей вторичного электромагнитного и гидроакустического полей.

Величина показателя степени  $m$  характеризует зависимость уровня интенсивности излучаемого сигнала от скорости движения объекта. Такая зависимость имеет место для сигналов первичного гидроакустического поля.

Основным критерием в задачах уклонения объекта от обнаружения является вероятность обнаружения, т.е. вероятность обнаружения хотя бы один раз и хотя бы одним наблюдателем за время движения объекта по маршруту. Оптимизация сводится к нахождению траектории и закона изменения скорости объекта, доставляющих минимум указанному критерию

$$P_{\text{обн}} = 1 - (1 - P_{\text{стац}})(1 - P_{\text{ман}}),$$

где  $P_{\text{обн}}$ ,  $P_{\text{стац}}$ ,  $P_{\text{ман}}$  – вероятности обнаружения ПО всей системой средств, системой стационарных средств и маневренными средствами соответственно.

### 2.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБНАРУЖЕНИЯ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА СТАЦИОНАРНЫМИ СРЕДСТВАМИ

Обнаружение осуществляется по результатам обработки излученного объектом сигнала и принятого системой сенсоров при наличии случайных помех. Для практически важных случаев гауссовских сигналов и помех решение о наличии или отсутствии сигнала от объекта принимается отдельным сенсором периодически [4], после предварительной обработки поступившей на интервале наблюдения (усреднения) реализации  $x_1, x_2, \dots, x_n$  гауссовских случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$  с нулевым математическим ожиданием. Обозначим символом  $\sigma_{\text{ш}}$  дисперсию помех на входе сенсора, символом  $\sigma_{2c} = \sigma_{2c}(v, D)$  – дисперсию сигнала, излученного объектом и поступившего на вход сенсора, зависящую от текущей скорости движения объекта  $v$  и текущего расстояния  $D$  между ним и сенсором. В отсутствие сигнала от объекта случайные величины  $X_i$  имеют дисперсию  $\sigma_{\text{ш}}$ , при наличии сигнала от объекта – дисперсию  $\sigma_{2c} + \sigma_{\text{ш}}$ . Оптимальное правило принятия решения наблюдателем состоит в сравнении статистики  $S(x) = \sum x_{2i}$  с порогом  $h$ . Если  $S(x) \leq h$ , то принимается решение о том, что сигнал от объекта отсутствует, а если  $S(x) > h$ , то принимается решение, что сигнал от объекта есть. Функция распределения вероятностей статистики  $S(x)$  описывается функцией  $\chi^2$ -распределения с  $n$  степенями свободы и имеет вид

$$(1) \quad F_n(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^x u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} du,$$

где  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функция,  $n$  – число степеней свободы (количество наблюдений в реализации), которое при аналоговых алгоритмах обработки определяется по формуле  $n = 2T_0\Delta F$ , где

$T_0$  – длительность интервала усреднения,  $\Delta F$  – ширина полосы пропускания приемной системы средства обнаружения. Вероятность обнаружения объекта отдельным сенсором по результатам обработки информации на одном интервале усреднения вычисляется по формуле

$$(2) \quad P_{\text{обн}}(v, D) = 1 - F_n \left( \frac{h_F}{\frac{\sigma_c^2(v, D)}{\sigma_{\text{ш}}^2} + 1} \right),$$

где  $h_F$  – квантиль уровня  $(1 - \alpha)$  для  $\chi_2$ -распределения с  $n$  степенями свободы,  $P_{\text{лт}}$  – вероятность ложной тревоги;  $\sigma_{2c}(v, D)/\sigma_{2ш}$  – отношение сигнал/помеха на входе сенсора.

В гидроакустике [4] отношение сигнал/помеха принято выражать в терминах отношения интенсивностей сигналов. В том случае, когда спектральные плотности мощности сигнала и помехи можно считать постоянными в пределах анализируемого частотного диапазона, формула (2) переписывается следующим образом:

$$(3) \quad P_{\text{обн}}(v, D) = 1 - F_n \left( \frac{h_F}{\frac{I_c(v, D)}{I_{\text{ш}}} + 1} \right).$$

Полагая, что зависимость уровня интенсивности излученного объектом сигнала от его скорости и закон распространения гидроакустического сигнала в среде носят степенной характер, имеем для интенсивности сигнала на входе сенсора [4]:

$$(4) \quad I_c(v, D) = I_c(v_0, D_0) \left( \frac{v}{v_0} \right)^m \left( \frac{D_0}{D} \right)^k,$$

где  $I_c(v_0)$  – интенсивность излучения объекта на некоторой эталонной скорости  $v_0$ , измеренная в стандартных условиях [4] на расстоянии  $D_0 = 1$  м от объекта,  $v$  – текущая скорость движения объекта,  $D$  – текущее расстояние между ним и средством обнаружения.

Интенсивность помехи на входе приемной системы сенсора рассчитывается по формуле

$$(5) \quad I_{ш} = \frac{I_{п}(f)}{A(f)},$$

где  $I_{п}(f)$  – интенсивность помех в районе расположения сенсора,  $A(f)$  – коэффициент концентрации антенной системы сенсора в полосе приема.

С учетом формул (2), (5) выражение для текущего отношения сигнал/помеха на входе сенсора может быть записано в следующем виде:

$$(6) \quad \frac{I_c(v, D)}{I_{ш}} = I_c(v_0, D_0) \left( \frac{v}{v_0} \right)^m \frac{D_0^k}{D^k} / \frac{I_{п}(f)}{A(f)}.$$

В том случае, когда длительность интервала усреднения  $T_0$  намного меньше времени движения  $T$  объекта по маршруту и в течение одного интервала усреднения скорость объекта и расстояние его до наблюдателя можно считать постоянными, вероятность обнаружения объекта  $i$ -м наблюдателем хотя бы один раз за время движения по маршруту находится по формуле

$$P_{\text{обн}} = 1 - \prod_{j=1}^J (1 - P_{\text{обн}}(v_j, D_{ji})),$$

где  $J = T/T_0$ ,  $v_j$  – скорость объекта;  $D_{ji}$  – расстояние между объектом и  $i$ -м наблюдателем на  $j$ -м интервале усреднения.

В случае когда имеется  $N$  сенсоров, принимающих решения об обнаружении независимо, вероятность обнаружения объекта хотя бы один раз хотя бы одним наблюдателем за время движения объекта по маршруту в указанных условиях определяется по формуле

$$P_{\text{обн}} = 1 - \prod_{j=1}^J \prod_{i=1}^N (1 - P_{\text{обн}}(v_j, D_{ji})).$$

В работе [13] показано, что в том случае, когда отношение сигнал/помеха на входе наблюдателя, описываемое формулой (6), мало в течение всего времени движения объекта по маршруту, при построении математической модели могут быть использованы следующие приближенные формулы.

Вероятность обнаружения объекта отдельным сенсором по результатам обработки информации на одном интервале усреднения:

$$P_{\text{обн}}(v, D) = \alpha + q \frac{I_c(v, D)}{I_{\text{ш}}}$$

где  $\alpha = P_{\text{лт}}$  – вероятность ложной тревоги.

Вероятность необнаружения ПО отдельным сенсором по результатам обработки последовательности наблюдений за все время его движения по маршруту вычисляется по формуле

$$P_{\text{необн}} = \exp \left\{ -\frac{1}{T_0} \int_0^T \left[ \alpha + \frac{q I_c(v_0, D_0) D_0^k}{I_{\text{ш}} v_0^m} \frac{\left( \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right)^m}{[\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}]^k} \right] dt \right\},$$

символами  $(a, b)$ ,  $(x, y)$ ,  $(\dot{x}, \dot{y})$  обозначены соответственно координаты наблюдателя в некоторой неподвижной системе координат, текущие координаты объекта и составляющие вектора текущей скорости объекта.

В случае  $N$  независимых сенсоров, находящихся в пунктах с координатами  $(a_i, b_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , вероятность того, что ни один из них не обнаружит объект за время прохождения маршрута, имеет вид

$$(7) P_{\text{необн}} = \exp \left\{ -\alpha T \sum_{i=1}^N \frac{1}{T_{0i}} - \frac{I_c(v_0, D_0) D_0^k}{v_0^m} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{I_{\text{ш}} T_{0i}} \int_0^T \frac{\left( \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right)^m}{\left( \sqrt{(x(t)-a_i)^2 + (y(t)-b_i)^2} \right)^k} dt \right\},$$

где  $q_i$  является постоянной индивидуальной характеристикой обнаружителя.

В том случае, когда все сенсоры имеют одинаковые характеристики, используются одинаковые алгоритмы обработки информации и осуществляется прием в одних и тех же помеховых условиях, оптимизация закона уклонения ПО от обнаружения системой из  $N$  сенсоров сводится к решению вариационной задачи о минимизации функционала (риска)

$$(8) \quad R = \int_0^T \sum_{i=1}^N \frac{\left(\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\right)^m}{\left(\sqrt{(x(t) - a_i)^2 + (y(t) - b_i)^2}\right)^k} dt \rightarrow \min_{(x(\cdot), y(\cdot))} .$$

Вариационная задача (8) имеет следующую физическую интерпретацию. Подынтегральное выражение в (8) пропорционально мгновенному уровню интенсивности сигнала, излученного объектом, прошедшего через среду распространения и принятого системой сенсоров. Критерий (8) получил название энергетического риска, критерий (7) – название вероятностного риска. Таким образом, при малых отношениях сигнал/помеха минимизация вероятностного риска сводится к минимизации энергетического риска.

## 2.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБНАРУЖЕНИЯ ПО МАНЕВРЕННЫМИ СИЛАМИ

При построении математической модели обнаружения ПО маневренными силами и средствами считаются известными расположение и характеристики района, в котором происходит противодействие сторон, а также предположения о составе сил и средств обнаружения и тактике их применения. Основной характеристикой модели является интенсивность поиска  $\gamma(t)$  – среднее число обнаружений объекта в единицу времени. В предположении о малости величины  $\gamma(t)$  определяется вероятность обнаружения объекта маневренным средством хотя бы один раз за время поиска  $T$  (в литературе [21] эта величина называется просто вероятностью обнаружения):

$$(9) \quad P_{\text{обн}} = 1 - \exp\left(-\int_0^T \gamma(t) dt\right) .$$

Стоящий в круглых скобках интеграл получил название потенциала поиска, или производительности поиска. Конкретное значение потенциала поиска определяется тактико-техническими характеристиками средств обнаружения.

В предположении о том, что все средства обнаружения действуют независимо, в силу(7) и (9) получаем следующее вы-

ражение для критерия оптимизации закона уклонения ПО от обнаружения всей системой наблюдателей:

$$P_{\text{необн}} = \exp \left\{ -\alpha T \sum_{i=1}^N \frac{1}{T_{0i}} - \frac{I_c(v_0, D_0) D_0^k}{v_0^m} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{I_{\text{ши}} T_{0i}} \int_0^T \frac{\left( \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} \right)^m}{\left( \sqrt{(x(t) - a_i)^2 + (y(t) - b_i)^2} \right)^k} + \sum_{i=1}^S \chi_s \gamma_s(t) dt \right\},$$

где  $S$  – количество маневренных средств обнаружения,  $\chi_s$  – характеристическая функция, принимающая значение 1 в случае когда маршрут ПО проходит через район, контролируемый соответствующим маневренным средством, и 0 – в противном случае.

### 3. Уклонение подвижного объекта от обнаружения одиночным сенсором

#### 3.1. УКЛОНЕНИЕ ПО С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ ОТ ОБНАРУЖЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫМ СЕНСОРОМ

Исторически задача об оптимизации законов уклонения от обнаружения сенсором вначале решалась для случая движения уклоняющегося объекта на постоянной скорости. Аналитическое решение задачи получено лишь при уклонении от одиночного стационарного сенсора на плоскости. Для случая уклонения от обнаружения системой сенсоров были предложены вычислительные алгоритмы.

Решение задачи о построении на плоскости оптимальной траектории уклонения объекта на постоянной скорости  $V$  от обнаружения одиночным неподвижным наблюдателем (сенсором) приведено в [6–10]. Объект перемещается в течение заданного времени  $T$  из фиксированной начальной точки  $A(x_A, y_A)$  в фиксированную конечную точку  $B(x_B, y_B)$ , минимизируя энергетический риск



$$(10) E_n = \int_0^T \frac{V dt}{\rho^n}.$$

Здесь  $\rho = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ , где  $x(t)$ ,  $y(t)$  – текущие координаты уклоняющегося объекта в декартовой системе координат, начало которой совпадает с позицией сенсора; граничные условия имеют вид

$$(11) x(0) = x_A, y(0) = y_A; x(T) = x_B, y(T) = y_B.$$

Энергетический риск, соответствующий уклонению на постоянной скорости, обозначается далее символом  $E_n$ , нижний индекс указывает значение степени  $n$  в знаменателе подынтегрального выражения (10).

Схема решения задачи (10), (11) имеет следующий вид [16–19]. Вначале выполняется параметризация задачи путем введения переменной  $s = Vt$ , где  $s$  – длина кривой, отсчитываемой от начальной точки траектории  $A(x_A, y_A)$ , а затем осуществляется переход к полярной системе координат, полюс которой совпадает с положением сенсора, а полярная ось проходит через начальную точку  $A(x_A, y_A)$ . В полярной системе координат для дифференциала дуги справедливо соотношение

$$ds^2 = (\rho d\psi)^2 + d\rho^2 = (\rho^2 + \dot{\rho}_\psi^2) d\psi^2,$$

где  $\rho$ ,  $\psi$  – текущие координаты подвижного объекта, а  $\dot{\rho}_\psi \triangleq d\rho / d\psi$ , поэтому риск и граничные условия переписываются в следующем виде:

$$(12) E_n = \int_0^\alpha \frac{\sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}_\psi^2}}{\rho^n} d\psi,$$

$$(13) \rho(0) = \rho_A, \psi(0) = 0; \rho(T) = \rho_B, \psi(T) = \alpha.$$

Обозначим символом  $F \triangleq F(\rho, \dot{\rho}_\psi)$  функцию, стоящую в (12) под знаком интеграла. Независимая переменная не входит в это выражение в явном виде, поэтому уравнение Эйлера для функционала (12) имеет первый интеграл [21]

$$(14) F - F_{\dot{\rho}_\psi} \dot{\rho}_\psi = C_1,$$

где  $F\dot{\rho} - F\dot{\rho}_\psi = C_1$ , а  $C_1$  – некоторая постоянная. Дифференциальное уравнение (14) интегрируется в явном виде. Отдельно рассматриваются два случая:  $n = 1$  и  $n > 1$ .

При  $n = 1$  уравнение оптимальной траектории в полярной системе координат, выраженное в терминах граничных условий, имеет вид [8]

$$(15) \quad \rho(\psi) = \rho_A \exp\left(\frac{\psi}{\alpha} \ln \frac{\rho_B}{\rho_A}\right).$$

Геометрический образ уравнения (15) – логарифмическая спираль, обращающаяся в окружность при  $\rho_A = \rho_B$ . Величина риска на оптимальной траектории

$$E_1^* = \sqrt{\alpha^2 + \ln^2 \frac{\rho_B}{\rho_A}}.$$

Здесь и далее оптимальные величины снабжаются звездочкой.

При  $n > 1$  уравнение оптимальной траектории имеет вид

$$(16) \quad \rho(\psi) = \rho_0 \sin[(n-1)\psi + C_2],$$

где  $\rho_0, C_2$  – постоянные величины, значения которых определяются из условия прохождения оптимальной траектории через заданные начальную и конечную точки. Подстановка в (16) граничных условий (13) позволяет записать уравнение оптимальной траектории уклонения в терминах граничных условий [21]:

$$(17) \quad \rho(\psi) = \rho_A \left\{ \frac{\sin[(n-1)(\alpha - \psi)] + (\rho_B / \rho_A)^{n-1} \sin(n-1)\psi}{\sin(n-1)\alpha} \right\}^{(1/n-1)}.$$

Параметры оптимальной траектории и время движения по оптимальной траектории связаны соотношением

$$(18) \quad T = \int_0^\alpha \frac{\sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}_\psi^2}}{V} d\psi.$$

Величина риска на оптимальной траектории [19, 20]:

$$(19) \quad E_n = \frac{\sqrt{\rho_A^{2(n-1)} + \rho_B^{2(n-1)} - 2(\rho_A \rho_B)^{n-1} \cos(n-1)\alpha}}{(n-1)(\rho_A \rho_B)^{n-1}}.$$

Практически важным является случай  $n = 2$ , который соответствует обнаружению наблюдателем подвижного объекта в пассивном режиме по излучаемому объектом сигналу при сферическом законе распространения. Уравнение оптимальной траектории (16) имеет вид

$$\rho(\psi) = \rho_0 \sin(\psi + C_2).$$

В декартовой системе координат, начало которой совпадает с положением сенсора, а ось ординат проходит через начальное положение уклоняющегося объекта, текущие координаты объекта выражаются следующим образом:

$$x = \rho_0 \sin(\psi + C_2) \sin \psi = \frac{\rho_0}{2} [\cos(2\psi + C_2) - \cos C_2],$$

$$y = \rho_0 \sin(\psi + C_2) \cos \psi = \frac{\rho_0}{2} [\sin(2\psi + C_2) - \sin C_2].$$

Оптимальной траекторией является окружность, уравнение которой имеет вид

$$\left( x + \frac{\rho_0}{2} \cos C_2 \right)^2 + \left( y + \frac{\rho_0}{2} \sin C_2 \right)^2 = \left( \frac{\rho_0}{2} \right)^2$$

постоянные  $\rho_0$  и  $C_2$  определяются из условий прохождения траектории через точки  $A(x_A, y_A)$  и  $B(x_B, y_B)$ . В [2] показано, что

$$\rho_0 = d / \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между полярными радиус-векторами начальной и конечной точек маршрута;

$$(20) \quad d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

– длина прямолинейного отрезка, соединяющего эти точки.

Центр окружности лежит на срединном перпендикуляре к отрезку  $AB$ ; положение центра совпадает с положением вершины равнобедренного треугольника; величина угла при этой вершине (между равными сторонами треугольника) составляет  $2\alpha$ . Из формул (19), (20) следует, что величина риска, соответствующего оптимальной траектории,

$$(21) \quad E_2^* = d / \rho_A \rho_B.$$

Соотношения (16)–(19) полностью описывают решение оптимизационной задачи об уклонении на плоскости подвижного

объекта на постоянной скорости от обнаружения одиночным неподвижным сенсором. Из (16) следует, что при некоторых начальных условиях решение оптимизационной задачи содержит особенность, а именно, при  $(n-1)\alpha \rightarrow \pi$ :  $\rho(\psi) \rightarrow \infty$ . В частности, при  $n=2$  особенность возникает при таком расположении сенсора, начальной и конечной точек маршрута, при котором они находятся на одной прямой, причем последние расположены по разные стороны от сенсора. Причина возникновения особенности решения – отсутствие ограничений на энергетические и/или скоростные характеристики уклоняющегося объекта. Ряд способов устранения этой особенности предложен в [2–4].

В [11] приведено решение оптимизационной задачи (10), (11) для  $n=2$  при наличии ограничения на длину оптимальной траектории. В случае когда ограничение неактивно, решение описывается формулами (16)–(18). При активном ограничении решение задачи выражается через эллиптические интегралы. Оптимальная траектория строится численным методом. В [10–12] предлагается расширить критерий оптимизации путем введения дополнительного (регуляризирующего) функционала. В [1] при  $n=2$  расширенный критерий имеет вид

$$J_n = \int_0^{\alpha} \left[ \frac{\sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}}{\rho^2} + \lambda \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2} \right] d\psi,$$

где  $\lambda$  – весовой множитель, выбираемый из соображений об относительной важности подынтегральных слагаемых. В [19] оптимизацию в задаче (12), (13) при произвольных  $n$  предлагается проводить с учетом ограничения

$$\int_0^T (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\psi}^2) dt \leq P$$

где производные понимаются как производные по времени,  $P$  – заданная величина. Данное неравенство описывает энергетическое ограничение, которому должна отвечать оптимальная траектория.

### 3.2. ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАКОНА УКЛОНЕНИЯ ПО ОТ ОБНАРУЖЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫМ СЕНСОРОМ

При движении уклоняющегося объекта по оптимальной траектории с постоянной скоростью величина скорости определяется видом оптимальной траектории и заданным временем движения – соотношениями (17), (18). При фиксированной скорости движения текущий уровень сигнала на входе сенсора (системы сенсоров) зависит лишь от текущей дистанции до уклоняющегося объекта. Развитие указанной постановки состоит в построении такого закона управления подвижным объектом, при котором оптимизируется не только траектория уклонения, но и закон изменения скорости его движения по траектории. Постановка и решение такой задачи приведены в [1, 6].

