

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ В ПРОБЛЕМЕ КОРРЕКТНОСТИ СЕМЕЙСТВ ФУНКЦИЙ РИСКОВЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ ДЛЯ CC-VAR<sup>1</sup>

Агасандян Г. А.<sup>2</sup>

(Вычислительный центр им. А.А. Дородницына  
ФИЦ ИУ РАН)

*Работа продолжает исследования автора, связанные с установленными ранее условиями корректности семейств функций рискованных предпочтений (ф.р.п.), используемых в задачах оптимизации по континуальному критерию VaR (CC-VaR) для финансовых рынков. Эти условия применялись при решении проблемы корректности конкретных семейств, получаемых из надсемейства кусочно-линейных функций чисто аналитическими средствами. В работе предлагаются численные методы для проверки корректности семейств ф.р.п., полезные при возникновении затруднений в проведении аналитических исследований. Они основаны на дискретном алгоритме оптимизации по CC-VaR для сценарных рынков и решают проблемы корректности с достаточно высокой степенью приближения. Методы проверяются на прежнем надсемействе и применяются к надсемейству обобщенных окружностей. Результаты демонстрируют адекватность и универсальность методики.*

Ключевые слова: континуальный критерий VaR (CC-VaR), процедура Неймана – Пирсона, функции рискованных предпочтений (ф.р.п.), семейства и надсемейства ф.р.п., доходность, корректные семейства, волатильность.

### 1. Введение

В работе предлагаются вычислительные алгоритмы, проверяющие на корректность семейства функций рискованных предпочтений (ф.р.п.), используемые на финансовых рынках для задач оптимизации по континуальному критерию VaR (CC-VaR) [1, 2]. Содержание работы непосредственно продолжает исследования [3, 6], где было доказано необходимое и достаточное условие корректности семейства ф.р.п. и проведено аналитиче-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №17-01-00816).

<sup>2</sup> Геннадий Аршавирович Агасандян, д.ф.-м.н. (agasant17@yandex.ru).

ское исследование корректности определенных семейств функций, получаемых из надсемейства кусочно-линейных функций. Приводимые здесь вычислительные процедуры в состоянии решать те же проблемы с достаточной степенью приближения и предназначены для случаев, когда полного аналитического исследования провести не удастся.

Как и при изучении многих иных теоретических проблем с СС-VaR, здесь решается *задача СВ* [1, 2], в которой инвестиционная сумма  $S (> 0)$  не задается, но ищется (свободный от сингулярной компоненты) портфель, доставляющий  $\min S$  при условии  $P\{q \geq \phi(\varepsilon)\} \geq 1 - \varepsilon$  сразу для *всех*  $\varepsilon \in [0, 1]$ , где  $\phi(\varepsilon)$  – ф.р.п. инвестора. Алгоритм оптимизации основан на непрерывном применении процедуры Неймана – Пирсона [7].

Рассматриваются семейства ф.р.п.  $\{\phi(\varepsilon; \lambda), \lambda \in \Lambda\}$  по параметру  $\lambda$ , который не является параметром масштабирования, а отражает лишь степень толерантности инвестора к риску,  $\Lambda$  – множество вещественных чисел (как правило, принимается  $\Lambda = \mathfrak{R}_+$ ). Функции из семейств подчиняются ограничению  $\phi(0; \lambda) \equiv 0$  и нормируются условием  $\phi(1; \lambda) \equiv 1$ . На графике они целиком располагаются в квадрате  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ .

## 2. Основные формулы и дискретный алгоритм

Вкратце напомним основные определения, формулы, проблему задания семейств ф.р.п. при использовании инвестором СС-VaR и условия корректности семейств. Также приводится лаконичная запись дискретного алгоритма оптимизации.

Решение задачи с СС-VaR основывается на функции *относительных доходов*  $\rho(x) = p(x)/c(x)$ ,  $x \in X$ , где  $p(x)$  и  $c(x)$  – соответственно прогнозная и стоимостная плотности цены базового актива. Для среднего дохода  $R(\lambda)$ , инвестиционной суммы  $A(\lambda)$  и относительного дохода  $r(\lambda)$  имеет место

$$(1) \quad R(\lambda) = \int_0^1 \phi(\varepsilon; \lambda) d\varepsilon, \quad A(\lambda) = \int_0^1 \phi(\varepsilon; \lambda) d\gamma(\varepsilon), \quad r(\lambda) = \frac{R(\lambda)}{A(\lambda)},$$

где  $\gamma(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \in [0, 1]$ , – независимая от  $\lambda$  диссонанта оптимального портфеля [1, 4]. Функции  $g(\varepsilon)$  со свойствами диссонанты, т.е.

неотрицательные и невозрастающие функции  $\varepsilon$  (возможно, и разрывные),  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = 1$ , называются *допустимыми*.

*Корректным* называется семейство по  $\lambda$  ф.р.п., для которого при *любой* допустимой функции  $g(\varepsilon)$  оптимальный относительный доход  $r(\lambda)$  является монотонной функцией  $\lambda$ . Прочие семейства считаются *некорректными*.

