

**Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН**

# **УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ**

***Выпуск 80  
Июль 2019***

**СБОРНИК  
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл. №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

**Москва – 2019**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
*Институт проблем управления*  
*им. В.А. Трапезникова*

**УПРАВЛЕНИЕ  
БОЛЬШИМИ  
СИСТЕМАМИ**

**СБОРНИК ТРУДОВ**

*Выпуск 80*

**Москва – 2019**

### КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Кузнецов О.П., Кульба В.В., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Главный редактор:** член-корр. РАН Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Калимулина Э.Ю. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИПМ РАН), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), Галаев А.А. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук: Зоркальцев В.И. (ИСЭМ СО РАН), проф. Калашников А.О. (ИПУ РАН), проф. Калянов Г.Н. (ГУ ВШЭ), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ключков В.В. (ИПУ РАН), д-р техн. наук Коргин Н.А. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук: проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (МФТИ), д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р биол. наук проф. Михальский А.И., д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н. (ИПС РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Орлов А.И. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), проф. Райгородский А.М. (МГУ), проф. Савватеев А.В. (РЭШ), д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), Совлуков А.С. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ), проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

### РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

**Арзамас** – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – академик РАН Бычков И.В., д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ).

**Адрес редакции:** 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

**Адрес в интернете:** [ubs.mtas.ru](http://ubs.mtas.ru).

## СОДЕРЖАНИЕ

### *Системный анализ*

---

**Губий Е.В., Зоркальцев В.И., Пержабинский С.М.**  
*Чебышевские и евклидовы проекции точки  
на линейное многообразие*..... 6

**Соболев В.Н.**  
*Одна система массового обслуживания  
и числа Фибоначчи*  
..... 20

### *Математическая теория управления*

---

**Агасандян Г.А.**  
*Вычислительные алгоритмы в проблеме  
корректности семейств функций рискованных  
предпочтений для CC-VAR*..... 40

### *Анализ и синтез систем управления*

---

**Кузнецов Е.Н.**  
*Анализ структуры сетевых взаимодействий:  
контекстно-зависимые меры центральности* ..... 57

***Сетевые модели в управлении***

---

**Иванов Н.Н.**

*Управление ограниченными ресурсами в обобщенных стохастических сетевых графиках.....* 83

***Управление техническими системами  
и технологическими процессами***

---

**Брокарев И.А.**

*Искусственные нейронные сети для решения задачи анализа компонентного состава газовых смесей.....* 98

***Управление подвижными объектами и навигация***

---

**Огородников К.О.**

*Анализ точности нахождения координат местоположения в корреляционно-экстремальных навигационных системах по рельефу местности.....* 116

**Шевляков А.А.**

*Задача о взбирании робота-куба на стену.....* 135

## ЧЕБЫШЕВСКИЕ И ЕВКЛИДОВЫ ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ НА ЛИНЕЙНОЕ МНОГООБРАЗИЕ<sup>12</sup>

Губий Е. В.<sup>3</sup>, Зоркальцев В. И.<sup>4</sup>, Пержабинский С. М.<sup>5</sup>  
(ФГБУН Институт систем энергетики  
им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск)

Приведены результаты исследования свойств и взаимосвязей чебышевских и евклидовых проекций начала координат на линейное многообразие. В таком виде представляются многие задачи прикладной математики. Евклидовы проекции соответствуют использованию метода наименьших квадратов. Чебышевские проекции соответствуют минимизации максимального отклонения. Приводится и теоретически обосновывается алгоритм поиска чебышевской проекции, всегда дающей однозначный результат и позволяющей обходиться без трудно проверяемого и иногда нарушаемого условия Хаара. Алгоритм базируется на использовании лексикографической оптимизации, на каждом этапе которой отыскивается относительно внутренняя точка оптимальных решений. Свойством вырабатывать относительно внутренние точки оптимальных решений обладают алгоритмы метода внутренних точек. Множества чебышевских и евклидовых проекций начала координат на линейное многообразие формируется путем варьирования положительных весовых коэффициентов при отдельных компонентах векторов в чебышевских и евклидовых нормах. Доказано, что замыкания обоих этих множеств совпадают с множеством векторов линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент. Это в частности означает, что любая чебышевская проекция может быть получена с любой требуемой точностью, как и евклидова проекция, за счет выбора весовых коэффициентов. Это означает также, что любая евклидова проекция (т.е. при любом наборе положительных весовых коэффициентов в евклидовой норме) может быть получена за счет выбора весовых коэффициентов в виде чебышевской проекции.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках научного проекта III.17.4.4 программы фундаментальных исследований СО РАН, рег. № АААА-А17-117030310436-7.

<sup>2</sup> Исследования выполняются при финансовой поддержке РФФИ (грант №19-07-00322).

<sup>3</sup> Елена Валерьевна Губий, старший инженер (egubiy@gmail.com).

<sup>4</sup> Валерий Иванович Зоркальцев, д.т.н., профессор (zork@isem.irk.ru).

<sup>5</sup> Сергей Михайлович Пержабинский, к.ф.-м.н. (sergperj@gmail.com).

Ключевые слова: весовые коэффициенты, внутренние точки, линейное многообразие, метод наименьших квадратов, чебышевская проекция.

## 1. Введение

Многие задачи прикладной математики сводятся к проблеме поиска наиболее удаленных от начала координат точек линейного многообразия [1, 6, 10, 11, 13, 14]. Далее  $L$  – линейное многообразие в  $R^n$ , определяемое как множество векторов  $n$ -мерного вещественного пространства, замкнутое относительно операции аффинной комбинации. То есть для любых  $x^1$  и  $x^2$  из  $L$  вектор  $\lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2$  при любом вещественном  $\lambda$  находится в  $L$ .

Линейное многообразие может иметь разные алгебраические формы представления в конкретных задачах. Например, оно может быть определено в виде сдвига на заданный вектор линейного подпространства, определяемого как множество линейных комбинаций некоторого набора векторов. В таком случае  $L$  – это множество векторов  $x \in R^n$ , для любого из которых существует вектор  $z \in R^m$ , удовлетворяющий условию

$$(1) \quad x + Bz = d.$$

Здесь заданными являются вектор  $d \in R^n$ , матрица  $B$  размера  $n \times m$  при некотором натуральном  $m$ . Столбцы матрицы  $B$  составляют векторы, из линейных комбинаций которых формируется линейное подпространство. Это подпространство задает линейное многообразие  $L$  в результате сдвига на вектор  $d$ .

В частности, к виду (1) сводится известная задача поиска коэффициентов линейной регрессии. В этом случае  $i = 1, \dots, m$  – номера факторов,  $j = 1, \dots, n$  – номера наблюдений,  $b_{ji}$  – коэффициенты матрицы  $B$ , интерпретируемые как значение  $i$ -го фактора в  $j$ -м наблюдении,  $d_j$  – значение результирующего показателя в  $j$ -м наблюдении. Искомые компоненты вектора  $z$  являются коэффициентами линейной регрессии. Компоненты вектора  $x$  интерпретируются как «случайные» или «остаточные» составляющие линейной аппроксимации, которые должны быть по возможности минимальны по абсолютной величине.

Линейное многообразие может быть задано и как множество решений системы линейных уравнений. То есть в качестве  $L$  может рассматриваться множество векторов  $x \in R^n$ , удовлетворяющих условию

$$(2) \quad Ax = b,$$

где  $A$  – заданная матрица размера  $m \times n$ ,  $b$  – заданный вектор.

К проблеме поиска решений системы линейных уравнений с минимальными абсолютными значениями компонент сводятся задачи поиска допустимого решения модели (имеющей вид системы линейных уравнений), максимально приближенного к заданному недопустимому решению. Пусть требуется найти вектор показателей  $y \in R^n$ , удовлетворяющий системе линейных уравнений

$$(3) \quad Ay = d,$$

где заданными являются матрица  $A$  и вектор  $d \in R^m$ . Имеется набор значений в виде компонент вектора  $\bar{y} \in R^n$ , которые являются желательными, но не удовлетворяющими (3). Требуется найти вектор  $y$ , удовлетворяющий (3), компоненты которого расхотились бы минимально по абсолютной величине с компонентами вектора  $\bar{y}$ .

Используем замену переменных. Введем вектор расхождения желаемых и достигаемых по условию (3) значений. Пусть

$$(4) \quad x = y - \bar{y}.$$

Тогда при

$$(5) \quad b = d - A\bar{y}$$

задача (2) будет равносильной задаче (3). Вектор  $x$ , удовлетворяющий (2) и имеющий минимальные абсолютные значения компонент, может служить для получения решения задачи (3). Решение задачи (3) из решения задачи (2) определяется по правилу, вытекающему из (4):

$$(6) \quad y = x + \bar{y}.$$

В частности, в виде системы линейных уравнений представима модель межотраслевого баланса (МОБ). Обсуждаемая здесь задача поиска допустимых решений, максимально приближенных к заданному недопустимому решению, имеет место



как при составлении отчетного МОБ [16], так и при составлении прогнозного МОБ [9]. При формировании отчетного (за прошлые годы) МОБ в результате сбора, обработки, агрегирования исходных данных по разным, в том числе вполне объективным, причинам получается набор показателей, неудовлетворяющий точно условиям модели МОБ. Требуется их по возможности минимальная корректировка, чтобы были выполнены все условия модели МОБ.

При прогнозировании и планировании развития экономики разноплановые, независимо вырабатываемые разными специалистами прогнозы и пожелания должны увязываться в единую систему допустимых вариантов. Для этого требуется решение задачи определения минимальных корректировок несбалансированных прогнозных показателей, чтобы они после этого стали удовлетворять условиям МОБ.

К задачам поиска ближайших от начала координат точек линейного многообразия и их непосредственным обобщениям сводятся многие постановки проблемы нахождения псевдорешений несовместных систем [2, 3, 5, 6, 15].

## **2. Возможные способы доопределения проблемы**

Существуют разные варианты конкретизации проблемы поиска ближайших к началу координат точки линейного многообразия [6–8]. В частности, эту проблему можно сформулировать в виде задачи минимизации штрафной функции:

$$(7) \quad \rho(x) \rightarrow \min, \quad x \in L.$$

В [6] рассматривался класс дифференцируемых штрафных функций, удовлетворяющих при любом  $x \in R^n$  условию

$$(8) \quad \text{sign}(\nabla_j \rho(x)) = \text{sign}(x_j), \quad j = 1, \dots, n,$$

где значение функции  $\text{sign}(\alpha)$  от вещественного  $\alpha$  равно 1, 0 или  $-1$ , если  $\alpha > 0$ ,  $\alpha = 0$  или  $\alpha < 0$  соответственно. Выражение  $\nabla_j \rho(x)$  обозначает  $j$ -компоненту градиента функции  $\rho$  в точке  $x$ . При этом требовалось, чтобы функция  $\rho$  в результате некоторого возрастающего дифференцируемого преобразования могла

перейти в строго выпуклую функцию. Класс таких функций обозначим  $F$ .

Для любой функции  $\rho \in F$  существует и единственно решение задачи (7), которое обозначим  $x(\rho)$ . Множество решений задачи (7) при разных функциях из  $F$  обозначим

$$(9) \quad PF = \{x(\rho) : \rho \in F\}.$$

К классу  $F$  относятся гельдеровские нормы

$$(10) \quad \rho_h^p = \left( \sum_{j=1}^n h_j |x_j|^p \right)^{1/p},$$

где  $p$  – заданный из интервала  $(1, \infty)$  степенной коэффициент,  $h$  – заданный вектор весовых коэффициентов  $h_j > 0, j = 1, \dots, n$ . Гельдеровская норма переходит в строго выпуклую функцию при возведении ее в степень  $p$ . При  $p = 2$  имеем евклидову норму. В этом случае можно говорить, что задача (7) решается методом наименьших квадратов.

Использование гельдеровской и, в частном случае, евклидовой нормы в задаче (7) означает, что отыскивается гельдеровская или, в частном случае, евклидова проекция начала координат на линейном многообразии  $L$ . Множество гельдеровских проекций при фиксированном степенном коэффициенте обозначим

$$(11) \quad P_p = \{x(\rho_h^p) : h_j > 0, j = 1, \dots, n\}$$

В [6] доказаны следующие равенства для любого  $p \in (1, \infty)$ :

$$(12) \quad P_2 = P_p = PF.$$

Эти равенства означают, что любую гельдеровскую проекцию начала координат на линейное многообразие можно получить как евклидову проекцию за счет выбора весовых коэффициентов. Более того, используя метод наименьших квадратов за счет выбора весовых коэффициентов можно получать решение задачи минимизации штрафной функции на линейном многообразии для широкого класса штрафных функций.

В качестве другого подхода к конкретизации понятия «ближайшего к началу координат вектора» можно использовать Парето-оптимальные решения многокритериальной задачи

минимизации абсолютных значений всех компонент. Множество векторов линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент обозначим

$$(13) Q = \{x \in L : \neg \exists y \in L, \sum_{j=1}^n |y_j| < \sum_{j=1}^n |x_j|, |y_j| \leq |x_j|, j = 1, \dots, n\}.$$

В [6] было доказано, что данное множество ограниченное, замкнутое, связное, но, возможно, не выпуклое. Установлены следующие важные соотношения:

$$(14) P_2 \subseteq Q, \text{cl} P_2 = Q,$$

где  $\text{cl}$  – операция «замыкания» множества. Это означает, что любое решение с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент может быть получено как евклидова проекция с любой точностью за счет выбора весовых коэффициентов.

Более подробно результаты исследования свойств проекций точки на линейное многообразие представлены в [6-8]. При этом исследовались только гильбертовские, включая евклидовы, и октоэдральные проекции, и не рассматривались чебышевские проекции.

Обозначим  $J_0(x)$ ,  $J(x)$ ,  $J_+(x)$ ,  $J_-(x)$  – множества номеров компонент вектора  $x \in R^n$  с нулевыми, ненулевыми, положительными и отрицательными значениями соответственно. Множество  $J(x)$  называется носителем вектора  $x$ . Пусть  $S$  – линейное подпространство параллельное  $L$ , т.е. множество, состоящее из векторов  $s = x - y$ , где  $x$  и  $y$  – векторы из  $L$ . Критерием принадлежности вектора множеству  $Q$  может служить следующее доказанное в [7] утверждение.

**Лемма 1.** Вектор  $x \in L$  находится в  $Q$  в том и только в том случае, если не существует вектора  $s \in S$ ,  $s \neq 0$ , при котором

$$(15) J_-(s) \subseteq J_+(x), J_+(s) \subseteq J_-(x).$$

### 3. Чебышевские проекции могут обходиться без условия Хаара

Основная цель данной статьи состоит в изучении чебышевских проекций начала координат на линейное многообразие. Чебышевские проекции соответствуют решению задачи (7) при

использовании в качестве штрафной функции чебышевской нормы

$$(16) \rho_h^\infty(x) = \max_{j \in J} h_j |x_j|,$$

где  $J = \{1, \dots, n\}$ . Чебышевские нормы можно рассматривать как предел гельдеровских норм при  $p \rightarrow \infty$ , чем и объясняется введенное здесь обозначение. Чебышевские нормы, чебышевские проекции и чебышевская аппроксимация нередко используются в прикладной и вычислительной математике. Чебышевские нормы – недифференцируемые функции, поэтому они не относятся к классу  $F$  и нуждаются в отдельном исследовании.

Существенным недостатком чебышевских проекций является их возможная неоднозначность. Причем среди множества решений могут быть и решения явно неудовлетворительные по содержательным соображениям.

Рассмотрим пример. Пусть  $n = 2$ , линейное многообразие задается условием  $x_2 = 1$ , т.е. это прямая, параллельная оси абсцисс. Множество чебышевских проекций начала координат на такое многообразие составляет интервал значений  $x_1$  от  $-h_2/h_1$  до  $h_2/h_1$ . Причем по содержательным соображениям удовлетворительным является только значение  $x_1 = 0$ . То есть только такой вектор из указанного интервала можно рассматривать как ближайший к началу координат.

Можно отметить, что именно в точке  $x_1 = 0, x_2 = 1$  будет достигаться минимум на прямой  $x_2 = 1$  функции  $\varphi_p(x) = (|h_1 x_1|^p + |h_2 x_2|^p)^{1/p}$  при любом  $p \geq 1$ . При  $p = 1$  это будет октаэдральная проекция начала координат на линейное многообразие. При  $p = 2$  – евклидова проекция, при  $p \in (1, \infty)$  – гельдеровская проекция. И только в предельном случае  $p = \infty$ , что соответствует чебышевской проекции, будем иметь указанный выше интервал решений.

Для преодоления проблем неоднозначности и неестественности возможных чебышевских проекций обычно используется специальное ограничение на линейное многообразие  $L$ , на правила которыми оно задается. Это так называемое условие Хаара, фактически сводящееся к требованию единственности

чебышевской проекции. Условие Хаара ограничивает применение чебышевских проекций. Оно порой трудно проверяемое и иногда нарушаемое. Нами предлагается пойти по другому пути – использовать в дополнение к задаче (7) при  $\rho = \rho_h^\infty$  лексикографическую оптимизацию алгоритмами, приводящими к относительно внутренним точкам оптимальных решений.

Напомним, что относительно внутренними точками выпуклого множества называются [12] внутренние точки этого множества относительно минимального линейного многообразия, его содержащего. Для множества решений системы линейных уравнений и неравенств относительно внутренними точками будут решения этой системы с минимальным (несужаемым) набором активных (выполненных в виде равенства) ограничений-неравенств.

Процесс вычисления однозначной чебышевской проекции представим в виде конечной последовательности поиска относительно внутренних точек оптимальных решений задач линейного программирования. Пусть  $J_1 = J$ ,  $S^1 = S$ . При  $\rho = \rho_h^\infty$  и  $t = 1$  задача (7) представима в следующем виде:

$$(17) \alpha \rightarrow \min, x \in L,$$

$$(18) -\alpha \leq h_j x_j \leq \alpha, j \in J_t.$$

Пусть  $\alpha^t$  – оптимальное значение целевой функции этой задачи,  $x^t$  – относительно внутренняя точка оптимальных решений, т.е. это оптимальное решение с минимальным набором ограничений (18), выполняющимся в виде равенства.

Обозначим  $I_+^t$  – множество номеров  $j \in J_t$ , для которых

$$(19) h_j x_j^t = \alpha^t.$$

Пусть  $I_-^t$  – множество номеров  $j \in J_t$ , для которых

$$(20) h_j x_j^t = -\alpha^t.$$

Поскольку  $x^t$  – решение задачи (17), (18) с минимальным набором активных ограничений, то не существует вектора  $s \in S^t$ ,  $s \neq 0$ , при котором

$$(21) I^t \cap J(s) \neq \emptyset, I_+^t \cap J_+(s) = \emptyset, I_-^t \cap J_-(s) = \emptyset.$$

Зафиксируем значения компонент вектора переменных с номерами из  $I_+^t$  и  $I_-^t$ :

$$(22) \quad x_j = x_j^t, \quad j \in I_+^t \cup I_-^t.$$

Положим

$$(23) \quad S^{t+1} = \{s \in S^t : s_j = 0, \quad j \in I_+^t \cup I_-^t\},$$

$$(24) \quad J_{t+1} = J_t \setminus \{I_+^t \cup I_-^t\}.$$

Если  $J_{t+1} \neq \emptyset$ , то переходим к решению задачи (17), (18) при  $t := t + 1$  и зафиксированными по условию (22) значениями компонент вектора переменных на последнем и всех предыдущих этапах вычислений.

Поскольку множество  $J_{t+1}$  строго включено в  $J_t$ , то через конечное число этапов таких вычислений процесс завершится и множество  $J_{t+1}$  окажется пустым. Пусть это будет этап с номером  $T$ . Вектор  $x^T$  определяется описанным вычислительным процессом однозначно. Обозначим его  $x(\rho_h^\infty)$ .

Множество всех таких чебышевских проекций при различных положительных весовых коэффициентах обозначим

$$(25) \quad P_\infty = \{x(\rho_h^\infty) : h_j > 0, \quad j = 1, \dots, n\},$$

**Теорема 1.**  $P_\infty \subseteq Q$ .

Доказательство. Требуется доказать, что  $x(\rho_h^\infty)$  при любых  $h_j > 0, \quad j = 1, \dots, n$ , находится в  $Q$ . Это вытекает из (21) для  $t = 1, \dots, T$  и леммы 1. Теорема доказана.

Поиск относительно внутренней точки оптимальных решений задачи (17), (18) (при условии (22) для  $t > 1$ ) может осуществляться алгоритмами метода внутренних точек, которые [4] обладают свойством приводить к относительно внутренним точкам оптимальных решений задач линейного программирования.

#### 4. Евклидовы и чебышевские проекции

**Лемма 2.** Для того чтобы вектор  $x$  совпадал с  $x(\rho_h^2)$  при данном векторе положительных весовых коэффициентов  $h$ ,

необходимо и достаточно выполнения при любом  $s \in S$  равенства

$$(26) \sum_{j=1}^n h_j x_j s_j = 0.$$

Доказательство. Вектор  $x(\rho_h^2)$  является оптимальным решением задачи:

$$(27) 0,5 \cdot \sum_{j=1}^n h_j (x_j)^2 \rightarrow \min, x \in L.$$

Действительно, целевая функция задачи (27) является результатом возрастающего преобразования функции  $\rho_h^2(x)$  – возведения ее значения в степень 2 и умножения на 0,5. Поэтому оптимальное решение задачи (7) при  $\rho = \rho_h^2$  будет совпадать с решением задачи (27).

Условие (26) означает, что производная в точке  $x$  целевой функции задачи (27) по любому направлению, не выводящему из  $L$ , должна быть равна нулю. Это является необходимым и достаточным условием оптимальности для задачи (27) вектора  $x \in L$ . Лемма доказана.

**Теорема 2.**  $P_2 \subseteq P_\infty$ .

Доказательство. Требуется доказать, что при любом заданном векторе положительных весовых коэффициентов вектор

$$(28) x = x(\rho_h^2)$$

будет находиться в множестве  $P_\infty$ . То есть существует вектор весовых коэффициентов  $d \in R^n$ ,  $d_j > 0, j = 1, \dots, n$ , при котором

$$(29) x = x(\rho_d^\infty).$$

Если  $L$  содержит начало координат  $R^n$ , т.е.  $L$  является линейным подпространством, то утверждение теоремы верно, поскольку оба множества  $P_2$  и  $P_\infty$  будут состоять из одного нулевого вектора. Далее считаем, что  $0 \neq L$ , т.е. у вектора  $x$  носитель  $J(x)$  не пуст. Положим

$$(30) d_j = \frac{1}{|x_j|}, j \in J(x),$$

и  $d_j$  – любое положительное число для  $j \in J_0(x)$ .

При указанном  $d$ :

$$(31) \quad d_j x_j = -1, \quad j \in J_-(x),$$

$$(32) \quad d_j x_j = 1, \quad j \in J_+(x),$$

$$(33) \quad d_j x_j = 0, \quad j \in J_0(x).$$

Предположим, что  $x \neq x(\rho_d^\infty)$ . Следовательно, при некотором  $y \in L$

$$(34) \quad d_j |y_j| < 1, \quad j \in J(x).$$

Пусть  $s = y - x$ . Для этого вектора из  $S$  в силу (31), (32) и (34)

$$(35) \quad s_j > 0, \quad j \in J_-(x),$$

$$(36) \quad s_j < 0, \quad j \in J_+(x).$$

Следовательно,

$$(37) \quad \sum_{j \in J(x)} h_j x_j s_j < 0.$$

Поскольку

$$(38) \quad \sum_{j \in J_0(x)} h_j x_j s_j = 0,$$

то (37) означает невыполнение для данного вектора  $s$  равенства (27). По лемме 2 это противоречит исходному условию  $x = x(\rho_h^2)$ . Теорема доказана.