**Постановка задачи.** Управляемый объект перемещается в течение заданного времени  $T$  из фиксированной начальной точки  $A(x_A, y_A)$  в фиксированную конечную точку  $B(x_B, y_B)$  маршрута, минимизируя выбором траектории движения и закона изменения скорости функционал (интегральный риск)

$$(22) R_m = \int_0^T \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^m}{x^2 + y^2} dt \rightarrow \min_{(x, y, \dot{x}, \dot{y})} .$$

Здесь  $m > 0$  – произвольный показатель степени;  $x(t)$ ,  $y(t)$  – текущие координаты уклоняющегося объекта в декартовой системе координат, начало которой совпадает с позицией сенсора; производные, если иное не оговаривается особо, являются производными по времени.

Граничные условия:

$$x(0) = x_A, \quad x(T) = x_B,$$

$$y(0) = y_A, \quad y(T) = y_B.$$

В рамках приведенной выше физической интерпретации, числитель дроби в (22) есть величина, пропорциональная мгновенному уровню излучаемого объектом сигнала в предположении о том, что имеет место степенная зависимость этого уровня от текущей скорости объекта.

Функционал (22) получил название функционала обнаружения.

**Решение задачи.** Осуществляется переход от декартовых координат  $(x, y)$  к полярным координатам  $(\rho, \psi)$ , где полюс совпадает с позицией наблюдателя, а полярная ось – с осью абсцисс исходной декартовой системы:  $x = \rho \cos \psi$ ,  $y = \rho \sin \psi$ .

В этих координатах риск равен

$$R = \int_0^T \frac{(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\psi}^2)^m}{\rho^2} dt,$$

граничные условия имеют вид:

$$\rho(0) = \rho_A, \quad \psi(0) = \psi_A; \quad \rho(T) = \rho_B, \quad \psi(T) = \psi_B.$$

Вводится новая переменная  $r = \ln \rho$ . Тогда

$$(23) \quad \rho = e^r, \quad \dot{\rho} = d\rho / dt = \rho \dot{r}$$

и выражение (23) переписывается в следующем виде:

$$(24) \quad R = \int_0^T (\dot{r}^2 + \dot{\psi}^2)^m \Phi(r) dt,$$

где

$$(25) \quad \Phi(r) = \exp(kr), \quad k = 2m - 2.$$

Возможны два случая:  $m = 1$  и  $m \neq 1$ . При  $m = 1$  подынтегральная функция в (24) зависит от  $(\dot{r}, \dot{\psi})$ ; при  $m \neq 1$  – от  $(\dot{r}, r, \dot{\psi})$ , поэтому необходимые условия оптимальности для этих случаев различны. При  $m = 1$  риск равен

$$R = \int_0^T (\dot{r}^2 + \dot{\psi}^2)^m \Phi(r) dt.$$

Необходимые условия оптимальности (уравнения Эйлера) имеют вид

$$\dot{r}\ddot{r} = 0,$$

$$\dot{\psi}\ddot{\psi} = 0.$$

Отсюда  $\dot{r} = \text{const}$ ,  $\dot{\psi} = \text{const}$ . Решение  $\dot{\psi} = 0$  отвечает движению управляемого объекта по прямой, проходящей через позицию наблюдателя и начальную и конечную точки маршрута. В остальных случаях  $\dot{\psi} \neq 0$ . Так как, в силу (23),

$\dot{r} = \frac{dr}{d\rho} \dot{\rho} = \frac{\dot{\rho}}{\rho}$ , то решению  $\dot{r} = 0$  при  $\dot{\psi} \neq 0$  отвечает  $\dot{\rho} = 0$ , что

соответствует движению по окружности; решению  $\dot{r} \neq 0$  – движение по иной кривой.

При  $m \neq 1$  уравнения Эйлера имеют вид

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} [2m\dot{\psi}(\dot{r}^2 + \dot{\psi}^2)^{m-1} \Phi(r)] = 0, \\ -\frac{d}{dt} [2m\dot{r}(\dot{r}^2 + \dot{\psi}^2)^{m-1} \Phi(r)] + k(\dot{r}^2 + \dot{\psi}^2)^m \Phi(r) = 0. \end{cases}$$

Результат интегрирования первого уравнения системы:

$$(27) \quad 2m\dot{\psi}(\dot{r}^2 + \dot{\psi}^2)^{m-1} \Phi(r) = C_1,$$

где  $C_1$  – постоянная интегрирования. Возможны два случая:  $C_1 = 0$  и  $C_1 \neq 0$ . Случаю  $C_1 = 0$  отвечает значение  $\dot{\psi} = 0$ ; управляемый объект движется по прямой, проходящей через позицию наблюдателя, начальную и конечную точки маршрута. В остальных рассматриваемых ниже случаях  $\dot{\psi} \neq 0$ . Подстановка (27) во второе уравнение системы (26) приводит к уравнению

$$(28) \quad -\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{r}}{\dot{\psi}} \right) + \frac{k}{2m} \frac{\dot{r}^2 + \dot{\psi}^2}{\dot{\psi}} = 0.$$

Вводится величина

$$(29) \quad \eta = \frac{\dot{r}}{\dot{\psi}},$$

$$(30) \quad \dot{\eta} = (\eta^2 + 1)\dot{\psi} \frac{k}{2m},$$

$\dot{\eta}, \dot{\psi}$  – производные по времени. Так как  $\dot{\eta} / \dot{\psi} = d\eta / d\psi$ , то

$$(31) \quad \eta = \operatorname{tg} \left( \psi \frac{k}{2m} + C_2 \right).$$

С учетом (29) последняя зависимость может быть проинтегрирована как функция аргумента  $\psi$ . В результате получаем

$$(32) \quad r(\psi) = \ln \left[ \rho_0 \left( \cos \left( \psi \frac{k}{2m} + C_2 \right) \right)^{\frac{2m}{k}} \right],$$

где  $\rho_0$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования. Так как  $r = \ln \rho$ , то из (32) следует, что уравнение оптимальной траектории движения объекта в полярной системе координат имеет вид

$$(33) \quad \rho(\psi) = \rho_0 \left( \cos \left( \psi \frac{k}{2m} + C_2 \right) \right)^{\frac{2m}{k}}.$$

При этом в силу (33)

$$(34) \quad \Phi(r) = \rho_0^k \left( \cos \left( \psi \frac{k}{2m} + C_2 \right) \right)^{-2m}.$$

Выведем выражение для модуля скорости движения объекта как функции полярного угла  $\eta$ . Вначале найдем угловую скорость. С учетом (27), (29), (31), (34) имеем:

$$(35) \quad \dot{\psi} = C_3 \cos^2 \left( \psi \frac{k}{2m} + C_2 \right),$$

где  $C_3$  – некоторая постоянная. Радиальная скорость определяется дифференцированием функции  $\rho(\psi)$  по времени:

$$(36) \quad \dot{\rho}(\psi) = \frac{d\rho}{d\psi} \dot{\psi} = \rho \operatorname{tg} \left( \psi \frac{k}{2m} + C_2 \right) \dot{\psi}.$$

Подставляя (35) в (36), находим

$$(37) \quad \dot{\rho} = C_3 \rho \sin \left( \psi \frac{k}{2m} + C_2 \right) \cos \left( \psi \frac{k}{2m} + C_2 \right).$$

Используя (33), (35), (36), вычисляем

$$(38) \quad \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\psi}^2 = C_3^2 \rho^2 \cos^2 \left( \psi \frac{k}{2m} + C_2 \right) = C_3^2 \rho_0^2 \left( \cos \left( \psi \frac{k}{2m} + C_2 \right) \right)^{\frac{4m}{k} + 2}.$$

Соотношение

$$(39) \quad \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\psi}^2} = C_3 \rho_0 \left( \cos \left( \psi \frac{k}{2m} + C_2 \right) \right)^{\frac{2m}{k} + 1}$$

определяет закон изменения модуля скорости по траектории уклонения как функцию полярного угла  $\psi$ .

Выражение для риска на оптимальной траектории уклонения находится с использованием формулы (25). В силу (29) и (31)



$$\dot{r}^2 = \operatorname{tg}^2 \left( \psi \frac{k}{2m} + C_2 \right) \dot{\psi}^2.$$

Производная  $\dot{\psi}$  определяется соотношением (35). Отсюда

$$(40) \quad \left( \dot{r}^2 + \dot{\psi}^2 \right)^m = C_3^{2m} \cos^{2m} \left( \psi \frac{k}{2m} + C_2 \right).$$

Сомножитель  $\Phi(r)$  в выражении для риска задается формулой (34). Поэтому стоящее под знаком интеграла в формуле для риска произведение

$$(41) \quad \left( \dot{r}^2 + \dot{\psi}^2 \right)^m \Phi(r) = C_3^{2m} \rho_0^k, \quad k = 2m - 2,$$

как функция времени есть величина постоянная. Но, по определению риска, левая часть равенства (41) пропорциональна мгновенному уровню сигнала, поступившего на вход наблюдателя. Следовательно, по оптимальной траектории уклонения управляемый объект движется с переменной скоростью, но оптимальный закон изменения величины скорости (формула (39)) таков, что мгновенный уровень сигнала, поступающего к наблюдателю, остается постоянным в течение всего времени движения по траектории. В свою очередь отсюда следует, что при всех  $m \neq 1$  на оптимальной траектории модуль текущей скорости пропорционален текущему расстоянию между объектом и наблюдателем в степени  $(1/m)$ .

В силу (38) на решениях уравнений Эйлера (26) функционал риска равен

$$(42) \quad R = C_3^{2m-1} \rho_0^{2m-2} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \left( \cos \left( \psi \frac{k}{2m} + C_2 \right) \right)^{-2} d\psi.$$

Формулы (33), (35), (39) определяют решение оптимизационной задачи для произвольной степени  $m \neq 0$ . Подстановка в указанные формулы граничных условий позволяет определить параметры оптимального закона управления:

$$\rho_0 = \rho_A \left( \frac{\sin^2 \left( \frac{k}{2m} \alpha \right)}{1 + s^2 - 2s \cos \left( \frac{k}{2m} \alpha \right)} \right)^{\frac{m}{k}},$$

$$C_2 = \arctan \left( \frac{s \cos(\frac{k}{2m} \psi_A) - \cos(\frac{k}{2m} \psi_B)}{s \sin(\frac{k}{2m} \psi_A) - \sin(\frac{k}{2m} \psi)} \right),$$

$$C_3 = \frac{2m}{kT_M} \frac{1 + s^2 - 2s \cos(\frac{k}{2m} \alpha)}{\sin^2(\frac{k}{2m} \alpha)},$$

где  $s = (\rho_A / \rho_B)^{k/2m}$ ,  $|\alpha| = |\psi_B - \psi_A|$ .

Значение риска, соответствующего оптимальному закону управления, в терминах начальных условий задачи имеет вид

$$R^* = \frac{1}{T_M^{2m-1}} \left( \frac{4m^2}{k^2} \left( \rho_A^{k/m} + \rho_B^{k/m} - 2\rho_A^{k/2m} \rho_B^{k/2m} \cos(\frac{k}{2m} \alpha) \right) \right)^m.$$

Мгновенный постоянный уровень интенсивности сигнала, поступающего на вход сенсора, определяется соотношением

$$w = \frac{1}{T_M^{2m}} \left( \frac{4m^2}{k^2} \left( \rho_A^{k/m} + \rho_B^{k/m} - 2\rho_A^{k/2m} \rho_B^{k/2m} \cos(\frac{k}{2m} \alpha) \right) \right)^m.$$

Далее находится вид оптимальных траекторий для ряда значений  $m$ .

1. При  $m = 1/2$  уравнение траектории в полярных координатах имеет вид

$$(43) \quad \rho(\psi) = \rho_0 \cos(\psi - C_2).$$

В силу (43) в декартовой системе координат

$$x = \rho_0 \cos(\psi - C_2) \cos \psi = \frac{\rho_0}{2} [\cos C_2 + \cos(2\psi - C_2)],$$

$$y = \rho_0 \cos(\psi - C_2) \sin \psi = \frac{\rho_0}{2} [\sin C_2 + \sin(2\psi - C_2)].$$

так что оптимальной траекторией является окружность, уравнение которой имеет вид

$$(44) \quad \left( x - \frac{\rho_0}{2} \cos C_2 \right)^2 + \left( y - \frac{\rho_0}{2} \sin C_2 \right)^2 = \left( \frac{\rho_0}{2} \right)^2.$$

Постоянные  $\rho_0$  и  $C_2$  определяются из условий прохождения траектории через начальную и конечную точки маршрута.

Найдем длину радиуса и положение центра окружности. Запишем условия прохождения траектории через точки  $A$  и  $B$  в следующем виде:

$$(45) \quad \begin{aligned} \rho_0^{-1} \rho_A &= \cos(\psi_A - C_2) = \cos \varphi_A, \\ \rho_0^{-1} \rho_B &= \cos(\psi_B - C_2) = \cos \varphi_B. \end{aligned}$$

Полагая  $\varphi_A = \psi_A - C_2$ ,  $\varphi_B = \psi_B - C_2$ , получаем

$$(46) \quad \cos(\varphi_A - \varphi_B) = \cos(\psi_A - \psi_B) = \rho_0^{-2} \rho_1 \rho_2 + \sqrt{(1 - \rho_0^{-2} \rho_1^2)(1 - \rho_0^{-2} \rho_2^2)}.$$

Разрешая это уравнение относительно  $\rho_0$ , находим

$$(47) \quad \rho_0 = d / \sin(|\Delta\psi|),$$

где  $\Delta\psi = \psi_A - \psi_B$  есть угол между радиус-векторами начальной и конечной точек маршрута,

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

– длина прямолинейного отрезка, соединяющего эти точки. В соответствии с (44), длина радиуса окружности равна

$$(48) \quad l = d / 2 \sin(|\Delta\psi|).$$

Центр окружности лежит на срединном перпендикуляре к отрезку  $AB$  и потому, в силу (48), положение центра совпадает с положением вершины равнобедренного треугольника; величина угла при этой вершине (между равными сторонами треугольника) составляет  $2|\Delta\psi|$ .

2. При  $m = 1$  оптимальная траектория отвечает уравнениям

$$\dot{r} = \text{const}, \quad \dot{\psi} = \text{const}.$$

Пусть  $\dot{\psi} \neq 0$ . Так как  $\dot{r} = \frac{dr}{d\rho} \dot{\rho} = \frac{\dot{\rho}}{\rho}$ , то возможны два слу-

чая:  $\dot{r} = 0$  и  $\dot{r} \neq 0$ .

Случаю  $\dot{r} = 0$  отвечает  $\dot{\rho} = 0$ , что соответствует движению по окружности с центром, совпадающим с началом координат.

При  $\dot{r} \neq 0$  имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \text{const.}$$

Его решение – логарифмическая спираль. Уравнение оптимальной траектории в полярной системе координат:

$$\rho(\psi) = \rho_A \exp \left[ \frac{\psi - \psi_A \ln \frac{\rho_B}{\rho_A}}{\psi_B - \psi_A} \right].$$

3. При  $m = 2$ , в соответствии с (33), уравнение в полярной системе координат имеет вид

$$\rho(\psi) = \rho_0 \cos^{-2} \left( \frac{\psi}{2} + C_2 \right).$$

В декартовой системе координат ему соответствует уравнение

$$2\rho_0 - x \cos(2C_2) + y \sin(2C_2) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Возводя равенство в квадрат, после приведения подобных членов получаем

$$(49) \quad \rho_0^2 - \rho_0 [x \cos(2C_2) + y \sin(2C_2)] = \frac{1}{4} [x \sin(2C_2) + y \cos(2C_2)]^2.$$

Формула (49) является уравнением параболы.

Полученные соотношения иллюстрируются двумя численными примерами.

**Пример 1.** Объект переходит из начальной точки маршрута  $A(1; 0)$  в конечную точку  $B(0; 1)$ . Ниже приводятся уравнения оптимальных траекторий в декартовой системе координат для различных значений  $m$ :

$$m = \frac{1}{2}: \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2},$$

$$m = 1: x^2 + y^2 = 1,$$

$$m = 2: x + y + \sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2} = 1 + \sqrt{2},$$

$$m = \infty: x + y = 1.$$

Траектории изображены на рис. 1. Траектория с номером 1 соответствует значению  $m = 1/2$ ; с номером 2 – значению  $m = 1$ ;

с номером 3 – значению  $m = 2$ , с номером 4 – значению  $m = \infty$ . Последний случай является описанием асимптотики решения по параметру  $m$ . Точка  $O$  на рис. 1 и 2 соответствует центрам окружностей – оптимальных траекторий при  $m = 1/2$ .

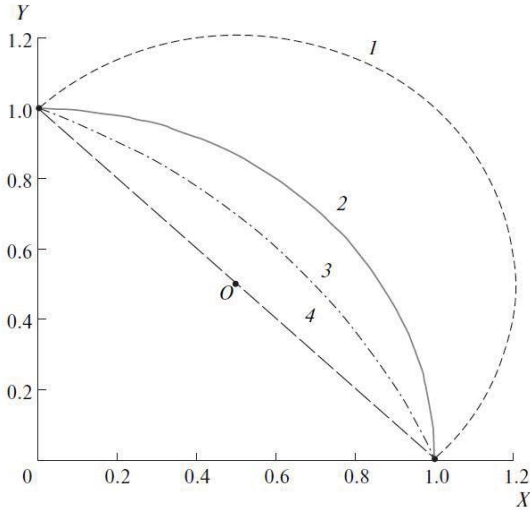


Рис. 1. Оптимальная траектория уклонения,  
 $\rho_A = \rho_B, |\psi_B - \psi_A = \pi/2$

В силу (33) и (39) на оптимальной траектории текущее значение модуля скорости  $v(\psi)$  и текущее расстояние до наблюдателя  $\rho(\psi)$  при  $m \neq 1$  связаны соотношениями

$$v = C_4 \rho \cos\left(\psi \frac{k}{2m} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{k}{2m}\right),$$

$$\rho(\psi) = \rho_0 \left( \cos\left(\psi \frac{k}{2m} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{k}{2m}\right) \right)^{-\frac{2m}{k}},$$

$$\rho_0 = \left( \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{k}{2m}\right) \right)^{\frac{2m}{k}}.$$

Законы изменения модуля скорости и текущего расстояния для различных значений  $m$  имеют следующий вид:

$$m = \frac{1}{2} : v = C_4 \rho \cos\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right), \rho(\psi) = \sqrt{2} \cos\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$m = 1 : v = C_4 \rho, \rho(\psi) = 1, \rho_0 = 1.$$

$$m = 2 : v = C_4 \rho \cos\left(\frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{8}\right), \rho(\psi) = \rho_0 \left(\cos\left(\frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right)^{-2},$$

$$\rho_0 = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right), v = C_4 \sqrt{\rho_0 \rho}.$$

Существенный интерес представляет оценка чувствительности критерия (риска) к отклонению законов управления от оптимальных. Оценка чувствительности определялась следующим образом. Для каждого значения  $m = 1/2; 1; 2$  решалась оптимизационная задача, находились оптимальная траектория, оптимальный закон управления скоростью и соответствующее значение оптимального риска. Затем по очереди фиксировались некоторое  $m$ , соответствующий ему вид критерия и вычислялись значения этого критерия (риска) для законов движения, оптимальных при других  $m$ . Результаты расчетов приведены ниже. Нумерация рисков  $i = 1, 2, 3, 4$  соответствует возрастанию величины показателя  $m = 1/2; 1; 2; \infty$ .

При  $m = 1/2$  риск вычисляется по формуле

$$R_i = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\rho_\psi^2 + \rho^2}}{\rho^2} d\psi.$$

Соответствующие значения рисков:  $R_1 = \sqrt{2}$ ;  $R_2 = \pi/2$ ;  $R_3 = 1,79$ ;  $R_4 = 2$ , минимальным является значение риска, соответствующее зафиксированному значению показателя степени – в данном случае  $m = 1/2$ .

Для случая  $m = 1$  риск вычисляется по формуле

$$R_i = C_5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\rho_\psi^2 + \rho^2}}{\rho} d\psi.$$

Значения рисков:  $R_1 = 1,76C_5$ ,  $R_2 = \frac{\pi}{2} C_5$ ,  $R_3 = 1,61C_5$ ,  $R_4 = R_1$ .

Для случая  $m = 2$  риск вычисляется по формуле

$$R_i = C_6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\rho_{\psi}^2 + \rho^2}}{\rho^{1/2}} d\psi.$$

Значения рисков:  $R_1 = 1,98C_6$ ,  $R_2 = \frac{\pi}{2}C_6$ ,  $R_3 = 1,53C_6$ ,  $R_4 = 1,58C_6$ .