Важную роль в анализе корректности в [1, 3, 6] играют *нормированные* ф.р.п.

$$(2) \quad \phi_n(\varepsilon; \lambda) = \phi(\varepsilon; \lambda) / R(\lambda),$$

так как они участвуют в представлении относительного дохода:

$$(3) \quad r(\lambda) = R(\lambda) / A(\lambda) = \left( \int_0^1 \phi_n(\varepsilon; \lambda) dg(\varepsilon) \right)^{-1}.$$

С использованием именно этих функций в [6] проведено полное аналитическое исследование корректности семейств кусочно-линейных функций с одинаковым интегралом на  $[0, 1]$ .

Однако далеко не для всех семейств подобный анализ на основе соотношений (2), (3) может быть реализован в столь полном объеме. И потому в настоящей работе функции (2) нами непосредственно не используются. Предлагается численный метод, который отвечает на те же вопросы о корректности прямыми расчетами относительного дохода по (1). При этом для получения адекватных выводов при расчетах следует использовать достаточно мелкую сетку значений параметра семейства.

По этой же причине не используются и важные для проведения теоретического анализа сформулированные и доказанные в [3, 6] *необходимые и достаточные* условия корректности. Для проведения численных расчетов удобную для анализа континуальную задачу предстоит вновь трансформировать в дискретную. Можно это делать разными способами.

Для нас предпочтительнее начинать с разбиения множества цен базового актива на сценарии. (К этому нас подталкивает и организация реальных рынков опционов, хотя на нем дискретизация несколько иная – дискретны множества их страйков.)

В таком случае мы можем применять *дискретный* алгоритм как результат проецирования *континуального* теоретического алгоритма, оптимальность которого была доказана ранее

[1, 2, 4]. При этом оптимальность дискретного алгоритма поддерживается (с некоторыми оговорками для случаев весьма грубой дискретизации [1, 5]) той же оптимальностью процедуры Неймана – Пирсона, составляющей важную часть алгоритма.

*Дискретный алгоритм.*

Поскольку во всех примерах работы используются только бета-распределения, в качестве множества цен базового актива принимается конечный полуинтервал  $X = [0, 1)$ . Свой прогноз инвестор делает в форме плотности вероятности  $p(x)$ , а рынок формирует стоимостную плотность  $c(x)$ ,  $x \in X$ .

Сценарии  $S_i \subset X$  определяются равномерным разбиением множества  $X$  на  $n$  интервалов  $S_i = [x_{i-1}, x_i)$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , где  $x_i = ih$ ,  $h = 1/n$ ,  $i \in I_0 = I \cup \{0\}$ . Их вероятности и стоимости соответствующих индикаторов получаются интегрированием в пределах сценариев. В результате имеем векторы  $\mathbf{p} = \{p_i, i \in I\}$  и  $\mathbf{c} = \{c_i, i \in I\}$ , где

$$(4) \quad p_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)dx, \quad c_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} c(x)dx.$$

В краткой форме дискретный алгоритм оптимизации можно записать последовательностью обозначений и операций:

$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{p}/\mathbf{c} = \{\rho_i = p_i/c_i, i \in I\}$  – вектор относительных доходов;

$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{O}(\boldsymbol{\rho})$  – вектор упорядочения, задающий на множестве сценариев позиции компонент вектора  $\boldsymbol{\rho}$  в порядке возрастания;

$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{O}(\boldsymbol{\xi})$  – фактически, обратный к  $\boldsymbol{\xi}$  вектор;

$\mathbf{d} = \mathbf{p}(\boldsymbol{\xi})$  – суперпозиция векторов  $\mathbf{p}$  и  $\boldsymbol{\xi}$ ; ее компоненты упорядочены по возрастанию компонент вектора  $\boldsymbol{\rho}$ ;

$\mathbf{T} = [t_{ij}]$ ,  $t_{ij} = \{1, i \leq j; 0, i > j\}$  – треугольная матрица из нулей и единиц, применяемая для последовательного суммирования компонент векторов, начиная с первой;

$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{T}\mathbf{d}$  – вектор кумулятивных вероятностей для вектора  $\mathbf{d}$ ;

$\mathbf{b} = \phi(\boldsymbol{\varepsilon})$  – вектор весов базисных инструментов в оптимальном портфеле в порядке возрастания компонент вектора  $\boldsymbol{\rho}$ ;

$\mathbf{g} = \mathbf{b}(\boldsymbol{\eta})$  – вектор тех же весов, но в исходном порядке.

Основными числовыми показателями построенных портфелей служат инвестиционная сумма  $A$ , средний доход  $R$  и средняя доходность  $y$ ; они получаются по формулам (аналог (1))

$A = (\mathbf{g}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{f}), \mathbf{f} = \mathbf{c}(\xi), R = (\mathbf{g}, \mathbf{p}) = (\mathbf{b}, \mathbf{d}), y = R/A - 1$ ,  
здесь  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  – скалярное произведение векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ .

В числовых примерах для обеих плотностей  $p(\cdot)$  и  $c(\cdot)$  используется известное из теории вероятности двухпараметрическое бета-распределение:

$$\text{Be}(u, v): x^{u-1}(1-x)^{v-1}/B(u, v), \quad u, v > 0,$$

где

$$B(u, v) = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1} dx = \Gamma(u)\Gamma(v)/\Gamma(u, v),$$

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty x^{u-1} \exp(-x) dx$$

– соответственно бета- и гамма-функции.