## 5. Заключение

Из (14), теоремы (1) и теоремы (2) следует

$$(39) \quad P_2 \subseteq P_\infty \subseteq Q = \text{cl} P_2.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что

$$(40) \quad \text{cl} P_\infty = Q.$$

Множество чебышевских проекций находится в ограниченной области  $Q$ . Причем любые решения из  $Q$  можно получить с любой требуемой точностью как чебышевскую проекцию начала координат на линейное многообразие за счет выбора весовых коэффициентов в чебышевской норме.



Соотношение (39) означает, что любую евклидову проекцию начала координат на линейное многообразие можно представлять за счет выбора весовых коэффициентов в виде чебышевской проекции начала координат на линейное многообразие. При этом, согласно (14), (40), любую чебышевскую проекцию начала координат на линейное многообразие можно получать с любой требуемой точностью в виде евклидовой проекции начала координат на линейное многообразие за счет выбора весовых коэффициентов.

Важным результатом данной статьи является обоснование алгоритма получения однозначной во всех случаях чебышевской проекции начала координат на линейное многообразие.

### Литература

1. ГАУСС К.Ф. *Избранные геодезические сочинения*. – М.: Геодезиздат, 1957. – 144 с.
2. ГОЛИКОВ А.И., ЕВТУШЕНКО Ю.Г. *Двойственный подход к решению систем линейных равенств и неравенств // Труды XII Байкальской международной конференции «Методы оптимизации и их приложения»*, Иркутск, 2001. – С. 91–99.
3. ГОЛИКОВ А.И., ЕВТУШЕНКО Ю.Г. *Новый метод решения систем линейных равенств и неравенств // Доклады РАН*. – 2001. – Т. 381, №4. – С. 444–447.
4. ДИКИН И.И., ЗОРКАЛЬЦЕВ В.И. *Итеративное решение задач математического программирования (алгоритмы метода внутренних точек)*. – Новосибирск: Наука, 1980. – 220 с.
5. ЕРЕМИН И.И. *Теория линейной оптимизации*. – Екатеринбург: Екатеринбург, 1999. – 312 с.
6. ЗОРКАЛЬЦЕВ В.И. *Метод наименьших квадратов: геометрические свойства, альтернативные подходы, приложения*. – Новосибирск: Наука, 1995. – 220 с.

7. ЗОРКАЛЬЦЕВ В.И. *Октаэдрические и евклидовы проекции точки на линейное многообразие* // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18, №3. – С. 106–118.
8. ЗОРКАЛЬЦЕВ В.И. *Проекция точки на полиэдр* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – Т. 53, №1. – С. 4–19.
9. ЗОРКАЛЬЦЕВ В.И., БАТОНОВА И.В., БЕДЕНКОВ А.Р., САДОВ С.Л. *Согласование частных прогнозов в балансовых моделях*. – Сыктывкар: Коми НЦ УрО АН СССР, 1990.
10. МУДРОВ В.И., КУШКО В.Л. *Методы обработки измерений (квазиравдоподобные оценки)*. – М.: Сов. радио, 1976. – 192 с.
11. МУДРОВ В.И., КУШКО В.Л. *Методы обработки измерений: квазиподобные оценки*. – М.: Наука, 1983. – 304 с.
12. РОКАФЕЛЛАР Р. *Выпуклый анализ*. М.: МИР, 1973. – 470 с.
13. СТЕЦЮК П.И., КОЛЕСНИК Ю.С. *К вопросу выбора метода аппроксимации результатов измерения* // Интеллектуальные информационно-аналитические системы и комплексы. Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2000. – С. 62–67.
14. СТЕЦЮК П.И., КОЛЕСНИК Ю.С., БЕРЕЗОВСКИЙ О.А. *Об одном методе нахождения  $L_p$ -решения системы линейных уравнений* // Теория оптимальных решений . – 2003. – №2. – С. 83–90.
15. ФРОЛОВ В.Н. *Оптимизация плановых программ при слабо согласованных ограничениях*. – М.: Наука, 1986. – 164 с.
16. ЧЕРКАССОВСКИЙ Б.В. *Задачи балансировки матриц* // Методы математического программирования и программное обеспечение. – Свердловск: УрО АН СССР, 1984. – С. 2016–217.

## CHEBYSHEV AND EUCLIDEAN PROJECTIONS OF POINT ON LINEAR MANIFOLD

**Elena Gubiy**, Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, senior engineer (egubiy@gmail.com).

**Valeriy Zorkaltsev**, Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, Doctor of Science, professor (zork@isem.irk.ru).

**Sergey Perzhabinsky**, Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, Candidate of Science (zork@isem.irk.ru).

*Abstract: Results of research of properties and interrelations of Chebyshev and Euclidean projections of the origin on linear manifold are considered in the article. Many problems of applied mathematics can be presented in the such view. They are problems of linear approximations, problems of search solutions of balance models closed to the given infeasible solutions, search of pseudosolutions of the models with inconsistent conditions. Euclidean projections are corresponded to application of the least square method. Chebyshev projections are corresponded to minimization of a maximal deviation. We developed and theoretical justified algorithm of searching of Chebyshev projections. The algorithm gives single-valued result and allows to dispense without the difficult verified and sometimes violated Haar condition. The algorithm is based on using of lexicographic optimization. The relative interior point of set of optimal solutions is found on each stage of lexicographic optimization. The property of producing of relative interior points is the main property of algorithms of interior point method. The sets of Chebyshev and Euclidean projections of the origin on linear manifold are formed by way of varying of positive coefficients corresponding to components of vectors in Chebyshev and Euclidean norms. We justified that closure of these sets are equal with the set of vectors of the linear manifold with Pareto-efficient absolute meanings of the components. Consequently, any Chebyshev and Euclidean projection can be get with any required accuracy through choosing the weight coefficients. It was also proved any Euclidean projection with any set of positive weight coefficients in Euclidian norm can be get for the account of choosing the weight coefficients in the form of Chebyshev projection.*

Keywords: weight coefficients, interior points, linear manifold, least square method, Chebyshev projection.

УДК 519.6

ББК 22.19

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким.*

*Поступила в редакцию 28.02.2019.*

*Опубликована 31.07.2019.*

## ОДНА СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ<sup>1</sup>

Соболев В. Н.<sup>2</sup>

(Москва)

*Рассматривается однолинейная система массового обслуживания с групповым поступлением требований, в которой моменты поступления групп требований образуют пуассоновский поток, длительности обслуживания имеют показательное распределение, число заявок в группе ограничено, а число мест для ожидания не ограничено. В приходящей группе может быть только одно или два требования. Для данной системы массового обслуживания найдено алгебраическое представление для стационарных вероятностей числа заявок в системе. Данное распределение вероятностей выписывается через многочлены, подобные многочленам Фибоначчи. Частным случаем возникающего распределения является геометрическое распределение. Связь рассматриваемых многочленов с числами Фибоначчи позволяет при определённых условиях на параметры исследуемой системы представить распределение, выписанное через обобщённые многочлены, в виде распределения, содержащего числа Фибоначчи. С помощью формулы Бине для данных многочленов показывается, что в некоторых случаях найденное распределение является асимптотически геометрическим. При этом погрешность убывает экспоненциально. Опираясь на распределение вероятностей, содержащее числа Фибоначчи, в работе представлен элементарный вероятностный вывод производящей функции для чисел Фибоначчи. Доказательство одного комбинаторного тождества позволяет получить представление чисел Фибоначчи через двойную сумму биномиальных коэффициентов, а также показывает второй способ нахождения искомым вероятностей. Из данного тождества путем изменения порядка суммирования для чисел Фибоначчи получаются либо представление Каталана, либо формула Лукаса.*

Ключевые слова: система массового обслуживания, групповое поступление, стационарное распределение, производящая функция вероятностей, числа Фибоначчи, биномиальные коэффициенты, суммы биномиальных коэффициентов, последовательность Фибоначчи, обобщенные многочлены Фибоначчи, обобщённые числа Фибоначчи, формула Бине, производящая функция, производящая функция чисел Фибоначчи, геометрическое распределение.

---

<sup>1</sup> Автор пользуется случаем и благодарит В.В. Козлова за постоянное внимание к его работе, плодотворное обсуждение и редакционные замечания.

<sup>2</sup> Виталий Николаевич Соболев, к.ф.-м.н., свободный исследователь (sobolev\_vn@mail.ru).

## 1. Введение

Данная работа тесно связана со статьёй [5] и в некотором смысле является её продолжением.

Рассмотрим систему массового обслуживания  $M_\lambda^2 | M_\mu | 1 | \infty$ . В данной системе моменты поступления требований  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$  образуют пуассоновский поток с интенсивностью  $\lambda$ . В каждый момент  $t_n$  поступает группа из  $\nu_n$  требований, причем случайные величины  $\nu_n$  независимы, одинаково распределены и принимают значения 1 или 2 с вероятностями  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Среднее число заявок в группе  $\nu$ . В системе имеется один обслуживающий прибор, время обслуживания которого распределено по показательному закону с параметром  $\mu$ . Число мест для ожидания неограниченно.

Пусть  $\xi(t)$  – число требований, находящихся в системе  $M_\lambda^2 | M_\mu | 1 | \infty$  в момент времени  $t$ . В [6, с. 171–175] для более широкого класса систем вида  $GI^\nu | M_\mu | 1 | \infty$  была найдена производящая функция стационарного распределения процесса  $\xi(t)$ :

$$P(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} Mz^{\xi(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k.$$

В данной работе в рамках системы  $M_\lambda^2 | M_\mu | 1 | \infty$  найдено (пункт 3.1.) алгебраическое представление для стационарных вероятностей процесса  $\xi(t)$ . Так, для искомых вероятностей  $p_k$  доказывается их представление

$$p_k = (1 - \rho_0 \nu) \rho_0^k S_k \left( \frac{\alpha_2}{\rho_0} \right)$$

через многочлены [3, с. 294]

$$S_k(z) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_{k-j}^j z^j,$$

где  $C_{k-j}^j$  – биномиальные коэффициенты и  $\rho_0 = \frac{\lambda}{\mu}$ .

Далее показывается, что геометрическое распределение является частным случаем данного распределения.

В пункте 3.2. будет доказано, что при условии

$$\alpha_2 = \rho_0 < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

распределение искомым вероятностей выражается через числа Фибоначчи:

$$p_k = (1 - \rho_0\nu)\rho_0^k u_{k+1},$$

где  $u_{k+1} = S_k(1)$  – такое обозначение чисел Фибоначчи, что  $u_0 = 0, u_1 = u_2 = 1$ .

Представление чисел Фибоначчи [3, с. 365]

$$u_k = \left\lfloor \frac{\phi^k}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \quad \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

позволяет записать вероятности  $p_k$  в следующем виде:

$$p_k = (1 - \rho_0\nu)\rho_0^k \left\lfloor \frac{\phi^{k+1}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

В пункте 3.3. показывается, что данные вероятности  $p_k$  близки к геометрическому распределению:

$$p_k \approx \left( \frac{1 - \rho_0\nu}{\sqrt{5}} \phi \right) (\rho_0\phi)^k.$$

Далее в этом же пункте доказывается, что и в общем случае при некоторых условиях на  $\alpha_2$  и  $\rho_0$  рассматриваемое распределение приближается геометрическим распределением. При этом погрешность с ростом  $k$  убывает экспоненциально.

В пункте 4.3. показано, что выражение вероятностей через числа Фибоначчи приводит к простому вероятностному выводу производящей функции чисел Фибоначчи.

В работе (см. пункты 4.1. и 4.2.) предлагается простое доказательство следующего представления для чисел Фибоначчи:

$$u_{k+1} = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \sum_{l=j}^{\lfloor k/2 \rfloor} 2^{2j-k} C_{k+1}^{2l+1} C_l^j,$$

из которого при разных порядках суммирования получаются либо представление Каталана (Eugène Charles Catalan, 1857) [15, с. 68]

$$u_{k+1} = 2^{-k} \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} 5^j C_{k+1}^{2j+1},$$

либо формула Лукаса (Édouard Anatole Lucas, 1876) [11, с. 208]

$$u_{k+1} = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_{k-j}^j,$$

где  $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ .

## 2. Предварительные сведения и обозначения

### 2.1. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

По определению системы  $M_\lambda^2 | M_\mu | 1 | \infty$  длины интервалов  $X_n = t_n - t_{n-1}$ , которые представляют собой время между приходами двух соседних групп требований, независимы и одинаково распределены с функцией распределения

$$F(x) = P\{X_n < t\} = 1 - e^{-\lambda x}.$$

При этом среднее время  $T$  между поступлениями групп заявок в систему равно

$$(1) \quad T := \int_0^\infty x dF(x) = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

В каждый момент времени  $t_n$  поступает группа из  $\nu_n$  требований, причем величины  $\nu_n$  независимы и одинаково распределены. Также величины  $\nu_n$  ограничены и их производящие функции равны

$$(2) \quad \alpha(z) = M z^{\nu_n} = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2,$$

где

$$\alpha_k = P\{\nu_n = k\}, \quad k = 1, 2.$$

С помощью производящей функции  $\alpha(z)$  легко находится среднее число заявок в группе:

$$\nu := M\nu_n = \alpha'(z)|_{z=1} = \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 + \alpha_2.$$

Пусть случайная величина  $Y_n$  обозначает время обслуживания (длину)  $n$ -й заявки. Величины  $Y_n$  независимы друг от друга и от величин  $X_n$ . По условию задачи величины  $Y_n$  имеют одинаковое распределение с функцией распределения

$$G(t) = 1 - e^{-\mu t}.$$

В этом случае среднее время обслуживания  $\tau$  любой заявки конечно и равно

$$\tau := MY_n = \int_0^{\infty} x dG(x) = \frac{1}{\mu}.$$

Определим нагрузку (загрузку) системы как  $\rho = \nu\rho_0$ , где  $\rho_0 = \lambda/\mu$ .

В статье [6, с. 171–175] (см. также [13, с. 97–108] и [5]) найдена производящая функция для стационарных вероятностей случайного процесса  $\xi(t)$  системы  $GI^{\nu}|M_{\mu}|1|_{\infty}$ . Так, в [6] доказана справедливость следующего утверждения.

**Теорема 1.** *Если в системе  $GI^{\nu}|M_{\mu}|1|_{\infty}$  выполнено условие  $\rho < 1$ , то стационарное распределение случайного процесса  $\xi(t)$  существует и задается производящей функцией*

$$(3) \quad P(z) = \frac{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)\dots(1 - \lambda_m)}{(1 - \lambda_1 z)(1 - \lambda_2 z)\dots(1 - \lambda_m z)},$$

где числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  являются корнями уравнения (считая каждый корень столько раз, какова его кратность)

$$(4) \quad \alpha\left(\frac{1}{z}\right) \varphi(\mu - \mu z) = 1,$$

принадлежащими области  $|z| < 1$ . В уравнении (4) функция  $\varphi(z)$  есть преобразование Лапласа – Стильтьеса функции распределения  $F(x)$

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-xz} dF(x), \quad z \geq 0.$$



## 2.2. ОБ ОБОБЩЁННЫХ МНОГОЧЛЕНАХ ФИБОНАЧЧИ

Поскольку алгебраическое представление искомым стационарных вероятностей  $p_k$  в системе  $M_\lambda^2 | M_\mu | 1 | \infty$  записывается с помощью многочленов [3, с. 294]

$$(5) \quad S_k(z) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_{k-j}^j z^j,$$

то уделим им некоторое внимание.

Данные многочлены удовлетворяют [3, с. 295] следующему рекуррентному соотношению:

$$S_{k+2}(z) = S_{k+1}(z) + zS_k(z)$$

при начальном условии  $S_0(z) = S_1(z) = 1$ . Эти рекуррентные уравнения можно соотнести с уравнениями для многочленов Фибоначчи [10, с. 218]

$$F_{k+2}(z) = zF_{k+1}(z) + F_k(z),$$

где  $F_0(z) = 0$ ,  $F_1(z) = 1$ . При подстановке  $z = 1$  в многочлены  $S_k(z)$  и  $F_k(z)$  в обоих случаях получается линейное однородное рекуррентное уравнение для последовательности Фибоначчи.

Часто данные многочлены рассматриваются как частные случаи обобщённых многочленов Фибоначчи от двух переменных, которые удовлетворяют возвратному уравнению

$$F_{k+2}(z, t) = tF_{k+1}(z, t) + zF_k(z, t)$$

с начальными условиями  $F_0(z, t) = 0$ ,  $F_1(z, t) = 1$ .

С другой стороны отметим, что многочлены  $S_k(z)$  при начальных значениях  $S_0(z) = a$ ,  $S_1(z) = b$  описаны Сан (Yidong Sun) в работе [14], при этом автор называет такие многочлены обобщёнными многочленами Фибоначчи.

В работах [9, 10] изучается последовательность многочленов  $W_k(z)$ , задаваемых рекуррентными соотношениями

$$W_{k+2}(z) = p(z)W_{k+1}(z) + q(z)W_k(z).$$

Там же указано, что полиномы Фибоначчи  $F_k(z)$  принадлежат к данному классу. Полиномы  $S_k(z)$  очевидно подходят под описание данного класса, но в работе не указаны, хотя и близки в алгебраическом плане (но не в плане последовательностей чисел, ими порождаемых) к многочленам Якобсталя (см. [10, с. 218] и [7, с. 113]) задаваемых условием  $p(z) = 1$ ,  $q(z) = 2z$  при начальных условиях  $W_0(z) = 0$ ,  $W_1(z) = 1$ .

Для многочленов Фибоначчи  $F_k(z)$  название устоялось, в то время как для многочленов  $S_k(z)$  нет: в разных работах они называются по-разному или вовсе никак не называются.

В дальнейшем для многочленов  $S_k(z)$  понадобится формула Бине (Jacques Philippe Marie Binet) [3, с. 368], которую оформим в виде следующей леммы.

**Лемма 1.** Для многочленов  $S_k(z)$  справедливо представление Бине:

$$(6) \quad S_k(z) = \frac{\phi_1^{k+1} - \phi_2^{k+1}}{\phi_1 - \phi_2},$$

где

$$(7) \quad \phi_1 = \phi_1(z) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4z}}{2}, \quad \phi_2 = \phi_2(z) = \frac{1 - \sqrt{1 + 4z}}{2},$$

– корни уравнения  $t^2 - t - z = 0$  (см. [8]).

**Доказательство.** При  $k \geq 0$  в [3, с. 257] доказано равенство

$$(8) \quad S_k(z) = \frac{1}{\sqrt{1+4z}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{1+4z}}{2} \right)^{k+1} - \left( \frac{1-\sqrt{1+4z}}{2} \right)^{k+1} \right).$$

В силу определения функций  $\phi_1$  и  $\phi_2$ , а также справедливости равенства  $\phi_1 - \phi_2 = \sqrt{1 + 4z}$  видно, что (8) совпадает с (6). На этом лемма доказана полностью.

### 3. Стационарные вероятности системы $M_\lambda^2 | M_\mu | 1 | \infty$

#### 3.1. ОБЩАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СИСТЕМЫ $M_\lambda^2 | M_\mu | 1 | \infty$

В системе  $M_\lambda^2 | M_\mu | 1 | \infty$  согласно формуле (3) из теоремы 1 производящая функция стационарного распределения процесса  $\xi(t)$  может быть записана в виде

$$P(z) = \frac{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)}{(1 - \lambda_1 z)(1 - \lambda_2 z)},$$

где числа  $\lambda_1, \lambda_2$  являются корнями уравнения (4) при  $|z| < 1$ , считая каждый корень столько раз, какова его кратность.

Оказывается, что для системы  $M_\lambda^2 |M_\mu| 1 | \infty$  корни  $\lambda_1, \lambda_2$  легко выражаются через  $\alpha_2$  и  $\rho_0 = \lambda/\mu$ .

**Лемма 2.** У системы  $M_\lambda^2 |M_\mu| 1 | \infty$  при  $\rho < 1$  корни  $\lambda_1, \lambda_2$  уравнения (4) могут быть найдены по формулам

$$(9) \quad \lambda_i = \frac{\rho_0}{2} \phi_i \left( \frac{\alpha_2}{\rho_0} \right), \quad i = 1, 2,$$

где функции  $\phi_1(z), \phi_2(z)$  определяются равенством (7).

**Доказательство.** Как хорошо известно [1, с. 94], в случае  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  преобразование Лапласа – Стильтьеса функции распределения  $F(x)$  принимает следующий вид:

$$\varphi(z) = \lambda \int_0^\infty e^{-(z+\lambda)x} dx = \frac{\lambda}{z + \lambda}.$$

Откуда

$$\varphi(\mu - \mu z) = \frac{\lambda}{\mu - \mu z + \lambda} = \frac{\rho_0}{1 + \rho_0 - z}.$$

Поэтому уравнение (4) для корней  $\lambda_1, \lambda_2$  системы  $M_\lambda^2 |M_\mu| 1 | \infty$  принимает вид

$$\left( \alpha_1 \frac{1}{z} + \alpha_2 \frac{1}{z^2} \right) \frac{\rho_0}{1 - z + \rho_0} = 1,$$

а после элементарных преобразований

$$\rho_0(z(1 - z) + \alpha_2(1 - z)) = z^2(1 - z).$$

Сокращение в последнем уравнении на множитель  $(1 - z)$  приводит к квадратному уравнению

$$z^2 - \rho_0 z - \rho_0 \alpha_2 = 0$$

с корнями

$$\lambda_{1,2} = \frac{\rho_0}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\alpha_2}{\rho_0}} \right) = \frac{\rho_0}{2} \phi_{1,2} \left( \frac{\alpha_2}{\rho_0} \right).$$

Таким образом, лемма доказана.

**Замечание 1.** Из (9) видно, что корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  совпадают только в случае  $\alpha_2 = 0$ . При этом рассматриваемая система  $M_\lambda^2 | M_\mu | 1 | \infty$  превращается в обычную систему  $M_\lambda | M_\mu | 1 | \infty$ .

Для формулировки следующей леммы отметим, что при  $\alpha_2 \neq 0$  корни исследуемого уравнения различны и противоположны по знаку, а также что отрицательный корень по модулю меньше положительного, т.е.  $|\lambda_2| < \lambda_1$ .

**Лемма 3.** У системы  $M_\lambda^2 | M_\mu | 1 | \infty$  при  $\rho < 1$  стационарные вероятности случайного процесса  $\xi(t)$  могут быть найдены по формулам

$$(10) \quad p_k = (1 - \rho_0 \nu) \frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  определяются равенством (9) из леммы 2.

**Доказательство.** Для функции  $P(z)$  справедливы следующие алгебраические преобразования

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[ \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1 z} - \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_2 z} \right] = \\ &= \frac{1 - \rho_0 \nu}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[ \lambda_1 \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_1 z)^k - \lambda_2 \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_2 z)^k \right] = \\ &= (1 - \rho_0 \nu) \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) z^k. \end{aligned}$$

Сравнивая последнее представление  $P(z)$  с его определением

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \text{ получаем (10). Лемма доказана.}$$

**Замечание 2.** Из формулы (10) видно, что распределение для вероятностей  $p_k$  задаётся с точностью до нормирующего множителя формулой Бине.

Последние две леммы позволяют доказать следующую теорему.

**Теорема 2.** У системы  $M_\lambda^2|M_\mu|1|_\infty$  при  $\rho < 1$  существует стационарное распределение процесса  $\xi(t)$ . При этом стационарные вероятности могут быть найдены по формулам

$$(11) \quad p_k = (1 - \rho_0\nu)\rho_0^k S_k\left(\frac{\alpha_2}{\rho_0}\right),$$

где  $S_k(z)$  – многочлены определяемые равенством (5).

**Доказательство.** Как нетрудно заметить, леммы 3 и 2 с учётом представления Бине (6) позволяют написать следующую цепочку равенств

$$\begin{aligned} p_k &= (1 - \rho_0\nu)\frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} = (1 - \rho_0\nu)\rho_0^k \frac{\phi_1^{k+1} - \phi_2^{k+1}}{\phi_1 - \phi_2} = \\ &= (1 - \rho_0\nu)\rho_0^k S_k\left(\frac{\alpha_2}{\rho_0}\right), \end{aligned}$$

которая и завершает доказательство теоремы.