**Пример 2.** Объект переходит из начальной точки маршрута  $A(1; 0)$  в конечную точку  $B(0; 2)$ .

Уравнения оптимальных траекторий:

$$m = \frac{1}{2}: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{2},$$

$$m = 1: \rho(\psi) = \exp\left(\frac{2 \ln 2}{\pi} \psi\right),$$

$$m = 2: y = 2\sqrt{1-x},$$

$$m = \infty: 2x + y = 2.$$

Траектории изображены на рис. 2. Нумерация траекторий совпадает с нумерацией на рис. 1.

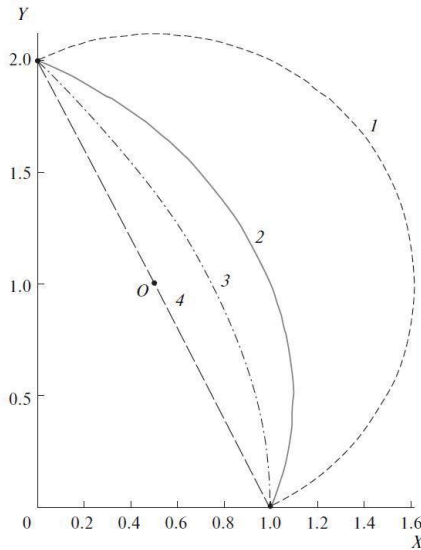


Рис. 2. Оптимальная траектория уклонения,  
 $\rho_A \neq \rho_B, |\psi_B - \psi_A = \pi/2$

Законы изменения модуля скорости и текущего расстояния имеют вид:

$$m = \frac{1}{2} : v = C_4 \rho \cos(\psi - \arctg 2), \rho(\psi) = \sqrt{5} \cos(\psi - \arctg 2),$$

$$\rho_0 = \sqrt{5}, v = C_4 \frac{\rho^2}{\rho_0}.$$

$$m = 1 : v = C_4 \rho, \rho(\psi) = \exp\left(\frac{2 \ln 2}{\pi} \psi\right), \rho_0 = 1.$$

$$m = 2 : v = C_4 \rho \cos\left(\frac{\psi}{2}\right), \rho(\psi) = \rho_0 \cos^{-2}\left(\frac{\psi}{2}\right), \rho_0 = 1,$$

$$v = C_4 \sqrt{\rho_0 \rho}.$$

Риски для соответствующих значений  $m$ :

$$m = \frac{1}{2} : R_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}, R_2 \cong 1,24, R_3 \cong \sqrt{2}, R_4 = 1,76.$$

$$m = 1 : R_1 \cong 1,92C_5, R_2 \cong 1,71C_5, R_3 \cong 1,76C_5, R_4 = R_1.$$

$$m = 2 : R_1 \cong 2,58C_6, R_2 \cong 2,05C_6, R_3 = 2C_6, R_4 \cong 2,06C_6.$$

В [6] приведены результаты сравнительного анализа оптимальных законов уклонения от обнаружения на постоянной и переменной скоростях для случая, когда уровень излучаемого сигнала пропорционален первой степени скорости. Решение задачи об оптимизации траектории уклонения на постоянной скорости приведено в [11]; движение на переменной скорости описывается формулами, соответствующими значению  $m = 1/2$ . Сравнение проводится по трем показателям:

- виду оптимальной траектории,
- величине риска,
- времени пребывания на маршруте.

**Оптимальные траектории.** При движении с переменной скоростью оптимальной траекторией является дуга окружности, определяемой формулой (44). Из результатов [10] следует, что та же окружность является оптимальной траекторией уклонения на постоянной скорости.



**Риски.** При движении с переменной скоростью риск вычисляется по формуле (42). При  $m = 1/2$  риск определяется формулой

$$R = \rho_0^{-1} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \cos^{-2}(\psi - C_2) d\psi.$$

С учетом соотношений (46) и (47), величина риска

$$R = d / \rho_1 \rho_2.$$

Из результатов [2] следует, что то же значение риска соответствует движению на постоянной скорости.

**Время прохождения маршрута.** При переменной скорости время прохождения маршрута (обозначим его  $T_V$ ) связано с параметрами закона уклонения соотношением

$$T_V = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{ds(\psi)}{v(\psi)},$$

где  $ds(\psi)$  – дифференциал дуги,  $v(\psi)$  – скорость перемещения по дуге. В полярной системе координат

$$ds(\psi) = \sqrt{\rho_\psi^2 + \rho^2} d\psi,$$

где  $\rho_\psi = d\rho/d\psi$ . При  $m = 1/2$ , в соответствии с (39),

$$v(\psi) = C_3 \rho_0 \cos^2(\psi - C_2).$$

Постоянная  $C_3$  здесь определяется исходя из требований, отличных от условий прохождения траектории через фиксированные начальную и конечную точки траектории.

Ниже рассматривается пример, в котором значение  $C_3$  определяется из условия равенства интервалов времени движения по маршруту на переменной и постоянной скоростях. Вычисляя интеграл (49), находим время прохождения маршрута при оптимальном законе изменения скорости:

$$T_V = C_3^{-1} \frac{\sin|\Delta\psi|}{\rho_0^{-2} \rho_A \rho_B}.$$

С другой стороны, время прохождения маршрута на постоянной скорости  $u$  (обозначим его  $T_C$ ) определяется соотношением

$$T_C = \rho_0 \frac{|\Delta\psi|}{u}.$$

Из условия равенства  $T_C = T_V$  имеем:

$$C_3 = u \frac{\rho_0}{\rho_A \rho_B} \frac{\sin |\Delta\psi|}{|\Delta\psi|}.$$

Подставляя значение  $C_3$  в формулу (40), находим величину начальной скорости объекта  $v(\psi_A)$ , при которой длительности интервалов времени движения на переменной и постоянной скоростях одинаковы:

$$v(\psi_A) = u \frac{\rho_A}{\rho_B} \frac{\sin |\Delta\psi|}{|\Delta\psi|}.$$

Так как решается задача об уклонении, то практический интерес представляет случай  $\rho_2 \geq \rho_1$ . Но  $\sin |\Delta\psi| \leq |\Delta\psi|$  при всех  $\rho_1 = \rho_2$ ,  $|\Delta\psi| = \pi/2$ , поэтому для указанного случая  $v(\psi_A) < u$ . В частном случае при  $\rho_1 = \rho_2$ ,  $|\Delta\psi| = \pi/2$ :

$$v(\psi_A) = \frac{2}{\pi} u.$$

При движении на переменной скорости мгновенный уровень сигнала на входе наблюдателя остается постоянным и равным

$$D_V = v(\psi_A) / \rho_A^2.$$

При движении на постоянной скорости максимум мгновенного уровня сигнала достигается в начальной и конечной точках траектории и равен

$$D_C = u / \rho_1^2.$$

Следовательно, оптимизация траектории с одновременной оптимизацией режима скорости позволяет сформировать на входе наблюдателя сигнал, мгновенный уровень которого меньше максимального мгновенного уровня сигнала (в рассматриваемом примере – меньше в полтора раза), соответствующего движению по оптимальной траектории на постоянной скорости при одном и том же интегральном уровне принятого сигнала.

Такая особенность оптимального закона уклонения делает его перспективным для применения как с точки зрения обнаружения объекта по интегральному критерию, так и с точки зрения обнаружения его по мгновенному уровню сигнала.

На рис. 3 и 4 приведены графики вероятности необнаружения как функции текущего времени для двух значений длительности эпизода уклонения,  $T_1 < T_2$ . Графики построены в зависимости вероятности от длительности соответствующего интервала времени  $t/T_i$ ,  $i = 1, \dots, 2$ , нормированной по максимуму.

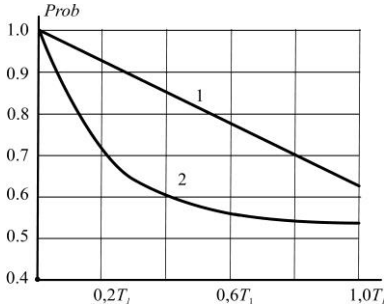


Рис. 3.

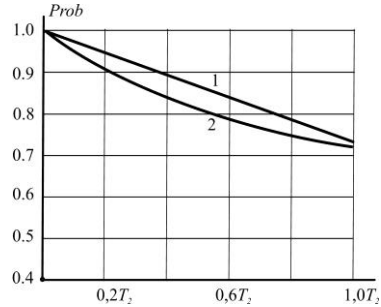


Рис. 4.

Графики вероятности необнаружения для двух значений длительности эпизода уклонения,  $T_1 < T_2$

### 3.3. О ЗАМЕНЕ ПЕРЕМЕННЫХ В ФУНКЦИОНАЛЕ РИСКА

В [12] предложен следующий подход к решению задач оптимизации. Так как движение объекта происходит в  $\mathbb{R}^2$ , то предлагается отождествить вещественную плоскость  $\mathbb{R}^2$  с комплексной плоскостью  $\mathbb{C}$ , ввести комплексную координату  $z = x + iy$ , где  $z(x, y)$  – двумерный вектор координат объекта на вещественной плоскости, и проводить оптимизацию функционала (22) в  $\mathbb{C}$  с последующим отображением полученных результатов в  $\mathbb{R}^2$ . В результате замены переменной функционал (22) записывается следующим образом:

$$(50) \quad R(z, \bar{z}, \dot{z}, \bar{\dot{z}}) = \int_0^T \frac{(\dot{z} \bar{\dot{z}})^m}{z \bar{z}} dt = \int_0^T \frac{\dot{z}^m}{z} \left( \frac{\bar{\dot{z}}^m}{\bar{z}} \right) dt.$$

Подынтегральное выражение в (50) является произведением некоторой функции и комплексно-сопряженной к ней функции. Дифференциальная замена

$$(51) \quad dw = z^{-1/m} dz$$

приводит функционал (22) к виду

$$(52) R(w, \bar{w}, \dot{w}, \bar{\dot{w}}) = \int_0^T (\dot{w} \bar{\dot{w}})^m dt.$$

Интегрирование равенства (51) определяет явный вид замены переменной в  $\mathbb{C}$ :

$$(53) \alpha(w - w_0) = z^\alpha, \quad \alpha = \frac{m-1}{m}, \quad \text{где } m \in [0, 5; \infty] \setminus 1, \\ w - w_0 = \ln z, \quad \text{где } m = 1, \quad w_0 \in \mathbb{C}.$$

Из области определения  $m$  определяется область изменения  $\alpha$ :  $\alpha \in [-1, 1) \setminus 0$ .

Вариационная задача об оптимизации исходного функционала (22) сводится к задаче минимизации функционала

$$(54) R(w, \bar{w}, \dot{w}, \bar{\dot{w}}) = \int_0^T (\dot{w} \bar{\dot{w}})^m dt \rightarrow \min_{w, \bar{w}}.$$

Геодезической линией задачи (54) является прямая, проходящая через точки  $w_A$  и  $w_B$  – образы в пространстве комплексной переменной  $w$  граничных точек  $A, B$  в исходной задаче. Уравнение прямой, проходящей через точки  $w_A$  и  $w_B$ ,

$$(55) w(t) = w_A(1 - \tau) + w_B \tau, \quad \tau = \frac{g(t)}{T}, \quad \dot{g} \geq 0, \\ g(0) = 0, \quad g(T) = T.$$

С помощью обратной замены  $w \rightarrow z$  находится оптимальная траектория в исходной вариационной задаче при различных значениях показателя степени  $m$ . С учетом того, что оптимальный закон управления объектом обладает тем свойством, что уровень сигнала, приходящего на вход сенсора, остается постоянным в течение всего времени прохождения маршрута, параметризация прямой (55), реализующей это свойство, имеет вид  $g(t) = t$ . В этом случае

$$|\dot{w}(t)| = \frac{|w_A - w_B|}{T}$$

В [12] показано, что экстремали функционала (50) и, соответственно, (22) отвечают достаточным условиям оптимальности и доставляют функционалам глобальный минимум.

### 3.4. УКЛОНЕНИЕ ПО ОТ ОБНАРУЖЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫМ СЕНСОРОМ ПРИ НАЛИЧИИ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ОГРАНИЧЕНИЯ НА ТРАЕКТОРИЮ

Ограничения такого вида возникают, например, при решении задачи о форсировании канала естественными ограничениями служат границы канала.

В [9] решена задача оптимизации закона уклонения ПО для случая, когда границей допустимой области является прямая. Полярное уравнение прямой имеет вид

$$\rho(\psi) = \frac{\rho_N}{\cos(\psi - \delta)},$$

где  $\rho_N$  – длина нормали, проведенной из полюса к прямой,  $\delta$  – полярный угол нормали.

Вводится полярная система координат, полюс которой совпадает с положением наблюдателя, а полярная ось проходит через начальную точку маршрута  $A(x_A, y_A)$ . Во введенной полярной системе координат задача об оптимизации закона уклонения сводится к минимизации функционала

$$(56) \quad R = \int_0^T \frac{(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\psi}^2)^m}{\rho^2} dt$$

при наличии граничных условий

$$(57) \quad \rho(0) = \rho_A, \quad \psi(0) = 0; \quad \rho(T) = \rho_B, \quad \psi(T) = \psi_B$$

и ограничения

$$\rho(\psi) \leq \frac{\rho_N}{\cos(\psi - \delta)}; \quad 0 \leq \psi \leq \psi_B.$$

Аналитическое решение задачи получено лишь для  $m = 1$ .

Из общих результатов теории оптимального управления [17] известно, что при наличии ограничений в виде неравенств на функции координат оптимальная траектория состоит из участков, часть из которых лежит на границе допустимой области, а остальные – внутри допустимой области. При  $m = 1$  в отсутствие ограничения оптимальной траекторией является логарифмическая спираль [9, 10].

Логарифмическая спираль является выпуклой функцией и с прямой (53) может иметь не более двух общих точек. Поэтому

решение задачи об оптимизации закона уклонения при наличии ограничений сводится к нахождению оптимального закона управления при движении объекта по прямолинейной траектории (границе), определению условий сопряжения отдельных участков траектории и минимизации суммарного риска.

При движении по фиксированной прямолинейной траектории (границе) оптимизация закона уклонения сводится к оптимизации закона изменения скорости. Пусть  $D(\rho_D, \psi_D)$  и  $E(\rho_E, \psi_E)$  – точки входа и схода траектории с границы соответственно;  $T_D, T_E$  – моменты входа и схода. Так как для прямолинейной траектории

$$\dot{\rho} = \frac{\rho_N \sin(\psi - \delta)}{\cos^2(\psi - \delta)} \dot{\psi} = \rho \dot{\psi} \operatorname{tg}(\psi - \delta),$$

то в соответствии с (56) при  $m = 1$  имеем вариационную задачу

$$R_{DE} = \int_{T_D}^{T_E} \frac{(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\psi}^2)}{\rho^2} dt = \int_{T_D}^{T_E} \frac{\dot{\psi}^2}{\cos^2(\psi - \delta)} dt \Rightarrow \min_{\psi},$$

где нижние индексы здесь и далее указывают на то, вдоль какой кривой определяются элементы закона управления и риск. Независимая переменная (время) в явном виде в подынтегральное выражение не входит. Поэтому в вариационной задаче существует первый интеграл уравнения Эйлера [18]. Непосредственной проверкой устанавливается, что этим интегралом является гамильтониан, с точностью до постоянного множителя совпадающий с подынтегральной функцией в (51), поэтому для прямолинейной траектории справедливо соотношение

$$v(\psi) = C_{DE} \rho(\psi) = \frac{C_{DE} \rho_N}{\cos(\psi - \delta)}.$$

Постоянная  $C_{DE}$  определяется из условия прохождения отрезка прямой  $DE$  с использованием оптимального закона изменения скорости за время

$$T_E - T_D \triangleq T_{DE} = \int_{\psi_D}^{\psi_E} \frac{ds(\psi)}{v(\psi)},$$

где  $ds(\psi) = \rho_N d\psi / \cos^2(\psi - \delta)$ . Отсюда находится длительность интервала времени

$$(58) T_{DE} = \int_{\psi_D}^{\psi_E} \frac{d\psi}{C_{DE} \cos(\psi - \delta)} = \frac{1}{C_{DE}} \ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\psi_E - \delta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\psi_D - \delta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Оптимальное значение риска, соответствующее движению по границе, равно

$$R_{DE} = C_{DE}^2 T_{DE} = \frac{1}{T_{DE}} \ln^2 \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\psi_E - \delta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\psi_D - \delta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

В [9] доказано, что участки  $AD$  и  $DE$  оптимальной траектории сопрягаются гладко; условие сопряжения выражается равенством

$$(59) \ln \frac{\rho_N}{\rho_A \cos(\psi_D - \delta)} = \psi_D \operatorname{tg}(\psi_D - \delta).$$

Аналогичное соотношение выписывается для участка логарифмической спирали, соединяющей точки  $E$  и  $B$ :

$$(60) \ln \frac{\rho_N}{\rho_B \cos(\psi_E - \delta)} = (\psi_E - \psi_B) \operatorname{tg}(\psi_E - \delta).$$

С учетом граничных условий (57), конкретизация элементов оптимальных законов управления и рисков на криволинейных участках траектории имеет следующий вид.

Криволинейный участок  $AD$ :

– уравнение оптимальной траектории:

$$\rho(\psi) = \rho_A \exp\left(\frac{\psi}{\psi_D} \ln \frac{\rho_D}{\rho_A}\right),$$

– оптимальный закон изменения скорости:

$$v(\psi) = C_{AD} \rho(\psi),$$

где  $C_{AD} = \frac{1}{T_{AD}} \sqrt{\psi_D^2 + \ln^2 \frac{\rho_D}{\rho_A}}$ ,  $T_{AD}$  – время движения вдоль участка  $AD$ ;

– риск:

$$R_{AD} = \frac{1}{T_{AD}} \left( \psi_D^2 + \ln^2 \frac{\rho_D}{\rho_A} \right).$$

Криволинейный участок  $EB$ :

– уравнение оптимальной траектории:

$$\rho(\psi) = \rho_B \exp \left( \frac{\psi - \psi_B}{\psi_E - \psi_B} \ln \frac{\rho_H}{\rho_B} \right);$$

– оптимальный закон изменения скорости:

$$v(\psi) = C_{EB} \rho(\psi),$$

где  $C_{EB} = \frac{1}{T_{EB}} \sqrt{(\psi_E - \psi_B)^2 + \ln^2 \frac{\rho_E}{\rho_B}}$ ;  $T_{EB}$  – время движения

вдоль участка  $EB$ .

– риск:

$$R_{EB} = \frac{1}{T_{EB}} \left( (\psi_E - \psi_B)^2 + \ln^2 \frac{\rho_E}{\rho_B} \right).$$

Задача об оптимизации закона уклонения от обнаружения свелась к задаче минимизации суммарного риска

$$R = R_{AD} + R_{DE} + R_{EB}$$

при наличии ограничения

$$T = T_{AD} + T_{DE} + T_{EB}$$

и условий (59), (60).

Общие соотношения иллюстрируются следующим примером.