Далее полагаем  $p(x) \sim \text{Be}(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2 > 1, c(x) \sim \text{Be}(\beta_1, \beta_2), \beta_1, \beta_2 > 1$ . В числовых примерах дискретный алгоритм оптимизации применяется многократно для разных ф.р.п.  $\phi(\cdot)$ . При этом перерасчета (4) не требуется, поскольку для каждой решаемой далее задачи (1 или 2) векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{c}$  одни и те же, а при смене задачи производится лишь перемена ролей  $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{c}$ .

### 3. Линейные функции с одним изломом

Рассматривается двухпараметрическое надсемейство кусочно-линейных функций от  $\varepsilon \in [0, 1]$  с одним изломом вида

$$(5) \quad \phi(\varepsilon; \zeta, v) = \left\{ v\varepsilon/\theta, \varepsilon \leq \theta; v + (1-v) \frac{\varepsilon - \theta}{1 - \theta}, \varepsilon > \theta \right\}, \quad \theta = 1 + v - 2\zeta,$$

где  $\varepsilon = \theta$  – абсцисса точки излома функций,  $v$  – ее ордината. При  $\zeta = 0,5$  имеет место  $\phi(\varepsilon; \zeta, v) \equiv \varepsilon$  независимо от  $v$ .

При фиксировании значения параметра  $\zeta$  мы получаем семейство с единственным параметром  $v$ .

Этот пример надсемейства уже был рассмотрен в [6] исключительно аналитическими средствами и было доказано, что для каждого значения  $\zeta \in [0, 1]$  однопараметрические семейства (5) по параметру  $v$  (играющему роль  $\lambda$ ) являются корректными. Напомним еще, что постоянство параметра  $\zeta$  (и среднего дохода) удобно для сравнения рисков свойств ф.р.п. [6].

В данном разделе мы решаем задачу для этого же надсемейства в дискретной модели рынка, при этом мы преследуем

двойную цель. Во-первых, тем самым проверяется соответствие получаемых результатов выводам [6]. Во-вторых, мостим дорожку в следующий раздел с примером надсемейства, для которого дискретизация рынка становится, пожалуй, единственно возможным способом решения проблемы корректности, притязая, фактически, на универсальность.

В результате применения алгоритма для произвольной функции рискованных предпочтений инвестора получается (средняя) доходность инвестиции, благодаря чему можно сравнивать различные ф.р.п. между собой по этой характеристике и проверять корректность семейств функций.

В числовом примере набор  $s$  значений параметра  $\zeta$  задается как  $s_i = (i - 1/2)/I$ ,  $i = 1, \dots, I$ , в количестве  $I = 11$ . Имеем

$s = \{0,045; 0,136; 0,227; 0,320; 0,409; 0,5; 0,591; 0,682; 0,773; 0,864; 0,955\}$ ,

при этом  $i_m = (I + 1)/2$  ( $= 6$  в примере) – средний индекс.

Для каждого фиксированного значения  $i$  (и  $s_i$ ) и соответствующего ему семейства определяем равномерную на каждом прямолинейном участке сетку ординат точек излома функций надсемейства в количестве  $J = 9$  правилом

$$v_{i,j} = \{(2j - 1)/J, i \leq i_m; 2s_i - 1 + (1 - s_i)(2j - 1)/J, i > i_m\},$$

где  $j = 1, \dots, J$ . В совокупности они образуют матрицу

$$U = \{v_{i,j}, i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J\}.$$

Каждому исследуемому нами семейству функций отвечает набор  $\{v_{i,j}, j = 1, \dots, J\}$ , располагаемый в  $i$ -й строке матрицы, с фиксированным значением параметра  $\zeta$ , равным  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, I$ .

Графики функций надсемейства для всех элементов этой матрицы уже приводился на рис. 2 в [6] (Похожие графики, но уже сглаженных функций, принадлежащих другому надсемейству, приводятся далее на рис. 2.)

Для этих функций, используемых в качестве ф.р.п., будем вычислять с целью последующего сравнения доходности инвестиции, получаемые как результат решения полной задачи дискретной оптимизации.

Между элементами матрицы  $U$  устанавливается бинарное отношение сообразно определению из [6]. Для семейства по

параметру  $\theta$  считаем, что  $\theta' > \theta''$  ( $\theta' < \theta''$ ), если доходность при значении параметра  $\theta'$  больше (меньше), чем при  $\theta''$ .

Для большей надежности выводов рассматриваются две в некотором смысле противоположные задачи.

*Задача 1: покупка волатильности.*

Решается задача на применение CC-VaR, в которой  $p(x)$  и  $c(x)$  – плотности бета-распределения, притом первая – с параметрами  $\alpha_1 = 2,8$ ,  $\alpha_2 = 2,9$ , вторая – с  $\beta_1 = 3,2$ ,  $\beta_2 = 3,1$ , т.е.

$$p(x) = 23,6744x^{1,8}(1-x)^{1,9}, \quad c(x) = 37,8853x^{2,2}(1-x)^{2,1},$$

$$\rho(x) = p(x)/c(x) = 0,624897/x^{0,4}/(1-x)^{0,2}.$$

Отметим, что название задачи находит отражение в поведении функции  $\rho(x)$  и говорит о наличии тенденции к *повышению* волатильности (степени нестабильности) с точки зрения инвестора. Ее график приводится на рис. 1 слева.