Хорошо известно [1, с. 113], что стационарные вероятности системы  $M_\lambda|M_\mu|1|_\infty$  имеют геометрическое распределение

$$(12) \quad p_k = (1 - \rho_0)\rho_0^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Поскольку для системы  $M_\lambda|M_\mu|1|_\infty$  среднее число заявок в группе равно единице, т.е.  $\nu = 1$ , а  $\alpha_2 = 0$ , то формула (11) в этом случае в силу равенства  $S_k\left(\frac{\alpha_2}{\rho_0}\right) = S_k(0) = 1$  согласуются с представлением (12).

В заключении данного пункта отметим, что более подробно формулу (11) можно представить в виде

$$p_k = (1 - \rho_0\nu)\rho_0^k \left( 1 + \sum_{j=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_{k-j}^j \left(\frac{\alpha_2}{\rho_0}\right)^j \right).$$

### 3.2. ОДИН ЧАСТНЫЙ ВИД СИСТЕМЫ $M_\lambda^2|M_\mu|1|_\infty$

В силу представления  $u_{k+1} = S_k(1)$  чисел Фибоначчи через многочлены  $S_k(z)$  в единице частный вид формулы (11) оказывается также связанным с числами Фибоначчи. Очевидно, что для этого достаточно рассмотреть представление (11) при

$$\frac{\alpha_2}{\rho_0} = 1.$$

Для системы  $M_\lambda^2 | M_\mu | 1 | \infty$  из условия  $\rho < 1$  следует неравенство

$$0 \leq \frac{\alpha_2}{\rho_0} < \frac{1 - \rho_0}{\rho_0^2},$$

из которого с учётом неравенства  $0 < \rho_0 < 1$  следует, что величина  $z = \alpha_2 / \rho_0$  может принимать любые неотрицательные значения. В частности и единичное.

При этом ограничение  $0 < \rho_0 < 1$  также следует из неравенства  $\rho < 1$ . Действительно, условие на загрузку системы  $\rho < 1$  с учётом представления  $\nu = 1 + \alpha_2$  может быть записано в виде  $(1 + \alpha_2)\rho_0 < 1$ . Последнее неравенство показывает, что  $\rho_0$  не может превышать 1 при  $0 \leq \alpha_2 \leq 1$ .

Остаётся вопрос при каких значениях  $\alpha_2$  (или, что то же самое,  $\rho_0$ ) возможно существование стационарных вероятностей  $p_k$ . Как нетрудно понять, ограничения могут возникнуть только из условия на нагрузку системы. Следующая лемма даёт ответ на поставленный вопрос.

**Лемма 4.** При  $\alpha_2 = \rho_0$  условие на нагрузку  $\rho < 1$  принимает вид  $0 < \rho_0 < \left| \hat{\phi} \right|$ , где  $\hat{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .

**Доказательство.** Чтобы вероятности (11) существовали, должно выполняться условие на загрузку системы  $\rho < 1$ . К тому же при  $\rho_0 = \alpha_2$  условие  $\rho < 1$  может быть представлено в виде неравенства

$$\alpha_2^2 + \alpha_2 - 1 < 0.$$

Откуда для  $0 \leq \alpha_2 \leq 1$  при  $\rho_0 = \alpha_2$  условие на нагрузку системы принимает вид

$$0 < \alpha_2 = \rho_0 < \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < 1,$$

иначе данное равенство можно записать в виде  $\rho_0 < |\lambda_2|$  или  $\rho_0 < \left| \hat{\phi} \right|$ . Следовательно, лемма доказана.

С учётом ограничений из леммы 4 при условии  $\alpha_2 = \rho_0$  из (11) в силу равенства  $S_k(1) = u_{k+1}$  получаем представление

для стационарных вероятностей системы  $M_\lambda^2|M_\mu|1|_\infty$  через числа Фибоначчи. Оформи́м данный результат в виде следующей теоремы.

**Теорема 3.** Для стационарных вероятностей  $p_k$  системы массового обслуживания  $M_\lambda^2|M_\mu|1|_\infty$  при условии  $\alpha_2 = \rho_0$  и  $\rho_0 < \left| \hat{\phi} \right|$  справедливо представление через числа Фибоначчи

$$(13) \quad p_k = (1 - \rho_0\nu)\rho_0^k u_{k+1},$$

где  $u_k$  – числа Фибоначчи, а  $\hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ .

**Доказательство.** Утверждение теоремы следует из леммы 4 и того, что при  $\alpha_2 = \rho_0$  верно равенство  $S_k\left(\frac{\alpha_2}{\rho_0}\right) = S_k(1) = u_{k+1}$  и его следствие

$$p_k = (1 - \rho_0\nu)\rho_0^k S_k\left(\frac{\alpha_2}{\rho_0}\right) = (1 - \rho_0\nu)\rho_0^k u_{k+1}.$$

Теорема доказана.

### 3.3. О ПРИБЛИЖЕНИИ К ГЕОМЕТРИЧЕСКОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ

Полученное выше (11) распределение стационарных вероятностей  $p_k$  при определённых условиях мало отличаются от геометрического распределения. То есть в этом случае искомые стационарные вероятности системы  $M_\lambda^2|M_\mu|1|_\infty$  асимптотически имеют такой же вид распределения, как и соответствующие им вероятности системы  $M_\lambda|M_\mu|1|_\infty$ .

Рассмотрим данный вопрос подробнее. Начнём с частного случая  $\alpha_2 = \rho_0$ . Нам понадобится одно следствие из теоремы 3.

**Следствие 1.** Для стационарных вероятностей системы  $M_\lambda^2|M_\mu|1|_\infty$  при условии  $\alpha_2 = \rho_0$  и  $\rho_0 < \left| \hat{\phi} \right|$  справедливо представление

$$(14) \quad p_k = (1 - \rho_0\nu)\rho_0^k \frac{\phi^{k+1} - \hat{\phi}^{k+1}}{\phi - \hat{\phi}},$$

где

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \hat{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

**Доказательство.** Доказательство данного следствия получается из сопоставления представления (13) и формулы Бине для чисел Фибоначчи [2, с. 24]

$$u_k = \frac{\phi^k - \hat{\phi}^k}{\phi - \hat{\phi}}.$$

Доказательство следствия закончено.

**Теорема 4.** В системе  $M_\lambda^2 | M_\mu | 1 | \infty$  при выполнении условий  $\alpha_2 = \rho_0$  и  $\rho_0 < \left| \hat{\phi} \right|$  вероятности  $p_k$  имеют асимптотически геометрическое распределение:

$$p_k \approx \frac{1 - \rho_0 \nu}{\sqrt{5}} \phi (\rho_0 \phi)^k.$$

**Доказательство.** Представление (14) для вероятностей  $p_k$  состоит из произведения «геометрического распределения»  $(1 - \rho_0 \nu) \rho_0^k$  и «формулы Бине»  $\frac{\phi^{k+1} - \hat{\phi}^{k+1}}{\phi - \hat{\phi}}$ , в которой  $\hat{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  по модулю строго меньше  $\frac{5}{8}$ . Поэтому величина  $\hat{\phi}^{k+1} = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}$  экспоненциально быстро стремится к нулю с ростом  $k$ , и, как следствие, при больших  $k$  число Фибоначчи  $u_k$  близко к  $\phi^k / \sqrt{5}$ , т.е.

$$\frac{\phi^{k+1} - \hat{\phi}^{k+1}}{\phi - \hat{\phi}} \approx \frac{\phi^{k+1}}{\sqrt{5}}.$$

Очевидно, что для разности двух последних величин справедлива оценка

$$\frac{\phi^{k+1}}{\sqrt{5}} - \frac{\phi^{k+1} - \hat{\phi}^{k+1}}{\phi - \hat{\phi}} \leq \frac{\hat{\phi}^{k+1}}{\sqrt{5}} < \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{5}{8}\right)^{k+1}.$$

Как показано в лемме 4, при  $\alpha_2 = \rho_0$  условие существования стационарных вероятностей  $\rho < 1$  принимает вид  $0 < \rho < \left| \hat{\phi} \right|$ . Данным замечанием заканчивается доказательство теоремы.

В общем случае также существует аналогичное свойство. Для его доказательства нам понадобится представление для вероятностей  $p_k$ , которое возникло в ходе доказательства теоремы 2. Укажем его явно в следующем следствии теоремы 2.



**Следствие 2.** Для стационарных вероятностей системы  $M_\lambda^2 | M_\mu | 1 | \infty$  при условии  $\rho < 1$  справедливо представление

$$(15) \quad p_k = (1 - \rho_0 \nu) \rho_0^k \frac{\phi_1^{k+1} - \phi_2^{k+1}}{\phi_1 - \phi_2},$$

где

$$\phi_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\alpha_2}{\rho_0}}}{2}, \quad \phi_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4 \frac{\alpha_2}{\rho_0}}}{2}.$$

Данное следствие будет использовано в следующей теореме.

**Теорема 5.** В системе  $M_\lambda^2 | M_\mu | 1 | \infty$  при выполнении условий  $\alpha_2 < \min(2\rho_0; \frac{1}{\rho_0} - \rho_0)$  и  $0 < \rho_0 < 1$  вероятности  $p_k$  имеют асимптотически геометрическое распределение:

$$p_k \approx \frac{1 - \rho_0 \nu}{1 - \phi_2 / \phi_1} (\rho_0 \phi_1)^k.$$

**Доказательство.** Поскольку в общем случае справедлива формула (15)

$$p_k = (1 - \rho_0 \nu) \rho_0^k \frac{\phi_1^{k+1} - \phi_2^{k+1}}{\phi_1 - \phi_2},$$

которая есть обобщение формулы (14), то доказательство будет повторять доказательство предыдущей теоремы с той разницей, что вместо автоматически выполняющегося условия  $|\hat{\phi}| < 1$  появляется ограничение  $|\phi_2| < 1$ . Легко проверить, что последнее неравенство выполняется, если  $\alpha_2 < 2\rho_0$ . Действительно, неравенство  $|\phi_2| < 1$  можно записать в виде

$$\frac{\sqrt{1 + 4 \frac{\alpha_2}{\rho_0}} - 1}{2} < 1,$$

из которого с учётом неотрицательности  $\alpha_2$  и положительности  $\rho_0$  элементарными алгебраическими преобразованиями привести к виду  $\alpha_2 < 2\rho_0$ .

С другой стороны, условие существования стационарных вероятностей  $(1 + \alpha_2)\rho_0 < 1$  можно переписать в виде  $\alpha_2 < \frac{1}{\rho_0} - \rho_0$ .

Объединяя оба условия на  $\alpha_2$  с учётом неравенства  $0 < \rho_0 < 1$ , получаем нужное ограничение. На этом доказательство теоремы завершено.

#### 4. Биномиальные равенства и числа Фибоначчи

##### 4.1. СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И ОДНО БИНОМИАЛЬНОЕ РАВЕНСТВО

Теорему 2 можно было бы доказать не используя свойств обобщённого биномиального ряда [3, с. 256] в виде формулы Бине. Но при этом возникает необходимость в доказательстве биномиального равенства (16). Далее проведём доказательство утверждения теоремы 2 с помощью простых алгебраических преобразований до места, в котором будет необходимо использовать биномиальное равенство (16). Применение равенства (если считать его доказанным [12, с. 87]) является последним шагом по превращению доказательства теоремы 6 в доказательство теоремы 2. Мы же, зная ответ и сравнивая его с последней формулой из доказательства теоремы 6, достаточно просто докажем справедливость самого равенства (16).

**Теорема 6.** Для  $0 \leq j \leq \lfloor k/2 \rfloor$  верно равенство

$$(16) \quad \sum_{l=j}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_{k+1}^{2l+1} C_l^j = 2^{k-2j} C_{k-j}^j.$$

**Доказательство.** Для удобства определим число

$$b = \sqrt{1 + \frac{4\alpha_2}{\rho_0}}.$$

Тогда корни (9) могут быть выписаны через  $b$ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{\rho_0}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\alpha_2}{\rho_0}} \right) = \frac{\rho_0}{2} (1 \pm b),$$

а производящая функция  $P(z)$  – в виде

$$P(z) = (1 - \rho_0\nu) \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) z^k =$$

$$= \frac{1 - \rho_0\nu}{\rho_0 b} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho_0}{2}\right)^{k+1} ((1+b)^{k+1} - (1-b)^{k+1}) z^k.$$

Из последнего равенства следует справедливость представления

$$p_k = \frac{1 - \rho_0\nu}{\rho_0 b} \left(\frac{\rho_0}{2}\right)^{k+1} \left[ (1+b)^{k+1} - (1-b)^{k+1} \right],$$

которое допускает следующие преобразования

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{1 - \rho_0\nu}{\rho_0 b} \left(\frac{\rho_0}{2}\right)^{k+1} \left[ \sum_{l=0}^{k+1} C_{k+1}^l b^l - \sum_{l=0}^{k+1} C_{k+1}^l (-b)^l \right] = \\ &= \frac{1 - \rho_0\nu}{\rho_0 b} \left(\frac{\rho_0}{2}\right)^{k+1} \left[ \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} 2C_{k+1}^{2l+1} b^{2l+1} \right] = \\ &= (1 - \rho_0\nu) \left(\frac{\rho_0}{2}\right)^k \left[ \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_{k+1}^{2l+1} b^{2l} \right]. \end{aligned}$$

Подставляя в последнее равенство значение  $b = \sqrt{1 + \frac{4\alpha_2}{\rho_0}}$  и делая элементарные алгебраические операции, находим явный вид вероятностей искомого распределения

$$\begin{aligned} p_k &= (1 - \rho_0\nu) \left(\frac{\rho_0}{2}\right)^k \left[ \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_{k+1}^{2l+1} \left(1 + \frac{4\alpha_2}{\rho_0}\right)^l \right] = \\ &= (1 - \rho_0\nu) \left(\frac{\rho_0}{2}\right)^k \left[ \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_{k+1}^{2l+1} \sum_{j=0}^l C_l^j \left(\frac{4\alpha_2}{\rho_0}\right)^j \right] = \\ &= (1 - \rho_0\nu) \left(\frac{\rho_0}{2}\right)^k \left[ \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \sum_{j=0}^l C_{k+1}^{2l+1} C_l^j \left(\frac{4\alpha_2}{\rho_0}\right)^j \right] = \\ &= (1 - \rho_0\nu) \rho_0^k \left[ \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \sum_{l=j}^{\lfloor k/2 \rfloor} 2^{2j-k} C_{k+1}^{2l+1} C_l^j \left(\frac{\alpha_2}{\rho_0}\right)^j \right]. \end{aligned}$$

Сравнивая правую часть последней формулы для  $p_k$  с представлением (11), убеждаемся в справедливости теоремы.

#### 4.2. ОДНО ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ

Из (16) для чисел Фибоначчи легко получить представление через двойную сумму

$$(17) \quad u_{k+1} = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} 2^{2j-k} \sum_{l=j}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_{k+1}^{2l+1} C_l^j.$$

Действительно,

$$u_{k+1} = S_k(1) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_{k-j}^j = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} 2^{2j-k} \sum_{l=j}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_{k+1}^{2l+1} C_l^j.$$

Из (17) после изменения порядка суммирования

$$u_{k+1} = 2^{-k} \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_{k+1}^{2l+1} \sum_{j=0}^l 4^j C_l^j$$

получается представление Каталана

$$u_{k+1} = 2^{-k} \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} 5^l C_{k+1}^{2l+1}.$$

Таким образом, из (17) получается представление Каталана и формула Лукаса.

#### 4.3. ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ

Связь чисел Фибоначчи с вероятностями позволяет вероятностным способом достаточно быстро получить формулу для производящей функции чисел Фибоначчи.

Поскольку  $p_k = (1 - \rho_0 \nu) u_{k+1} \rho_0^k$  суть вероятности, то их сумма равна единице, т.е. справедливо равенство

$$(1 - \rho_0 \nu) \sum_{k=0}^{\infty} u_{k+1} \rho_0^k = 1.$$

Последнее тождество с учётом равенств  $\nu = 1 + \alpha_2$ ,  $\rho_0 = \alpha_2$ ,  $u_0 = 0$  после замены  $x = \alpha_2$  легко приводится к виду

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = \frac{x}{(1 - x - x^2)}.$$

## 5. Заключение

В данной работе в рамках системы  $M_\lambda^2 | M_\mu | 1 | \infty$  найдено алгебраическое представление (11) для вероятностей стационарного процесса  $\xi(t)$ , из которого видно, что данные вероятности зависят от  $\alpha_2$  и при  $\alpha_2 = 0$  совпадают с соответствующими вероятностями системы  $M_\lambda | M_\mu | 1 | \infty$ . Отличие заключается в появлении членов вида  $\left(\frac{\alpha_2}{\rho_0}\right)^k$ , где  $\rho_0 = \frac{\lambda}{\mu}$ , а  $k \in \mathbb{N}$ . При этом коэффициенты перед данными слагаемыми являются натуральными числами.

Поскольку полученное распределение содержит обобщённые многочлены Фибоначчи, то в частном случае появляется распределение содержащие числа Фибоначчи.

### Литература

1. БОЧАРОВ П.П., ПЕЧИНКИН А.В. *Теория массового обслуживания*. – М.: РУДН, 1995. – 529 с.
2. ВОРОБЬЁВ Н.Н. *Числа Фибоначчи*. – М.: Наука, 1992. – 192 с.
3. ГРЭХЕМ Р., КНУТ Д., ПАТАШНИК О. *Конкретная математика. Основание информатики*. – М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2010. – 784 с.
4. ПРОСОЛОВ В.В. *Многочлены*. – М.: МЦНМО, 2001. – 336 с.
5. СОБОЛЕВ В.Н. *О законе стационарной очереди для одной системы массового обслуживания с групповым поступлением требований // Управление большими системами: Сборник трудов. Вып. 77*. – М.: ИПУ РАН, 2019. – С. 6–19.
6. СОЛОВЬЁВ А.Д., СОБОЛЕВ В.Н. *Одна система массового обслуживания с групповым поступлением требований // Аналитические и вычислительные методы в теории вероятностей и её приложениях (АВМТВ-2017): материалы Международной научной конференции. Россия, Москва, 23-27 октября 2017. / Под общ. ред. А. В. Лебедев]. – М.: Изд-во «РУДН», 2017. – 743 с.*

7. DJORDJEVIC G.B., MILOVANOVIC G.V. *Special classes of polynomials*. – Leskovac: University of Nis, 2014. – 219 p.
8. HORADAM A.F. *Basic Properties of Certain Generalized Sequence of Numbers* // The Fibonacci Quarterly – 1965. – Vol. 3, No. 3. – P. 161–176.
9. HORADAM A.F. , *Extension of a synthesis for a class of polynomial sequences* // The Fibonacci Quarterly – 1996. – Vol. 34, No. 1. – P. 68–74.
10. HORADAM A.F. *A Synthesis of Certain Polynomial Sequences* // In: Applications of Fibonacci Numbers / Eds.: Bergum G.E., Philippou A.N., Horadam A.F. – Dordrecht: Springer, 1996. – 540 p.
11. LUCAS E. *Theorie des Fonctions Numeriques Simplement Periodiques [Continued]* // American Journal of Mathematics – 1878. – Vol. 1, No. 3. – P. 197–240.
12. RIORDAN J. *Combinatorial Identities*. – New York: R.E. Krieger Pub. Co., 1979. – 256 p.
13. SOLOVIEV A.D., SOBOLEV V.N. *One Server Queue with Bulk Arrivals* // In: Analytical and Computational Methods in Probability Theory. ACMPT 2017. Lecture Notes in Computer Science. Vol 10684. / Eds.: Rykov V., Singpurwalla N., Zubkov A. – Cham: Springer, 2017. – 540 p.
14. SUN Y. , *Numerical triangles and several classical sequences* // The Fibonacci Quarterly. – 1966. – Vol. 43, No. 4. – P. 359–370.
15. VAJDA S. *Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section Theory and Applications*. – Chichester: Ellis Horwood limited Publishers, 1989. – 190 p.

## ONE QUEUEING SYSTEM AND FIBONACCI NUMBERS

**Vitaly Sobolev**, Moscow, Cand.Sc., free researcher  
(sobolev\_vn@mail.ru).

*Abstract: This paper deals with a queueing system with Poisson arrivals, exponential service times, single service channel and infinite number of waiting positions, customers are serviced in the order of their arrival. The requests arrives in groups and the number of requests in a group is one or two. For this queueing system be found in algebraic form the steady-state probabilities for the number of customers in the system. A probability mass function of this distribution can be defined by polynomials like polynomials Fibonacci. The geometric distribution is a special case of this distribution. Fibonacci numbers can be expressed in terms of the polynomials like polynomials Fibonacci. Consequently our distribution expressed in terms of this polynomials under certain conditions can be written in terms of Fibonacci numbers. Using the Binet formula is shown that in some cases the found distribution is asymptotically geometric distribution. In this paper it is shown that the Bernoulli numbers can be expressed as an elementary double sum of binomial coefficients. Changing the order in that double sum and summing one of them get a formula for Fibonacci numbers which Catalan developed or Lucas formula for Fibonacci numbers.*

Keywords: queueing system, batch arrivals, stationary distribution, probability generating functions, Fibonacci numbers, binomial coefficients, sums of binomial coefficients, Fibonacci sequence, Generalized Fibonacci polynomials, Binet's Fibonacci number formula, Generalized Fibonacci numbers, Binet form, generating function, generating function for a Fibonacci numbers, geometric distribution, Pisot number.

УДК 519.872

ББК 22.171

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Э.Ю. Калимулиной.*

*Поступила в редакцию 25.03.2019.*

*Дата опубликования 31.07.2019.*

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ В ПРОБЛЕМЕ КОРРЕКТНОСТИ СЕМЕЙСТВ ФУНКЦИЙ РИСКОВЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ ДЛЯ CC-VAR<sup>1</sup>

Агасандян Г. А.<sup>2</sup>

(Вычислительный центр им. А.А. Дородницына  
ФИЦ ИУ РАН)

*Работа продолжает исследования автора, связанные с установленными ранее условиями корректности семейств функций рискованных предпочтений (ф.р.п.), используемых в задачах оптимизации по континуальному критерию VaR (CC-VaR) для финансовых рынков. Эти условия применялись при решении проблемы корректности конкретных семейств, получаемых из надсемейства кусочно-линейных функций чисто аналитическими средствами. В работе предлагаются численные методы для проверки корректности семейств ф.р.п., полезные при возникновении затруднений в проведении аналитических исследований. Они основаны на дискретном алгоритме оптимизации по CC-VaR для сценарных рынков и решают проблемы корректности с достаточно высокой степенью приближения. Методы проверяются на прежнем надсемействе и применяются к надсемейству обобщенных окружностей. Результаты демонстрируют адекватность и универсальность методики.*

Ключевые слова: континуальный критерий VaR (CC-VaR), процедура Неймана – Пирсона, функции рискованных предпочтений (ф.р.п.), семейства и надсемейства ф.р.п., доходность, корректные семейства, волатильность.

### 1. Введение

В работе предлагаются вычислительные алгоритмы, проверяющие на корректность семейства функций рискованных предпочтений (ф.р.п.), используемые на финансовых рынках для задач оптимизации по континуальному критерию VaR (CC-VaR) [1, 2]. Содержание работы непосредственно продолжает исследования [3, 6], где было доказано необходимое и достаточное условие корректности семейства ф.р.п. и проведено аналитиче-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №17-01-00816).

<sup>2</sup> Геннадий Аршавирович Агасандян, д.ф.-м.н. (agasant17@yandex.ru).



ское исследование корректности определенных семейств функций, получаемых из надсемейства кусочно-линейных функций. Приводимые здесь вычислительные процедуры в состоянии решать те же проблемы с достаточной степенью приближения и предназначены для случаев, когда полного аналитического исследования провести не удастся.