Объект переходит из точки, расположенной на одной оси декартовой системы координат, в точку, расположенную на другой оси, в течение фиксированного времени  $T$ ; положение наблюдателя совпадает с началом координат; начальная и конечная точки маршрута одинаково удалены от полюса. Соответствующие начальные условия имеют вид

$$\rho(0) = \rho(T) = \rho_A; \quad \psi(0) = 0, \quad \psi(T) = \pi/2.$$

Границей допустимой области является прямая, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид



$$y = -x + k\rho_A; 1 \leq k \leq \sqrt{2}.$$

При  $k = 1$  оптимальной траекторией является прямая (59); при  $k \geq \sqrt{2}$  ограничение неэффективно. В полярной системе координат прямая (59) описывается уравнением

$$\rho(\psi) = \frac{k\rho_A}{\sqrt{2} \cos\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

В силу симметрии задача оптимизации решается для траектории, состоящей из двух участков – начального, до момента выхода на прямую, в точке  $D(\rho_D, \psi_D)$  в некоторый момент  $T_{AD}$ , и участка движения по прямой в течение времени  $(T/2 - T_{AD})$  до точки  $H(k\rho_A/\sqrt{2}, \pi/4)$ . Условие сопряжения участков траектории принимает вид

$$(61) \quad \frac{k}{\sqrt{2}\rho_A \cos(\psi_D - \pi/4)} = \psi_D \operatorname{tg}(\psi_D - \pi/4).$$

При фиксированном значении  $k$  соотношение (61) является уравнением относительно  $\psi_D$ . График зависимости  $\psi_D = \psi_D(k)$  приведен на рис. 5. Так как точка  $H(k\rho_A/\sqrt{2}, \pi/4)$  является правой граничной точкой отрезка прямой, то, в соответствии с (58) и (61), выражение для суммарного риска принимает вид

$$R = \frac{\psi_D^2}{T_{AD} \cos^2(\psi_D - \pi/4)} + \frac{1}{T/2 - T_{AD}} \ln^2 \operatorname{ctg}(\psi_D/2 + \pi/8).$$

Таким образом, при фиксированном значении параметра  $k$  задача оптимизации свелась к нахождению времени движения  $T_{AD}$  по криволинейному участку траектории. Выражение для риска переписывается следующим образом:

$$R = \frac{a^2}{T_{AD}} + \frac{b^2}{T/2 - T_{AD}}.$$

Отсюда находятся:

– оптимальные длительности интервалов времени и соответствующие им риски:

$$T_{AD}^* = \frac{Ta}{2(a+b)}; T_{DH}^* = \frac{Tb}{2(a+b)};$$

$$R_{AD}^* = \frac{a(a+b)}{T/2}; R_{DH}^* = \frac{b(a+b)}{T/2}.$$

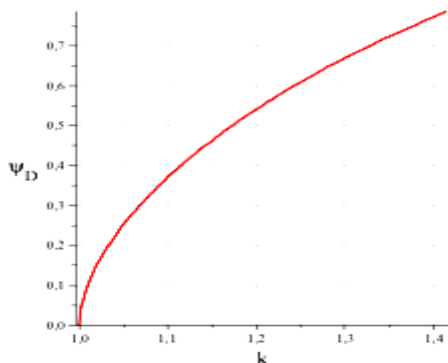


Рис. 5. Зависимость  $\psi D_{(k)}$

Звездочкой снабжены оптимальные величины.

Параметры оптимальной траектории были рассчитаны для конкретного значения  $k = 1,15$ : ( $\psi_D = 0,464$ ,  $\rho_D = 0,857$ ). Значение оптимального риска

$$R^* = \frac{0,666}{T/2}.$$

В отсутствие ограничения оптимальной траекторией является окружность, по которой объект движется с постоянной скоростью; центр окружности совпадает с положением сенсора и

$$R_{\min} = \frac{0,6168}{T/2}.$$

Решение задачи иллюстрируется рис. 6а, б, построенными при  $\rho_A = \rho_B = 1$ . Сплошными линиями изображены участки траектории, соответствующие движению внутри допустимой области, пунктирными – соответствующие движению по ограничению.

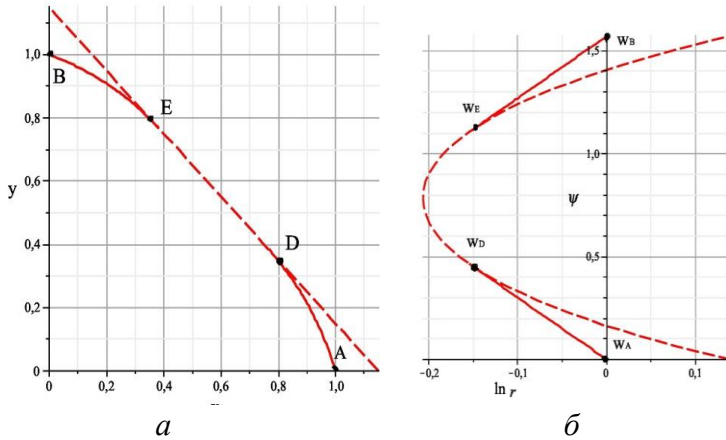


Рис. 6. а) движение в вещественной плоскости;  
б) движение в комплексной плоскости

Каждая траектория состоит из двух отрезков: логарифмической спирали и прямолинейного отрезка.

### 3.5. УКЛОНЕНИЕ ПО ОТ ОБНАРУЖЕНИЯ ДВИЖУЩИМСЯ СЕНСОР

В [18] решалась следующая задача. На плоскости расположены два объекта – ПО, движущийся по прямой с постоянной скоростью  $V = (V_x, V_y)$ , и наблюдатель (сенсор). Координаты начальной и конечной точек маршрута заданы в неподвижной декартовой системе координат, начало которой совпадает с начальной позицией наблюдателя. Требуется найти траекторию ПО и закон изменения его скорости, доставляющие минимум функционалу

$$(62) R(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \int_0^T L dt = \int_0^T \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{(x - V_x t)^2 + (y - V_y t)^2} dt \rightarrow \min_{(x, y, \dot{x}, \dot{y})}.$$

Производные, если не оговаривается особо, являются производными по времени.

Граничные условия заданы в виде

$$x(0) = x_A, \quad y(0) = y_A, \quad x(T) = x_B, \quad y(T) = y_B,$$

где  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$  – начальная и конечная точки маршрута. Величина  $T$  (время движения по маршруту) задана. Замена переменных

$$\xi = x - V_x t; \eta = y - V_y t$$

приводит функционал (62) к виду

$$(63) \quad R(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}) = \int_0^T \frac{(\dot{\xi} + V_x)^2 + (\dot{\eta} + V_y)^2}{\xi^2 + \eta^2} dt.$$

Необходимые условия оптимальности для функционала (63) определяются уравнениями Эйлера:

$$(64) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\xi} + V_x}{\xi^2 + \eta^2} \right) + \frac{(\dot{\xi} + V_x)^2 + (\dot{\eta} + V_y)^2}{\xi^2 + \eta^2} \xi = 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\eta} + V_y}{\xi^2 + \eta^2} \right) + \frac{(\dot{\xi} + V_x)^2 + (\dot{\eta} + V_y)^2}{\xi^2 + \eta^2} \eta = 0. \end{cases}$$

Система (64) преобразуется к системе, состоящей из четырех дифференциальных уравнений первого порядка [18]:

$$(65) \quad \begin{cases} \dot{\xi} = u, \\ \dot{\eta} = v, \\ \dot{u} + \frac{\xi(v^2 - \dot{u}^2)}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{V^2 \xi - 2\eta v u + 2v \xi V_y - 2u \eta V_x}{\xi^2 + \eta^2} = 0, \\ \dot{v} - \frac{\eta(v^2 - \dot{u}^2)}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{V^2 \eta - 2\xi v u + 2u \eta V_x - 2u \xi V_y}{\xi^2 + \eta^2} = 0. \end{cases}$$

Первым интегралом системы (65) является гамильтониан, который в явном виде представляется выражением

$$(66) \quad H = \frac{V^2 - (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2)}{\xi^2 + \eta^2}$$

В результате деления каждого уравнения системы (63) на первое уравнение этой системы получаем

$$(67) \begin{cases} \eta_\xi = \frac{v}{u}, \\ u_\xi + \frac{\xi(v^2 - u^2)}{u(\xi^2 + \eta^2)} + \frac{V^2\xi - 2\eta v u + 2v\xi V_y - 2v\eta V_x}{u(\xi^2 + \eta^2)} = 0, \\ v_\xi + \frac{\eta(u^2 - v^2)}{u(\xi^2 + \eta^2)} + \frac{V^2\eta - 2\xi v u + 2v u V_x - 2u\eta V_y}{u(\xi^2 + \eta^2)} = 0. \end{cases}$$

Замена переменных  $w = \xi/\eta$ , в предположении о том, что за счет соответствующего выбора системы координат сенсор движется вдоль оси абсцисс, приводит систему (67) к следующему виду:

$$(68) \begin{cases} v_w = \frac{(u^2 - v^2) + V^2 - 2wuv + 2Vu}{(v - u)(\xi^2 + \eta^2)}, \\ u_w = \frac{(v^2 - v^2)w + V^2w - 2wu + 2Vv}{(v - u)(\xi^2 + \eta^2)}. \end{cases}$$

В [10] показано, что система (64) может быть разрешена относительно вектор-столбца  $\begin{pmatrix} 1 \\ w^2 + 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} w \\ w^2 + 1 \end{pmatrix}^T$  при выполнении следующих условий: ( $u \neq v$ ;  $u^2 + v^2 > V^2$ ).

#### 4. Об одном классе уклонения подвижных объектов от обнаружения

##### 4.1. УКЛОНЕНИЕ ПО ОТ ОБНАРУЖЕНИЯ СИСТЕМОЙ (СТАЦИОНАРНЫЙ СЕНСОР – СТАЦИОНАРНЫЙ ДЕТЕКТОР)

В статье [11] приводятся постановка и решение задачи об оптимизации закона уклонения ПО от обнаружения системой из двух разнородных наблюдателей – стационарных сенсора и детектора. Задача сведена к задаче уклонения от обнаружения сенсором при наличии круговой запретной зоны (кругового ограничения) – зоны обнаружения детектора в предположении о том, что попадание ПО в эту зону приводит к мгновенному его обнаружению.

Вводится полярная система координат, полюс которой совпадает с положением сенсора, а полярная ось проходит через начальную точку маршрута  $A(x_A, y_A)$ . Полярные координаты произвольной точки плоскости обозначаются символами  $(\rho, \psi)$ . Полярное уравнение круговой зоны обнаружения детектора имеет вид:

$$(69) \quad \rho_d^2(\psi) - 2\rho_d(\psi)l \cos(\psi - \theta) + l^2 = r^2,$$

где  $\rho_d(\psi)$  – полярный радиус точки окружности – границы круговой зоны обнаружения детектора (нижний индекс соответствует англ. detector);  $(l, \theta)$  – полярные координаты детектора – центра зоны обнаружения;  $r$  – радиус зоны обнаружения.

Квадратное уравнение (69) разрешается относительно полярного радиуса  $\rho_d(\psi)$ :

$$(70) \quad \rho_d(\psi) = l \cos(\psi - \theta) \pm \sqrt{r^2 - l \sin^2(\psi - \theta)};$$

$$\rho_{d1}(\psi) \geq \rho_{d2}(\psi).$$

Попадание уклоняющегося объекта с полярными координатами  $(\rho, \psi)$  в пределы круговой зоны обнаружения детектора возможно лишь при выполнении системы неравенств

$$\rho_{d1}(\psi) > \rho(\psi) > \rho_{d2}(\psi).$$

Во введенной полярной системе координат задача об оптимизации закона уклонения от обнаружения системой разнородных наблюдателей сводится к минимизации функционала

$$(71) \quad R = \int_0^T \frac{(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\psi}^2)}{\rho^2} dt \rightarrow \min_{(\psi, \dot{\psi}, \dot{\rho})},$$

при наличии граничных условий

$$\rho(0) = \rho_A, \quad \psi(0) = 0; \quad \rho(T) = \rho_B, \quad \psi(T) = \psi_B,$$

и ограничения

$$(72) \quad \rho(\psi) \notin [\rho_{d1}(\psi), \rho_{d2}(\psi)]; \quad \psi \in [\psi(0), \psi(T)].$$

Из общих результатов теории оптимального управления известно, что при наличии ограничений в виде неравенств на функции координат подвижного объекта оптимальная траектория состоит из участков, часть из которых лежит на границе допустимой области, а остальные – внутри допустимой области.

В точках сопряжения отдельные отрезки оптимальной траектории сшиваются гладко.

Решение задачи (71)–(72) об оптимизации закона уклонения при наличии ограничения на траекторию в виде окружности сводится к нахождению оптимального закона управления при движении объекта по дуге окружности (круговой траектории) при произвольном времени движения, нахождению в явном виде условий сопряжения отдельных участков траектории и минимизации суммарного риска.

При движении объекта по фиксированной круговой траектории оптимизация закона уклонения сводится к оптимизации закона изменения скорости. Пусть  $D(\rho_D, \psi_D)$ ,  $H(\rho_H, \psi_H)$  – точки входа и схода траектории с круговой границы, соответственно;  $T_D, T_H$  – моменты входа и схода.

Явный вид функционала на круговой траектории при  $\rho = \rho_d(\psi)$ :

$$(73) \quad R_{DH} = \int_{T_D}^{T_H} \frac{(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\psi}^2)}{\rho^2} dt$$

В силу (70) производная полярного радиуса по времени имеет вид

$$(74) \quad \dot{\rho}_d = -\frac{l \rho_d \sin(\psi - \theta)}{\sqrt{r^2 - l^2 \sin^2(\psi - \theta)}} \dot{\psi},$$

Возводя (74) в квадрат, подставляя результат в (73) и приводя подобные члены, находим выражение для функционала при движении по круговой траектории:

$$(75) \quad R_{DH} = \int_{T_D}^{T_H} \left( \frac{r^2}{r^2 - l^2 \sin^2(\psi - \theta)} \right) \dot{\psi}^2 dt.$$

В функционале (75) подынтегральная функция не зависит в явном виде от времени, поэтому в вариационной задаче на минимум функционала (75) при фиксированном времени движения по дуге окружности существует первый интеграл – гамильтониан, который совпадает с лагранжианом. Следовательно, исходя из физического смысла функционала и в силу (75), скорость

движения объекта по дуге окружности пропорциональна  $\rho_D(\psi)$ . Поэтому для круговой траектории справедливо соотношение

$$v(\psi) = C_{DH} \rho_d(\psi).$$

Постоянная  $C_{DH}$  определяется из условия прохождения отрезка дуги  $DH$  с использованием оптимального закона изменения скорости за время

$$T_H - T_D \triangleq T_{DH} = \int_{\psi_D}^{\psi_H} \frac{ds(\psi)}{v(\psi)}.$$

Так как в полярной системе координат  $ds = \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}_\psi^2} d\psi$ , то

$$\dot{\rho}_d = - \frac{l \rho_d \sin(\psi - \theta)}{\sqrt{r^2 - l^2 \sin^2(\psi - \theta)}} \dot{\psi}.$$

Из (75) следует, что значение риска, соответствующее оптимальному закону уклонения при движении по круговому участку траектории,

$$(76) \quad R_{DH} = \frac{1}{T_{DH}} \left[ \int_{\psi_D}^{\psi_H} \sqrt{\left( \frac{r^2}{r^2 - l^2 \sin^2(\psi - \theta)} \right)} d\psi \right]^2 = \frac{\sigma_{DH}}{T_{DH}}.$$

Задача имеет смысл, если начальная точка  $A$  и конечная точка  $B$  маршрута находятся вне зоны обнаружения детектора. Уравнение отрезка оптимальной траектории движения, проходящей через начальную точку  $A$  и произвольную точку  $D$  в отсутствие ограничений (логарифмической спирали), задается формулой

$$\rho = \rho_A \exp\left( \frac{\psi - \psi_A}{\psi_D - \psi_A} \ln \frac{\rho_D}{\rho_A} \right).$$

Дифференцируя функцию  $\rho$  по  $\psi$ , находим уравнение касательной к спиральному отрезку траектории в точке  $D$ :

$$(77) \quad \frac{d\rho_D(\psi)}{d\psi} = \rho_D \frac{\ln \frac{\rho_D}{\rho_A}}{\psi_D - \psi_A}.$$

Продифференцировав уравнение окружности (69), находим уравнение касательной к окружности в точке  $D$  в виде



$$(78) \quad \frac{d\rho_D(\psi)}{d\psi} = -\frac{\rho_D l \sin(\psi - \theta)}{\rho_D - l \cos(\psi - \theta)}.$$

Пусть сопряжение участков оптимальной траектории, начинающейся из точки  $A$  спирали и дуги окружности, происходит в точке  $D$ . Так как участки траектории сшиваются гладко, то, в силу (77) и (78), полярный угол точки касания подчиняется одному из уравнений

$$(79) \quad \frac{\mp l \sin(\psi_D - \theta)}{\sqrt{r^2 - l^2 \sin^2(\psi_D - \theta)}} = \frac{\ln\left(l \cos(\psi_D - \theta) \pm \sqrt{r^2 - l^2 \sin^2(\psi_D - \theta)}\right) - \ln \rho_A}{\psi_D - \psi_A}.$$

В (79) знаку плюс в левой части уравнения соответствует знак минус в правой части и наоборот. Наличие двух уравнений типа (79) является следствием того, что из любой точки плоскости, лежащей вне круговой зоны обнаружения детектора, можно провести два отрезка логарифмической спирали, касающихся границы круга (окружности) в разных точках. Эти точки обозначаются далее  $D_j$  и  $H_j$ ,  $j = 1, 2$ ; соответствующие им траектории в вещественной плоскости, соединяющие начальную и конечную точки маршрута в вещественной плоскости, обозначаются символами (рис. 7а)  $AD_1H_1B$ ;  $AD_2H_2B$ ; их образы в комплексной плоскости – символами  $w_A, w_B, w_{D_i}, w_{H_i}, i = 1, 2$  соответственно (рис. 7б). Точечная линия соответствует оптимальной траектории уклонения ПО в отсутствие детектора.

Подстановка найденных значений в (77) определяет полярные радиусы соответствующих точек касания.

Аналогичное условие сшивания выписывается для точки  $H$ :

$$(80) \quad \frac{\mp l \sin(\psi_H - \theta)}{\sqrt{r^2 - l^2 \sin^2(\psi_H - \theta)}} = \frac{-\ln\left(l \cos(\psi_H - \theta) \pm \sqrt{r^2 - l^2 \sin^2(\psi_H - \theta)}\right) + \ln \rho_B}{\psi_B - \psi_H}.$$

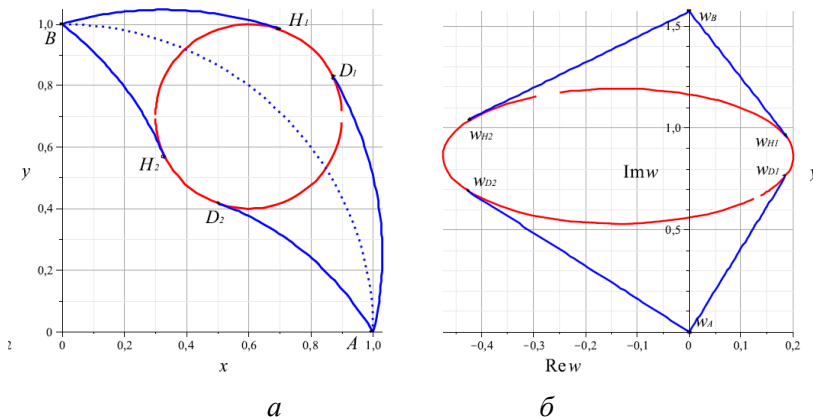


Рис. 7. Построение оптимальной траектории уклонения в системе сенсор–детектор в действительной (а) и комплексной области (б)

Из содержимого раздела 2 следует, что экспоненциальным участкам траектории соответствуют риски

$$(81) R_{AD} = \frac{1}{T_{AD}} \left( (\psi_A - \psi_D)^2 + \ln^2 \frac{\rho_D}{\rho_A} \right) = \frac{\sigma_{AD}}{T_{AD}},$$

$$(82) R_{HB} = \frac{1}{T_{HB}} \left( (\psi_H - \psi_B)^2 + \ln^2 \frac{\rho_H}{\rho_B} \right) = \frac{\sigma_{HB}}{T_{HB}}.$$

Задача оптимизации закона уклонения свелась к решению уравнений (80), (81), суммированию отдельных рисков по траекториям  $AD_1H_1B$ ;  $AD_2H_2B$  при наличии ограничения на время перехода  $T$  и выбору меньшего полного риска.

В результате решения уравнений (81) и (82) определяются координаты точек  $D$  и  $H$ , которые являются точками сопряжения логарифмических спиралей и окружности. Далее, формулами (76), (81) и (82) задаются явные выражения для рисков, соответствующих различным участкам оптимальной траектории. Общий вид этих выражений следующий:

$$R_i = \frac{\sigma_i}{T_i},$$

где индексом  $i = 1, 2, 3$  обозначен порядковый номер участка оптимальной траектории, а  $\sigma_i$  – некоторые константы, определяемые через координаты начальной и конечной точек участков траектории.

Оптимизационная задача сводится к следующей задаче нахождения условного экстремума функции трех переменных вида

$$(83) \quad \frac{\sigma_1}{T_1} + \frac{\sigma_2}{T_2} + \frac{\sigma_3}{T_3} \rightarrow \min_{T_1, T_2, T_3}$$

при условии

$$(84) \quad T_1 + T_2 + T_3 = T,$$

где  $T_1 = T_{AD}$ ,  $T_2 = T_{DH}$ ,  $T_3 = T_{HB}$ . Решение задачи (83)–(84) имеет следующий вид.