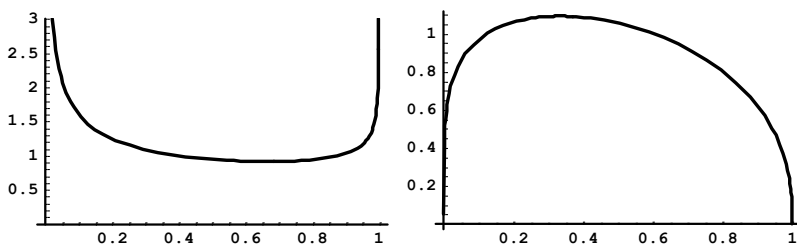


Рис. 1. Графики функций  $\rho(x)$  для задач 1 и 2

Применением дискретного алгоритма оптимизации ко всем ф.р.п., отвечающим элементам матрицы  $\mathbf{U}$ , определяются их (средние) доходности, при этом  $n = 400$  (как компромисс между скоростью и точностью). В совокупности все они образуют матрицу  $\mathbf{Y} = \{y_{ij}, i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J\}$ . Эта матрица, помноженная для большей информативности на  $10^3$ , представлена в таблице 1. (Без такого увеличения при выбранной точности отображения чисел в таблицах наши матрицы будут содержать многие пары совпадающих элементов.)

Таблица 1. Матрица  $10^3 \times Y$  в задаче 1

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	436	394	352	310	268	226	182	138	88,6
2	244	227	210	192	174	153	131	107	77,7
3	164	156	148	138	128	117	104	89,4	70,9
4	116	112	108	103	97,7	91,7	84,8	76,5	65,7
5	82,0	80,6	79,0	77,2	75,1	72,6	69,7	66,0	61,2
6	57,2	57,2	57,2	57,2	57,2	57,2	57,2	57,2	57,2
7	39,1	39,8	40,6	41,5	42,5	43,7	45,1	46,7	48,7
8	26,1	27,0	27,9	29,0	30,2	31,6	33,1	34,8	36,7
9	16,3	17,1	17,9	18,8	19,8	20,8	22,0	23,3	24,6
10	8,62	9,12	9,66	10,2	10,8	11,5	12,1	12,8	13,6
11	2,46	2,57	2,76	2,93	3,13	3,33	3,53	3,73	3,94

Комментарий. Из таблицы следует, что

(а) если  $i < i_m$ , то  $y_{i,j+1} < y_{i,j}$  и потому  $v_{i,j+1} < v_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, J - 1$ ;

(б) если  $i > i_m$ , то  $y_{i,j+1} > y_{i,j}$  и  $v_{i,j+1} > v_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, J - 1$ .

Случай  $i = i_m$  составляет естественное исключение.

В качестве побочного результата получаем, что при фиксации индекса  $j = 1, \dots, J - 1$  (параметра точки излома) и для всех  $i = 1, \dots, I - 1$  выполняется неравенство  $y_{i+1,j} < y_{i,j}$ , т.е.  $v_{i+1,j} < v_{i,j}$ .

В целях унификации задания семейств в случае (б) можно прибегнуть, например, к замене  $v \rightarrow 2 - v$ , что меняет зависимость семейства от параметра  $v$  с прямой на обратную.

Задача 2: продажа волатильности.

Решается задача, в которой вновь  $p(x)$  и  $c(x)$  – плотности бета-распределения, но на этот раз первая – с параметрами  $\alpha_1 = 3,1$ ,  $\alpha_2 = 3,2$ , вторая – с  $\beta_1 = 2,9$ ,  $\beta_2 = 2,8$ :

$$p(x) = 37,8853x^{2,1}(1-x)^{2,2}, \quad c(x) = 23,6744x^{1,9}(1-x)^{1,8},$$

$$p(x) = 1,60026/(x^{0,2}(1-x)^{0,4}).$$

График  $p(x)$  для этой задачи представлен на рис. 1 справа. Его внешний вид говорит о тенденции к снижению волатильности (степени нестабильности) с точки зрения инвестора.

Все полученные в результате применения дискретного алгоритма оптимизации доходности образуют матрицу  $Y = \{y_{i,j}$ ,



$i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$ ). Эта матрица с увеличенными в  $10^3$  раз элементами представлена в таблице 2.

Таблица 2. Матрица  $10^3 \times Y$  в задаче 2

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	90,1	86,2	82,4	78,7	75,1	71,6	68,2	64,8	62,2
2	88,0	83,7	79,6	75,7	72,1	68,6	65,4	62,4	59,5
3	84,3	80,0	76,1	72,5	69,2	66,3	63,6	61,1	58,9
4	78,7	74,8	71,5	68,5	66,0	63,7	61,7	59,9	58,4
5	70,3	67,6	65,4	63,6	62,1	60,8	59,7	58,7	57,9
6	57,5	57,5	57,5	57,5	57,5	57,5	57,5	57,5	57,5
7	42,8	46,4	48,8	50,6	52,1	53,3	54,3	55,2	56,0
8	31,3	36,6	40,3	43,2	45,5	47,6	49,3	50,9	52,2
9	21,7	27,4	31,5	34,8	37,6	40,0	42,1	44,0	45,7
10	13,1	18,1	21,8	24,9	27,5	29,8	31,9	33,8	35,6
11	4,76	7,50	9,65	11,5	13,1	14,6	16,0	17,3	18,5

Комментарий тот же, что и к задаче 1: связанные с бинарным отношением  $\succ$  свойства таблиц 1 и 2 совпадают, т.е. по этому отношению столь разные задачи эквивалентны.