Как и при изучении многих иных теоретических проблем с СС-VaR, здесь решается *задача СВ* [1, 2], в которой инвестиционная сумма  $S (> 0)$  не задается, но ищется (свободный от сингулярной компоненты) портфель, доставляющий  $\min S$  при условии  $P\{q \geq \phi(\varepsilon)\} \geq 1 - \varepsilon$  сразу для *всех*  $\varepsilon \in [0, 1]$ , где  $\phi(\varepsilon)$  – ф.р.п. инвестора. Алгоритм оптимизации основан на непрерывном применении процедуры Неймана – Пирсона [7].

Рассматриваются семейства ф.р.п.  $\{\phi(\varepsilon; \lambda), \lambda \in \Lambda\}$  по параметру  $\lambda$ , который не является параметром масштабирования, а отражает лишь степень толерантности инвестора к риску,  $\Lambda$  – множество вещественных чисел (как правило, принимается  $\Lambda = \mathfrak{R}_+$ ). Функции из семейств подчиняются ограничению  $\phi(0; \lambda) \equiv 0$  и нормируются условием  $\phi(1; \lambda) \equiv 1$ . На графике они целиком располагаются в квадрате  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ .

## 2. Основные формулы и дискретный алгоритм

Вкратце напомним основные определения, формулы, проблему задания семейств ф.р.п. при использовании инвестором СС-VaR и условия корректности семейств. Также приводится лаконичная запись дискретного алгоритма оптимизации.

Решение задачи с СС-VaR основывается на функции *относительных доходов*  $\rho(x) = p(x)/c(x)$ ,  $x \in X$ , где  $p(x)$  и  $c(x)$  – соответственно прогнозная и стоимостная плотности цены базового актива. Для среднего дохода  $R(\lambda)$ , инвестиционной суммы  $A(\lambda)$  и относительного дохода  $r(\lambda)$  имеет место

$$(1) \quad R(\lambda) = \int_0^1 \phi(\varepsilon; \lambda) d\varepsilon, \quad A(\lambda) = \int_0^1 \phi(\varepsilon; \lambda) d\gamma(\varepsilon), \quad r(\lambda) = \frac{R(\lambda)}{A(\lambda)},$$

где  $\gamma(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \in [0, 1]$ , – независимая от  $\lambda$  диссонанта оптимального портфеля [1, 4]. Функции  $g(\varepsilon)$  со свойствами диссонанты, т.е.

неотрицательные и невозрастающие функции  $\varepsilon$  (возможно, и разрывные),  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = 1$ , называются *допустимыми*.

*Корректным* называется семейство по  $\lambda$  ф.р.п., для которого при *любой* допустимой функции  $g(\varepsilon)$  оптимальный относительный доход  $r(\lambda)$  является монотонной функцией  $\lambda$ . Прочие семейства считаются *некорректными*.

Важную роль в анализе корректности в [1, 3, 6] играют *нормированные* ф.р.п.

$$(2) \quad \phi_n(\varepsilon; \lambda) = \phi(\varepsilon; \lambda) / R(\lambda),$$

так как они участвуют в представлении относительного дохода:

$$(3) \quad r(\lambda) = R(\lambda) / A(\lambda) = \left( \int_0^1 \phi_n(\varepsilon; \lambda) dg(\varepsilon) \right)^{-1}.$$

С использованием именно этих функций в [6] проведено полное аналитическое исследование корректности семейств кусочно-линейных функций с одинаковым интегралом на  $[0, 1]$ .

Однако далеко не для всех семейств подобный анализ на основе соотношений (2), (3) может быть реализован в столь полном объеме. И потому в настоящей работе функции (2) нами непосредственно не используются. Предлагается численный метод, который отвечает на те же вопросы о корректности прямыми расчетами относительного дохода по (1). При этом для получения адекватных выводов при расчетах следует использовать достаточно мелкую сетку значений параметра семейства.

По этой же причине не используются и важные для проведения теоретического анализа сформулированные и доказанные в [3, 6] *необходимые и достаточные* условия корректности. Для проведения численных расчетов удобную для анализа континуальную задачу предстоит вновь трансформировать в дискретную. Можно это делать разными способами.

Для нас предпочтительнее начинать с разбиения множества цен базового актива на сценарии. (К этому нас подталкивает и организация реальных рынков опционов, хотя на нем дискретизация несколько иная – дискретны множества их страйков.)

В таком случае мы можем применять *дискретный* алгоритм как результат проецирования *континуального* теоретического алгоритма, оптимальность которого была доказана ранее

[1, 2, 4]. При этом оптимальность дискретного алгоритма поддерживается (с некоторыми оговорками для случаев весьма грубой дискретизации [1, 5]) той же оптимальностью процедуры Неймана – Пирсона, составляющей важную часть алгоритма.

*Дискретный алгоритм.*

Поскольку во всех примерах работы используются только бета-распределения, в качестве множества цен базового актива принимается конечный полуинтервал  $X = [0, 1)$ . Свой прогноз инвестор делает в форме плотности вероятности  $p(x)$ , а рынок формирует стоимостную плотность  $c(x)$ ,  $x \in X$ .

Сценарии  $S_i \subset X$  определяются равномерным разбиением множества  $X$  на  $n$  интервалов  $S_i = [x_{i-1}, x_i)$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , где  $x_i = ih$ ,  $h = 1/n$ ,  $i \in I_0 = I \cup \{0\}$ . Их вероятности и стоимости соответствующих индикаторов получаются интегрированием в пределах сценариев. В результате имеем векторы  $\mathbf{p} = \{p_i, i \in I\}$  и  $\mathbf{c} = \{c_i, i \in I\}$ , где

$$(4) \quad p_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)dx, \quad c_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} c(x)dx.$$

В краткой форме дискретный алгоритм оптимизации можно записать последовательностью обозначений и операций:

$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{p}/\mathbf{c} = \{\rho_i = p_i/c_i, i \in I\}$  – вектор относительных доходов;

$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{O}(\boldsymbol{\rho})$  – вектор упорядочения, задающий на множестве сценариев позиции компонент вектора  $\boldsymbol{\rho}$  в порядке возрастания;

$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{O}(\boldsymbol{\xi})$  – фактически, обратный к  $\boldsymbol{\xi}$  вектор;

$\mathbf{d} = \mathbf{p}(\boldsymbol{\xi})$  – суперпозиция векторов  $\mathbf{p}$  и  $\boldsymbol{\xi}$ ; ее компоненты упорядочены по возрастанию компонент вектора  $\boldsymbol{\rho}$ ;

$\mathbf{T} = [t_{ij}]$ ,  $t_{ij} = \{1, i \leq j; 0, i > j\}$  – треугольная матрица из нулей и единиц, применяемая для последовательного суммирования компонент векторов, начиная с первой;

$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{T}\mathbf{d}$  – вектор кумулятивных вероятностей для вектора  $\mathbf{d}$ ;

$\mathbf{b} = \phi(\boldsymbol{\varepsilon})$  – вектор весов базисных инструментов в оптимальном портфеле в порядке возрастания компонент вектора  $\boldsymbol{\rho}$ ;

$\mathbf{g} = \mathbf{b}(\boldsymbol{\eta})$  – вектор тех же весов, но в исходном порядке.

Основными числовыми показателями построенных портфелей служат инвестиционная сумма  $A$ , средний доход  $R$  и средняя доходность  $y$ ; они получаются по формулам (аналог (1))

$A = (\mathbf{g}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{f}), \mathbf{f} = \mathbf{c}(\xi), R = (\mathbf{g}, \mathbf{p}) = (\mathbf{b}, \mathbf{d}), y = R/A - 1$ ,  
здесь  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  – скалярное произведение векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ .

В числовых примерах для обеих плотностей  $p(\cdot)$  и  $c(\cdot)$  используется известное из теории вероятности двухпараметрическое бета-распределение:

$$\text{Be}(u, v): x^{u-1}(1-x)^{v-1}/B(u, v), \quad u, v > 0,$$

где

$$B(u, v) = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1} dx = \Gamma(u)\Gamma(v)/\Gamma(u, v),$$

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty x^{u-1} \exp(-x) dx$$

– соответственно бета- и гамма-функции.

Далее полагаем  $p(x) \sim \text{Be}(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2 > 1, c(x) \sim \text{Be}(\beta_1, \beta_2), \beta_1, \beta_2 > 1$ . В числовых примерах дискретный алгоритм оптимизации применяется многократно для разных ф.р.п.  $\phi(\cdot)$ . При этом перерасчета (4) не требуется, поскольку для каждой решаемой далее задачи (1 или 2) векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{c}$  одни и те же, а при смене задачи производится лишь перемена ролей  $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{c}$ .

### 3. Линейные функции с одним изломом

Рассматривается двухпараметрическое надсемейство кусочно-линейных функций от  $\varepsilon \in [0, 1]$  с одним изломом вида

$$(5) \quad \phi(\varepsilon; \zeta, v) = \left\{ v\varepsilon/\theta, \varepsilon \leq \theta; v + (1-v)\frac{\varepsilon - \theta}{1 - \theta}, \varepsilon > \theta \right\}, \quad \theta = 1 + v - 2\zeta,$$

где  $\varepsilon = \theta$  – абсцисса точки излома функций,  $v$  – ее ордината. При  $\zeta = 0,5$  имеет место  $\phi(\varepsilon; \zeta, v) \equiv \varepsilon$  независимо от  $v$ .

При фиксировании значения параметра  $\zeta$  мы получаем семейство с единственным параметром  $v$ .

Этот пример надсемейства уже был рассмотрен в [6] исключительно аналитическими средствами и было доказано, что для каждого значения  $\zeta \in [0, 1]$  однопараметрические семейства (5) по параметру  $v$  (играющему роль  $\lambda$ ) являются корректными. Напомним еще, что постоянство параметра  $\zeta$  (и среднего дохода) удобно для сравнения рисков свойств ф.р.п. [6].

В данном разделе мы решаем задачу для этого же надсемейства в дискретной модели рынка, при этом мы преследуем

двойную цель. Во-первых, тем самым проверяется соответствие получаемых результатов выводам [6]. Во-вторых, мостим дорогу в следующий раздел с примером надсемейства, для которого дискретизация рынка становится, пожалуй, единственно возможным способом решения проблемы корректности, притязая, фактически, на универсальность.

В результате применения алгоритма для произвольной функции рискованных предпочтений инвестора получается (средняя) доходность инвестиции, благодаря чему можно сравнивать различные ф.р.п. между собой по этой характеристике и проверять корректность семейств функций.

В числовом примере набор  $s$  значений параметра  $\zeta$  задается как  $s_i = (i - 1/2)/I$ ,  $i = 1, \dots, I$ , в количестве  $I = 11$ . Имеем

$s = \{0,045; 0,136; 0,227; 0,320; 0,409; 0,5; 0,591; 0,682; 0,773; 0,864; 0,955\}$ ,

при этом  $i_m = (I + 1)/2$  ( $= 6$  в примере) – средний индекс.

Для каждого фиксированного значения  $i$  (и  $s_i$ ) и соответствующего ему семейства определяем равномерную на каждом прямолинейном участке сетку ординат точек излома функций надсемейства в количестве  $J = 9$  правилом

$$v_{i,j} = \{(2j - 1)/J, i \leq i_m; 2s_i - 1 + (1 - s_i)(2j - 1)/J, i > i_m\},$$

где  $j = 1, \dots, J$ . В совокупности они образуют матрицу

$$U = \{v_{i,j}, i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J\}.$$

Каждому исследуемому нами семейству функций отвечает набор  $\{v_{i,j}, j = 1, \dots, J\}$ , располагаемый в  $i$ -й строке матрицы, с фиксированным значением параметра  $\zeta$ , равным  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, I$ .

Графики функций надсемейства для всех элементов этой матрицы уже приводился на рис. 2 в [6] (Похожие графики, но уже сглаженных функций, принадлежащих другому надсемейству, приводятся далее на рис. 2.)

Для этих функций, используемых в качестве ф.р.п., будем вычислять с целью последующего сравнения доходности инвестиции, получаемые как результат решения полной задачи дискретной оптимизации.

Между элементами матрицы  $U$  устанавливается бинарное отношение сообразно определению из [6]. Для семейства по

параметру  $\theta$  считаем, что  $\theta' > \theta''$  ( $\theta' < \theta''$ ), если доходность при значении параметра  $\theta'$  больше (меньше), чем при  $\theta''$ .

Для большей надежности выводов рассматриваются две в некотором смысле противоположные задачи.

*Задача 1: покупка волатильности.*

Решается задача на применение CC-VaR, в которой  $p(x)$  и  $c(x)$  – плотности бета-распределения, притом первая – с параметрами  $\alpha_1 = 2,8$ ,  $\alpha_2 = 2,9$ , вторая – с  $\beta_1 = 3,2$ ,  $\beta_2 = 3,1$ , т.е.

$$p(x) = 23,6744x^{1,8}(1-x)^{1,9}, \quad c(x) = 37,8853x^{2,2}(1-x)^{2,1},$$

$$\rho(x) = p(x)/c(x) = 0,624897/x^{0,4}/(1-x)^{0,2}.$$

Отметим, что название задачи находит отражение в поведении функции  $\rho(x)$  и говорит о наличии тенденции к *повышению* волатильности (степени нестабильности) с точки зрения инвестора. Ее график приводится на рис. 1 слева.

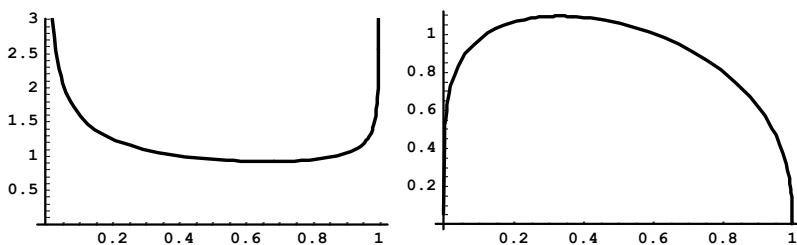


Рис. 1. Графики функций  $\rho(x)$  для задач 1 и 2

Применением дискретного алгоритма оптимизации ко всем ф.р.п., отвечающим элементам матрицы  $\mathbf{U}$ , определяются их (средние) доходности, при этом  $n = 400$  (как компромисс между скоростью и точностью). В совокупности все они образуют матрицу  $\mathbf{Y} = \{y_{ij}, i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J\}$ . Эта матрица, помноженная для большей информативности на  $10^3$ , представлена в таблице 1. (Без такого увеличения при выбранной точности отображения чисел в таблицах наши матрицы будут содержать многие пары совпадающих элементов.)

Таблица 1. Матрица  $10^3 \times Y$  в задаче 1

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	436	394	352	310	268	226	182	138	88,6
2	244	227	210	192	174	153	131	107	77,7
3	164	156	148	138	128	117	104	89,4	70,9
4	116	112	108	103	97,7	91,7	84,8	76,5	65,7
5	82,0	80,6	79,0	77,2	75,1	72,6	69,7	66,0	61,2
6	57,2	57,2	57,2	57,2	57,2	57,2	57,2	57,2	57,2
7	39,1	39,8	40,6	41,5	42,5	43,7	45,1	46,7	48,7
8	26,1	27,0	27,9	29,0	30,2	31,6	33,1	34,8	36,7
9	16,3	17,1	17,9	18,8	19,8	20,8	22,0	23,3	24,6
10	8,62	9,12	9,66	10,2	10,8	11,5	12,1	12,8	13,6
11	2,46	2,57	2,76	2,93	3,13	3,33	3,53	3,73	3,94

Комментарий. Из таблицы следует, что

(а) если  $i < i_m$ , то  $y_{i,j+1} < y_{i,j}$  и потому  $v_{i,j+1} < v_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, J - 1$ ;

(б) если  $i > i_m$ , то  $y_{i,j+1} > y_{i,j}$  и  $v_{i,j+1} > v_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, J - 1$ .

Случай  $i = i_m$  составляет естественное исключение.

В качестве побочного результата получаем, что при фиксации индекса  $j = 1, \dots, J - 1$  (параметра точки излома) и для всех  $i = 1, \dots, I - 1$  выполняется неравенство  $y_{i+1,j} < y_{i,j}$ , т.е.  $v_{i+1,j} < v_{i,j}$ .

В целях унификации задания семейств в случае (б) можно прибегнуть, например, к замене  $v \rightarrow 2 - v$ , что меняет зависимость семейства от параметра  $v$  с прямой на обратную.

Задача 2: продажа волатильности.

Решается задача, в которой вновь  $p(x)$  и  $c(x)$  – плотности бета-распределения, но на этот раз первая – с параметрами  $\alpha_1 = 3,1$ ,  $\alpha_2 = 3,2$ , вторая – с  $\beta_1 = 2,9$ ,  $\beta_2 = 2,8$ :

$$p(x) = 37,8853x^{2,1}(1-x)^{2,2}, \quad c(x) = 23,6744x^{1,9}(1-x)^{1,8},$$

$$p(x) = 1,60026/(x^{0,2}(1-x)^{0,4}).$$

График  $p(x)$  для этой задачи представлен на рис. 1 справа. Его внешний вид говорит о тенденции к снижению волатильности (степени нестабильности) с точки зрения инвестора.

Все полученные в результате применения дискретного алгоритма оптимизации доходности образуют матрицу  $Y = \{y_{i,j}$ ,

$i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$ ). Эта матрица с увеличенными в  $10^3$  раз элементами представлена в таблице 2.

Таблица 2. Матрица  $10^3 \times Y$  в задаче 2

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	90,1	86,2	82,4	78,7	75,1	71,6	68,2	64,8	62,2
2	88,0	83,7	79,6	75,7	72,1	68,6	65,4	62,4	59,5
3	84,3	80,0	76,1	72,5	69,2	66,3	63,6	61,1	58,9
4	78,7	74,8	71,5	68,5	66,0	63,7	61,7	59,9	58,4
5	70,3	67,6	65,4	63,6	62,1	60,8	59,7	58,7	57,9
6	57,5	57,5	57,5	57,5	57,5	57,5	57,5	57,5	57,5
7	42,8	46,4	48,8	50,6	52,1	53,3	54,3	55,2	56,0
8	31,3	36,6	40,3	43,2	45,5	47,6	49,3	50,9	52,2
9	21,7	27,4	31,5	34,8	37,6	40,0	42,1	44,0	45,7
10	13,1	18,1	21,8	24,9	27,5	29,8	31,9	33,8	35,6
11	4,76	7,50	9,65	11,5	13,1	14,6	16,0	17,3	18,5

Комментарий тот же, что и к задаче 1: связанные с бинарным отношением  $\succ$  свойства таблиц 1 и 2 совпадают, т.е. по этому отношению столь разные задачи эквивалентны.

#### 4. Дуги обобщенных окружностей

Рассмотрим теперь надсемейство ф.р.п. инвестора вида

$$(6) \quad \phi(\varepsilon; \mu, \nu) = 1 - (1 - \varepsilon^\mu)^{1/\nu}, \quad \mu, \nu > 0.$$

При  $\mu, \nu > 1$  такие функции можно формально описывать как четверть обобщенной окружности с центром в  $(0, 1)$  квадрата  $Q$ . Они удовлетворяют уравнению  $\varepsilon^\mu + (1 - \phi(\varepsilon; \mu, \nu))^\nu = 1$  (при  $\mu = \nu = 2$  получается уравнение обычной окружности).

При  $\mu = \nu = 1$  окружность вырождается в отрезок прямой  $\phi(\varepsilon; 1, 1) \equiv \varepsilon$ , а при  $\mu, \nu < 1$  окружность перестает быть выпуклой фигурой, и ее основная и интересующая нас дуга становится вогнутой функцией. Такие функции в качестве ф.р.п. представляют несомненный интерес для консервативных инвесторов. Случай расположения  $\mu$  и  $\nu$  по разные стороны от единицы дает весьма экзотичные формы кривых, с трудом поддающиеся интерпретации в качестве ф.р.п. инвестора, и мы его в дальнейшем не рассматриваем.



Как и в примере раздела 3, существенной характеристикой является интеграл от функции (6) на  $[0, 1]$  (равный площади под кривой ее графика). Он совпадает со средним доходом  $R(\mu, \nu)$  портфеля в задаче оптимизации по CC-VaR. Его считаем вспомогательным параметром и обозначаем  $\zeta (= R(\mu, \nu))$ . Вычисления для функций (6) при всех  $\mu, \nu > 0$  дают

$$(7) \quad R(\mu, \nu) = R(\nu, \mu) = 1 - \Gamma(1 + 1/\mu)\Gamma(1 + 1/\nu) / \Gamma(1 + 1/\mu + 1/\nu).$$

Кривые данного надсемейства при  $\varepsilon = 1$  и  $\nu > 1$  ведут себя более круто по сравнению, например, с кривыми семейства (5). Их производные по  $\varepsilon$  при  $\varepsilon = 1$  и  $\nu > 1$  бесконечны, что позволяет в большей мере использовать функции такого надсемейства весьма расположенными к риску инвесторами. (При  $\nu < 1$  эти производные равны нулю, а при  $\varepsilon = 0$  они определяются аналогичным образом значениями параметра  $\mu$ .)

В данном случае проведение полного теоретического анализа затруднено, но о схожести поведения функций надсемейств (5) и (6) для наших целей можно судить по результатам многочисленных расчетов, графикам и по самой логике проблемы.

Важно также отметить, что при этом, вообще говоря,

$$(8) \quad R(\mu, \nu) \neq 1 - R(1/\mu, 1/\nu), \quad 0 < \mu, \nu < 1.$$

Это неравенство напоминает о проблеме *аналитического продолжения* семейств в зону малого риска, что мы обычно связываем со значениями параметра семейств меньше единицы (формулы (5), (6) в [6]).

Конкретно для нашего надсемейства (6) такую проблему можно и не ставить, поскольку оно при  $\mu, \nu < 1$  и так обладает нужными свойствами. Но для целей универсализации продемонстрируем на нем возможные продолжения. При этом наличие двух параметров позволяет разнообразить варианты.

Для области  $\mu, \nu < 1$  можно предлагать три варианта функций с индексами “inv”, “cs”, “cs0” соответственно: образование обратной функции, центрально-симметричное отображение, его разновидность с перестановкой  $\mu \leftrightarrow \nu$ . Это

$$(9) \quad \phi_{inv}(\varepsilon; \mu, \nu) = \phi^{\leftarrow}(\varepsilon; 1/\mu, 1/\nu) = \left(1 - (1 - \varepsilon)^\nu\right)^{1/\mu}, \quad 0 < \mu, \nu < 1,$$

$$(10) \quad \phi_{cs}(\varepsilon; \mu, \nu) = \left(1 - (1 - \varepsilon)^\nu\right)^{1/\mu} = \phi_{inv}(\varepsilon; \mu, \nu), \quad 0 < \mu, \nu < 1,$$

$$(11) \phi_{cs_0}(\varepsilon; \mu, \nu) = \left(1 - (1 - \varepsilon)^\mu\right)^{1/\nu}, \quad 0 < \mu, \nu < 1.$$

Графики функции (9) получаются зеркальным отображением графиков исходных функций надсемейства с параметрами  $1/\mu$ ,  $1/\nu$  относительно биссектрисы прямого угла с вершиной в  $(0,0)$ . Очевидно также, что формула (10) для нашего надсемейства не дает нового продолжения. В отличие от варианта (11), связанного с перестановкой  $\mu \leftrightarrow \nu$ . При этом для всех этих вариантов выполняются (в отличие от исходного) очевидные из геометрических соображений равенства

$$R_{inv}(\mu, \nu) = R_{cs}(\mu, \nu) = R_{cs_0}(\mu, \nu) = 1 - R(1/\mu, 1/\nu) = \\ = \Gamma(1 + \mu)\Gamma(1 + \nu)/\Gamma(1 + \mu + \nu), \quad 0 < \mu, \nu < 1.$$

#### Дискретизация задачи.

Для параметра  $\zeta$  строится сетка из  $I$  значений. Для каждого из них определяются сетки параметров  $\mu$  и  $\nu$  надсемейства, состоящие из  $J$  значений каждая. Они образуют соответственно матрицы  $\mathbf{M} = \{\mu_{ij}, i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J\}$  и  $\mathbf{N} = \{\nu_{ij}, i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J\}$ .