Пусть функция  $R = R(T_1, \dots, T_N)$  задается формулой

$$R = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i}{T_i},$$

и на сумму  $T_i$  наложено ограничение

$$\sum_{i=1}^N T_i = T.$$

Тогда функция  $R$  достигает минимума на значениях  $T_i$ , равных

$$T_i = \frac{\sqrt{\sigma_i}}{\sum_{i=1}^N \sqrt{\sigma_i}} T.$$

Минимальное значение  $R$  равно

$$R = \frac{\left( \sum_{i=1}^N \sqrt{\sigma_i} \right)^2}{T}.$$

Решения оптимизационной задачи иллюстрируются рис. 8, на которых изображены оптимальные траектории уклонения ПО на плоскости при наличии и в отсутствие детектора. Управляемый объект переходит из точки  $(1; 0)$  в точку  $(0; 1)$ . Начало системы координат совпадает с расположением сенсора. Каждая

траектория при наличии детектора состоит из трех участков – двух отрезков логарифмических спиралей и дуги окружности. Точечной линией изображена оптимальная траектория движения ПО в отсутствие детектора (круговая траектория). Рис. 8а соответствует расположению детектора в точке  $(0,8; 0,7)$ . Оптимальной является траектория  $AD_2H_2B$ , по которой ПО проходит между обнаружителями. Эта траектория может быть названа траекторией прорыва. Рис. 8б соответствует расположению детектора в точке  $(0,6; 0,7)$  Оптимальной является траектория  $AD_1H_1B$ . Эта траектория может быть названа траекторией обхода системы обнаружителей.

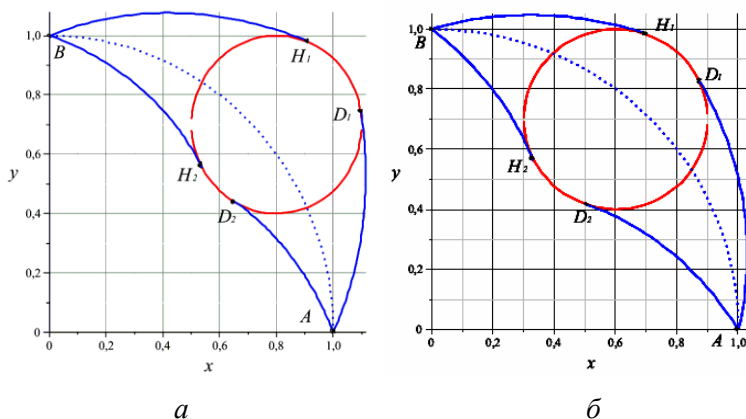


Рис. 8. Построение оптимальной траектории прорыва в системе сенсор-детектор

#### 4.2. УКЛОНЕНИЕ ПО ОТ ОБНАРУЖЕНИЯ СИСТЕМОЙ (СТАЦИОНАРНЫЙ СЕНСОР – ГРУППА СТАЦИОНАРНЫХ ДЕТЕКТОРОВ)

Результаты решения задачи об оптимизации закона уклонения приводятся в статье [22], которая является развитием статьи [21].

Вводится полярная система координат, полюс которой совпадает с положением сенсора, а полярная ось проходит через начальную точку маршрута  $A(x_A, y_A)$ . Полярные координаты

произвольной точки плоскости обозначаются символами  $(\rho, \psi)$ . Уравнение круговой зоны обнаружения  $i$ -го детектора в полярной системе координат имеет вид:

$$(85) \quad \rho_{id}^2(\psi) - 2\rho_{id}(\psi)l_i \cos(\psi - \theta_i) + l_i^2 = r_i^2,$$

где  $\rho_{id}(\psi)$  – полярный радиус точки окружности – границы круговой зоны обнаружения  $i$ -го детектора (нижний индекс соответствует англ. detector);  $(l_i, \theta_i)$  – полярные координаты детектора – центра зоны обнаружения;  $r_i$  – радиус зоны обнаружения,  $i = 1, \dots, q$  – номер детектора,  $q$  – число детекторов.

Квадратное уравнение (85) разрешается относительно полярного радиуса  $\rho_{id}(\psi)$ :

$$\rho_{id}(\psi) = l_i \cos(\psi - \theta_i) \pm \sqrt{r_i^2 - l_i^2 \sin^2(\psi - \theta_i)}; \quad \rho_{id1}(\psi) \geq \rho_{id2}(\psi).$$

Попадание уклоняющегося объекта с полярными координатами  $(\rho, \psi)$  в пределы круговой зоны обнаружения детектора возможно лишь при выполнении системы неравенств

$$\rho_{id1}(\psi) > \rho(\psi) > \rho_{id2}(\psi).$$

Запрещенные области задаются строгими неравенствами

$$Q_i = \{(\rho, \psi) : \rho_{id}^2(\psi) - 2\rho_{id}(\psi)l_i \cos(\psi - \theta_i) + l_i^2 < r_i^2\}.$$

Во введенной полярной системе координат задача об оптимизации закона уклонения от обнаружения системой разнородных наблюдателей сводится к минимизации функционала

$$(86) \quad R = \int_0^T \frac{(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\psi}^2)}{\rho^2} dt \rightarrow \min_{(\psi, \dot{\psi}, \dot{\rho}, \rho)}$$

при наличии граничных условий

$$(87) \quad \rho(0) = \rho_A, \quad \psi(0) = 0; \quad \rho(T) = \rho_B, \quad \psi(T) = \psi_B,$$

и ограничениях

$$(88) \quad \begin{aligned} &(\rho, \psi) \notin Q_i[\rho_{d1}(\psi), \rho_{d2}(\psi)]; \quad i = 1, \dots, q, \\ &\psi \in [\psi(0), \psi(T)]. \end{aligned}$$

Для нахождения оптимального закона уклонения в [22] используется конформная замена в функционале риска (см. также п. 2.3 настоящей работы). Так как движение объекта происходит в  $\mathbb{R}^2$ , то вещественная плоскость  $\mathbb{R}^2$  отождествляется с комплексной плоскостью  $\mathbb{C}$ , вводится комплексная координата

$z = x + iy$ , где  $z(x, y)$  – двумерный вектор декартовых координат объекта на вещественной плоскости и проводится оптимизация функционала ((86) в  $\mathbb{C}$  с последующим отображением полученных результатов в  $\mathbb{R}^2$ . В результате замены переменной функционал (86) записывается следующим образом:

$$(89) \quad R(z, \bar{z}, \dot{z}, \bar{\dot{z}}) = \int_0^T \frac{(\dot{z} \bar{\dot{z}})}{z \bar{z}} dt = \int_0^T \frac{\dot{z}}{z} \overline{\left( \frac{\dot{z}}{z} \right)} dt.$$

Подынтегральное выражение является произведением некоторой функции и комплексно-сопряженной к ней функции. Дифференциальная замена

$$dw = z^{-1} dz$$

приводит функционал (89) к виду

$$(90) \quad R(w, \bar{w}, \dot{w}, \bar{\dot{w}}) = \int_0^T (\dot{w} \bar{\dot{w}}) dt.$$

Вариационная задача об оптимизации исходного функционала (22) сводится к задаче минимизации функционала (90) при наличии ограничений (88)

$$(91) \quad R(w, \bar{w}, \dot{w}, \bar{\dot{w}}) = \int_0^T (\dot{w} \bar{\dot{w}}) dt \rightarrow \min_{w, \dot{w}}.$$

Геодезической линией (91) в отсутствие ограничений на скорость объекта является прямая, проходящая через точки  $w_A, w_B$  – образы в пространстве комплексной переменной  $w$  граничных точек  $A, B$ . При наличии координатных ограничений геодезической также является кривая наименьшей длины.

Из общих результатов теории оптимального управления известно, что при наличии ограничений в виде неравенств на функции координат подвижного объекта оптимальная траектория состоит из участков, часть из которых лежит на границе допустимой области, а остальные – внутри допустимой области. В точках сопряжения отдельные отрезки оптимальной траектории сшиваются гладко.

Свойства решения задачи (87)–(89) устанавливаются в [22] следующим утверждением.

Пусть на плоскости заданы выпуклые открытые множества  $\bar{Q}_i \cap \bar{Q}_j = \emptyset; i, j = 1, \dots, q; i \neq j$ . Решение задачи (87)–(89) в плос-

кости  $w$  состоит из последовательно чередующихся отрезков прямых и криволинейных участков движения по границам множеств  $Q_i$ . В точках сопряжения участки оптимальной траектории сшиваются гладко, а сама траектория включает не более одного участка границы любого множества  $Q_i$ . В [22] показано, что оптимальная траектория состоит не более чем из  $2q + 1$  отрезков, где  $q$  – число детекторов и, соответственно, запрещенных множеств. На вещественной плоскости участки траектории являются чередующимися отрезками логарифмической спирали и дуг окружностей  $Q_i$ , которые сшиваются гладко. Пусть участок оптимальной траектории – спирали, начинающейся из точки  $D_{ik}$  окружности  $Q_i$  и заканчивающейся в точке  $D_{ik}$  окружности  $Q_k$ , сопрягается с дугами окружностей  $Q_i$  и  $Q_k$  в точках  $D_{ik}$  и  $D_{ki}$ . Полярные углы точек касания подчиняются системе уравнений

$$(92) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mp l_i \sin(\psi_{D_{ik}} - \theta_i)}{\sqrt{r_i^2 - l_i^2 \sin^2(\psi_{D_{ik}} - \theta_i)}} = \\ = \frac{\ln\left(l_i \cos(\psi_{D_{ik}} - \theta_i) \pm \sqrt{r_i^2 - l_i^2 \sin^2(\psi_{D_{ik}} - \theta_i)}\right)}{\psi_{D_{ik}} - \psi_{D_{ki}}}; \\ \frac{\ln\left(l_k \cos(\psi_{D_{ki}} - \theta_k) \pm \sqrt{r_k^2 - l_k^2 \sin^2(\psi_{D_{ki}} - \theta_k)}\right)}{\psi_{D_{ik}} - \psi_{D_{ki}}}; \\ \frac{\mp l_k \sin(\psi_{D_{ki}} - \theta_k)}{\sqrt{r_k^2 - l_k^2 \sin^2(\psi_{D_{ki}} - \theta_k)}} = \\ = \frac{\ln\left(l_k \cos(\psi_{D_{ki}} - \theta_k) \pm \sqrt{r_k^2 - l_k^2 \sin^2(\psi_{D_{ki}} - \theta_k)}\right)}{\psi_{D_{ki}} - \psi_{D_{ik}}}; \\ \frac{\ln\left(l_i \cos(\psi_{D_{ik}} - \theta_i) \pm \sqrt{r_i^2 - l_i^2 \sin^2(\psi_{D_{ik}} - \theta_i)}\right)}{\psi_{D_{ki}} - \psi_{D_{ik}}}. \end{array} \right.$$

В системе (92) знаку плюс в левой части каждого уравнения соответствует знак минус в правой части и наоборот. Комбини-

руя знаки плюс и минус, получаем четыре пары решений  $(\psi_{ik}, \psi_{ki})$  и, соответственно, четыре пары точек  $D_{ik}, D_{ki}$ .

Полный риск

$$R = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i}{T_i}$$

при ограничениях

$$T = \sum_{i=1}^N T_i$$

достигает минимума на значениях

$$T_i = \frac{\sqrt{\sigma_i}}{\sum_{i=1}^N \sqrt{\sigma_i}} T.$$

Минимальное значение риска

$$R = \frac{(\sum_{i=1}^N \sqrt{\sigma_i})^2}{T}.$$

Решение задачи (87)–(89) иллюстрируется рис. 9а, б, на которых изображены траектории уклонения от двух детекторов в комплексной (а) и вещественной плоскостях (б).

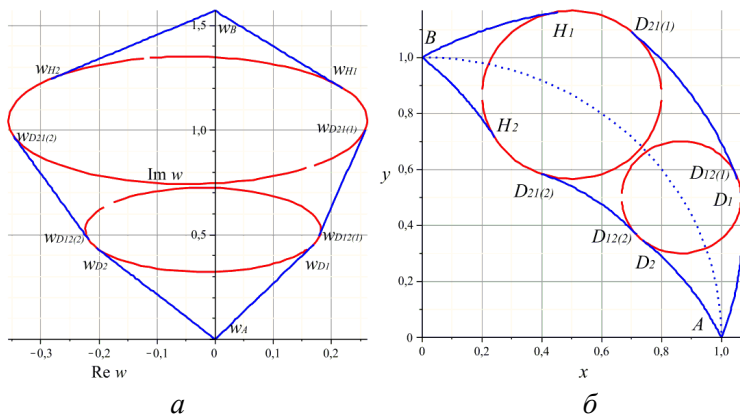


Рис. 9. Траектории уклонения ПО от двух детекторов в комплексной (а) и вещественной плоскостях (б)



### 4.3. УКЛОНЕНИЕ ПО ОТ ОБНАРУЖЕНИЯ СИСТЕМОЙ ИЗ ДВУХ СЕНСОРОВ

На плоскости расположены три объекта – два одинаковых стационарных сенсора и управляемый подвижный объект. Координаты начальной и конечной точек маршрута и позиций наблюдателей заданы в неподвижной декартовой системе координат, начало которой совпадает с серединой отрезка, соединяющего две позиции наблюдателей, расположенные в точках  $(-1; 0)$  и  $(1; 0)$  соответственно. Управляемый объект перемещается из начальной точки  $A(x_A, y_A)$  в конечную точку  $B(x_B, y_B)$  за фиксированное время  $T$ , минимизируя путем выбора траектории скорости объекта функционал обнаружения (риск)

$$R(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \int_0^T (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2} \left( \frac{1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{1}{(x+1)^2 + y^2} \right) dt \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\min}{x, y; \dot{x}, \dot{y}}.$$

Так как движение объекта происходит в  $\mathbb{R}^2$ , то предлагается отождествить  $\mathbb{R}^2$  с  $\mathbb{C}$  и ввести комплексную координату  $z = x + iy$ , где  $i$  – мнимая единица. В результате замены переменных функционал обнаружения переписывается в виде

$$R(z, \bar{z}, \dot{z}, \dot{\bar{z}}) = \int_0^T (\dot{z}\dot{\bar{z}})^{1/2} \left( \frac{1}{(z-1)(\bar{z}-1)} + \frac{1}{(z+1)(\bar{z}+1)} \right) dt.$$

Дробно-линейная замена переменной  $z$  комплексной плоскости

$$w = \frac{z+1}{z-1}$$

позволяет преобразовать функционал обнаружения к виду

$$R(w, \bar{w}, \dot{w}, \dot{\bar{w}}) = \int_0^T \frac{1}{2} (\dot{w}\dot{\bar{w}})^{1/2} \left( 1 + \frac{1}{w\bar{w}} \right) dt.$$

Далее переменная  $w$  рассматривается в координатах  $(\rho, \psi) : w = \exp \rho, \exp(i\varphi)$ ,

где

$$\rho \in (-\infty, \infty), \varphi \in [0, 2\pi].$$

В новых координатах функционал переписывается в виде

$$(92) R(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) = \int_0^T (\dot{\rho} + \dot{\varphi}) ch \rho dt.$$

Уравнения Эйлера – Лагранжа для функционала (92) имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2}} ch \rho \right) = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\rho}}{\sqrt{\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2}} ch \rho \right) - \sqrt{\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2} sh \rho = 0.$$

Решение уравнений Эйлера – Лагранжа для функционала (92) выражается через нормальные эллиптические интегралы Лежандра и имеет вид

$$w = tg \left( \frac{\operatorname{am} \left( \frac{\varphi - \varphi_A + F(\beta_A, C_1)}{\pm C_1} \right)}{2} \right) \exp(i\varphi),$$

где

$$F(\beta, C_1) = \int_0^\beta \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - C_1^2 \sin^2 \gamma}},$$

$$\varphi - \varphi_A = \pm C_1 (F(\beta, C_1) - F(\beta_A, C_1)),$$

$$\exp \rho = tg \left( \frac{\beta}{2} \right); \beta(0) = \beta_A, \beta(T) = \beta_B.$$

Уклонение от обнаружения системой из двух сенсоров возможно на траектории прорыва либо на траектории обхода системы сенсоров. Для случая  $w_A = \bar{w}_B$  прорыв в плоскости  $z$  осуществляется только если  $z_A \in \{z\bar{z} < 1\}$ .

#### 4.4. УКЛОНЕНИЕ ПО ОТ ОБНАРУЖЕНИЯ ГРУППОЙ СТАЦИОНАРНЫХ СЕНСОРОВ

В статье [13] была описана модель обнаружения ПО по излучаемым им сигналам, в рамках которой при малых отношениях сигнал/помеха на входе сенсора оптимизация закона уклонения ПО по критерию вероятностного риска сводится к минимизации энергетического риска.

Аналитическое решение задачи оптимизации закона уклонения ПО от обнаружения при произвольном числе сенсоров и произвольном их расположении неизвестно. В статье [18] был описан численный алгоритм оптимизации для случая, когда все сенсоры имеют одинаковые характеристики, используют одинаковые алгоритмы обработки информации и осуществляют независимо прием в одних и тех же помеховых условиях. Оптимизация закона уклонения ПО от обнаружения системой из  $N$  неподвижных сенсоров сводится в этом случае к решению вариационной задачи о минимизации функционала (риска)

$$(93) \quad R = \int_0^T \sum_{i=1}^N \frac{\left( \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \right)^m}{\left( \sqrt{(x(t) - a_i)^2 + (y(t) - b_i)^2} \right)^k} dt \rightarrow \min_{(x(\cdot), y(\cdot))}$$

при наличии граничных условий

$$(94) \quad \begin{aligned} x(0) &= x_A, & x(T) &= x_B, \\ y(0) &= y_A, & y(T) &= y_B. \end{aligned}$$

где  $(x, y)$ ,  $(a_i, b_i)$  – координаты ПО и  $i$ -го сенсора в неподвижной декартовой системе координат.

Функционал (93) не зависит явно от времени – независимой переменной, поэтому уравнения Эйлера для вариационной задачи (93) имеют первый интеграл. Непосредственной проверкой устанавливается, что он совпадает, с точностью до постоянного множителя, с лагранжианом задачи. Следовательно, подынтегральное выражение остается постоянным при использовании ПО оптимального закона уклонения. Этот факт был использован при построении численного метода решения задачи оптимизации закона уклонения ПО от обнаружения системой стационарных сенсоров.

В основе метода лежит алгоритм Дейкстры [20]. Этот алгоритм был использован также в [1] при решении задачи об уклонении подвижного объекта от обнаружения, но, в отличие от рассматриваемого в настоящей работе случая, уклонение объекта осуществлялось на постоянной скорости в течение всего времени движения.

На плоскости строится квадратная сетка с расстоянием  $L$  между узлами. Каждый узел соединяется отрезками (ребрами) с 32 соседними узлами. Длины ребер равны  $L, L\sqrt{2}, L\sqrt{5}, L\sqrt{10}, L\sqrt{13}$ . Множество допустимых траекторий ПО аппроксимируется неориентированным графом  $G_0 = (S_0, D_0)$ , где  $S_0 = \{1, \dots, n\}$  – множество узлов,  $D_0$  – множество неориентированных дуг. Траектория  $(x(\cdot), y(\cdot))$  ПО аппроксимируется отрезком пути  $P$  на графе  $G_0$ , где путь  $P$  определяется как последовательность узлов  $(j_0, \dots, j_P)$  таких, что  $j_0 = A, j_P = B$  (начальная и конечная точки маршрута) и дуг (ребер)  $\langle j_{k-1}, j_k \rangle \in D_0$  для всех  $k$  от 1 до  $P$ . Принимается, что ПО уклоняется на кусочно-постоянной скорости; на траектории движения между двумя соседними узлами скорость постоянна. Вводятся обозначения:  $t_{jk}$  – момент попадания объекта в узел  $j_k$ ,  $v(j_{k-1}, j_k)$  – скорость движения объекта на ребре  $\langle j_{k-1}, j_k \rangle$  между двумя соседними узлами.

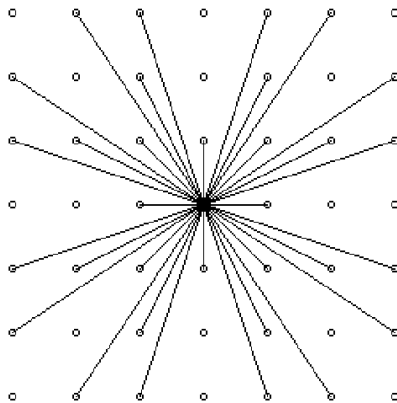


Рис. 10. Применение алгоритма Дейкстры для построения оптимальной траектории уклонения

При принятых предположениях задача оптимизации функционала (93) при  $m = k = 2$  сводится к задаче минимизации критерия

$$(95) R = \sum_{k=1}^P \sum_{i=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{v^2(j_{k-1}, j_k)}{(x(t) - a_i)^2 + (y(t) - b_i)^2} dt \rightarrow \min_{(x(\cdot), y(\cdot))}$$

при наличии ограничения

$$(96) \sum_{k=1}^P (t_{j_k} - t_{j_{k-1}}) = T.$$

Суммирование в формуле (95) ведется по числу ребер, включенных в маршрут, и по числу сенсоров.