#### 4. Дуги обобщенных окружностей

Рассмотрим теперь надсемейство ф.р.п. инвестора вида

$$(6) \quad \phi(\varepsilon; \mu, \nu) = 1 - (1 - \varepsilon^\mu)^{1/\nu}, \quad \mu, \nu > 0.$$

При  $\mu, \nu > 1$  такие функции можно формально описывать как четверть обобщенной окружности с центром в  $(0, 1)$  квадрата  $Q$ . Они удовлетворяют уравнению  $\varepsilon^\mu + (1 - \phi(\varepsilon; \mu, \nu))^\nu = 1$  (при  $\mu = \nu = 2$  получается уравнение обычной окружности).

При  $\mu = \nu = 1$  окружность вырождается в отрезок прямой  $\phi(\varepsilon; 1, 1) \equiv \varepsilon$ , а при  $\mu, \nu < 1$  окружность перестает быть выпуклой фигурой, и ее основная и интересующая нас дуга становится вогнутой функцией. Такие функции в качестве ф.р.п. представляют несомненный интерес для консервативных инвесторов. Случай расположения  $\mu$  и  $\nu$  по разные стороны от единицы дает весьма экзотичные формы кривых, с трудом поддающиеся интерпретации в качестве ф.р.п. инвестора, и мы его в дальнейшем не рассматриваем.

Как и в примере раздела 3, существенной характеристикой является интеграл от функции (6) на  $[0, 1]$  (равный площади под кривой ее графика). Он совпадает со средним доходом  $R(\mu, \nu)$  портфеля в задаче оптимизации по CC-VaR. Его считаем вспомогательным параметром и обозначаем  $\zeta (= R(\mu, \nu))$ . Вычисления для функций (6) при всех  $\mu, \nu > 0$  дают

$$(7) \quad R(\mu, \nu) = R(\nu, \mu) = 1 - \Gamma(1 + 1/\mu)\Gamma(1 + 1/\nu) / \Gamma(1 + 1/\mu + 1/\nu).$$

Кривые данного надсемейства при  $\varepsilon = 1$  и  $\nu > 1$  ведут себя более круто по сравнению, например, с кривыми семейства (5). Их производные по  $\varepsilon$  при  $\varepsilon = 1$  и  $\nu > 1$  бесконечны, что позволяет в большей мере использовать функции такого надсемейства весьма расположенными к риску инвесторами. (При  $\nu < 1$  эти производные равны нулю, а при  $\varepsilon = 0$  они определяются аналогичным образом значениями параметра  $\mu$ .)

В данном случае проведение полного теоретического анализа затруднено, но о схожести поведения функций надсемейств (5) и (6) для наших целей можно судить по результатам многочисленных расчетов, графикам и по самой логике проблемы.

Важно также отметить, что при этом, вообще говоря,

$$(8) \quad R(\mu, \nu) \neq 1 - R(1/\mu, 1/\nu), \quad 0 < \mu, \nu < 1.$$

Это неравенство напоминает о проблеме *аналитического продолжения* семейств в зону малого риска, что мы обычно связываем со значениями параметра семейств меньше единицы (формулы (5), (6) в [6]).

Конкретно для нашего надсемейства (6) такую проблему можно и не ставить, поскольку оно при  $\mu, \nu < 1$  и так обладает нужными свойствами. Но для целей универсализации продемонстрируем на нем возможные продолжения. При этом наличие двух параметров позволяет разнообразить варианты.

Для области  $\mu, \nu < 1$  можно предлагать три варианта функций с индексами “inv”, “cs”, “cs0” соответственно: образование обратной функции, центрально-симметричное отображение, его разновидность с перестановкой  $\mu \leftrightarrow \nu$ . Это

$$(9) \quad \phi_{inv}(\varepsilon; \mu, \nu) = \phi^{\leftarrow}(\varepsilon; 1/\mu, 1/\nu) = \left(1 - (1 - \varepsilon)^\nu\right)^{1/\mu}, \quad 0 < \mu, \nu < 1,$$

$$(10) \quad \phi_{cs}(\varepsilon; \mu, \nu) = \left(1 - (1 - \varepsilon)^\nu\right)^{1/\mu} = \phi_{inv}(\varepsilon; \mu, \nu), \quad 0 < \mu, \nu < 1,$$

$$(11) \phi_{cs_0}(\varepsilon; \mu, \nu) = (1 - (1 - \varepsilon)^\mu)^{1/\nu}, \quad 0 < \mu, \nu < 1.$$

Графики функции (9) получаются зеркальным отображением графиков исходных функций надсемейства с параметрами  $1/\mu$ ,  $1/\nu$  относительно биссектрисы прямого угла с вершиной в  $(0,0)$ . Очевидно также, что формула (10) для нашего надсемейства не дает нового продолжения. В отличие от варианта (11), связанного с перестановкой  $\mu \leftrightarrow \nu$ . При этом для всех этих вариантов выполняются (в отличие от исходного) очевидные из геометрических соображений равенства

$$R_{inv}(\mu, \nu) = R_{cs}(\mu, \nu) = R_{cs_0}(\mu, \nu) = 1 - R(1/\mu, 1/\nu) = \\ = \Gamma(1 + \mu)\Gamma(1 + \nu)/\Gamma(1 + \mu + \nu), \quad 0 < \mu, \nu < 1.$$

#### Дискретизация задачи.

Для параметра  $\zeta$  строится сетка из  $I$  значений. Для каждого из них определяются сетки параметров  $\mu$  и  $\nu$  надсемейства, состоящие из  $J$  значений каждая. Они образуют соответственно матрицы  $\mathbf{M} = \{\mu_{ij}, i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J\}$  и  $\mathbf{N} = \{\nu_{ij}, i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J\}$ .