Для удобства  $I$  и  $J$  вновь выбираются нечетными числами,  $I = 11$ ,  $J = 9$ . Средние индексы в наборах обозначаются соответственно  $i_m = (I + 1)/2$ ,  $j_m = (J + 1)/2$ . Вектор  $s$  как совокупность тестируемых значений параметра  $\zeta$  выбирается, как и в разделе 3, правилом  $s_i = (i - 1/2)/I$ ,  $i = 1, \dots, I$ . Имеем

$$s = \{0,045; 0,136; 0,227; 0,318; 0,409; 0,5; 0,591; 0,682; 0,773; 0,864; 0,955\}.$$

Вновь нас интересуют в основном семейства, получаемые из надсемейства фиксацией индекса  $i$  (и  $s_i$ ).

Введем вектор  $v = \{v_i, i = 1, \dots, I\}$ , где  $v_i$  определяется для нового надсемейства по формуле (7) из уравнения  $R(v, v) = s_i$ ,  $i = 1, \dots, I$ . Получаем

$$v = \{5,272; 2,716; 1,920; 1,490; 1,207; 1; 0,836; 0,699; 0,578; 0,461; 0,325\}.$$

Компоненты вектора  $v$  для рассматриваемого надсемейства служат средними значениями сеток параметров  $\mu$  и  $\nu$ . Параметры  $\mu_{ij}$  и  $\nu_{ij}$  выбираются по разным формулам в зависимости от того, в первой или второй половине своей шкалы находятся

индексы  $i = 1, \dots, I$  и  $j = 1, \dots, J$ . При этом сохраняются и определенная симметрия в их задании, и некоторая равномерность сетки. Предлагается следующая последовательность действий.

Для всех  $i = 1, \dots, I$  и  $j \leq j_m$  сначала задаются значения  $\mu$ :

$$\mu_{i,j} = 1 + (j - 1)(v_i - 1)/J,$$

а затем по ним находятся  $v_{i,j}$  как корень уравнения  $R(\mu_{i,j}, v) = s_i$ :

$$\Gamma(1 + 1/\mu_{i,j})\Gamma(1 + 1/v)/\Gamma(1 + 1/\mu_{i,j} + 1/v) = 1 - s_i.$$

Найденные таким образом величины  $\mu_{i,j}$  и  $v_{i,j}$  образуют подматрицы  $\mathbf{M}'$  и  $\mathbf{N}'$  размера  $I \times j_m$  матриц  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$  соответственно. Два крайние правых столбца в матрицах  $\mathbf{M}'$  и  $\mathbf{N}'$  по понятным причинам одинаковы и совпадают с вектором  $v$ . Остальные элементы матриц  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$  (т.е. для  $j > j_m$ ) образуют подматрицы  $\mathbf{M}''$  и  $\mathbf{N}''$  размера  $I \times (j_m - 1)$  матриц  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$  соответственно. Они определяются из соображений симметрии и в соответствии с симметрией функции  $R(\mu, v)$  относительно перестановки  $\mu \leftrightarrow v$ . Именно:

$$\mu_{i,j} = v_{i,J+1-j}, \quad v_{i,j} = \mu_{i,J+1-j}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = j_m + 1, \dots, J.$$

Результаты расчетов матрицы  $\mathbf{M}$  приведены в таблице 3.

Таблица 3. Матрица  $\mathbf{M}$

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1,0	2,068	3,136	4,204	5,272	6,575	8,617	12,285	21,00
2	1,0	1,429	1,858	2,287	2,716	3,209	3,876	4,834	6,333
3	1,0	1,230	1,460	1,690	1,920	2,174	2,487	2,882	3,400
4	1,0	1,123	1,245	1,368	1,490	1,621	1,770	1,942	2,143
5	1,0	1,052	1,104	1,155	1,207	1,261	1,318	1,379	1,444
6	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
7	1,0	0,959	0,918	0,877	0,836	0,797	0,76	0,725	0,692
8	1,0	0,925	0,850	0,775	0,699	0,629	0,568	0,514	0,467
9	1,0	0,894	0,789	0,683	0,578	0,483	0,408	0,346	0,294
10	1,0	0,865	0,730	0,595	0,461	0,347	0,265	0,204	0,158
11	1,0	0,831	0,662	0,494	0,325	0,198	0,123	0,076	0,048

В соответствии с правилами построения обеих матриц  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$  полная матрица  $\mathbf{N}$  получается из  $\mathbf{M}$  зеркальным отображением относительно центрального ( $j_m$ -го) столбца:

$$v_{i,j} = \mu_{i,J+1-j}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J,$$

и потому здесь уже не приводится.

На рис. 2 изображены графики функций надсемейства для построенных сеток значений параметров  $\zeta$ ,  $\mu$  и  $\nu$ .

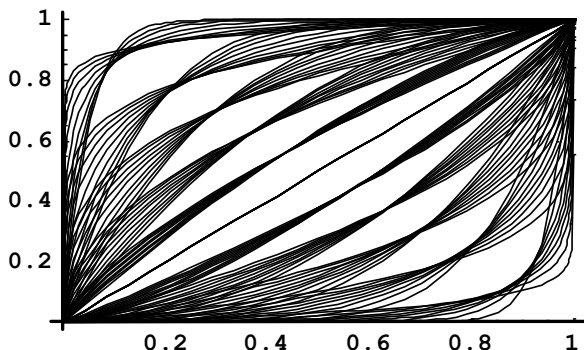


Рис. 2. Графики функций  $\phi(\varepsilon, \mu, \nu)$  надсемейства

Как и в разделе 3, рассматриваются две задачи.

*Задача 1: покупка волатильности.*

Решается задача, в которой плотности  $p(x)$  и  $c(x)$  заимствуются из раздела 3, т.е.

$$p(x) = 23,6744x^{1,8}(1-x)^{1,9}, \quad c(x) = 37,8853x^{2,2}(1-x)^{2,1},$$

$$\rho(x) = p(x)/c(x) = 0,624897/x^{0,4}/(1-x)^{0,2}.$$

В результате применения дискретного алгоритма оптимизации для каждой функции рискованных предпочтений инвестора, параметры которой отвечают элементам матриц  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$ , определяется доходность инвестиции. Все полученные доходности образуют матрицу  $\mathbf{Y} = \{y_{ij}, i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J\}$ . Эта матрица, помноженная на  $10^3$ , представлена в таблице 4.

*Задача 2: продажа волатильности.*

Решается задача, в которой плотности  $p(x)$  и  $c(x)$  также заимствуются из раздела 3, т.е.

$$p(x) = 37,8853x^{2,1}(1-x)^{2,2}, \quad c(x) = 23,6744x^{1,9}(1-x)^{1,8},$$

$$\rho(x) = 1,60026/x^{0,2}/(1-x)^{0,4}.$$

Все полученные в результате применения дискретного алгоритма оптимизации доходности образуют матрицу  $\mathbf{Y} = \{y_{ij},$

$i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$ }. Эта матрица, помноженная на  $10^3$ , представлена в таблице 5.

Таблица 4. Матрица  $10^3 \times Y$  в задаче 1

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	117,	168,	205,	235,	260,	285,	317,	358,	415,
2	105,	123,	139,	153,	164,	176,	189,	205,	223,
3	92,7	101,	109,	116,	122,	128,	134,	142,	150,
4	80,8	84,6	88,0	91,2	94,2	97,1	100,	103,	107,
5	69,1	70,3	71,5	72,6	73,7	74,8	75,9	77,1	78,3
6	57,4	57,4	57,4	57,4	57,4	57,4	57,4	57,4	57,4
7	46,0	45,5	45,0	44,5	43,9	43,3	42,7	42,1	41,6
8	34,9	34,3	33,7	33,0	32,2	31,3	30,5	29,7	29,0
9	24,1	23,7	23,2	22,6	21,9	21,0	20,2	19,5	18,8
10	13,8	13,6	13,4	13,0	12,6	12,0	11,4	10,8	10,3
11	4,20	4,19	4,17	4,12	4,01	3,82	3,60	3,37	3,15

Таблица 5. Матрица  $10^3 \times Y$  в задаче 2

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	70,2	80,6	84,9	87,1	88,4	89,4	90,3	91,1	91,7
2	67,7	73,4	77,2	79,8	81,8	83,4	85,0	86,6	88,1
3	65,7	69,1	71,8	74,0	75,8	77,4	79,0	80,6	82,2
4	63,4	65,3	67,0	68,5	69,9	71,1	72,4	73,7	75,0
5	60,8	61,6	62,4	63,2	63,9	64,6	65,3	66,0	66,7
6	57,6	57,6	57,6	57,6	57,6	57,6	57,6	57,6	57,6
7	53,8	53,1	52,4	51,7	51,0	50,2	49,4	48,7	48,0
8	48,8	47,7	46,5	45,2	43,7	42,1	40,6	39,2	37,9
9	42,4	41,0	39,4	37,5	35,4	33,1	31,1	29,2	27,4
10	33,1	31,8	30,1	28,1	25,5	22,8	20,4	18,4	16,6
11	17,8	17,0	15,8	14,3	12,0	9,69	7,93	6,60	5,59

*Комментарий*, являясь общим для задач 1 и 2 данного раздела, отличается от комментария для тех же задач из раздела 3 лишь тем, что в (а) и (б) отношения  $\succ$  и  $\prec$  меняются местами. Это обстоятельство обусловлено различием в поведении функций двух надсемейств при изменении их параметров. При возрастании индекса  $j$  возрастают и параметры  $\nu$  и  $\mu$  соответствен-

но надсемейств (5) и (6) (параметр  $\mu$  нами выбран по алфавиту ведущим в паре  $(\mu, \nu)$ ), но производные по  $\varepsilon$  функций этих надсемейств в нуле растут и убывают соответственно. Итак,

(а) если  $i < i_m$ , то  $y_{i,j+1} > y_{i,j}$  и  $\mu_{i,j+1} \succ \mu_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, J-1$ ;

(б) если  $i > i_m$ , то  $y_{i,j+1} < y_{i,j}$  и  $\mu_{i,j+1} \prec \mu_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, J-1$ .

Дополнительно отмечаем также, что при фиксации индекса  $j = 1, \dots, J-1$  для всех  $i = 1, \dots, I-1$  имеем  $y_{i+1,j} < y_{i,j}$ , т.е.  $\mu_{i+1,j} \prec \mu_{i,j}$ .

Применение *альтернативных* продолжений (9) и (11) надсемейства в область параметров  $0 < \mu, \nu < 1$  при сохранении принципа построения сетки параметров требует перерасчета нижней половины матриц  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$ , а с ними и матриц  $\mathbf{Y}$  для обеих задач. При этом матричная картина отношений  $\succ$  и  $\prec$  для (9) не меняется, а для (11) в нижней половине матрицы картина меняется на противоположную (как раз вследствие смены ролей для параметров  $\mu$  и  $\nu$ ).

## 5. Заключение

Работа совместно с предыдущей работой завершает намеченное исследование корректности семейств ф.р.п. инвестора.

Сформировано и доказано необходимое и достаточное условие корректности семейств, которое использовано для проведения аналитического исследования корректности в конкретных задачах. Условие помогает инвестору осознанно формализовать свои рискованные предпочтения в приложении к финансовому рынку и в качестве ф.р.п. выбирать функции из корректных семейств с расчетом на адекватное вознаграждение.

Специально подобраны два примера надсемейств функций, обладающих, помимо прочих достоинств, дополнительным свойством симметрии относительно биссектрисы прямого угла с вершиной в точке  $(1, 0)$  в координатах «уровень вероятности – значение функции». Симметрия функций переносится на семейства, происходящие из этих надсемейств, что позволяет четко подтвердить гипотезу качественного характера: более «доход-

ная» (приносящая инвестору более высокую среднюю доходность) ф.р.п. порождает более низкие доходы в окрестности нуля аргумента и более высокие – единицы. И наоборот.

Разработаны численные методы проверки корректности семейств функций посредством перехода от теоретических рынков к сценарным. Эти методы продемонстрированы на примерах семейств из двух специально подобранных надсемейств и рассчитаны на те множественные случаи, когда ограничиться аналитическими средствами не удается.

### Литература

1. АГАСАНДЯН Г.А. *Применение континуального критерия VaR на финансовых рынках.* – М.: ВЦ РАН, 2011. – 299 с.
2. АГАСАНДЯН Г.А. *Континуальный критерий VaR на многомерных рынках опционов.* – М.: ВЦ РАН, 2015. – 297 с.
3. АГАСАНДЯН Г.А. *Об условиях корректности семейств функций рискованных предпочтений в CC-VaR* // Материалы X международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2017)», Москва, 2–4 октября, 2017. – М.: ИПУ РАН, 2017. – С. 184–187.
4. АГАСАНДЯН Г.А. *Континуальный критерий VaR и оптимальный портфель инвестора* // Управление большими системами. – 2018. – Вып. 73. – С. 6–26.
5. АГАСАНДЯН Г.А. *Континуальный критерий VaR на сценарных рынках* // Информатика и ее применения. – М.: ИПИ ФИЦ ИУ РАН, 2018. – Т. 12, вып. 1. – С. 32–40.
6. АГАСАНДЯН Г.А. *Об особенностях семейств функций рискованных предпочтений для CC-VaR* // Управление большими системами. – Вып. 79. – С. 10–26. – URL: <https://doi.org/10.25728/ubs.2019.79.1>
7. КРАМЕР Г. *Математические методы статистики.* – М.: Наука, 1975. – 750 с. (Перевод с англ.: Cramer. H. *Mathematical methods of statistics.* – Princeton University Press, 1946.)

## CONTINUOUS VaR-CRITERION AND INVESTOR'S OPTIMAL PORTFOLIO

**Gennady Agasandyan**, Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, Doctor of Science, leading fellow (agasand17@yandex.ru).

*Abstract: The work continues author's investigations connected with correctness conditions ascertained previously for families of risk-preferences functions (r.p.f.) that might be used in financial markets in problems of optimization on continuous VaR-criterion (CC-VaR). These conditions were used in analyzing an example of families deduced from the super-family of piecewise-linear functions by pure analytical means. Numerical methods of checking the correctness of r.p.f.-families that are useful when difficulties arise in analytical investigations are suggested. These methods are based on discrete algorithms of optimization under CC-VaR for scenario markets and solve correctness problems with quite high-degree approximation. Methods are tested on the former super-family and applied to the super-family of the generalized circles. Results demonstrate adequacy and generality of methodology.*

**Keywords:** continuous VaR-criterion, Newman-Pearson procedure, risk-preferences functions (r.p.f.), families and super-families of r.p.f., yield, correct families, volatility.

УДК 519.685

ББК 22.18

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Ф.И. Ерешко.*

*Поступила в редакцию 20.02.2019.*

*Опубликована 31.07.2019.*



## АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ СЕТЕВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ: КОНТЕКСТНО-ЗАВИСИМЫЕ МЕРЫ ЦЕНТРАЛЬНОСТИ

Кузнецов Е. Н.<sup>1</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Классические индексы центральности для анализа системы взаимосвязей и взаимодействия некоторого множества объектов и распространенные методы выделения ключевых элементов сети при помощи ранжирования узлов по величине общесетевого индекса центральности не всегда учитывают интенсивности внутригрупповых взаимодействий в различных частях системы. В данной работе предлагается использовать контекстно-зависимые меры центральности – на основе внутригруппового взаимодействия элементов сети. То есть предлагаемая мера центральности каждого элемента зависит от того подмножества элементов, для которого рассматривается в данный момент. Для общей интегральной характеристики важности, влияния и т.д. некоторой группы вершин предлагается использовать минимальное или максимальное, а не среднее, значение индекса центральности вершин этой группы. Для определения подмножества ключевых узлов сети предлагается использовать алгоритмы специального кластер анализа – алгоритмы выделения ядра монотонной системы. Это не только обеспечивает определение глобального экстремума функционала в соответствующей оптимизационной задаче, но и позволяет более подробно проанализировать структуру сети. В качестве примера применения предлагаемого подхода рассмотрена сеть экспортных связей стран – членов Евросоюза. Выявлена особая – пограничная роль Великобритании в ядре Евросоюза.*

Ключевые слова: меры центральности, ключевые элементы системы взаимосвязанных объектов, монотонные системы.

### 1. Введение

Для представления и анализа системы взаимосвязей и взаимодействия некоторого множества объектов часто используется граф («социальная сеть») [18]. Вершины в этом графе представляют объекты (или субъекты, «акторы»), а ребра – связи между ними<sup>2</sup>. При этом наличие связи может характеризовать близость

---

<sup>1</sup> Евгений Николаевич Кузнецов, к.т.н., ст.н.с. (enkuznetsov@mail.ru).

<sup>2</sup> Разумеется, не все пары вершин связаны ребрами. Граф, в котором все пары вершин связаны ребрами, называется полным.

(похожесть) между объектами, различие (расстояние) между ними или факт (интенсивность) их взаимодействия. В первых двух случаях, как правило, речь идет о симметричных связях, и этому схематично соответствует неориентированный граф. В последнем случае обычно рассматривают направленные связи между объектами, что представляется ориентированным графом. Наконец, часто используются взвешенные графы, в которых каждому ребру приписано некоторое число – вес, характеризующее меру близости или расстояния (степень похожести или различия) между объектами или интенсивность воздействия (влияния) одного объекта на другого, объём (величину) материального, информационного или финансового потока между ними и тому подобное.

Для анализа той роли, которую играет каждый объект во взаимосвязанной системе (каждый субъект в социальной сети), рассматривается сама концепция центральности и вводятся различные её числовые характеристики – меры центральности (*centrality indices*). Концепция центральности широко используется в социальных и поведенческих науках, а также в области политических наук, управления, социальных сетей в интернете, экономики, биологии и т.д. [19].

Так, в анализе социальных сетей рассматривают тесно связанные понятия центральности и индивидуальной власти, лидерства, положения коммуникативного посредника, периферийного или почти изолированного узла [15, 18]. В анализе свойств сетей на рынке межбанковского кредитования и платежных систем проводится количественная оценка значимости элементов финансовых взаимодействий и накопленного системного риска [7]. Индексы влияния и меры центральности используются также для определения ключевых игроков на международном рынке капитала [13]. Разумеется, используется этот аппарат и для исследования структуры и процессов в политических институтах, таких как парламент [1], исследования структуры потоков международной миграции [12] и во многих других областях .

Исследователи социальных сетей разработали множество количественных мер (индексов) центральности. Наиболее из-

вестными и распространенными являются следующие четыре группы мер [15, 16]:

- центральность по степени связности (degree centrality);
- центральность по близости (closeness centrality);
- центральность по посредничеству (betweenness centrality);
- центральность по влиятельности (eigenvector centrality).

В то же время, как неоднократно отмечалось в литературе (см., например, [14, 17]), классические индексы не всегда учитывают структуру сети и индивидуальные характеристики отдельных акторов, а также интенсивности прямых и опосредованных, в частности, *внутригрупповых* взаимодействий в системе. Поэтому были предложены и иные меры центральности, в частности, индексы центральности по ближним (short-range interactions centrality, SRIC) и дальним (long-range interactions centrality, LRIC) взаимодействиям, которые позволяют учитывать данные особенности [3, 13, 14]. Предложенный в [13] индекс центральности заёмщика учитывает характер и количественную составляющую связей между субъектами финансовой системы для прямых контрагентов и косвенных контрагентов первого уровня.

Тем не менее ни одна из имеющихся в распоряжении исследователя мер центральности, ни все они в совокупности не позволяют полностью удовлетворить потребности анализа сетевой структуры близости (различия) между элементами, сетевой структуры сложной системы материальных, финансовых, информационных и других потоков или системы взаимодействия между акторами. Поэтому развитие новых подходов к анализу сетевой структуры является актуальным.

Прикладные работы по сетевому анализу, как правило, состоят из двух основных этапов. Сначала для всех узлов имеющейся сети (акторов) рассчитываются те или иные индексы (меры центральности). Затем на основе полученных значений проводится ранжирование всех узлов по каждому индексу. Это позволяет выделить в сети группы узлов с наибольшими или наименьшими значениями этих индексов (ТОП-3, ТОП-5 и т.д.). Или шире – выделить группы узлов, отвечающих тем или иным априорно налагаемым требованиям. Например, группу узлов,

индексы центральности которых превышают (или не превышают), некоторое пороговое значение или принимают наибольшие значения. Так, в [2] определяются наиболее важные международные и российские экономические журналы в сетях в результате анализа перекрестного цитирования научных публикаций этих журналов. По каждому используемому индексу определяется группа ТОП-3 наиболее влиятельных журналов по экономике. Разумеется, перечень этих «наиболее влиятельных журналов» по разным индексам сильно отличается.

Общей чертой всех известных автору работ по анализу сетевой структуры на основе мер центральности является то, что значения индексов вычисляются для каждой вершины *раз и навсегда* – по всем вершинам сети. Иначе говоря, индекс центральности рассматривается как свойство или функция узла на всей сети (т.е. функция одного аргумента – узла). Кроме того, для общей характеристики важности, влиятельности и т.д. некоторой группы вершин используются такие стандартные интегральные характеристики этой группы как среднее (реже, суммарное или медианное) значение используемого индекса центральности [19].

*В данной работе для сетевого анализа центральности предлагается три нововведения.*

1. Предлагается рассмотреть контекстно-зависимые меры центральности. То есть с самого начала мера центральности вводится как функция двух аргументов: некоторого узла сети и некоторого подмножества узлов сети. Иначе говоря, мера центральности рассматривается как мера отношения (связи, роли, взаимодействия и т.д.) элемента и группы элементов. *То есть мера (степень) центральности каждого элемента определяется не единожды, по всей сети, а зависит от контекста – от того подмножества элементов, для которого рассматривается в данный момент.* Таким образом, значение индекса центральности каждой вершины явно зависит от подмножества вершин, для которого оно вычисляется. Актор, занимающий лидирующие позиции в одной группе вершин, может быть вполне периферийным узлом в составе другой группы. Этот

подход как бы реализует идею известной поговорки «Молодец – среди овец, а на молодца – и сам овца».

2. Для общей интегральной характеристики важности, влияния и т.д. некоторой группы вершин предлагается использовать *крайние значения индекса центральности* вершин этой группы (минимальное или максимальное, а не среднее). То есть группа характеризуется по самому влиятельному своему члену или, наоборот, итоговое время марш-броска взвода – по наиболее отставшему солдату.

3. Для определения подмножества ключевых узлов сети предлагается использовать алгоритмы специального кластер-анализа – *алгоритмы выделения ядра монотонной системы*. Это не только обеспечивает определение глобального экстремума функционала в соответствующей оптимизационной задаче, но и позволяет более подробно проанализировать структуру сети.

Во второй части статьи вводятся все необходимые формальные понятия. С математической точки зрения данная работа основана на работе [6]. В третьей части описываются алгоритмы решения поставленной задачи. В четвертой части рассматриваются свойства построенных структурных объектов. Наконец, в пятой части работы кратко описывается практический пример применения предлагаемого подхода к сетевому анализу системы торгово-экономических потоков между странами-членами Евросоюза.

Автор благодарит Ф.Т. Алескерова и Ю.Э. Гурову за ценные замечания и помощь в работе над статьей.

## **2. Контекстно-зависимая мера сетевой центральности**

Пусть  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  – конечное множество связанных узлов (вершин, элементов, акторов и т.д.). Характер связей между ними может быть самый произвольный. Широко известны по крайней мере три типа таких связей:

1. Мера близости (похожести) или расстояния (различия) между двумя узлами.

2. Величина (объем, масса) потока между ними (материального, финансового, информационного и др.).

3. Интенсивность взаимодействия (влияния) одного элемента на другой.