Задача уклонения от обнаружения имеет смысл в том случае, когда на траектории уклонения сенсоры и объект разделяют достаточно большие расстояния. При достаточно мелкой сетке можно считать, что на интервале времени движения по ребру расстояние между сенсором и объектом остается постоянным и принять его равным, например, расстоянию в момент попадания  $\rho_2(j_{k-1})$ .

При движении объекта по оптимальной траектории с использованием оптимального закона изменения скорости должно выполняться равенство

$$(97) v^2(j_{k-1}, j_k) \sum_{i=1}^N \frac{1}{\rho_2(j_{k-1})} = C,$$

где  $C$  – некоторая постоянная (значение первого интеграла).

Обозначим символом  $L(j_{k-1}, j_k)$  длину ребра  $\langle j_{k-1}, j_k \rangle \in D$ . Тогда при фиксированном значении первого интеграла по формуле (96) для каждого ребра определяется оптимальная скорость движения, и далее – время движения по ребру

$$(98) T_{j_k j_{k-1}} = t_{j_k} - t_{j_{k-1}} = \frac{L(j_{k-1}, j_k)}{v(j_{k-1}, j_k)}.$$

Задача о минимизации функционала (95) свелась к задаче о минимизации функции

$$(99) R = \sum_{k=1}^P \sum_{i=1}^N \frac{v^2(j_{k-1}, j_k)}{\rho^2(j_{k-1})} (t_{j_k} - t_{j_{k-1}})$$

при наличии начальных условий (94) и ограничений (96), (97).

Алгоритм оптимизации закона управления подвижным объектом имеет следующий вид.

**Шаг 1.** Вводится система координат; задаются координаты начальной и конечной точек маршрута, количество сенсоров и их координаты; задается время движения объекта. Определяются шаг сетки и координаты узлов. Начальная и конечная точки маршрута входят в число узлов сетки. Задается произвольное положительное число  $C$  – начальное значение первого интеграла.

**Шаг 2.** По мере перемещения по сетке, для произвольного узла с номером  $j_{k-1}$  определяются два значения – частичная сумма (накопленное значение)  $R_{j_{k-1}}$  и время движения  $T_{j_{k-1}}$  от начального узла сетки до данного узла. Для начальной точки маршрута эти значения устанавливаются равными 0.

В каждом узле делается шаг расчета. Вначале определяется множество возможных ребер. Возможным ребром считается ребро, ведущее в узел, из которого еще не делался шаг расчета и которое не ведет в узлы, находящиеся вне области нахождения решения.

Для каждого возможного ребра рассчитывается величина

$$R_{j_{k-1}j_k} = \sum_{i=1}^N \frac{v^2(j_{k-1}, j_k)}{\rho_i^2(j_{k-1})} (t_{j_k} - t_{j_{k-1}}).$$

При попадании в узел  $j_k$  из узла  $j_{k-1}$  определяются значения

$$R_{j_k} = R_{j_{k-1}} + R_{j_{k-1}j_k}.$$

Если ранее в этом узле уже были установлены значения указанных параметров, то сравнивается ранее установленное значение  $R_{j_k}$  с суммой  $R_{j_{k-1}} + R_{j_{k-1}j_k}$ . Если  $R_{j_k} > R_{j_{k-1}} + R_{j_{k-1}j_k}$ , то устанавливаются новые значения  $R_{j_k} = R_{j_{k-1}} + R_{j_{k-1}j_k}$  и  $T_{j_k} = T_{j_{k-1}} + T_{j_{k-1}j_k}$ ; присваивается узлу номер  $N_{j_k} = j_{k-1}$  (смысл операции – указание номера узла, из которого был осуществлен переход в данный узел).

**Шаг 3.** Из множества узлов, для которых установлены значения параметров и из которых не делался шаг расчета, выбирается узел  $j_k$ , которому соответствует минимальное значение  $R_{j_k}$ . Если такого узла нет, т.е. время достижения узла  $R_{j_k}$  превосхо-

дит заданное время прохождения маршрута  $T$ , то задача, при выбранной величине первого интеграла, решения не имеет. В противном случае – переход к шагу 2 для узла  $j_k$ .

Шаги 2 и 3 повторяются до момента достижения конечной точки маршрута.

**Шаг 4.** Сравниваются время  $T_C$  достижения конечной точки и заданное время прохождения маршрута  $T$ . При  $|T_C - T| > \Delta$ , где  $\Delta$  – величина, характеризующая принятую точность выполнения ограничения (97), выбирается новое значение первого интеграла  $C$ . Переход к шагу 2 для начального узла.

Решением задачи является нахождение пути, для которого значения первого интеграла минимально и при котором выполняется ограничение  $|T_C - T| \leq \Delta$ .

Описанная схема была использована для оптимизации закона уклонения ПО от обнаружения.

Цель моделирования состояла в построении оптимальной траектории уклонения объекта от обнаружения группой сенсоров и определении оптимального закона изменения скорости на траектории.

Результаты моделирования иллюстрируются рис. 11–14. На каждом рисунке изображены составляющие оптимального закона управления подвижным объектом – оптимальная траектория уклонения, оптимальный закон изменения скорости как функция текущего момента времени, вероятности необнаружения во времени каждым из сенсоров и всей системой наблюдателей. Вероятности рассчитывались в рамках изложенной в [13] модели обнаружения. Рисунки отличаются количеством сенсоров в регионе. На рисунках указаны положения начальной  $A$  и конечной  $B$  точек маршрута; количество и расположение сенсоров, обозначенных символами,  $S_i$ ,  $i = 2, 3, 4$ . Моделирование проводилось для региона размерами  $220 \times 300$  км. При всех вычислительных экспериментах положения точек  $A$ ,  $B$  и  $S_1$  не менялись; координаты их указаны на рисунках. Время прохождения маршрута составляло 45 часов. Шаг сетки  $L = 1,945$  км.

Решение задачи об оптимизации закона уклонения от обнаружения единственным сенсором иллюстрируется рис. 11.

На рисунке изображены две траектории уклонения. Кривые, снабженные индексом 1, получены в результате аналитического решения задачи. Кривые, снабженные индексом 2, получены моделированием. Такое практическое совпадение теоретических результатов и результатов моделирования позволяет сделать вывод о пригодности алгоритма Дейкстры для целей оптимизации.

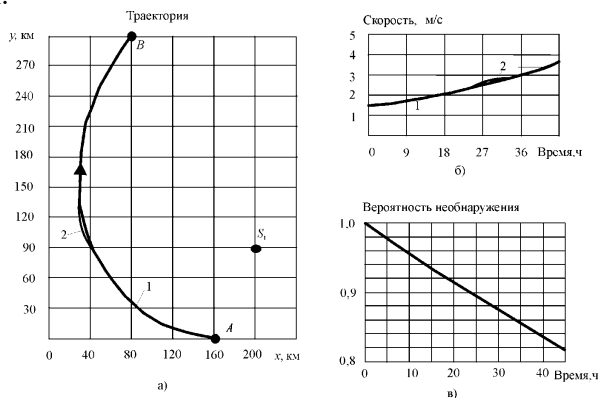


Рис. 11. а) Траектория уклонения от обнаружения единственным сенсором, 1 – построенная в результате аналитического решения задачи; 2 – построенная моделированием; б) скорость ПО; в) вероятность необнаружения сенсором  $S_1$

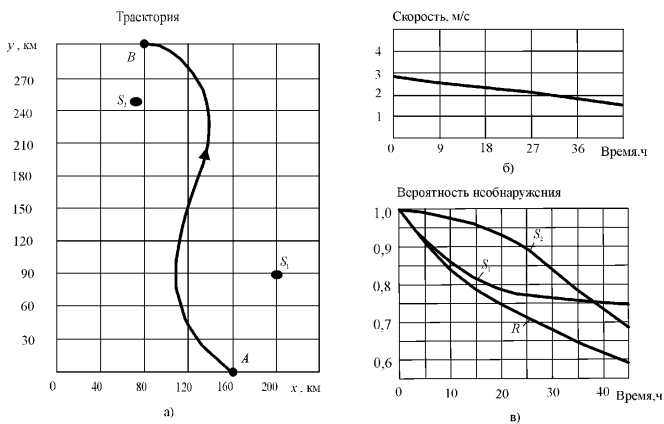


Рис. 12. а) Траектории уклонения от обнаружения двумя сенсорами; б) скорость ПО; в) вероятность необнаружения каждым сенсором  $S_i$  и  $R$  – суммарная вероятность необнаружения



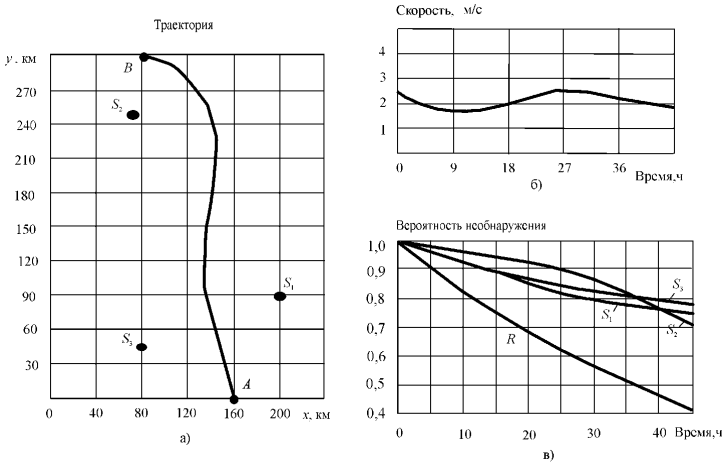


Рис. 13. а) Траектории уклонения от обнаружения тремя сенсорами; б) скорость ПО; в) вероятность необнаружения каждым сенсором и  $R$  – суммарная вероятность необнаружения

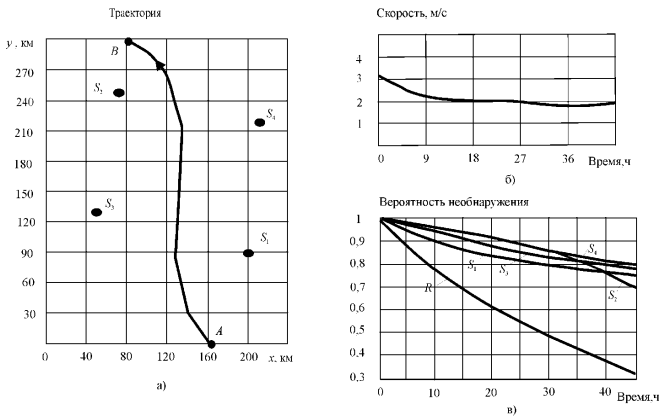


Рис. 14. а) Траектория уклонения от обнаружения 4 сенсорами; б) скорость ПО; в) вероятность необнаружения каждым сенсором  $S_i$  и  $R$  суммарная вероятность необнаружения

#### 4.5. УКЛОНЕНИЕ ПО ОТ ОБНАРУЖЕНИЯ СИСТЕМОЙ РАЗНОРОДНЫХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ

Рассматриваемая в статье [11] задача об оптимизации закона управления подвижным объектом при наличии разнородных средств обнаружения трактуется как задача оптимизации при наличии ограничений на траекторию уклонения. Систему разнородных наблюдателей образуют сенсоры и детекторы. Так как попадание подвижного объекта в круговую зону обнаружения детектора, по предположению, приводит к его мгновенному обнаружению, то задача об оптимизации закона уклонения от обнаружения системой разнородных наблюдателей сводится к задаче уклонения от обнаружения системой сенсоров при наличии круговых запретных зон (круговых ограничений) – зон обнаружения детекторов. При малых отношениях сигнал/помеха оптимизация закона уклонения ПО от обнаружения системой из  $N$  неподвижных сенсоров и  $S$  неподвижных детекторов сводится к решению вариационной задачи о минимизации функционала (риска)

$$R = \int_0^T \sum_{i=1}^N \frac{\left( \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \right)^m}{\left( \sqrt{(x(t) - a_i)^2 + (y(t) - b_i)^2} \right)^k} dt \rightarrow \min_{(x(\cdot), y(\cdot))}$$

при наличии граничных условий

$$x(0) = x_A, \quad x(T) = x_B,$$

$$y(0) = y_A, \quad y(T) = y_B,$$

и ограничений

$$\min_{0 \leq t \leq T} [d(s, t) - r_s] > 0, \quad s = 1, \dots, S,$$

где  $(x, y)$ ,  $(a_i, b_i)$  – координаты ПО и  $i$ -го сенсора в неподвижной декартовой системе координат;  $d(s, t)$  – текущее расстояние между ПО и детектором с номером  $s$ .

Аналитическое решение задачи об оптимизации закона уклонения подвижного объекта от системы, содержащей группу из произвольного числа разнородных наблюдателей, в литературе неизвестно. Для решения задач уклонения от систем разнородных наблюдателей был разработан численный алгоритм на

основе алгоритма Дейкстры [20]. Алгоритм описан в п. 4.4 настоящего обзора и был доработан с целью учета круговых запретных областей.

Целями численного эксперимента были оптимизация закона уклонения объекта от обнаружения системой, включающей в себя несколько сенсоров и детекторов; оценка вклада каждого сенсора в вероятность обнаружения объекта; оценка зависимости вероятности обнаружения объекта от числа и расположения систем обнаружения.

Результаты моделирования иллюстрируются рис. 15–18. Рисунки отличаются составом наблюдателей в районе. На рисунках указаны положения начальной  $A$  и конечной  $B$  точек маршрута, количество и расположение сенсоров  $S_i$  и детекторов  $D_i$ . Перемещение объекта происходит в районе размерами  $240 \times 300$  км в течение 45 ч. Положения точек  $A(160, 90)$ ,  $B(80, 300)$ ,  $S_1(200, 90)$  км фиксированы во всех вычислительных экспериментах,  $S_2(70, 250)$ ,  $S_3(80, 40)$ .

На каждом из рис. 15–18 изображены:

– составляющие закона управления подвижным объектом: оптимальная траектория уклонения (снабженная стрелками) и оптимальный закон изменения скорости как функция текущего момента времени; на всех графиках указано максимальное значение скорости объекта на траектории, ось абсцисс соответствует нулевой скорости; на некоторых графиках указаны также значения начальной и конечной скоростей;

– значения вероятности необнаружения объекта как функции текущего момента времени, рассчитанные для каждого сенсора и системы сенсоров в целом; индекс  $S_i$  при кривой указывает номер соответствующего сенсора; индексом  $Pr_{\Sigma}$  снабжена результирующая кривая, характеризующая вероятность необнаружения системой в целом.

Введение нового сенсора или детектора в систему наблюдателей приводит к изменению положения и увеличению числа локальных минимумов функционала обнаружения при решении задачи оптимизации. Однако только один из этих минимумов будет глобальным при произвольном выборе положения и типов наблюдателей.

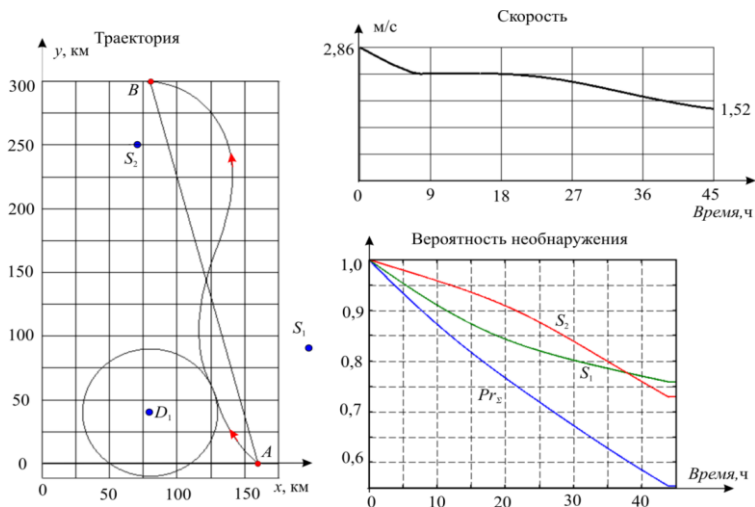


Рис. 15. Координаты детектора и его радиус:  $D_1(80, 40, r_1 = 50)$ , вероятности необнаружения:  $Pr(S_1) = 0,756$ ;  $Pr(S_2) = 0,730, Pr_{\Sigma} = 0,552$

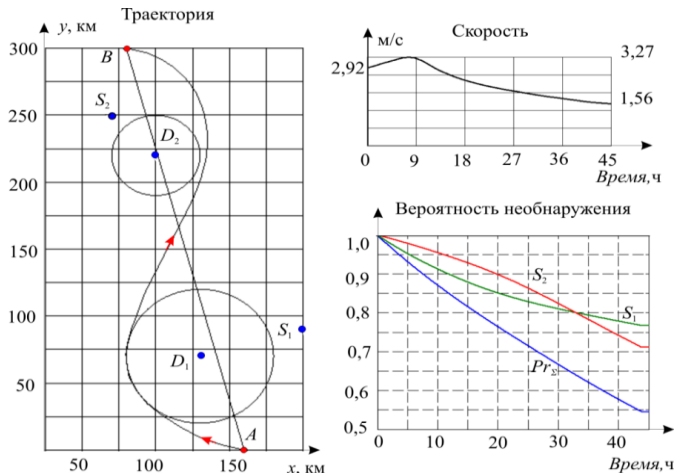


Рис. 16. Два сенсора и два детектора. Координаты детекторов и их радиусы:  $D_1(130, 70; r_1 = 50), D_2(100, 220; r_2 = 30)$ , вероятности необнаружения:  $Pr(S_1) = 0,767; Pr(S_2) = 0,711, Pr_{\Sigma} = 0,545$

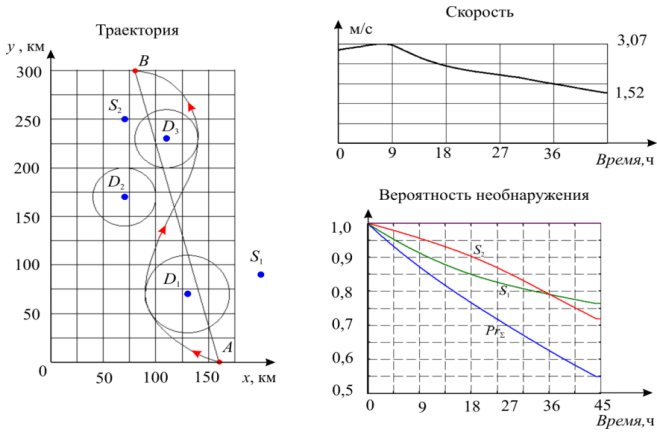


Рис. 17. Два сенсора и три детектора. Координаты детекторов и их радиусы:  $D_1(130, 70; r_1 = 40)$ ,  $D_2(70, 170; r_2 = 30)$ ,  $D_3(110, 230; r_3 = 30)$ ; вероятности необнаружения:  $Pr(S_1) = 0,763$ ;  $Pr(S_2) = 0,719$ ,  $Pr_z = 0,55$

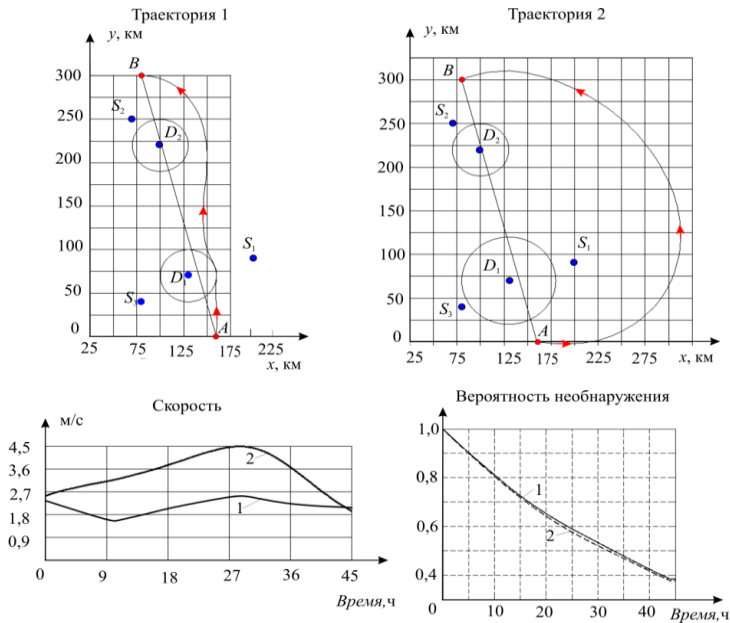


Рис. 18. Три сенсора и два детектора. Координаты детекторов и их радиусы:  $D_1(130, 70; r_1 = 30)$ ;  $D_2(100, 220; r_2 = 30)$ ; скорости; вероятности необнаружения

#### 4.6. УКЛОНЕНИЕ ПО ОТ ОБНАРУЖЕНИЯ СИСТЕМОЙ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ (СЕНСОР – МАНЕВРЕННОЕ СРЕДСТВО)

В статье [11] рассматривается задача построения траектории уклонения ПО на плоскости. Поисковая система состоит из сенсора, расположенного в начале декартовой системы координат, и маневренных поисковых средств. Заданы начальная  $A(x_A, y_A)$  и конечная  $B(x_B, y_B)$  точки маршрута. Вводится полярная система координат, полюс которой совпадает с положением сенсора, а полярная ось проходит через начальную точку маршрута. Полярные координаты произвольной точки плоскости обозначаются символами  $(\rho, \psi)$ . Время движения по маршруту фиксировано и равно  $T$ . Область поиска маневренного средства задается связной областью  $Q$ .