Для удобства  $I$  и  $J$  вновь выбираются нечетными числами,  $I = 11$ ,  $J = 9$ . Средние индексы в наборах обозначаются соответственно  $i_m = (I + 1)/2$ ,  $j_m = (J + 1)/2$ . Вектор  $s$  как совокупность тестируемых значений параметра  $\zeta$  выбирается, как и в разделе 3, правилом  $s_i = (i - 1/2)/I$ ,  $i = 1, \dots, I$ . Имеем

$$s = \{0,045; 0,136; 0,227; 0,318; 0,409; 0,5; 0,591; 0,682; 0,773; 0,864; 0,955\}.$$

Вновь нас интересуют в основном семейства, получаемые из надсемейства фиксацией индекса  $i$  (и  $s_i$ ).

Введем вектор  $v = \{v_i, i = 1, \dots, I\}$ , где  $v_i$  определяется для нового надсемейства по формуле (7) из уравнения  $R(v, v) = s_i$ ,  $i = 1, \dots, I$ . Получаем

$$v = \{5,272; 2,716; 1,920; 1,490; 1,207; 1; 0,836; 0,699; 0,578; 0,461; 0,325\}.$$

Компоненты вектора  $v$  для рассматриваемого надсемейства служат средними значениями сеток параметров  $\mu$  и  $\nu$ . Параметры  $\mu_{ij}$  и  $\nu_{ij}$  выбираются по разным формулам в зависимости от того, в первой или второй половине своей шкалы находятся

индексы  $i = 1, \dots, I$  и  $j = 1, \dots, J$ . При этом сохраняются и определенная симметрия в их задании, и некоторая равномерность сетки. Предлагается следующая последовательность действий.

Для всех  $i = 1, \dots, I$  и  $j \leq j_m$  сначала задаются значения  $\mu$ :

$$\mu_{i,j} = 1 + (j - 1)(v_i - 1)/J,$$

а затем по ним находятся  $v_{i,j}$  как корень уравнения  $R(\mu_{i,j}, v) = s_i$ :

$$\Gamma(1 + 1/\mu_{i,j})\Gamma(1 + 1/v)/\Gamma(1 + 1/\mu_{i,j} + 1/v) = 1 - s_i.$$

Найденные таким образом величины  $\mu_{i,j}$  и  $v_{i,j}$  образуют подматрицы  $\mathbf{M}'$  и  $\mathbf{N}'$  размера  $I \times j_m$  матриц  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$  соответственно. Два крайние правых столбца в матрицах  $\mathbf{M}'$  и  $\mathbf{N}'$  по понятным причинам одинаковы и совпадают с вектором  $v$ . Остальные элементы матриц  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$  (т.е. для  $j > j_m$ ) образуют подматрицы  $\mathbf{M}''$  и  $\mathbf{N}''$  размера  $I \times (j_m - 1)$  матриц  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$  соответственно. Они определяются из соображений симметрии и в соответствии с симметрией функции  $R(\mu, v)$  относительно перестановки  $\mu \leftrightarrow v$ . Именно:

$$\mu_{i,j} = v_{i,J+1-j}, \quad v_{i,j} = \mu_{i,J+1-j}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = j_m + 1, \dots, J.$$

Результаты расчетов матрицы  $\mathbf{M}$  приведены в таблице 3.

Таблица 3. Матрица  $\mathbf{M}$

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1,0	2,068	3,136	4,204	5,272	6,575	8,617	12,285	21,00
2	1,0	1,429	1,858	2,287	2,716	3,209	3,876	4,834	6,333
3	1,0	1,230	1,460	1,690	1,920	2,174	2,487	2,882	3,400
4	1,0	1,123	1,245	1,368	1,490	1,621	1,770	1,942	2,143
5	1,0	1,052	1,104	1,155	1,207	1,261	1,318	1,379	1,444
6	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
7	1,0	0,959	0,918	0,877	0,836	0,797	0,76	0,725	0,692
8	1,0	0,925	0,850	0,775	0,699	0,629	0,568	0,514	0,467
9	1,0	0,894	0,789	0,683	0,578	0,483	0,408	0,346	0,294
10	1,0	0,865	0,730	0,595	0,461	0,347	0,265	0,204	0,158
11	1,0	0,831	0,662	0,494	0,325	0,198	0,123	0,076	0,048

В соответствии с правилами построения обеих матриц  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$  полная матрица  $\mathbf{N}$  получается из  $\mathbf{M}$  зеркальным отображением относительно центрального ( $j_m$ -го) столбца:

$$v_{i,j} = \mu_{i,J+1-j}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J,$$

и потому здесь уже не приводится.