Рассмотрим взвешенный граф  $G = \langle V, E, W \rangle$ , где  $V, |V| = N$  – множество вершин,  $E \subseteq V \times V$  – множество ребер, а  $W = \{w_{ij}\}$  – множество весов ребер, где  $w_{ij}$  – неотрицательное действительное число, соответствующее ребру  $(i, j) \in E$ . Граф  $G$  называется ориентированным, если ребро  $(i, j) \in E$  характеризует направленную связь между узлом  $i$  и узлом  $j$  (например, величину некоторого потока от узла  $i$  к узлу  $j$ , меру влияния узла  $i$  на узел  $j$  и т.п.), и неориентированным, если ребро  $(i, j) \in E$  характеризует ненаправленную связь между узлами  $i$  и  $j$  (например, меру сходства или различия между ними).

Невзвешенный граф  $G$  может быть представлен с помощью матрицы смежности  $A = [a_{ij}]_{N \times N}$ , где  $a_{ij} = 1$ , если  $(i, j) \in E$ , и  $a_{ij} = 0$  в противном случае, а взвешенный – с помощью матрицы весов  $W = [w_{ij}]_{N \times N}$ . При этом предполагается, что все вершины графа пронумерованы и, тем самым, различимы. Граф  $G$  называется полным, если каждая вершина соединена с каждой вершиной, т.е.  $E = V \times V$ . Однако часто под полным графом понимают полный граф без петель. То есть граф, в котором каждая вершина соединена только с каждой другой вершиной.

Исходя из смысла весов ребер, любой взвешенный граф можно представить в виде полного графа, соответствующим образом дополнив матрицу весов (парных связей). Например, если вес  $w_{ij}$  характеризует близость (похожесть) вершин  $i$  и  $j$ , и при этом максимальной близости соответствует значение веса, например, равное 1, то естественно заполнить диагональ матрицы весов единицами (каждая вершина в наибольшей степени похожа сама на себя). Если вес – это расстояние между вершинами (например, расстояние, вычисляемое по какой-либо формуле в пространстве признаков), то вес отсутствующих ребер в исходном графе можно определить как кратно увеличенное максимальное возможное расстояние между вершинами (заменив, таким образом, для практических нужд последующего ана-

лиза бесконечную величину). Диагональ в этом случае – расстояния от каждой вершины до самой себя – естественно заполнить нулями. Если вес  $w_{ij}$  характеризует величину какого-либо потока между вершинами (материального, финансового или информационного), то, наоборот, значения весов отсутствующих ребер в исходном графе естественно заполнить нулями. Аналогичным образом поступают и в том случае, если вес ребер характеризует интенсивность взаимодействия (прямого влияния) одного элемента на другой.

В любом случае, мы имеем конечное множество  $V$  связанных узлов (вершин, элементов, акторов и т.д.) и матрицу  $W = [w_{ij}]_{N \times N}$ , количественно характеризующую парные связи между ними. (Сначала мы рассматриваем только симметричные матрицы связей.) Для определенности будем предполагать, что  $w_{ij} \geq 0, \forall i \neq j, w_{ij} = 0$ .

Рассмотрим произвольное подмножество  $H \subseteq V$ . Определим на каждом таком подмножестве скалярную числовую функцию его элементов

$$(1) \quad \pi(i, H) = \sum_{j \in H} w_{ij}, \quad \forall i \in H.$$

Число  $\pi(i, H)$ , приписываемое этой функцией элементу  $i$  на подмножестве  $H$ , назовем весом элемента  $i$  на  $H$ . Таким образом, вес каждого элемента подмножества  $H$  равен сумме связей этого элемента со всеми элементами того же подмножества. В соответствии с содержательным смыслом весов ребер можно интерпретировать вес  $\pi(i, H)$  как близость элемента и подмножества узлов исходного графа, или как расстояние элемента от подмножества элементов, или как величину суммарного потока от одного узла в группу узлов, или как меру влияния одного узла на подмножество узлов и тому подобное. То есть в данном случае число  $\pi(i, H)$  – это прямой аналог меры степенной центральности (взвешенной), только измеренной не по всей сети, а на некотором подмножестве узлов  $H$  или, можно сказать, измеренной на подграфе исходного графа, определяемом подмножеством узлов  $H$ .

Система функций  $\pi(i, H)$ , так определенных на множестве всех подмножеств множества  $V$ , очевидно, удовлетворяет условию монотонности (напомним, что веса ребер неотрицательны,  $w_{ij} \geq 0$ ). Действительно, для любых двух вложенных подмножеств  $H_1 \subseteq H_2$  и для любого элемента  $i \in H_1$  выполняется неравенство  $\pi(i, H_1) \leq \pi(i, H_2)$ , т.е.

$$(2) \quad \pi(i, H_1) \leq \pi(i, H_2), \quad \forall i, H_1, H_2 : i \in H_1 \subseteq H_2 \subseteq V.$$

Свойство монотонности можно записать и иначе (можно показать, что эти две записи эквивалентны):

$$(3) \quad \pi(i, H \setminus k) \leq \pi(i, H), \quad \forall i \neq k, i, k \in H, \forall H \subseteq V.$$

Такого рода системы названы в [9] монотонными. Существенный вклад в развитие теории таких систем внесли работы [5, 8, 10] и др.

Определим теперь на множестве всех подмножеств множества узлов одну скалярную функцию по следующему правилу

$$(4) \quad F(H) = \min_{i \in H} \pi(i, H), \quad \forall H \subseteq V.$$

Таким образом, функция  $F(H)$  есть величина наименьшей меры центральности подмножества узлов  $H$ . То есть каждое подмножество узлов будем характеризовать не средней, а наименьшей мерой центральности его элементов. Напомним, что мера центральности каждого узла здесь контекстно-зависима, т.е. характеризует связи этого узла с другими узлами только в пределах рассматриваемого подмножества.

Теперь поставим задачу выделить такое наибольшее подмножество  $K$ ,  $K \subseteq V$ , узлов исходного графа, на котором функция  $F(H)$  принимает максимальное значение

$$(5) \quad F(K) = \max_{H \subseteq V} F(H) = \max_{H \subseteq V} \min_{i \in H} \pi(i, H).$$

Подмножества  $K$ ,  $K \subseteq V$ , на которых функция  $F(H)$  принимает максимальное значение, названы в [9] ядрами монотонной системы. В этой же работе показано, что множество всех ядер монотонной системы замкнуто относительно операции объединения множеств, и, тем самым, в любой монотонной системе существует одно наибольшее по вложению ядро.

Иначе говоря, нужно определить такое подмножество узлов  $K$ , в котором даже узел с наименьшей мерой центральности



сти (в пределах этого подмножества) имеет наибольшую меру центральности среди всех подмножеств  $H \subseteq V$ . Можно трактовать это и таким образом, что речь идет о выделении подмножества «наиболее взаимосвязанных (взаимовлияющих)», центральных элементов исходной системы, образующих ее ядро.

Предположим, что вес  $w_{ij}$  характеризует величину какого-либо потока между вершинами (материального, финансового или информационного). Пусть узлы – это субъекты некоторой экономической системы (например, страны Евросоюза), а вес  $w_{ij}$  парной связи характеризует объем торговли (либо только экспорт из  $i$ -й страны в  $j$ -ю, либо весь товарооборот между ними). Тогда ядро  $K$  включает страны с наибольшим внутригрупповым товарооборотом в смысле критерия (5) в составе экономической системы.

Ядра монотонных систем обладают многими замечательными свойствами [4–6, 9, 10], некоторые из которых описаны ниже в разделе 4. Но сначала рассмотрим алгоритм выделения ядра монотонной системы.

### **3. Алгоритм выделения ядра – центрального подмножества элементов взаимосвязанной системы**

За годы, прошедшие с появления теории монотонных систем [9], было предложено несколько различных алгоритмов выделения ядер монотонной системы (см., например, [5] и др.). Экстремальные свойства ядра монотонной системы, разумеется, не зависят от алгоритма, применяемого для его выделения. Здесь дадим краткое описание простейшего алгоритма, следуя работе [6].

В основе алгоритма решения задачи (5) используется процедура построения так называемой определяющей последовательности элементов и выделения в ней наибольшего ядра – определимого множества [9].

Алгоритм описывается рекуррентным образом по шагам.

*Первый шаг.* Положим  $H_1 = V$ . Находим такой элемент  $\alpha_1 \in V$ , что

$$\pi(\alpha_1, V) = \min_{i \in V} \pi(i, V).$$

Элемент  $\alpha_1$  первым «удаляется» из множества  $V$  и объявляется первым элементом выстраиваемой определяющей последовательности<sup>1</sup>. Обозначим его вес  $\pi(\alpha_1, V)$  через  $\delta_1$ . Это число будет использоваться как начальное значение порога для сравнения с весами других элементов, но рассматриваемых уже на множестве  $H_2 = H_1 \setminus \alpha_1$ , на следующем шаге. Сравнение осуществляется для «удаления» других элементов. В то же время значение порога сравнения в дальнейшем будет изменяться.

*k-й шаг.* Пусть после выполнения  $(k - 1)$  шагов алгоритма выстроена последовательность элементов  $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1} \rangle$  и в качестве текущего значения порога для сравнения получено некоторое число  $\delta_{k-1}$ . Обозначим через  $H_k = H_{k-1} \setminus \alpha_{k-1}$  подмножество всех оставшихся  $k$ -му шагу, т.е. еще не включенных в определяющую последовательность, элементов множества  $V$ :

$$H_k = V \setminus \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1} \rangle.$$

Находим такой элемент  $\alpha_k \in H_k$ , что

$$\pi(\alpha_k, H_k) = \min_{i \in H_k} \pi(i, H_k),$$

и производим сравнение его веса с текущей величиной порога  $\delta_{k-1}$ . Если выполняется условие

$$(б) \quad \pi(\alpha_k, H_k) \leq \delta_{k-1}$$

и  $k < N = |V|$ , то переходим к  $(k + 1)$ -му шагу, причем величина порога сохраняется:

$$\delta_k = \delta_{k-1}.$$

В противном случае, т.е. если не выполняется неравенство (б), перед переходом к следующему шагу величина порога изменяется:

$$\delta_k = \pi(\alpha_k, H_k).$$

---

<sup>1</sup> Если таких элементов несколько, то в определяющую последовательность вставляется любой из них. Как показано в работах [5, 9], это не влияет не только на состав выделяемого в последующем наибольшего ядра, но и на состав всех квазиядер – см. далее. Аналогичное свойство имеет место на каждом шаге алгоритма.

В этом случае, очевидно,  $\delta_k > \delta_{k-1}$  (т.е. это неравенство выполняется только для некоторых  $k$ ). Алгоритм заканчивает работу, когда полностью исчерпано исходное множество  $V$ , т.е. все его элементы выстроены в последовательность  $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \rangle$ , которая и названа определяющей. При этом получена также сопутствующая последовательность подмножеств  $\bar{H}$ :

$$\bar{H} = \langle H_1, H_2, \dots, H_N \rangle,$$

где  $H_1 = V$ ,  $H_k = H_{k-1} \setminus \alpha_{k-1}$ , ( $H_N = \alpha_N$ ) а  $\alpha_k$  —  $k$ -й элемент определяющей последовательности. Последовательность элементов  $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \rangle$  и сопутствующая ей последовательность подмножеств  $\bar{H}$  могут быть выстроены не единственным образом, если на некотором шаге оказалось более одного элемента с минимальным весом. Однако, как показано далее, это не мешает решению поставленной задачи.

Выделим из определяющей последовательности  $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \rangle$  специальную подпоследовательность  $\langle \alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_p} \rangle$ , элементы которой определяют шаги алгоритма со сменой значений порога сравнения (положим  $\alpha_{j_1} = \alpha_1$ ). Обозначим общее число таких различных значений порога через  $p$ . Для упрощения дальнейшего рассмотрения введем специальные обозначения для этой последовательности элементов и связанной с ней последовательности подмножеств:

$$(7) \quad \bar{\gamma} = \langle \gamma_1 = \alpha_{j_1}, \gamma_2 = \alpha_{j_2}, \dots, \gamma_p = \alpha_{j_p} \rangle,$$

$$(8) \quad \bar{\Gamma} = \langle \Gamma_1 = H_{j_1}, \Gamma_2 = H_{j_2}, \dots, \Gamma_p = H_{j_p} \rangle.$$

Аналогичным образом переобозначим и числовую последовательность возникающих порогов:

$$(9) \quad \bar{\varepsilon} = \langle \varepsilon_1 = \delta_{j_1}, \varepsilon_2 = \delta_{j_2}, \dots, \varepsilon_p = \delta_{j_p} \rangle,$$

где  $\varepsilon_{j-1} < \varepsilon_j, j = 1, \dots, p$ .

Обозначим через  $K$  соответствующее подмножество  $\Gamma_p = H_{j_p}$ , т.е. подмножество элементов, включенных в определяющую последовательность после последнего изменения зна-

чения порога на  $j_p$ -м шаге, начиная с самого элемента  $\gamma_p$  до конца определяющей последовательности. В [9] доказано, что на подмножестве  $K = \Gamma_p$  функция  $F(H)$  достигает глобального максимума и такое подмножество  $K = \Gamma_p$  единственно<sup>1</sup>. Тем самым множество узлов  $K$  есть решение поставленной задачи о выделении подмножества «наиболее взаимосвязанных (взаимовлияющих)» элементов.

Алгоритм является достаточно простым в вычислительном отношении и поэтому пригоден для обработки больших систем взаимосвязанных элементов.

Для того чтобы наглядно продемонстрировать работу алгоритма, рассмотрим следующий простой пример системы взаимосвязанных элементов, которой соответствует взвешенный граф на рис.1.

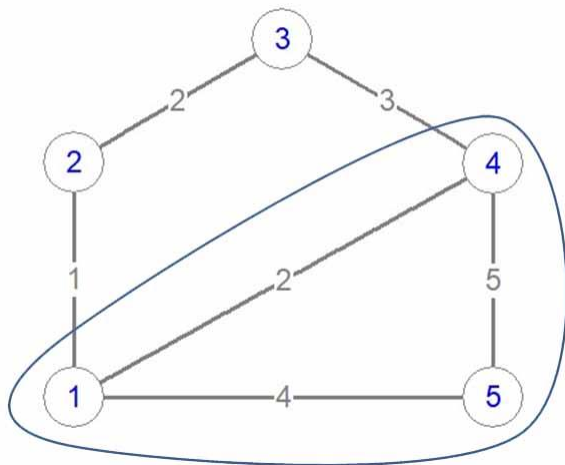


Рис. 1. Пример простейшей системы взаимосвязанных элементов. Ядро выделено плавной кривой

---

<sup>1</sup> В [5] доказано, что, несмотря на произвольный выбор элемента с минимальным весом на каждом шаге алгоритма, в случае, если таких элементов несколько, последовательность квазидер  $\bar{\Gamma}$  также определяется единственным образом.

Описанный алгоритм выделяет на этом взвешенном графе ядро, состоящее из вершин 1, 4 и 5 (т.е. ядро  $K = \Gamma_p = \{1, 4, 5\}$ ). При этом строится определяющая последовательность  $\langle 2, 3, 1, 4, 5 \rangle$ , последовательность множеств  $\bar{\Gamma} = \langle \Gamma_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \Gamma_p = \{1, 4, 5\} \rangle$  и последовательность возрастающих порогов  $\bar{\varepsilon} = \langle \varepsilon_1 = 3, \varepsilon_2 = 6 \rangle$ .

#### 4. Свойства монотонной системы на матрице связей как основа для выделения подмножества ключевых элементов сети

Важная особенность алгоритма состоит в том, что вместе с определением подмножества «наиболее взаимосвязанных» элементов в ходе решения задачи отыскивается система вложенных друг в друга подмножеств  $\bar{\Gamma} = \langle \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_p \rangle$  последнее из которых,  $\Gamma_p$ , является искомым ядром. Эти подмножества обладают особыми свойствами [5, 6, 9].

Прежде всего сделаем два общих замечания, вытекающих непосредственно из самого построения алгоритма решения задачи. Во-первых, последовательность значений порога, выстраиваемая в ходе выполнения алгоритма, строго упорядочена по величине

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots < \varepsilon_j < \varepsilon_{j+1} < \dots < \varepsilon_p,$$

где

$$\varepsilon_j = \min_{i \in \Gamma_j} \pi(i, \Gamma_j) = \min_{i \in \Gamma_j} \sum_{k \in \Gamma_j} w_{ik}.$$

Во-вторых, множества последовательности  $\bar{\Gamma}$  представляют собой точки локальных экстремумов (максимумов) функции  $F$  в последовательности подмножеств  $\bar{H}$ :

$$F(\Gamma_j) = \max_{\Gamma_j \supset H \supset \Gamma_{j+1}} F(H), \quad \forall H \in \bar{H}, \quad j = 1, 2, \dots, p-1,$$

или

$$(10) \quad \left. \begin{aligned} F(H) \leq F(\Gamma_j) = \varepsilon_j \\ F(H) < F(\Gamma_{j+1}) = \varepsilon_{j+1} \end{aligned} \right| \begin{aligned} \forall H \in \bar{H}, \quad \Gamma_j \supset H \supset \Gamma_{j+1}, \\ j = 1, 2, \dots, p-1. \end{aligned}$$

Более того, как это отмечается в [5], соотношения (10) верны для любого подмножества  $H$ ,  $\Gamma_j \supset H \supset \Gamma_{j-1}$ , не обязательно являющегося членом последовательности подмножеств  $\bar{H}$ .

**Теорема 1<sup>1</sup>.** Для любого собственного подмножества  $H$ ,  $\Gamma_j \supset H \supset \Gamma_{j-1}$  справедливо

$$\begin{aligned} F(H) \leq F(\Gamma_j) = \varepsilon_j, & \left| \Gamma_j \supset H \supset \Gamma_{j+1}, \right. \\ F(H) < F(\Gamma_{j+1}) = \varepsilon_{j+1}, & \left. j = 1, 2, \dots, p-1. \right. \end{aligned}$$

Из теоремы 1 следует, что последовательность множеств  $\bar{\Gamma}$  есть последовательность точек строго возрастающих локальных максимумов функции  $F$  на множестве всех подмножеств множества узлов  $V$ . Иначе говоря, в множестве всех подмножеств множества узлов  $V$  как на решетке выделяется последовательность вложенных интервалов подмножеств  $H$ ,  $\Gamma_j \supset H \supset \Gamma_{j-1}$ ,  $j=1, 2, \dots, p-1$ , границы которых служат локальными максимумами функции  $F$ . Последний из этих максимумов является в то же время глобальным. По этой причине подмножества последовательности  $\bar{\Gamma}$  называют также квазиядрами.

Таким образом, функция  $F(H)$  имеет весьма простую структуру: у нее имеется всего  $p \leq N = |V|$  локальных максимумов. Именно эта простота, являющаяся следствием монотонности системы, определяет возможность построения быстрого алгоритма решения задачи (5): алгоритм можно понимать как простую процедуру последовательного перебора всех локальных максимумов функции  $F(H)$ , т.е. квазиядер монотонной системы.

Рассмотренная особенность алгоритма выделения ядра монотонной системы позволяет решать исходную задачу с дополнительными ограничениями. Так, в частности, в условиях задачи может быть априорно указан перечень особых ключевых элементов, которые должны обязательно войти в результирующее центральное подмножество; в другом случае могут быть заданы допустимые размеры искомого подмножества (желательный диапазон). В обоих случаях решением будет наименьшее множество  $\Gamma_j$ , удовлетворяющее соответствующему усло-

---

<sup>1</sup> Доказательства теорем приведены в [6].

вию, т.е., например, наименьшее квазиядро  $\Gamma_j$ , включающее априорно заданные ключевые элементы.

С точки зрения содержательной интерпретации результатов, весьма желательно для оценки качества получаемого решения иметь общие количественные характеристики близости (удаленности, связности, интенсивности взаимодействия и т.д.) элементов ядра  $K$  и однородности их взаимного расположения (взаимосвязей). В качестве таких характеристик предлагается использовать соответственно величины  $F(K)$  и  $Q(K)$ , которые определяются следующим образом:

$$(11) F(K) = \varepsilon_p = \min_{i \in K} \pi(i, K) = \min_{i \in K} \sum_{k \in K} w_{ik}.$$

$$(12) Q(K) = \max_{H \subset K} \max_{i \in K \setminus H} \sum_{k \in H} w_{ik}, \quad H \in \bar{H}, \quad (H \subset K, K \setminus H \neq \emptyset).$$

Величина  $F(K)$ , как уже отмечалось, определяет особый, крайний элемент ядра –  $\gamma_p$  (центр или антицентр ядра, в зависимости от содержательного смысла весов ребер между узлами), а характеристика  $Q(K)$  выделяет некоторую собственную часть  $H'$  ядра  $K = \Gamma_p$ , причем из свойства монотонности следует, что элемент  $\alpha_k \in K \setminus H'$ , такой, что  $\sum_{k \in H'} w_{\alpha k} = \max_{i \in K \setminus H'} \sum_{k \in H'} w_{ik}$ , стоит

непосредственно перед первым элементом  $H'$  в определяющей последовательности. Тем самым, величина  $Q(K)$  определяет некий максимальный разрез ядра  $K$  (в определяющей последовательности).

Целесообразность использования величин  $F(K)$  и  $Q(K)$  в качестве мер общей близости элементов ядра и однородности их взаимосвязей обосновывается тем, что они удовлетворяют определенным соотношениям.

**Теорема 2.** *Мера однородности ядра не превосходит величину порога  $\varepsilon_p = F(K)$ :*

$$Q(K) \leq \min_{i \in K} \sum_{k \in K} w_{ik}.$$

Иными словами, нельзя ядро, расположенное у правого конца определяющей последовательности, разрезать на две части таким образом, чтобы максимальная суммарная связь элемента из одной части («левой») со всеми элементами другой

части («правой») превысила минимальную связь первого элемента ядра со всем ядром  $\varepsilon_p = F(K)$ .

**Теорема 3.** *Минимальная сумма связей какого-либо элемента ядра  $K$  со всеми остальными его элементами, т.е. величина порога  $\varepsilon_p = F(K)$  не меньше максимальной величины парной связи между любыми двумя элементами всего множества  $V$ :*

$$F(K) \geq \max_{i,k \in V} w_{ik}.$$

В отличие от теоремы 2, гарантирующей в определенном смысле «плотность» ядра  $K$ , теорема 3 устанавливает существенное ограничение снизу на величину минимальной связи, т.е. «минимальной взаимосвязанности» элементов в этом множестве.

Введенные с помощью теорем 2 и 3 количественные характеристики взаимосвязанности и однородности (плотности) элементов ядра, т.е. подмножества узлов, на котором функция  $F(H)$  имеет глобальный максимум, можно обобщить для оценки всех локальных экстремумов этой функции. Определим их аналогичным образом:

$$F(\Gamma_j) = \min_{i \in \Gamma_j} \pi(i, \Gamma_j) = \min_{i \in \Gamma_j} \sum_{k \in \Gamma_j} w_{ik}, \quad j = 1, 2, \dots, p-1,$$

$$Q(\Gamma_j) = \max_H \max_{i \in \Gamma_j \setminus H} \sum_{k \in H} w_{ik}, \quad \Gamma_j \supset H \supset \Gamma_{j+1}, \quad H \in \bar{H}, \quad j = 1, 2, \dots, p-1.$$

**Теорема 4.** *Для любого множества  $\Gamma_j$  справедливо следующее неравенство:*

$$Q(\Gamma_j) \leq \min_{i \in \Gamma_j} \sum_{k \in \Gamma_j} w_{ik}, \quad j = 1, 2, \dots, p-1.$$

**Теорема 5.** *Для любого множества  $\Gamma_j$  минимальная сумма связей его элемента со всеми другими его элементами, т.е. величина порога  $\varepsilon_j = F(\Gamma_j)$ , не меньше максимальной величины связи между двумя элементами  $i$  и  $k$ , не принадлежащими множеству  $\Gamma_{j+1}$ , т.е.  $i, k \in V \setminus \Gamma_{j+1}$ ,*

$$F(\Gamma_j) \geq \max_{i,k \in V \setminus \Gamma_{j+1}} w_{ik}, \quad j = 1, 2, \dots, p-1.$$

Теоремы 4 и 5 служат обоснованием возможности использования локальных экстремумов функции  $F$ , т.е. множеств  $\langle \Gamma_j \rangle, j = 1, 2, \dots, p-1$ , в качестве приемлемого решения задачи



выделения подмножества «наиболее взаимосвязанных» элементов для случая, когда на это подмножество накладываются дополнительные априорные ограничения (см. выше). Введенные в этих теоремах меры «взаимосвязанности» и однородности элементов подмножеств, доставляющих локальные максимумы функции  $F$ , и сравнение их с соответствующими характеристиками для глобального максимума указывает, насколько искажается идеальное решение введением дополнительных ограничений.