Основной характеристикой модели маневренного средства является интенсивность поиска  $\chi(t)$  – среднее число обнаружений объекта в районе поиска в единицу времени.

Критерий имеет следующий вид:

$$R = \int_0^T (p_1 I + p_2 \chi_Q \gamma(t)) dt,$$

где  $p_1, p_2$  – весовые коэффициенты,  $\chi_Q$  – индикатор множества  $Q$ . Вводится величина  $p = p_2 \chi(t) / p_1$ . Предполагается, что интенсивность поиска постоянна. Тогда во введенной полярной системе координат задача об оптимизации закона уклонения от обнаружения системой сенсор – маневренное средство сводится к минимизации функционала

$$R = \int_0^T \left( \frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\psi}^2}{\rho^2} + \chi_Q p \right) dt \rightarrow \min_{(\psi(\cdot), \rho(\cdot))},$$

при наличии граничных условий

$$\rho(0) = \rho_A, \psi(0) = 0, \rho(T) = \rho_B, \psi(T) = \psi_B,$$

где первое слагаемое, стоящее под интегралом, пропорционально интенсивности поиска сенсором, второе слагаемое – интенсивности поиска маневренным средством в заданном районе  $Q$ .

#### Решение задачи

Решение краевой вариационной задачи, если зона действия маневренного поискового средства охватывает всю плоскость,

не отличается от решения задачи при отсутствии такого средства, т.е. при  $p = 0$ . Оптимальной траекторией в этом случае является логарифмическая спираль, проходящая через начальную и конечную точку маршрута. Такой траектории соответствует значение функционала обнаружения [10]

$$(100) \quad R_{AB} = \frac{1}{T_{AB}} \left( (\psi_A - \psi_B)^2 + \ln^2 \frac{\rho_B}{\rho_A} \right) + p T_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{T_{AB}} + p T_{AB},$$

$$T_{AB} = T.$$

Предполагается, что оптимальная траектория частично проходит внутри области  $Q$ , а именно проходит через точки  $A, C, D, B$ , где точки  $C, D$  лежат на границе области  $Q$ . Также предполагается, что логарифмическая спираль, соединяющая точки  $C, D$ , полностью лежит внутри области  $Q$ . Тогда задача оптимизации траектории заключается в выборе этих точек и времени нахождения на каждом участке траектории. Участкам траектории – частям логарифмической спирали соответствуют значения функционала обнаружения (нижний индекс указывает начальную и конечную точки участка траектории)

$$R_{AC} = \frac{1}{T_{AC}} \left( (\psi_A - \psi_C)^2 + \ln^2 \frac{\rho_C}{\rho_A} \right) = \frac{\sigma_{AC}}{T_{AC}},$$

$$R_{CD} = \frac{1}{T_{CD}} \left( (\psi_C - \psi_D)^2 + \ln^2 \frac{\rho_D}{\rho_C} \right) + p T_{CD} = \frac{\sigma_{CD}}{T_{CD}} + p T_{CD},$$

$$R_{DB} = \frac{1}{T_{DB}} \left( (\psi_D - \psi_B)^2 + \ln^2 \frac{\rho_B}{\rho_D} \right) = \frac{\sigma_{DB}}{T_{DB}}.$$

Оптимизационная задача сводится к следующей задаче нахождения условного экстремума функции семи переменных вида:

$$(101) \quad R(T_{AC}, T_{CD}, T_{DB}, \psi_C, \psi_D, \ln \rho_C, \ln \rho_D) = \frac{\sigma_{AC}}{T_{AC}} + \frac{\sigma_{CD}}{T_{CD}} +$$

$$+ p T_{CD} + \frac{\sigma_{DB}}{T_{DB}} \rightarrow \min_{T_{AC}, T_{CD}, T_{DB}, \psi_C, \psi_D, \ln \rho_C, \ln \rho_D}$$

при ограничениях

$$(102a) \quad T_{AC} + T_{CD} + T_{DB} = T$$

$$Q_d(\psi_C, \ln \rho_C) = 0, \quad Q_d(\psi_D, \ln \rho_D) = 0.$$

Здесь ограничения (102б) принадлежат границе  $\Gamma Q$  множества  $Q$ .

Необходимые условия экстремума записываются в виде

$$(103) \quad \frac{\sigma_{AC}}{T_{AC}^2} = \lambda, \quad \frac{\sigma_{CD}}{T_{CD}^2} - p = \lambda, \quad \frac{\sigma_{DB}}{T_{DB}^2} = \lambda, \quad \lambda = \text{const},$$

$$(104) \quad \frac{\partial R}{\partial \psi_C} = \lambda_C \frac{\partial Q_C}{\partial \psi_C}, \quad \frac{\partial R}{\partial \ln \rho_C} = \lambda_C \frac{\partial Q_C}{\partial \ln \rho_C},$$

$$(105) \quad \frac{\partial R}{\partial \psi_D} = \lambda_D \frac{\partial Q_D}{\partial \psi_D}, \quad \frac{\partial R}{\partial \ln \rho_D} = \lambda_D \frac{\partial Q_D}{\partial \ln \rho_D}.$$

Равенства (101)–(105) позволяют выразить константы  $\lambda, \lambda_C, \lambda_D$  через координаты точек  $A, B, C, D$  и полное время нахождения в пути подвижного объекта.

Решение уравнений (103)–(105) при условиях (101), (102), находится для двух областей действия маневренных средств.

### Сектор – зона действия маневренного средства

Предполагается, что между начальной точкой  $A$  и конечной точкой  $B$  маршрута движения подвижного объекта находится область действия маневренного средства, заданная в виде

$$Q = \{(\psi, \rho) : \psi \in [\psi_C, \psi_D], \rho \in (0, +\infty)\}.$$

Границей множества  $Q$  являются лучи

$$Q_C = \partial Q = \{(\psi, \rho) : \psi = \psi_C, \rho \in (0, +\infty)\},$$

$$Q_D = \partial Q = \{(\psi, \rho) : \psi = \psi_D, \rho \in (0, +\infty)\}.$$

Поскольку угловые координаты зоны действия маневренного средства фиксированы, то необходимые условия экстремума (11), (12) переписываются следующим образом:

$$\frac{\ln \rho_C - \ln \rho_A}{T_{AC}} + \frac{\ln \rho_C - \ln \rho_D}{T_{CD}} = 0, \quad \frac{\ln \rho_D - \ln \rho_B}{T_{DB}} + \frac{\ln \rho_C - \ln \rho_D}{T_{CD}} = 0.$$

Вводятся новые переменные:



$$(106) \quad r = \ln \rho, \quad \tau = \frac{1}{T}.$$

Нижние индексы у новых переменных обозначают участки траектории (точки начала и/или конца подмаршрута) движения ПО, к которым они будут относиться.

Таким образом получается система из шести нелинейных уравнений с шестью неизвестными ( $\tau_{AC}, \tau_{CD}, \tau_{DB}, r_C, r_D, \lambda$ ), а именно:

$$(107) \quad \begin{cases} ((\psi_A - \psi_C)^2 + (r_A - r_C)^2) \tau_{AC}^2 = \lambda, \\ ((\psi_C - \psi_D)^2 + (r_C - r_D)^2) \tau_{CD}^2 - p = \lambda, \\ ((\psi_D - \psi_B)^2 + (r_D - r_B)^2) \tau_{DB}^2 = \lambda, \\ (r_C - r_A) \tau_{AC} + (r_C - r_D) \tau_{CD} = 0, \\ (r_D - r_B) \tau_{DB} + (r_D - r_C) \tau_{CD} = 0, \\ \frac{1}{\tau_{AC}} + \frac{1}{\tau_{CD}} + \frac{1}{\tau_{DB}} = T. \end{cases}$$

В [22] показано, что решение системы (107) сводится к решению системы двух уравнений

$$(108) \quad \frac{(\psi_C - \psi_D)^2}{T_{CD}^2} - \frac{(\psi_A - \psi_C)^2}{T_{AC}^2} = p,$$

$$T_{AC} \left( 1 + \left| \frac{\psi_D - \psi_B}{\psi_A - \psi_C} \right| \right) + T_{CD} = T.$$

относительно переменных  $T_{AC}, T_{CD}$ , которая, в свою очередь, сводится к полиномиальному уравнению четвертой степени относительно любой из переменных и поэтому в общем виде может иметь четыре пары корней вследствие линейной связи (108). Далее, выбираются те решения, для которых  $T_{AC} \geq 0, T_{CD} \geq 0$ , а затем те, что дают минимальное значение критерия.

В качестве примера приводится решение при следующих начальных условиях:  $\psi_A = 0, \psi_B = \pi/2, \psi_C = \pi/6, \psi_D = \pi/3, \rho_A = 1, \rho_B = 2, T = 1, p = 1$ . Решение задачи иллюстрируется рис. 19.

Внутри сектора, границы которого показаны на рисунке пунктирной линией, действует поисковое средство с  $p = 1$ . Точечной линией показаны траектория и скорость ПО в отсутствие поискового средства, сплошной линией показаны оптимальная траектория и оптимальный скоростной режим ПО. Видно, что при заданных условиях задачи траектория меняется незначительно, а скоростной режим является разрывной функцией и существенно отличается от режима в отсутствие поискового средства.

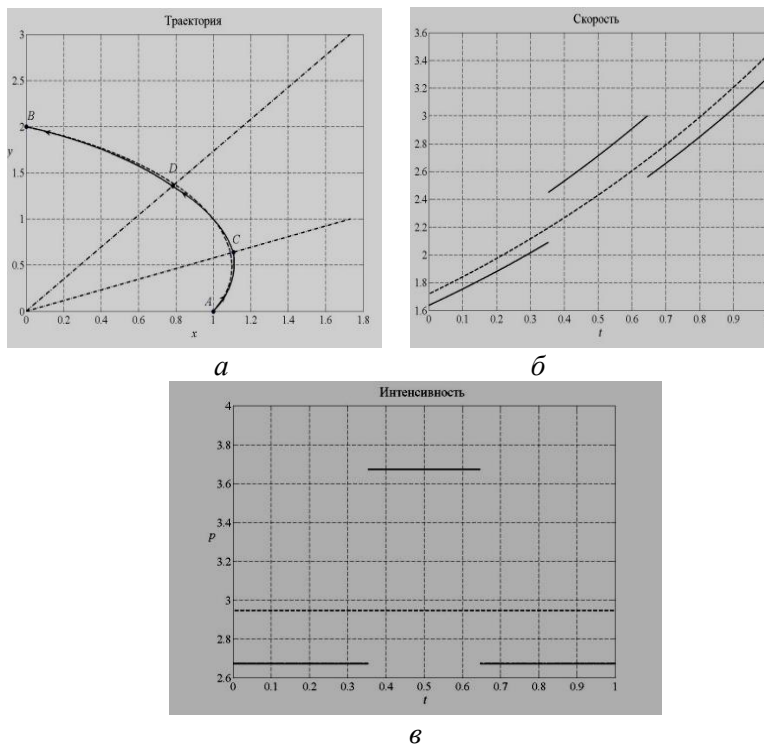


Рис. 19. Графики, построенные на основе аналитического решения задачи для поискового средства вида «сектор»: а) траектория; б) скорость движения подвижного объекта; в) интенсивность поиска. Границы «сектора» показаны штрих-пунктирной линией. Пунктирной линией обозначены траектория и скорость ПО в отсутствие поискового средства

Значение функционала на оптимальной траектории равно  $R = 3,4357$ , на оптимальной траектории в отсутствии поискового средства  $R_0 = 2,9481$ .

**Кольцо – зона действия маневренных средств.** Пусть между начальной точкой  $A$  и конечной точкой  $B$  маршрута движения подвижного объекта находится область действия маневренного средства, заданная в виде

$$Q = \{(\psi, \rho) : \psi \in [0, 2\pi], \rho \in (\rho_C, \rho_D)\}.$$

Границей множества  $Q$  являются окружности

$$Q_C = \partial Q = \{(\psi, \rho) : \psi \in [0, 2\pi], \rho = \rho_C\},$$

$$Q_D = \partial Q = \{(\psi, \rho) : \psi \in [0, 2\pi], \rho = \rho_D\}.$$

Поскольку радиальные координаты зоны действия маневренного средства фиксированы, то необходимые условия экстремума (104), (105) переписываются следующим образом:

$$(109) \quad \frac{\psi_C - \psi_A}{T_{AC}} + \frac{\psi_C - \psi_D}{T_{CD}} = 0, \quad \frac{\psi_D - \psi_B}{T_{DB}} + \frac{\psi_D - \psi_C}{T_{CD}} = 0.$$

В переменных (106) необходимые условия экстремума записываются в виде системы из шести нелинейных уравнений с шестью неизвестными ( $\tau_{AC}$ ,  $\tau_{CD}$ ,  $\tau_{DB}$ ,  $r_C$ ,  $r_D$ ,  $\lambda$ ), а именно:

$$(110) \quad \begin{cases} ((\psi_A - \psi_C)^2 + (r_A - r_C)^2)\tau_{AC}^2 = \lambda, \\ ((\psi_C - \psi_D)^2 + (r_C - r_D)^2)\tau_{CD}^2 - p = \lambda, \\ ((\psi_D - \psi_B)^2 + (r_D - r_B)^2)\tau_{DB}^2 = \lambda, \\ (\psi_C - \psi_A)\tau_{AC} + (\psi_C - \psi_D)\tau_{CD} = 0, \\ (\psi_D - \psi_B)\tau_{DB} + (\psi_D - \psi_C)\tau_{CD} = 0, \\ \frac{1}{\tau_{AC}} + \frac{1}{\tau_{CD}} + \frac{1}{\tau_{DB}} = T. \end{cases}$$

В [11] показано, что решение системы (110) сводится к решению системы из двух уравнений

$$(111) \quad \frac{(r_C - r_D)^2}{T_{CD}^2} - \frac{(r_A - r_C)^2}{T_{AC}^2} = p,$$

$$(112) \quad T_{AC} \left( 1 + \left| \frac{r_D - r_B}{r_A - r_C} \right| \right) + T_{CD} = T.$$

Остается совместно решить уравнения (111) и (112) относительно переменных  $T_{AC}$ ,  $T_{CD}$ , которые сводятся к полиномиальному уравнению четвертой степени относительно любой из переменных. Поэтому в общем виде система (110) может иметь четыре пары корней вследствие линейной связи (108). Далее, снова выбираются те решения, для которых  $T_{AC} \geq 0$ ,  $T_{CD} \geq 0$ , а затем те, что дают минимальное значение критерия. Возьмем те же граничные условия, что и в предыдущем примере, начальных условиях:  $\psi_A = 0$ ,  $\psi_B = \pi/2$ ,  $\psi_C = \pi/6$ ,  $\psi_D = \pi/3$ ,  $\rho_A = 1$ ,  $\rho_B = 2$ ,  $T = 1$ ,  $p = 1$ . Решение задачи иллюстрируется рис. 20.

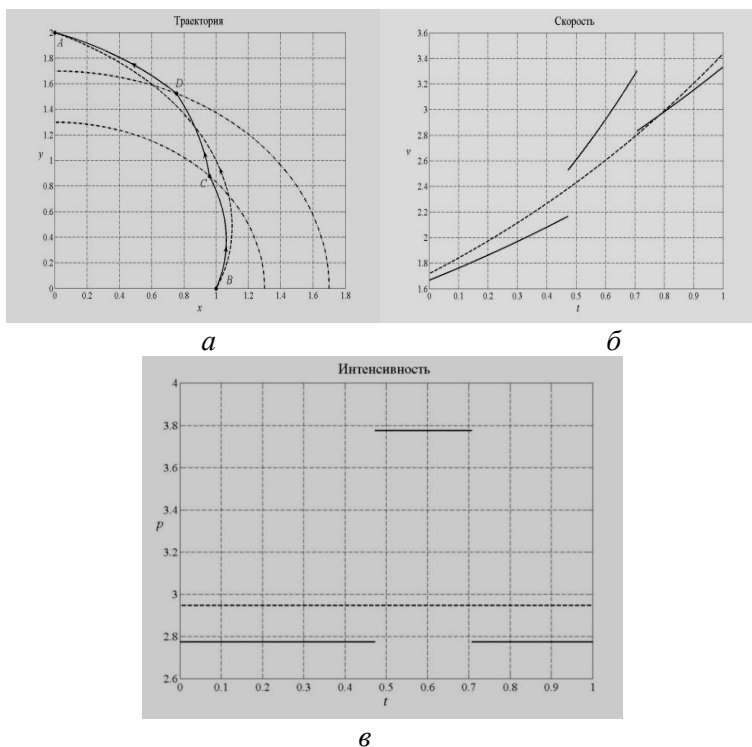


Рис. 20. Графики, построенные на основе аналитического решения задачи для системы «сенсор – поисковое средство, действующее внутри «кольца»»: а) траектория ПО; б) скорость движения ПО; в) интенсивность поиска маневренного поискового средства

Значение функционала на оптимальной траектории  $R = 3,2449$ . Границы «кольца» показаны штрих-пунктирной линией. Пунктирной линией обозначены траектория и скорость ПО в отсутствие поискового средства.

Внутри кольца, границы которого показаны на рисунке пунктирной линией, действует поисковое средство с  $p = 1$ . Точечной линией показаны траектория и скорость ПО в отсутствие поискового средства, сплошной линией показаны оптимальная траектория и оптимальный скоростной режим ПО. Видно, что при заданных условиях задачи ПО его скоростной режим является разрывной функцией и сильно отличается от режима в отсутствие поискового средства.

## 5. Заключение

В предположении о том, что противник использует для обнаружения лишь алгоритмы первичной обработки наблюдаемых сигналов приведены решения задач оптимизации законов уклонения ПО от обнаружения однородными и/или разнородными наблюдателями. Представляется, что в ходе дальнейших исследований будут решаться задачи оптимизации законов уклонения для случаев использования противником цифровых алгоритмов обработки информации и алгоритмов вторичной обработки сигналов, а также при наличии траекторных, динамических и интегральных ограничений.