На рис. 2 изображены графики функций надсемейства для построенных сеток значений параметров  $\zeta$ ,  $\mu$  и  $\nu$ .

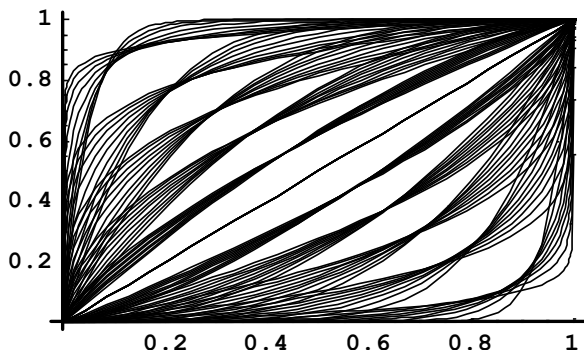


Рис. 2. Графики функций  $\phi(\varepsilon, \mu, \nu)$  надсемейства

Как и в разделе 3, рассматриваются две задачи.

*Задача 1: покупка волатильности.*

Решается задача, в которой плотности  $p(x)$  и  $c(x)$  заимствуются из раздела 3, т.е.

$$p(x) = 23,6744x^{1,8}(1-x)^{1,9}, \quad c(x) = 37,8853x^{2,2}(1-x)^{2,1},$$

$$\rho(x) = p(x)/c(x) = 0,624897/x^{0,4}/(1-x)^{0,2}.$$

В результате применения дискретного алгоритма оптимизации для каждой функции рискованных предпочтений инвестора, параметры которой отвечают элементам матриц  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$ , определяется доходность инвестиции. Все полученные доходности образуют матрицу  $\mathbf{Y} = \{y_{ij}, i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J\}$ . Эта матрица, помноженная на  $10^3$ , представлена в таблице 4.

*Задача 2: продажа волатильности.*

Решается задача, в которой плотности  $p(x)$  и  $c(x)$  также заимствуются из раздела 3, т.е.

$$p(x) = 37,8853x^{2,1}(1-x)^{2,2}, \quad c(x) = 23,6744x^{1,9}(1-x)^{1,8},$$

$$\rho(x) = 1,60026/x^{0,2}/(1-x)^{0,4}.$$

Все полученные в результате применения дискретного алгоритма оптимизации доходности образуют матрицу  $\mathbf{Y} = \{y_{ij},$

$i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$ . Эта матрица, помноженная на  $10^3$ , представлена в таблице 5.

Таблица 4. Матрица  $10^3 \times Y$  в задаче 1

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	117,	168,	205,	235,	260,	285,	317,	358,	415,
2	105,	123,	139,	153,	164,	176,	189,	205,	223,
3	92,7	101,	109,	116,	122,	128,	134,	142,	150,
4	80,8	84,6	88,0	91,2	94,2	97,1	100,	103,	107,
5	69,1	70,3	71,5	72,6	73,7	74,8	75,9	77,1	78,3
6	57,4	57,4	57,4	57,4	57,4	57,4	57,4	57,4	57,4
7	46,0	45,5	45,0	44,5	43,9	43,3	42,7	42,1	41,6
8	34,9	34,3	33,7	33,0	32,2	31,3	30,5	29,7	29,0
9	24,1	23,7	23,2	22,6	21,9	21,0	20,2	19,5	18,8
10	13,8	13,6	13,4	13,0	12,6	12,0	11,4	10,8	10,3
11	4,20	4,19	4,17	4,12	4,01	3,82	3,60	3,37	3,15

Таблица 5. Матрица  $10^3 \times Y$  в задаче 2

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	70,2	80,6	84,9	87,1	88,4	89,4	90,3	91,1	91,7
2	67,7	73,4	77,2	79,8	81,8	83,4	85,0	86,6	88,1
3	65,7	69,1	71,8	74,0	75,8	77,4	79,0	80,6	82,2
4	63,4	65,3	67,0	68,5	69,9	71,1	72,4	73,7	75,0
5	60,8	61,6	62,4	63,2	63,9	64,6	65,3	66,0	66,7
6	57,6	57,6	57,6	57,6	57,6	57,6	57,6	57,6	57,6
7	53,8	53,1	52,4	51,7	51,0	50,2	49,4	48,7	48,0
8	48,8	47,7	46,5	45,2	43,7	42,1	40,6	39,2	37,9
9	42,4	41,0	39,4	37,5	35,4	33,1	31,1	29,2	27,4
10	33,1	31,8	30,1	28,1	25,5	22,8	20,4	18,4	16,6
11	17,8	17,0	15,8	14,3	12,0	9,69	7,93	6,60	5,59

*Комментарий*, являясь общим для задач 1 и 2 данного раздела, отличается от комментария для тех же задач из раздела 3 лишь тем, что в (а) и (б) отношения  $\succ$  и  $\prec$  меняются местами. Это обстоятельство обусловлено различием в поведении функций двух надсемейств при изменении их параметров. При возрастании индекса  $j$  возрастают и параметры  $\nu$  и  $\mu$  соответствен-

но надсемейств (5) и (6) (параметр  $\mu$  нами выбран по алфавиту ведущим в паре  $(\mu, \nu)$ ), но производные по  $\varepsilon$  функций этих надсемейств в нуле растут и убывают соответственно. Итак,

(а) если  $i < i_m$ , то  $y_{i,j+1} > y_{i,j}$  и  $\mu_{i,j+1} \succ \mu_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, J-1$ ;

(б) если  $i > i_m$ , то  $y_{i,j+1} < y_{i,j}$  и  $\mu_{i,j+1} \prec \mu_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, J-1$ .