В заключение рассмотрим теорему 6, устанавливающую, что множества  $\langle \Gamma_j \rangle, j=1, 2, \dots, p-1$ , являются в определенном смысле точками локальных экстремумов также и функционала, равного средней попарной связи между элементами подмножества.

**Теорема 6.** Пусть  $\forall H \subseteq V$

$$(13) f(H) = \frac{1}{|H|(|H|-1)} \sum_{i,k \in H} w_{ik}, \quad \forall H \subseteq V.$$

Тогда справедливы утверждения:

А. Для любого подмножества  $H \subset \Gamma_j, j=1, 2, \dots, p-1$ , с числом элементов  $|H|$ , равным  $|\Gamma_{j+1}|$ , отличающегося от множества  $\Gamma_{j+1}$  не более чем одним элементом, выполняется неравенство

$$(14) f(H) < f(\Gamma_{j+1}).$$

Б. Для любого подмножества  $H \subset \Gamma_j, j=1, 2, \dots, p-1$ , с числом элементов  $|H|$ , равным  $(|\Gamma_{j+1}| + 1)$ , содержащего множество  $\Gamma_{j+1}$ , т.е.  $H \supset \Gamma_{j+1}$ , также выполняется неравенство (14).

Рассмотренные свойства монотонной системы, построенной на матрице связей, предоставляют широкие возможности для содержательных интерпретаций.

*Замечание.* Формальная постановка задачи о выделении подмножества «наиболее взаимосвязанных» элементов и алгоритм ее решения полностью сохраняются и тогда, когда элемент  $w_{ij}$  матрицы связей акторов носит смысл не близости, меры сходства, интенсивности взаимодействия между ними, а расстояния. Задача в этом случае состоит в выделении подмножества «наиболее изолированных», в смысле (5) элементов

множества  $V$ . Более того, весь предложенный подход полностью применим и к анализу сети с несимметричной матрицей связей узлов, не удовлетворяющей неравенству треугольника, а именно, к анализу потоковой матрицы связей.

### **5. Ядро Евросоюза по данным взаимного экспорта стран – членов (2016 год)**

В качестве примера применения предлагаемого подхода рассмотрим задачу выделения ядра Евросоюза по данным об экспорте (внешней торговле товарами) за 2016 год ([www.eurostat.eu](http://www.eurostat.eu)).

Евросоюз – самое известное и наиболее развитое экономическое и социально-политическое объединение стран в мире. На долю ЕС в последние годы приходилось около четверти мирового валового внутреннего продукта (по паритету покупательной способности), и это при том, что доля стран ЕС в мировом населении составляет не более десяти процентов [20]. Совокупный размер ВВП стран ЕС превышает размер ВВП США [11]. Как известно, важнейшей частью экономики является внешняя торговля. Внешнеторговые связи стран – членов Евросоюза не только характеризуют степень вовлеченности их во внутрорегиональный торговый оборот, но и выступают как существенный фактор их регионального единства и развития. Велика роль Евросоюза и в мировой торговле: доля ЕС (с учетом внутрорегиональной торговли) составляет около 40% международной торговли товарами [11, 20]. Однако, несмотря на постоянно развивающийся процесс интеграции, Евросоюз не стал пока полностью однородным образованием. Все чаще идут разговоры о «Европе двух скоростей». И хотя объем и доля внешней торговли внутри объединения у стран – членов Евросоюза последние десятилетия постоянно росли, они развивались по-разному у разных стран ЕС.

Для выявления особенностей торговых отношений государств Евросоюза внутри ЕС применим рассмотренный выше подход.

В этом случае  $V$  – это множество стран – членов Евросоюза,  $|V| = N = 28$ , а  $w_{ij}$  – объем экспорта из страны  $i$  в страну  $j$ . Если взять произвольное подмножество  $H \subseteq V$ , функция (1)

$$\pi(i, H) = \sum_{j \in H} w_{ij}, \quad \forall i \in H$$

будет определять суммарный экспорт из страны  $i$  во все страны подмножества  $H$ .

Таким образом, вес  $\pi(i, H)$  каждого элемента подмножества  $H$  равен сумме объемов экспортных связей этого элемента со всеми элементами того же подмножества, т.е. величине суммарного потока от одного узла в группу узлов, или мере влияния одного узла на подмножество узлов. То есть в данном случае, как уже отмечалось выше, число  $\pi(i, H)$  – это прямой аналог меры степенной центральности (взвешенной), измеренной не по всей сети, а на некотором подмножестве узлов  $H$  (внутригрупповая мера центральности).

Нужно определить такое подмножество узлов  $K$ , в котором даже узел с наименьшей мерой центральности (в пределах этого подмножества) имеет наибольшую внутригрупповую меру центральности среди всех подмножеств  $H \subseteq V$ . Иными словами нужно определить подмножество «наиболее взаимосвязанных (взаимовлияющих)» центральных элементов исходной системы внутренних экспортных связей стран Евросоюза, образующих ее ядро. Таким образом, ядро  $K$  включает страны с наибольшим внутригрупповым товарооборотом в смысле критерия (5) в составе экономической системы Евросоюза.

По данным об экспорте (внешней торговле товарами) стран Евросоюза за 2016 год получены следующие результаты.

В качестве ядра (доставляющего глобальный максимум функционалу (4)) алгоритм выделил следующие страны: *Великобритания, Испания, Италия, Франция, Бельгия, Германия, Нидерланды* (или GB, ES, IT, FR, BE, DE, NL – в двухбуквенной кодировке). Подчеркнем: это выделение сделано не человеком–экспертом, возможно учитывающим всю полноту информации о странах Евросоюза, а предлагаемым формальным алгоритмом

на основе только данных об объемах экспорта товаров из каждой страны в каждую другую страну.

Напомним также, что в предлагаемом подходе очень важен порядок элементов. Более того, важнейшую информацию несет сама определяющая последовательность всех элементов и сопровождающая ее последовательность значений весовой функции  $\pi(i, H)$ , характеризующей сумму внутригруппового экспорта каждой страны  $i$  в страны, расположенные в этой последовательности справа от нее<sup>1</sup> (см. рис. 2):

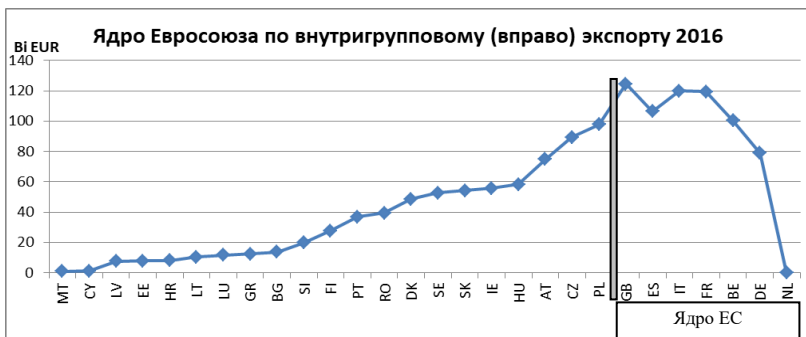


Рис. 2. Ядро Евросоюза по внутригрупповому экспорту 2016

Первым элементом ядра Евросоюза в определяющей последовательности (по данным внутригруппового экспорта 2016 года) стала Великобритания. То есть это как раз первый (особый, крайний) из ключевых элементов европейского сообщества.

Заметим, что механическое удаление Великобритании из состава ядра приводит к его разрушению – никакая другая

<sup>1</sup> Пусть не смущает значение веса, равное нулю, у Голландии: здесь показан суммарный экспорт каждой страны в группу стран, расположенных в последовательности справа от нее. Голландия была включена в последовательность последней, после Германии: это означает, что когда остались только две страны (Германия и Голландия), то экспорт из Германии в Голландию оказался меньше, чем экспорт из Голландии в Германию, и поэтому она (Германия) была включена в определяющую последовательность раньше Голландии, оставшейся последней.

группа стран Евросоюза без Великобритании не дает такое же или большее значение функции (4), характеризующей, как отмечалось выше, минимальную взаимосвязанность группы стран. Напомним, что ядро – это подмножество стран с максимальной среди всех возможных групп стран минимальной внутригрупповой взаимосвязанностью.

Чтобы оценить в целом внутригрупповые и внешние экспортные связи стран ядра рассмотрим следующую таблицу<sup>1</sup>.

Таблица 1. Суммарный экспорт стран – ядра Евросоюза (млрд евро), 2016 год

Страна	Суммарный экспорт внутри ядра Евросоюза	Суммарный экспорт внутри всего Евросоюза	Суммарный экспорт во все страны мира кроме стран ЕС
Великобритания	124,354	174,980	194,459
Испания	126,087	171,666	86,999
Италия	163,312	232,525	183,856
Франция	218,065	268,807	183,767
Бельгия	216,134	260,131	100,681
Германия	410,200	707,545	499,720
Нидерланды	313,074	391,170	124,015
<b>Итого</b>	<b>1571,226</b>	<b>2206,824</b>	<b>1373,497</b>

Легко видеть, что действительно среди группы стран, составляющих ядро Евросоюза, Великобритания имеет наименьший суммарный экспорт в страны ядра, а Германия, как и можно было ожидать, – наибольший. Видим также, что именно и только Великобритания продает в остальные страны мира кроме ЕС больше (194,459 млрд евро), чем внутри Евросоюза

<sup>1</sup> Данные о торговле со странами – не членами Евросоюза в этой работе не участвуют в исследуемой системе взаимосвязанных элементов, а используются для интерпретации состава выделенного ядра.

(174,980 млрд евро). Остальные страны ядра гораздо в большей степени ориентированы на внутригрупповую внешнюю торговлю. Экспорт некоторых из них (Испания, Бельгия, Нидерланды) внутри Евросоюза превышает экспорт в остальной мир более чем вдвое. Трудно представить, чтобы кто-то из них захотел выйти из Евросоюза.

Мера однородности ядра  $Q(K)$ , как оказалось, соответствует разрезу ядра по Италии:

$$Q(K) = 120.$$

Ее значение, близкое по величине к максимальному порогу  $F(K) = 124,4$ , как раз и свидетельствует о том, что крайний элемент ядра – Великобритания – по данным внутригруппового экспорта весьма близок к центру ядра.

Разумеется, здесь представлены только первые, самые поверхностные результаты, в качестве примера применения предлагаемого подхода к сетевому анализу центральности системы взаимосвязанных элементов.

## 6. Заключение

Для анализа той роли, которую играет каждый объект во взаимосвязанной системе («сети»), в социальных и поведенческих науках, в экономике и других областях широко используется концепция центральности. Сеть при этом представляется взвешенным графом, в котором веса связей определяются мерой близости или расстояния (степенью похожести или различия) между объектами или интенсивностью воздействия (влияния) одного объекта на другого, объемом материального, информационного или финансового потока между ними и т.п.

Однако классические индексы центральности и распространенные методы выделения ключевых элементов при помощи ранжирования узлов по величине общесетевого индекса центральности не всегда учитывают структуру сети и, прежде всего, интенсивности прямых и *внутригрупповых* взаимодействий в системе.

Индекс центральности при этом рассматривается как функция одного аргумента – узла, то есть вычисляются для каждой вершины *раз и навсегда* – по всем вершинам сети.

Подход к анализу структуры сети взаимосвязанных элементов, *предлагаемый в данной работе*, имеет *три основные особенности*.

**Первая.** Предлагается использовать контекстно-зависимые меры центральности – на основе внутригруппового взаимодействия элементов сети. *То есть мера (степень) центральности каждого элемента определяется не единожды, по все сети, а зависит от контекста – от того подмножества элементов, для которого рассматривается в данный момент.*

**Вторая.** Для общей интегральной характеристики важности, влиятельности и т.д. некоторой группы вершин предлагается использовать крайние значения индекса центральности вершин этой группы (минимальное или максимальное, а не среднее значение).

**Третья.** Для определения подмножества ключевых узлов сети предлагается использовать алгоритмы специального кластер анализа – алгоритмы выделения ядра монотонной системы. Это не только обеспечивает определение глобального экстремума функционала в соответствующей оптимизационной задаче, но и позволяет более подробно проанализировать структуру сети.

В качестве примера применения предлагаемого подхода рассмотрена сеть экспортных связей стран – членов Евросоюза. Выделенное алгоритмом ядро по данным экспорта за 2016 год включает семь стран: Великобритания, Испания, Италия, Франция, Бельгия, Германия, Нидерланды. Первым (особым, крайним) элементом из подмножества ключевых элементов европейского сообщества оказалась Великобритания, единственная из них, которая продает в остальные страны мира кроме ЕС больше, чем внутри Евросоюза.

## Литература

1. АЛЕСКЕРОВ Ф. Т., БЛАГОВЕЩЕНСКИЙ Н.Ю. [и др.]. *Влияние и структурная устойчивость в российском парламенте (1905–1917 и 1993–2005 гг.)* / Н.Ю. Алескеров, Ф. Т. Благовещенский, Г.А. Сатаров, А.В. Соколова, В.И. Якуба, 2-е изд., Москва: Физматлит, 2009. 312 с.
2. АЛЕСКЕРОВ Ф.Т. [и др.]. *Значимость основных российских и международных экономических журналов: сетевой анализ* // Журнал Новой экономической ассоциации. 2016. № 2 (30). С. 193–205.
3. АЛЕСКЕРОВ Ф.Т., МЕЩЕРЯКОВА Н.Г., ШВЫДУН С.В. *Влияние в сетевых структурах с использованием индексов дальних взаимодействий* // XIII Всероссийская школа – конференция молодых ученых «Управление большими системами». 2016. С. 13–22.
4. ЗАКС Ю.М., МУЧНИК И.Б. *Монотонные системы для построения неполных классификаций конечного множества объектов* // Автоматика и телемеханика. 1989. № 4. С. 155–164.
5. КУЗНЕЦОВ Е.Н., МУЧНИК И.Б., ШВАРЦЕР Л.В. *Монотонные системы и их свойства* // Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях. 1985. С. 29–57.
6. КУЗНЕЦОВ Е.Н. *Анализ структуры матрицы связей с помощью построения на ней монотонной системы* // Автоматика и телемеханика. 1980. № 7. С. 128–136.
7. ЛЕОНИДОВ А.В., РУМЯНЦЕВ Е.Л. *Оценка системных рисков межбанковского рынка России на основе сетевой топологии* // Журнал Новой экономической ассоциации. 2013. № 3 (19). С. 65–80.
8. МАЛИШЕВСКИЙ А.В. *Свойства порядковых функций множеств* // Качественные модели в теории сложных систем. 1998. С. 169–173.
9. МУЛЛАТ И.Э. *Экстремальные подсистемы монотонных систем. I* // Автоматика и телемеханика. 1976. № 5. С. 130–139.



10. МУЧНИК И.Б., ШВАРЦЕР Л.В. *Субмодулярные функции множеств и монотонные системы в задачах агрегирования. I* // Автоматика и телемеханика. 1987. № 5. С. 135–148.
11. РОДИОНОВА И. А.; УМЕРОВА И.А. *Позиции стран-членов ЕС в мировой и внутрорегиональной торговле* // Зарубежный опыт. 2009. № 134 (41). С. 103–108.
12. ALESKEROV F. [и др.]. *Network analysis of international migration* // Математические методы анализа решений в экономике, бизнесе и политике. 2016. (WP7/2016/0). С. 1–55.
13. ALESKEROV F., ANDRIEVSKAYA I., PERMJAKOVA E. *Key borrowers detected by the intensities of their short-range interactions* // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2016. (156). С. 267–280.
14. ALESKEROV F., MESHCHERYAKOVA N., SHVYDUN S. *Centrality measures in networks based on nodes attributes, long-range interactions and group influence* // Mathematical methods for decision making in economics, business and politics. 2016. С. 1–44.
15. BONACICH P. *Power and Centrality: A family of Measures* // American Journal of Sociology. 1987. № 5 (92). С. 1170–1182.
16. BONACICH P., LLOYD P. *Eigenvector-like measures of centrality for asymmetric relations* // Social Networks. 2001. № 3 (23). С. 191–201.
17. LANDHERR A., FRIEDL B., HEIDEMANN J. *A Critical Review of Centrality Measures in Social Networks* // Business & Information Systems Engineering. 2010. № 6 (2). С. 371–385.
18. WASSERMAN S., FAUST K. *Social Network Analysis: Methods and Applications* / S. Wasserman, K. Faust, Cambridge: Cambridge University Press, 1994. 828 с.
19. *Models and Methods in Social Network Analysis*. под ред. P.J.Carrington, J. Scott, S. Wasserman, Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 334 с.
20. *World Trade Statistical Review 2016*. WTO, 2017. 165 с.

## NETWORK INTERACTIONS STRUCTURE ANALYSIS: CONTEXT-SENSITIVE CENTRALITY MEASURES

**Eugene Kuznetsov**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, cand.sc., professor (enkuznetsov@mail.ru).

*Abstract: Classical centrality indexes for the analysis of system of interrelating and interacting objects and widespread methods of key elements detection by ranging nodes on the value of common network centrality index not always consider intensity of intra-group interactions in the system. We offer context-dependent measures of centrality – based on intra-group interaction of elements in the network. Namely the proposed centrality measure of each element depends on the subset of elements for which is considered. For general integrated characteristic of importance, influence, etc. of some group of nodes we offer to use minimum or maximum, but not an average, value of the centrality index of nodes in this group. For definition of subset of key nodes in the network, we offer to use algorithms of special cluster analysis – algorithms for monotone system kernel detection. It not only provides determination of global extremum of functional in the corresponding optimization task, but also allows to analyze structure of network in more detail. As an example of application of the offered approach, the network of export links of the member countries of the European Union is considered. The special front boundary role of United Kingdom in the core of the European Union is revealed.*

**Keywords:** centrality measures, key elements of the interconnected objects system, monotone systems.

УДК 519. 87 + 51-77

ББК 22.176

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Ф.Т. Алескеровым.*

*Поступила в редакцию 17.01.2019.*

*Опубликована 31.07.2019.*

## УПРАВЛЕНИЕ ОГРАНИЧЕННЫМИ РЕСУРСАМИ В ОБОБЩЕННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СЕТЕВЫХ ГРАФИКАХ

Иванов Н. Н.<sup>1</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Рассматривается моделирование процесса управления в реальном времени вычислительной системой с ограниченным числом вычислительных ресурсов. В качестве средства моделирования используется сетевой график. Ограничение числа ресурсов может приводить к образованию очереди готовых к выполнению работ. В данной статье работа ассоциируется с соответствующей дугой сетевого графика. Предложены методы управления ресурсами вычислительной системы для различных дисциплин выполнения работ, находящихся в буфере. В частности, рассмотрены дисциплины FIFO и LIFO, а также одна из эвристических дисциплин. Основой для анализа этих методов служит понятие состояния сетевого графика. Составляющими состояний при этом считаются множество исполняемых работ и множество работ, готовых к исполнению и находящихся в буфере. Состояния сетевого графика образуют конечное дерево состояний, которое служит основой построения имитационных программ. По этим программам пользователь может производить сравнительный анализ рассмотренных алгоритмов управления ресурсами вычислительной системы. Использование предлагаемых алгоритмов моделирования позволяет также пользователю решать задачу об оптимальном выборе числа исполнителей. Решение этой задачи позволяет найти приемлемый компромисс между этим числом и временем выполнения программы в реальном времени.*

Ключевые слова: обобщенный стохастический сетевой график, дерево состояний сетевого графика, буферизация работ, дисциплины FIFO и LIFO, имитационное моделирование.

### 1. Введение

В работе рассматриваются сетевые графики в предположении о том, что времена прохождения отдельных дуг являются случайными временами с известными распределениями [1]. Однако в отличие от традиционных сетевых графиков помимо вершин типа «И» в рассматриваемых графиках допускаются вершины типа «исключенное ИЛИ» с блокировкой дуг [4]. Эти

---

<sup>1</sup> Николай Николаевич Иванов, д.т.н., доцент (ivanov.nni@yandex.ru).

графики в работах автора получили название обобщенных стохастических сетевых графиков (ОССГ) [3].

Существенной особенностью рассматриваемых в данной работе ОССГ является то, что в них число исполнителей, осуществляющих прохождение дуг, может быть меньше степени параллелизма ОССГ [4], что может повлечь за собой наличие буфера готовых к прохождению дуг. Как следствие, это может приводить к необходимости назначать дисциплину выбора на прохождение буферизированных дуг и проводить сравнительный анализ эффективности различных дисциплин с целью выбора наиболее соответствующей используемым критериям качества (как правило, времени) выполнения рассматриваемого ОССГ.

Применительно к вычислительным процессам в управляющих параллельных вычислительных системах (ВС) ОССГ могут рассматриваться как инструмент обеспечения их временной надежности. Это понятие предполагает, что для заданных распределений времени выполнения отдельных работ предварительно может быть смоделировано поведение ОССГ и на его основе сделан вывод о возможности выполнения управляющей программы не более чем за заданное директивное время.

В работах коллектива сотрудников во главе с В.В. Игнатушенко, которые проводились с середины 90-х годов прошлого столетия, рассматривалась подобная задача [5]. Однако ее решение было ограничено предположением об экспоненциальном распределении времен прохождения дуг и способом вычисления времени выполнения сетевого графика с помощью его функции распределения. Отметим также, что во всех этих работах рассматривались сетевые графики классического типа без вершин типа «ИЛИ», что сужало круг решаемых задач.

В работах [5–7] анализ сетевых графиков осуществлялся на основе построения графа состояний [5]. При экспоненциальном распределении времен прохождения дуг этот граф превращался в граф обрывающегося марковского процесса с одним начальным и одним конечным состояниями. Это давало возможность находить функцию распределения времени его выполнения известными методами [5].

В данной работе исходным также является построение для ОССГ (с вершинами обоих типов) графа состояний, представля-

емого в виде дерева [4]. Это потребовало обоснование возможности использования понятия состояние в том виде, в котором оно рассматривалось в [5–7], применительно к ОССГ с ограниченными ресурсами (это обоснование содержится в приложении). В отличие от подхода, принятого в [5–7], последующий анализ проводится для произвольных распределений времени прохождения дуг имитационными методами. Кроме того, существует алгоритмическая возможность строить имитационные программы без построения дерева состояний, а лишь для траекторий, возникающих для конкретных наборов случайных времен прохождения дуг в виртуальном дереве состояний. При этом используется то обстоятельство, что каждому набору случайных времен прохождения дуг в дереве состояний соответствует единственная траектория.

Алгоритм построения дерева состояний учитывает тип проходимых вершин и рассматриваемые дисциплины выбора дуг из буфера. Эти дисциплины могут основываться только на апостериорных знаниях о процессе выполнения сетевого графика. Такими свойствами обладают рассматриваемые ниже алгоритмы управления буфером LIFO, FIFO и алгоритм с использованием заранее назначенных приоритетов дуг.