## Литература

1. АБРАМЯНЦ Т.Г., МАСЛОВ Е.П., РУДЬКО И.М., ЯХНО В.П. Уклонение подвижного объекта от обнаружения группой наблюдателей при малых отношениях сигнал/помеха // Информационно-управляющие системы. – 2011. – №2. – С. 2–7.
2. АБЧУК В.А., СУЗДАЛЬ В.Г. Поиск объектов. – М.: Сов. радио, 1977. – 334 с
3. БРАЙСОН А., ХО Ю-ШИ. Прикладная теория оптимального управления. – М.: Мир, 1972. – 545 с

4. БУРДИК В.С. *Анализ гидроакустических систем.* – Л.: Наука, 1988. – 392 с
5. ВОРОНИН А.Н, ЯСИНСКИЙ А.Г., ШВОРОВ С.А. *Синтез компромиссно-оптимальных траекторий мобильных роботов в конфликтной среде // Проблемы управления и информатики.* – 2002. – №8. – С. 12–18.
6. ГАЛЯЕВ А.А., МАСЛОВ Е.П., РУБИНОВИЧ Е.Я. *Об одной задаче управления движением объекта в конфликтной среде // Известия РАН. Теория и системы управления.* – 2009. – №3. – С. 134–140.
7. ГАЛЯЕВ А.А., МАСЛОВ Е.П. *Оптимизация законов уклонения подвижного объекта от обнаружения // Известия РАН. Теория и системы управления.* – 2010. – №4. – С. 52–62.
8. ГАЛЯЕВ А.А. *О задаче прорыва между двумя сенсорами при движении объекта в конфликтной среде // Автоматика и телемеханика.* – 2010. – №5. – С. 3–10.
9. ГАЛЯЕВ А.А., МАСЛОВ Е.П. *Оптимизация закона уклонения подвижного объекта от обнаружения при наличии ограничений // Автоматика и телемеханика.* – 2012. – №6. – С. 73–86.
10. ГАЛЯЕВ А.А. *О задаче уклонения от подвижного одиночного наблюдателя на плоскости в конфликтной среде // Автоматика и телемеханика.* – 2014. – №6. – С. 28–37.
11. ГАЛЯЕВ А.А., МАСЛОВ Е.П., ЯХНО В.П., АБРАМЯНЦ Т.Г. *Уклонение подвижного объекта от обнаружения системой наблюдателей: сенсор – маневренное средство // Автоматика и телемеханика.* – 2017. – №8. – С. 113–126.
12. ГАЛЯЕВ А.А. *О функционале обнаружения при движении объекта в конфликтной среде // Автоматика и телемеханика.* – 2010. – №4. – С. 100–105.
13. СЫСОЕВ Л.П. *Критерий вероятности обнаружения на траектории в задаче управления движением объекта в конфликтной среде // Проблемы управления.* – 2010. – №6. – С. 65–72.
14. ЦЛИАФ Л.Я. *Вариационное исчисление и дифференциальные уравнения.* – М.: Физматгиз, 1966. – 166 с.

15. ЯКУШЕНКО Е.И., ГУРЬБЕВ Ю.В. И ДР. *Бортовой комплекс управления скрытностью морских подводных объектов с оперативно-советующей системой* // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2012. – № 10. – С. 916.
16. CACCETTA L., LOOSEN I., REHBOCK V. *Optimal Transit Path Problem for Submarines* // Proc. of the 4th Int. Conference on Engineering Applications and Computational Algorithms. – 2005. – P. 785–802
17. HALLAM C., HARRISON R., WARD J. *A Multiobjective Optimal Path Algorithm* // Digital Signal Processing. – 2001. – Vol. 11(2). – P. 133–143.
18. MEGUERDICHIAN S., KOUSHANFAR F., QU G. *Exposure in Wireless Ad-hoc Sensor Networks* // Proc. of the 7th Int. Conference MobiCom'01. – 2001. – P. 139–150.
19. PACTER L.S., PACTER M. *Optimal Paths for Avoiding a Radiating Source* // Proc. of the 40th IEEE Conference Decision and Control. – 2001. – P. 3581–3586.
20. ZABARANKIN M., URYASEV S., PARDALOS P. *Optimal Risk Path Algorithms* // Cooperative Control and Optimizaton. Chapter 1 / Eds. Murphey R., Pardalos P. – Dordrecht: Kluwer Acad, 2002. – P. 271–303.
21. ZABARANKIN M., URYASEV S., MURPHEY R. *Aircraft Routing under the Risk of Detection* // Naval Research Logistics. – 2006. – Vol. 53, No. 8. – P. 728–747.
22. VELTRI G., HUANG Q., POTKONJAK M. *Minimal and Maximal Exposure Path Algorithms for Wireless Embedded Sensor Networks* // Proc. Int. Conference Sensor Systems SenSys'03. – 2003. – P. 242–249.

## A MOVING OBJECT EVASION FROM DETECTION IN THE THREAT ENVIRONMENT

**Andrei Galayev**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Corresponding Member of RAS, principle researcher (galaev@ipu.ru),

**Eugenii Maslov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, leading researcher,

**Victor Yahno**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand. Sc., senior researcher(vic\_iakhno@ipu.ru),

**Tamara Abramyants**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., leading engineer (abramnc@ipu.ru)

*Abstract: Formalization and solution results of a number of a moving object evasion problems from detection by homogeneous or collage of observers on a plane are presented. The object is detected by signals of primary (passive mode) and secondary (active mode) field signals irradiated by it. Simulation results are also presented.*

**Keywords:** a moving object detection, threat environment, collage of observers, optimal evasion from detection law.

УДК 517.977

ББК 32.965

DOI: <https://doi.org/10.25728/ubs.2019.79.5>

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М.В. Губко.*

*Поступила в редакцию 08.04.2019.*

*Опубликована 31.05.2019.*



# АРХИТЕКТУРА РАСПРЕДЕЛЕННОЙ БАЗЫ ДАННЫХ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ НЕПРЕРЫВНОГО КОРПОРАТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ В ООО «ГАЗПРОМ ТРАНСГАЗ НИЖНИЙ НОВГОРОД»

Мельников С. И.<sup>1</sup>

(Учебно-производственный центр ООО "Газпром энерго",  
Москва)

*Состояние инфраструктуры информационных технологий ООО «Газпром трансгаз Нижний Новгород» в настоящее время имеет ряд существенных ограничений и требований к информационной системе, что делает невозможным использование онлайн-доступа к единой базе данных и использование двухфазных транзакций. В данной работе представлена разработка оригинального механизма синхронизации распределенных баз данных на основе метода асинхронной доставки журнала транзакций. Решается прикладная задача обеспечения средства интеграции локальных баз данных, располагающихся в некоторых узлах вычислительной сети для пользователя, работающего на любом узле сети.*

Ключевые слова: многоуровневые системы, распределенные системы, базы данных, управление, локальные ресурсы, система сопровождения процесса обучения.

## 1. Введение

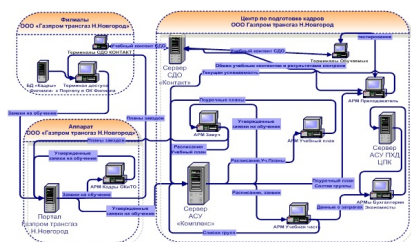
Современные организации, начиная от крупнейших международных корпораций и заканчивая мелкими частными компаниями, функционируют в сложной социально-экономической среде. Масштабные социально-экономические и инновационные изменения, такие как определение человека как главной ценности и основного ресурса организации, новые стратегии и тактики использования человеческого потенциала, совершенствование методов управления персоналом во всех областях работы с людьми, все более четко проявляются во всех отраслях и сферах деятельности на различных уровнях экономики. Одной из локальных задач является развитие собственного персонала, которое

<sup>1</sup> Сергей Игоревич Мельников, начальник центра (Serg\_m84@list.ru).

обеспечивает внутренние условия для устойчивого развития компании. С этой целью разрабатываются и внедряются новейшие механизмы управления персоналом, в частности, количественная и качественная укомплектованность кадрами, активизация деятельности вновь принятых сотрудников, рост квалификационного уровня работников, повышение стабильности персонала, рост удовлетворенности сотрудников своим трудом и занимаемой должностью, повышение приверженности и лояльности организации, повышение престижа организации. Таким образом, управление развитием персонала – одна из основных задач работодателя, заинтересованного в динамичном развитии предприятия с постоянным повышением эффективности и качества реализуемых бизнес- и производственно-технологических процессов, ориентированного на принципы делового партнерства и социальной ответственности перед своими работниками.

ООО «Газпром трансгаз Нижний Новгород» – крупное газотранспортное предприятие, входящее в структуру ПАО «Газпром», территориально расположенное в 16 субъектах европейской части РФ с численностью персонала свыше 11000 человек. Организационно предприятие состоит из Аппарата управления и 25 линейных и специализированных филиалов. Фирменное профессиональное обучение в системе подготовки, переподготовки, обучения вторым (смежным) профессиям и повышения квалификации в ОАО «Газпром» (и соответственно, в ООО «Газпром трансгаз Н.Новгород») носит непрерывный характер и проводится в течении всей трудовой деятельности работников с целью обеспечения соответствия уровня квалификации работников требованиям производства [4, 7]. Анализ бизнес-процесса обучения в ООО «Газпром трансгаз Н. Новгород», проведенный методами системного анализа [6] с целью минимизации затрат и с привлечением предметных специалистов, отвечающих за подготовку кадров предприятия, показал необходимость создания системы управления процессом корпоративного обучения.

Процесс управления обучением, как и любой другой вид организационной деятельности, может быть значительно усовер-



а) Многоуровневая архитектура процесса управления системой непрерывного образования



б) Общая модель взаимодействия модулей

Рис. 1. Многоуровневая распределенная система управления процессом образования

шенствован внедрением специализированных автоматизированных систем. Применение программно-технических комплексов при решении большинства типовых задач позволяет повысить качество обучения в совокупности с достижением некоторых иных положительных результатов, например, разгрузка преподавателя от рутинной работы. Очевидно, что внедрение автоматизированных систем в данной сфере нужно проводить весьма осторожно, так как излишняя автоматизация может сделать систему неудобной в работе и недостаточно гибкой [5]. Описываемая схема представляет собой сложный многоуровневый процесс (рис 1).

Указанная выше система должна обеспечивать информационную поддержку для участников бизнес-процесса в условиях курсового обучения (рис. 2), характеризующегося краткосрочностью, высокой интенсивностью обучения и территориальной удаленностью филиалов Общества [2]. Очевидной является и необходимость функционирования системы в едином информационно-справочном пространстве системы управления человеческими ресурсами ООО «Газпром трансгаз Нижний Новгород» в целом.



Рис. 2. Система непрерывного образования

## 2. Характеристика объекта управления. Обоснование разработки системы репликаций

Состояние инфраструктуры информационных технологий ООО «Газпром трансгаз Нижний Новгород» в настоящее время имеет следующие характеристики:

- Основная используемая операционная система – Microsoft Windows (в локальном и серверном варианте).
- Пропускная способность каналов связи между Аппаратом управления и филиалами варьируется в широком диапазоне – от 56 кбит/с до нескольких Мбит/с.
- Требования информационной безопасности, содержащиеся в действующей редакции Правил эксплуатации информационно-управляющих систем, и, соответственно, таблицы маршрутизации на коммуникационном оборудовании, запрещают онлайн-доступ к диапазонам IP-адресов «чужого» филиала. Обмен данными между филиалами возможен только через общие информационные ресурсы (почта и файловое хранилище с FTP-протоколом)

с применением при необходимости сертифицированных средств шифрования.

- На предприятии развернута автоматизированная система управления производственно-хозяйственной деятельностью предприятия (АСУ ПХД), использующая в качестве СУБД Microsoft SQL Server 2005 (2008, 2008R2) Standart Edition. Серверы расположены в филиалах и Аппарате управления.
- IT-персонал филиалов имеет различный уровень компетентности, достаточный, однако, для обслуживания программно-аппаратных комплексов, обеспечивающих функционирование АСУ ПХД в штатном режиме.
- На предприятии имеется значительное количество разнородных автоматизированных систем по различным направлениям деятельности, в том числе морально устаревших, базирующихся на «плоских» [10] таблицах (последствия «лоскутной» автоматизации).

Исходя из описания бизнес-процесса, состояния IT-инфраструктуры представляется возможным сформулировать ряд требований предъявляемых к разрабатываемой системе:

- Выбор инструментальных средств при реализации проекта определяется наличием лицензий на используемое программное обеспечение.
- Возможность использования существующей IT-инфраструктуры и возможность интеграции с эксплуатируемыми информационными системами автоматизации производственно-хозяйственной деятельности предприятия.
- Указанная прикладная система должна обеспечивать ведение корпоративных справочников и консолидацию данных на уровне ООО «Газпром трасгаз Нижний Новгород» (рис 3).
- Система должна быть доступна любому пользователю в режиме 7\*24 с учетом его прав и привилегий.



Рис. 3. Централизованное ведение справочников

- Структура клиентских модулей и их функционал должны соответствовать ролям физических участников процесса, предоставляя последним привычную информационную среду в контексте выполняемых ими должностных обязанностей.
- Работа как минимум в сетевой топологии типа «звезда» взаимодействующих баз данных, с условиями работы экземпляра базы данных одновременно в роли подписчика и публикатора.
- Максимальная независимость от редакции используемой СУБД.
- Построение реплик в одной транзакции с модификацией данных с горизонтальным секционированием исходных таблиц, их согласованность с изменением метаданных.
- Восстановление работоспособности при обрыве канала связи, независимость от наличия постоянного канала связи и минимальные требования к пропускной способности канала.
- Возможность реплицировать метаданные.

- Работа в пакетном режиме, по расписанию без участия пользователя.
- Простая настройка, особенно на удаленных узлах сети.

Ограничения, накладываемые текущим состоянием ИТ-инфраструктуры, и требования к информационной системе делают невозможным использование онлайн-доступа к единой базе данных и использование двухфазных транзакций. Система репликаций, встроенная в MSSQL, требует как минимум выпуска Enterprise Edition и достаточной квалификации администраторов СУБД в удаленных узлах для настройки, а также накладывает ряд других ограничений.

### **3. Механизм синхронизации распределенных баз данных на базе метода асинхронной доставки журнала транзакций**

Описанные в предыдущем разделе ограничения привели к необходимости разработки оригинального механизма синхронизации распределенных баз данных на основе метода асинхронной доставки журнала транзакций, который в настоящее время практически используется и в других вертикально интегрированных системах предприятия. Несмотря на нестрогое соответствие разрабатываемой системы 12 признакам распределенной базы данных [3], при ее построении вполне применимы методы построения распределенных баз данных.

Основная задача систем управления распределенными базами данных состоит в обеспечении средства интеграции локальных баз данных, располагающихся в некоторых узлах вычислительной сети, с тем чтобы пользователь, работающий в любом узле сети, имел доступ ко всем этим базам данных как к единой базе данных [1].

При этом должны обеспечиваться:

- простота использования системы с точки зрения администратора СУБД, включая процедуры диагностики и обмена репликами;

- возможности автономного функционирования при нарушениях связности сети или при административных потребностях.

Очевидно, что построение распределенной базы данных — задача на порядок более сложная, чем разработка локальной базы данных. Для достижения компромисса между трудозатрами на разработку, прозрачность сопровождения и функциональностью системы был искусственно введен ряд ограничений:

- Использование суррогатных ключей из диапазона выделенному каждому филиалу [9].
- Возможность редактирования записи только в месте ее нахождения.
- Шаблоны триггеров для обеспечения тиражирования данных.
- Соглашения об именовании первичных ключей и триггеров.
- Эквивалентность структур данных во всех узлах сети (это ограничение вводится при проектировании СУБД).

Указанные ограничения позволили практически реализовать работоспособную систему синхронизации данных в узлах слабо-связанной распределенной сети. С точки зрения реализации система состоит из двух частей – серверной и клиентской.

**Серверная часть состоит из таблиц, содержащих:**

- список подписчиков и публикаторов для текущей базы данных;
- описание тиражируемых таблиц с указанием направления публикации;
- очередь изменений данных и метаданных в виде SQL-операторов (в стандарте ANSI SQL-92 [8]), расположенных в хронологическом порядке, что исключает возникновение коллизий при тиражировании данных;
- автоматически создаваемых триггеров (по шаблонам) на реплицируемых таблицах, обеспечивающих формирование очередей реплик в одной транзакции с модификацией данных и генерацию уникальных устойчивых идентификаторов строк в заданном для БД диапазоне.



**Клиенская часть представляет собой исполняемый модуль подсистемы репликаций, обеспечивающий:**

- работу в пакетном и пользовательском режиме;
- диагностику подсистемы репликаций:
  - считывание очереди изменений из БД и формирование внешнего файла с применением методов компрессии на лету (и при необходимости шифрование данных);
  - чтение входящего файла применимости для текущей БД, полученного по электронной почте или находящегося на FTP, декомпрессия и последовательное выполнение SQL-команд.

Указанный принцип построения системы минимизирует работы по настройке БД на удаленных узлах, так как все объекты сразу включаются в скрипт генерации БД, и она готова принимать DDL-пакеты из агрегированной БД без участия администратора СУБД.

Этот механизм позволяет помещать в очередь DDL-пакеты, выполнять их без участия администратора удаленной базы данных и контролировать их выполнения на удаленных БД, что исключает ситуацию рассогласованности операторов манипулирования данными со структурой базы данных.

#### **4. Заключение**

Таким образом, в работе представлен новый механизм синхронизации распределенных баз данных на основе метода асинхронной доставки журнала транзакций, который позволяет обойти ограничения, имеющиеся в ИТ-инфраструктуре, внедренной в систему управления ресурсами ООО "Газпром трансгаз Нижний Новгород". Описан результат работы в виде серверной и внешней части системы и приводится описание архитектуры взаимодействия на разных уровнях.

Дальнейшее развитие системы репликаций планируется производить по следующим направлениям:

- Реализация механизмов принудительной доставки снимков таблиц с учетом диапазонов первичных ключей, что позволит повысить производительность системы при первичном заполнении корпоративных справочников.
- Реализация механизмов онлайн-синхронизации между узлами, обладающими высокоскоростными каналами связи, что позволит сделать процесс репликации практически синхронным.

### **Литература**

1. БРОЙДО В.Л., КРЫЛОВА В.С. *Научные основы организации управления и построения АСУ*. – М.: Высшая школа, 1990.
2. ВОЛКОВ Н.В., СКУДНЯКОВ С.В., СТАРКО М.С., МЕЛЬНИКОВ С.И., ОБУХОВА О.А. *Многоуровневая автоматизированная система организации процесса в учебных заведениях курсового профиля // Презентация учебно-методических разработок системы непрерывного фирменного профессионального образования ОАО «Газпром»*. – 2008 года. – ОАО «Газпром», Департамент по управлению персоналом.
3. ДЕЙТ К. *Введение в системы баз данных*. – М.: Вильямс, 2005. – 1328 с.
4. ЛАРИП П.А., СКУДНЯКОВ С.В. *Опыт разработки, внедрения и эксплуатации интерактивной диалоговой системы дистанционного обучения «Контакт» в информационном пространстве ООО «Волготрансгаз». Интеграция науки, экономики и образования в решении социально-экономических образовательных проблем // Сборник научных статей*. – М.: Российский университет кооперации, 2007. – 179 с.

5. МЕЛЬНИКОВ С.И. *Синтез модели информационных процессов при разработке инструментальной среды сопровождения учебного процесса обучения в учебных заведениях курсового профиля* // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2014, Москва, 16–19 июня 2014 г. – М.: Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2014. – С. 9424–9434.
6. РАССТРИГИН Л.А. *Адаптация сложных систем.* – Рига: Зинатне, 1981. – 375 с.
7. СКУДНЯКОВ С.В. *Построение модели предметной области Автоматизированной Системы Обучения в системе непрерывного профессионального образования* // Сборник материалов V межрегиональной научно-практической конференции «Современные информационные и телекоммуникационные технологии в образовании, науке и технике». – Арзамас: ОО «Ассоциация ученых г.Арзамаса», 2008.
8. *Стандарт ISO/IEC 9075-2:1999. «Database Language SQL»*
9. ТЕНЦЕР А. *Естественные ключи против искусственных ключей* // 6–20 июля 1999 г., версия 1.1. – URL: <http://www.ibase.ru/natural-keys-versus-atrificial-keys-by-tentser/>.
10. *Data Integration Glossary Archived March 20, 2009, at the Wayback Machine* // U.S. Department of Transportation, – August, 2001.

**DISTRIBUTED DATABASES DATA ARCHITECTURE  
OF CONTINUOUS CORPORATE LEARNING  
PROCESS CONTROL SYSTEM IN THE LCC  
GAZPROM TRANSGAZ NIZHNY NOVGOROD**

**Sergey Melnikov**, LCC Gazprom energo, Moscow, Chief of Center  
(Serg\_m84@list.ru).

*Abstract: Minimization costs is one of the key tasks in the organization of the corporate training process in a large company, which can be partially solved by the introduction of specialized automated systems. Increasing the automation level here should be carried out very carefully, as excessive automation can make the system uncomfortable and not flexible enough. An information technology infrastructure of LCC Gazprom transgaz Nizhny Novgorod currently has a number of significant limitations and requirements for the information system that makes it impossible to use online access to the unified database and using two-phase transactions. This paper presents the development of an original synchronization mechanism of distributed databases data based on the method of asynchronous delivery of the transaction log. The proposed principle of construction of the system minimizes the work on setting up the database on remote nodes. The application problem of ensuring the integration of the local databases residing in some nodes of the computer network to a user running on any node in the network has been solved. The architecture of interaction at different levels is described.*

Keywords: multi-level systems, distributed systems, database, control, local resources, educational process support system.

УДК 004.657+004.652.3

ББК 32.972.5+32.973.5

DOI: <https://doi.org/10.25728/ubs.2019.79.6>

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Э.Ю. Калимулиной.*

*Поступила в редакцию 17.10.2017.*

*Дата опубликования 31.05.2019.*