Дополнительно отмечаем также, что при фиксации индекса  $j = 1, \dots, J-1$  для всех  $i = 1, \dots, I-1$  имеем  $y_{i+1,j} < y_{i,j}$ , т.е.  $\mu_{i+1,j} \prec \mu_{i,j}$ .

Применение *альтернативных* продолжений (9) и (11) надсемейства в область параметров  $0 < \mu, \nu < 1$  при сохранении принципа построения сетки параметров требует перерасчета нижней половины матриц  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$ , а с ними и матриц  $\mathbf{Y}$  для обеих задач. При этом матричная картина отношений  $\succ$  и  $\prec$  для (9) не меняется, а для (11) в нижней половине матрицы картина меняется на противоположную (как раз вследствие смены ролей для параметров  $\mu$  и  $\nu$ ).

## 5. Заключение

Работа совместно с предыдущей работой завершает намеченное исследование корректности семейств ф.р.п. инвестора.

Сформировано и доказано необходимое и достаточное условие корректности семейств, которое использовано для проведения аналитического исследования корректности в конкретных задачах. Условие помогает инвестору осознанно формализовать свои рискованные предпочтения в приложении к финансовому рынку и в качестве ф.р.п. выбирать функции из корректных семейств с расчетом на адекватное вознаграждение.

Специально подобраны два примера надсемейств функций, обладающих, помимо прочих достоинств, дополнительным свойством симметрии относительно биссектрисы прямого угла с вершиной в точке  $(1, 0)$  в координатах «уровень вероятности – значение функции». Симметрия функций переносится на семейства, происходящие из этих надсемейств, что позволяет четко подтвердить гипотезу качественного характера: более «доход-

ная» (приносящая инвестору более высокую среднюю доходность) ф.р.п. порождает более низкие доходы в окрестности нуля аргумента и более высокие – единицы. И наоборот.

Разработаны численные методы проверки корректности семейств функций посредством перехода от теоретических рынков к сценарным. Эти методы продемонстрированы на примерах семейств из двух специально подобранных надсемейств и рассчитаны на те множественные случаи, когда ограничиться аналитическими средствами не удается.

### Литература

1. АГАСАНДЯН Г.А. *Применение континуального критерия VaR на финансовых рынках.* – М.: ВЦ РАН, 2011. – 299 с.
2. АГАСАНДЯН Г.А. *Континуальный критерий VaR на многомерных рынках опционов.* – М.: ВЦ РАН, 2015. – 297 с.
3. АГАСАНДЯН Г.А. *Об условиях корректности семейств функций рискованных предпочтений в CC-VaR* // Материалы X международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2017)», Москва, 2–4 октября, 2017. – М.: ИПУ РАН, 2017. – С. 184–187.
4. АГАСАНДЯН Г.А. *Континуальный критерий VaR и оптимальный портфель инвестора* // Управление большими системами. – 2018. – Вып. 73. – С. 6–26.
5. АГАСАНДЯН Г.А. *Континуальный критерий VaR на сценарных рынках* // Информатика и ее применения. – М.: ИПИ ФИЦ ИУ РАН, 2018. – Т. 12, вып. 1. – С. 32–40.
6. АГАСАНДЯН Г.А. *Об особенностях семейств функций рискованных предпочтений для CC-VaR* // Управление большими системами. – Вып. 79. – С. 10–26. – URL: <https://doi.org/10.25728/ubs.2019.79.1>
7. КРАМЕР Г. *Математические методы статистики.* – М.: Наука, 1975. – 750 с. (Перевод с англ.: Cramer. H. *Mathematical methods of statistics.* – Princeton University Press, 1946.)



## CONTINUOUS VaR-CRITERION AND INVESTOR'S OPTIMAL PORTFOLIO

**Gennady Agasandyan**, Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, Doctor of Science, leading fellow (agasand17@yandex.ru).

*Abstract: The work continues author's investigations connected with correctness conditions ascertained previously for families of risk-preferences functions (r.p.f.) that might be used in financial markets in problems of optimization on continuous VaR-criterion (CC-VaR). These conditions were used in analyzing an example of families deduced from the super-family of piecewise-linear functions by pure analytical means. Numerical methods of checking the correctness of r.p.f.-families that are useful when difficulties arise in analytical investigations are suggested. These methods are based on discrete algorithms of optimization under CC-VaR for scenario markets and solve correctness problems with quite high-degree approximation. Methods are tested on the former super-family and applied to the super-family of the generalized circles. Results demonstrate adequacy and generality of methodology.*

**Keywords:** continuous VaR-criterion, Newman-Pearson procedure, risk-preferences functions (r.p.f.), families and super-families of r.p.f., yield, correct families, volatility.

УДК 519.685

ББК 22.18

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Ф.И. Ерешко.*

*Поступила в редакцию 20.02.2019.*

*Опубликована 31.07.2019.*