## **2. Алгоритмы управления, основанные на различных дисциплинах выбора дуги из буфера**

### **2.1. АЛГОРИТМ НА ОСНОВЕ ДИСЦИПЛИНЫ LIFO**

В результате окончания прохождения некоторой дуги в дереве состояний могут возникнуть две возможности: либо свершается некоторое событие, и тогда исходящие из вершины, соответствующей данному событию, дуги получают возможность активации, попадая в буфер, либо в противном случае освобождается один исполнитель, и для дуги, находящейся в буфере (если он не пуст) и попавшей в буфер последней, начинается процесс прохождения. В первом случае из буфера также выбирается дуга, попавшая в него последней. Если таковых дуг больше одной, то выбор дуги может осуществляться в соответствии с выбранным критерием отбора (например, в соответствии с заранее заданными приоритетами). Таким образом, процесс прохожде-

ния состояния на дереве состояний может осуществляться как бы в два этапа за нулевое время. Буфер при этом представляет собой стек.

## 2.2. АЛГОРИТМ НА ОСНОВЕ ДИСЦИПЛИНЫ FIFO

Алгоритм отличается от предыдущего лишь тем, что из буфера на прохождение выбирается дуга, попавшая в него по времени раньше всех остальных. При этом в случае, если таковых более одной, то выбор, как и выше, происходит в соответствии с назначенным критерием отбора. Таким образом, использование данного алгоритма предполагает фиксацию времени поступления дуг в буфер, отсчитываемого с начала выполнения ОССГ. Наиболее просто это решается соответствующим порядком размещения дуг в буфере: пришедшие раньше размещаются левее пришедших позже при графическом представлении дерева состояний.

## 2.3. АЛГОРИТМ НА ОСНОВЕ ПРИОРИТЕТОВ ДУГ

Выбор дуги может происходить на основе заранее назначенных абсолютных приоритетов всех дуг ОССГ. Таким образом, при наличии в буфере  $n$  дуг и  $k$  свободных исполнителей на прохождение будут выбраны  $m$  дуг,  $m = \min\{k, n\}$ , с наивысшими приоритетами.

Назначенные приоритеты вводят на множестве дуг линейный порядок  $\varphi$ , при этом ОССГ на множестве дуг определяет частичный порядок  $\psi$  ( $u\psi v$ , если существует цепочка  $\pi$ , возможно, пустая, направленных дуг такая, что конец дуги  $u$  совпадает с началом цепочки  $\pi$ , а конец цепочки  $\pi$  совпадает с началом  $v$ ). В работе принято, что должно выполняться следующее правило: если две дуги  $u$  и  $v$  находятся в отношении  $\psi$  ( $u\psi v$ ), то приоритет  $u$  должен быть выше приоритета  $v$  ( $u\varphi v$ ). Коротко:  $u\psi v \Rightarrow u\varphi v$ .

Алгоритм на основе приоритетов использовался ранее в работах [5–7]. Приоритеты назначались исходя из расположения вершин сетевого графика, соответствующих некоторым работам, при графическом представлении сетевого графика. При этом более высоким приоритетом обладали вершины, находящиеся выше. Вершины, находящиеся в одном горизонтальном

уровне графика и расположенные левее, наделялись более высоким приоритетом относительно вершин, расположенных правее.

### **3. Имитационное моделирование алгоритмов управления ресурсами**

Предпочтение, которое может отдать пользователь тому или иному алгоритму управления процессом выполнения ОССГ с ограниченными ресурсами, может быть основано на их имитационном моделировании. В рассмотренных выше случаях выбора дуг из буфера для этих целей может быть использовано дерево состояний ОССГ, вид которого зависит от выбранного алгоритма управления ресурсами и определяется общим количеством имеющихся исполнителей и дисциплиной свершения событий, сопоставленных вершинам ОССГ.

Рассматриваемый в качестве примера ОССГ (рис. 1), но с неограниченным числом исполнителей, как это показано в [4], имеет степень параллелизма, равную 4. Там же показано, что при выбранных нами распределениях времен прохождения дуг эта степень параллелизма достижима. Таким образом, для нашей задачи с двумя исполнителями размер буфера достаточно выбрать равным двум.

В качестве дерева состояний для ОССГ, показанного на рис. 1, приведено дерево состояний на рис. 2. В этом ОССГ вершины 2 и 4 имеют тип «ИЛИ» с блокированием дуг [4], а вершины 3 и 5 – тип «И». Выполнение ОССГ происходит с помощью двух исполнителей по дисциплине FIFO. В связи с этим в каждом состоянии дерева состояний присутствуют две компоненты: первая (левая) содержит номера дуг, проходимых в текущий момент времени, их число не может превосходить в данном примере двух; вторая компонента (правая) состоит из номеров дуг, образующих буфер (номера дуг в буфере обозначены жирными цифрами и расположены слева направо в порядке попадания в буфер).

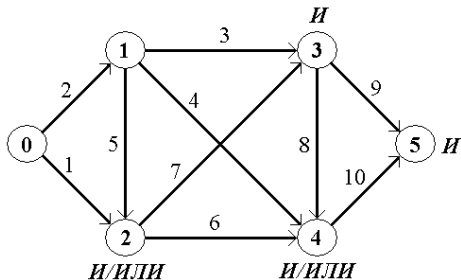


Рис. 1. ОССГ

Номера дуг в ОССГ, приведенном на рис. 1, одновременно являются их абсолютными приоритетами, в соответствии с которыми дуги последовательно размещаются в буфере в строку с возрастанием их номеров слева направо. При наличии в буфере числа дуг, большего чем число свободных исполнителей, выбор дуг на прохождение может происходить, например, по их абсолютным приоритетам (из состояния (1 3 4 5) по дуге 1 выбор на прохождение приобретает дуга 4).

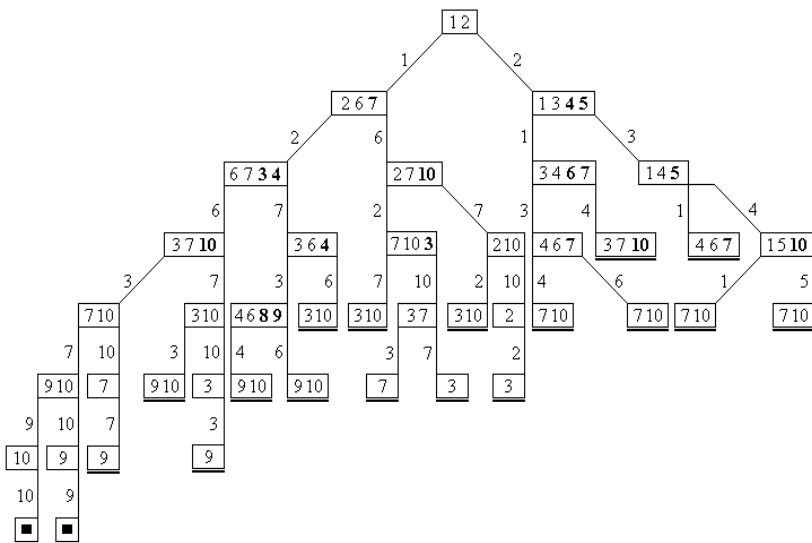


Рис. 2. Дерево состояний ОССГ по рис. 1 (FIFO)



В этом ОССГ при использовании дисциплины LIFO в дереве состояний произойдут существенные изменения, что видно на рис. 3.

Заметим, что на рис. 3 присутствуют состояния (3 6 4 7) и (3 6 7 4), которые различаются порядком прихода дуг 4 и 7 в буфер. По этой причине их продолжения в дереве не совпадают и должны быть построены исходя из того, что при выбранной дисциплине LIFO в последователях этих вершин будут назначены на прохождение либо дуга 4, либо дуга 7.

Использование алгоритма, описанного в разделе 2.3 в соответствии с приоритетами буферизованных дуг, приведет к построению дерева состояний, какое показано на рис. 4.

Дерево состояний для вершин 2 и 4 типа «И» с назначением дуг из буфера на прохождение в соответствии с их приоритетами, представлено на рис. 5.

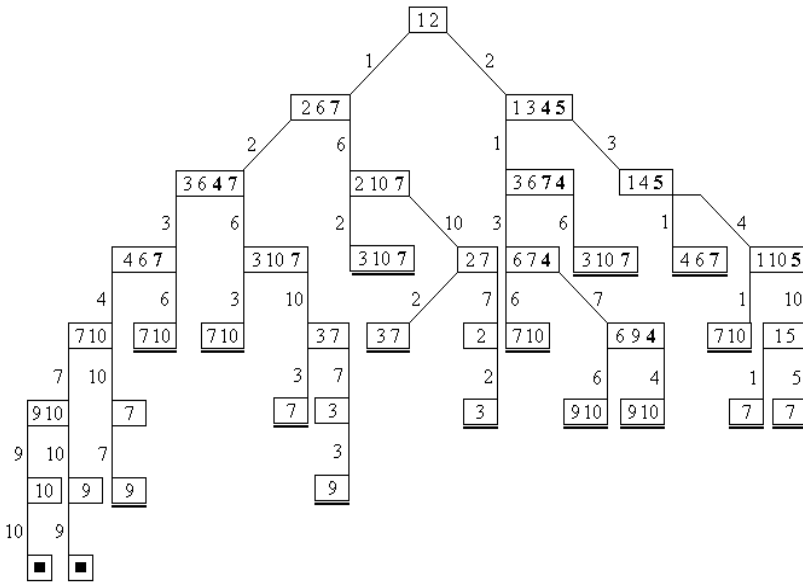


Рис. 3. Дерево состояний ОССГ по рис. 1 (LIFO)

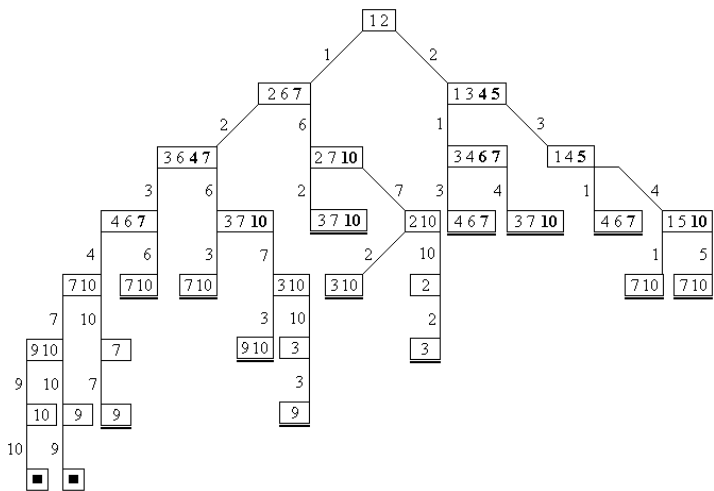


Рис. 4. Дерево состояний ОССТГ по рис. 1 (приоритет)

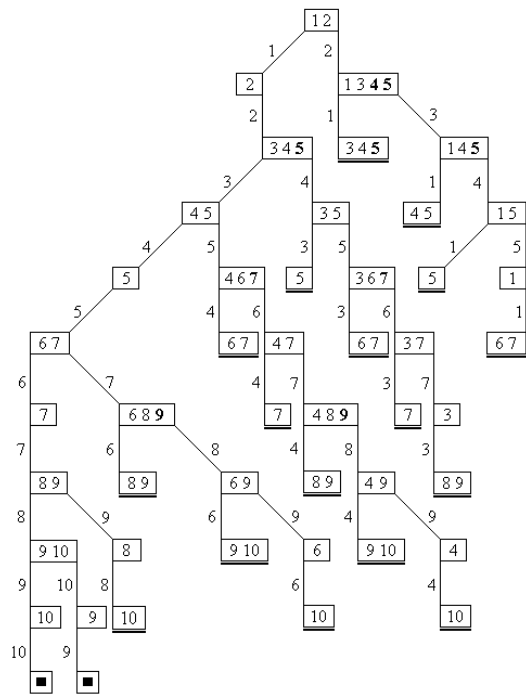


Рис. 5. Дерево состояний ОССТГ по рис. 1 («И», приоритет)

Деревья состояний, вид которых не зависит от набора случайных времен прохождения дуг, могут быть названы инвариантными по отношению к этим наборам, Примерами таких инвариантных деревьев являются деревья, представленные на рис. 2–5. Однако существуют алгоритмы управления ресурсами, которым нельзя поставить в соответствие инвариантное дерево состояний. Например, невозможно построение инвариантного дерева состояний (в рамках принятого в работе определения дерева состояний) в случае, если выбор дуги производится случайным равновероятным образом.

Для алгоритмов управления ресурсами, для которых невозможно построение инвариантного дерева состояний, имитационное моделирование возможно лишь с помощью построения траекторий в виртуальном дереве состояний, соответствующем каждому случайному набору времен прохождения дуг и алгоритму управления ресурсами. Такими алгоритмами могут быть, например, алгоритм случайного равновероятного выбора дуги из буфера или какие-либо эвристические алгоритмы, основанные на апостериорной информации о буферизованных дугах.

Испытаниям подвергался ОССГ при двух исполнителях с вершинами 2 и 4 следующих типов: 1) обе вершины типа «ИЛИ», FIFO, 2) обе вершины типа «ИЛИ», LIFO, 3) обе вершины типа «ИЛИ», приоритеты дуг в соответствии с их номерами на рис. 1, 4) обе вершины типа «И», приоритеты дуг в соответствии с их номерами на рис. 1.

Вычисление оценок вероятностных параметров случайных процессов в ОССГ для всех четырех вариантов сочетаний типов вершин 2 и 4 производилось методом имитационного моделирования. Моделирующие программы строились по инвариантным деревьям состояний (рис. 2–5). Нормальные независимые распределения времен прохождения дуг (полученные по методике, содержащейся в [2]) и их обозначения принимались в соответствии с данными, приведенными ниже.

$$m_{01} = m_{12} = m_{23} = 8, \quad m_{02} = 5,5\sqrt{2}, \quad m_{13} = 6, \quad m_{14} = 6\sqrt{2}, \quad m_{24} = 10\sqrt{2}, \\ m_{34} = 7, \quad m_{35} = 3, \quad m_{45} = 9;$$

$$d_{01} = d_{14} = d_{02} = d_{12} = d_{13} = d_{23} = d_{24} = d_{34} = d_{35} = d_{45} = 1.$$

Заметим, что дерево состояний ОССГ, в котором все вершины типа «И», имеет высоту, равную числу дуг сетевого графика. Такую же высоту будет иметь дерево состояний при наличии вершин типа «ИЛИ» без блокирования входных для них дуг [4]. При наличии вершин типа «ИЛИ» с блокированием дуг высота дерева состояний станет меньше на величину, равную суммарному числу входных дуг в вершины типа «ИЛИ» за вычетом числа таких вершин. Что касается ширины (полного) дерева состояний в его нижней части, то она равна общему числу траекторий.

Результаты статистических испытаний четырех приведенных выше вариантов ОССГ, а также стандартного варианта с вершинами 2 и 4 типа «И» без ограничения ресурсов [8], приведены в таблице 1. В таблице приняты следующие обозначения:  $t$  – оценка среднего времени выполнения ОССГ,  $\sigma$  – среднеквадратическое отклонение этого времени,  $\Delta$  – ширина интервала доверия при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  и числе испытаний  $10^5$ .

Из таблицы 1 видно, что выбор дисциплины назначения на прохождение дуг из буфера влияет на вероятностные характеристики моделируемого ОССГ. Таким образом, пользователь, располагая предложенным инструментом, может подбирать путем сравнительных статистических испытаний наиболее оптимальную дисциплину обслуживания буфера. Таких дисциплин может быть гораздо больше, нежели приведено в статье в качестве примеров применения имитационных средств для оценки эффективности этих дисциплин.

Таблица 1.

Параметр	Стандарт	Варианты ОССГ			
		1	2	3	4
$t$	40,0	30,92	32,92	32,92	46
$\sigma$	0,11	0,11	0,108	0,146	0,121
$\Delta$	$1,36 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$1,34 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$

При сравнении столбцов «Стандарт» и 4 таблицы 1 можно отметить, что уменьшение вдвое по сравнению со степенью па-

раллелизма числа исполнителей увеличивает время выполнения ОССГ лишь на 15%. Следовательно, данный инструмент может быть использован также при решении вопроса об оптимальном выборе числа исполнителей, при котором достигается приемлемый компромисс между этим числом и временем выполнения ОССГ.

Помимо приведенных в таблице 1 вероятностных характеристик времени выполнения сетевого графика имитационное моделирование дает возможность находить интересные для пользователя величины, такие как максимальное время выполнения графика при используемом числе прогонов, относительную частоту выполнения графика за время, не превышающее заданное директивное время, оценку числа используемых исполнителей, медиану статистического ряда времен выполнения сетевого графика и т.п.

### **3. Заключение**

Рассмотрена методика имитационного моделирования с помощью обобщенного стохастического сетевого графика процесса управления в реальном времени вычислительной системой с ограниченным числом вычислительных ресурсов. Методика имеет целью обеспечить пользователя возможностью выбирать оптимальную дисциплину обслуживания буфера готовых к прохождению дуг. Методика позволяет также решать задачу об оптимальном выборе числа исполнителей, при котором достигается приемлемый компромисс между этим числом и временем выполнения ОССГ.

Основой построения имитационной модели служит инвариантное или виртуальное дерево состояний ОССГ, вид которого зависит от выбранного алгоритма управления ресурсами и определяется общим количеством имеющихся исполнителей, а также (для неинвариантных деревьев) дисциплиной свершения событий, сопоставленных вершинам ОССГ.

## Приложение

Описание эволюции ОССГ с ограниченными ресурсами в процессе его исполнения предполагает, что в этой модели используется введенное ранее понятие дерева состояний. Представляется важным выбрать такой набор параметров, который позволяет не избыточно и однозначно представлять состояние ОССГ в произвольный момент времени его выполнения.

Предварительно введем следующие обозначения:

П – множество дуг, не готовых к выполнению;

Б – множество дуг, находящихся в буфере;

И – множество дуг, проходимых в рассматриваемый момент времени;

Х – множество дуг, пройденных к рассматриваемому моменту времени (пройденными будут считаться также дуги, являющиеся входными для пройденных вершин типа «ИЛИ», см. ниже);

Е – множество всех дуг ОССГ.

Имеют место следующие соотношения между этими множествами:

1) множества П, Б, И и Х попарно не пересекаются,

2)  $P \cup B \cup I \cup X = E$ .

Под состоянием ОССГ в рассматриваемый момент времени будем понимать четверку, составленную из множеств П, Б, И, Х.

Примем во внимание следующие посылки:

а) знание множества Х позволяет по ОССГ однозначно найти  $B \cup I$ ;

б) знание суммы  $B \cup I \cup X$  позволяет однозначно определить  $P = E \setminus (B \cup I \cup X)$ .

Очевидно, что по каждому отдельно взятому множеству П, Б, И или Х не могут быть восстановлены остальные составляющие четверки. Таким образом, в качестве минимального набора, составленного из множеств П, Б, И и Х, может быть лишь набор, содержащий не менее двух из этих множеств.

Из перечисленных выше посылок следует, что пара {Х, И} является исчерпывающей для описания состояния ОССГ, по-

скольку по ней может быть однозначно определена четверка  $\{\Pi, B, I, X\}$ .

Однако такое не избыточное представление состояния ОССГ не единственное. Во-первых, как это следует из упомянутых посылок, таковой парой может служить также пара  $\{X, B\}$ . Во-вторых, покажем, что для однозначного и наименее объемного описания состояния ОССГ может быть применена пара  $\{B, I\}$ .

Конфигурация ОССГ, рассматриваемая ниже, будет предполагать, что из всех входных дуг каждого пройденного к рассматриваемому моменту времени состояния типа «ИЛИ» будет оставлено лишь одно, соответствующее наиболее раннему прохождению. Остальные дуги, входящие в это состояние, блокируются и удаляются из ОССГ.

Вопрос, возникающий из представления состояния ОССГ в виде пары  $\{B, I\}$ , заключается в том, как могут быть восстановлены составляющие  $X$  и  $\Pi$ .

Знание множества  $B \cup I$  дает возможность однозначно построить «ядро» множества  $X$  – множество  $\tilde{X}$ , определяемое как  $\tilde{X} = \bigcup_{a \in B \cup I} \{\tilde{a}\}$ , где  $\tilde{a}$  – предшественник (непосредственный или более высокого ранга) дуги  $a$ . Таким образом, вопрос сводится к определению разности  $X \setminus \tilde{X}$ .

Рассмотрим произвольную дугу  $a \notin B \cup I \cup \tilde{X}$ . Если она имеет хотя бы одного предшественника из  $B \cup I$ , то  $a \notin X \setminus \tilde{X}$  и, следовательно,  $a \in \Pi$ . В противном случае, если все непосредственные предшественники этой дуги содержатся в  $\tilde{X}$ , то  $a \in X \setminus \tilde{X}$ . Рассмотрев таким способом все дуги  $a \notin B \cup I \cup \tilde{X}$ , построим множество  $\tilde{\tilde{X}}$ , добавив к ядру все те дуги, которые содержатся в  $X \setminus \tilde{X}$ . Продолжим этот процесс для всех дуг  $a \notin B \cup I \cup \tilde{\tilde{X}}$  до тех пор, пока  $\tilde{\tilde{X}}$  не сможет быть пополнено новыми дугами. Итогом такого построения будет множество  $X = \tilde{\tilde{X}}$ .

Множество  $\Pi$  определится как  $\Pi = E \setminus (B \cup I \cup X)$ .

Итак, в нашем распоряжении существуют три возможности не избыточно описывать состояния ОССГ. Очевидно, предпочтение следует отдать паре  $\{B, I\}$ , поскольку в ней компонента  $B$  ведет себя в отличие от  $X$  более «спокойно» ( $|X|$  растет по мере приближения к концу эволюции ОССГ).

### Литература

1. ГОЛЕНКО-ГИНЗБУРГ Д.И. *Стохастические сетевые модели планирования и управления разработками*. – Воронеж: Научная мысль, 2010. – 283 с.
2. ЕРМАКОВ С.М., МИХАЙЛОВ Г.А. *Статистическое моделирование*. – М.: Наука, 1982. – 296 с.
3. ИВАНОВ Н.Н. *Аналитико-имитационное моделирование обобщенных стохастических сетевых графиков // Управление большими системами*. – 2015. – Вып. 53. – С. 27–44.
4. ИВАНОВ Н.Н. *Степень параллелизма обобщенных стохастических сетевых графиков // Управление большими системами*. – 2017. – Вып. 65. – С. 6–23.
5. ИВАНОВ Н.Н., ИГНАТУЩЕНКО В.В., МИХАЙЛОВ А.Ю. *Статическое прогнозирование времени выполнения комплексов взаимосвязанных работ в многопроцессорных вычислительных системах // Автоматика и телемеханика*. – 2005. – №10. – С. 89–103.
6. ИВАНОВ Н.Н., ИГНАТУЩЕНКО В.В., МИХАЙЛОВ А.Ю. *Вычисление оценок распределения времени выполнения комплексов взаимосвязанных работ в многопроцессорных вычислительных системах // Труды Института проблем управления*. – 2006. – Т. XXVII. – С. 124–135.
7. ИВАНОВ Н.Н. *Статическое прогнозирование времени выполнения комплексов взаимосвязанных работ в многопроцессорных вычислительных системах при неэкспоненциальных распределениях времени выполнения задач // Труды Института проблем управления*. – 2005. – Т. XXVI. – С. 57–72.



8. ИВАНОВ Н.Н. Алгоритмы управления ресурсами в обобщенных стохастических сетевых графиках // Управление большими системами. – 2018. – Вып. 73. – С. 95–107.

## ALGORITHMS OF RESOURCE MANAGEMENT IN GENERALIZED STOCHASTIC NETWORKS

**Nikolay Ivanov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Doctor of Science (ivanov.nni@yandex.ru).

*Abstract: The modeling of the control process in real time by a computing system with a limited number of computing resources is considered. Networking is used as a modeling tool. Limiting the number of resources can lead to the formation of queues ready to work. In this article, the work is associated with the corresponding arc of the network. Methods are proposed for managing the resources of a computing system for various disciplines of performing work that are in the buffer. In particular, the FIFO and LIFO disciplines are considered, as well as one of the heuristic disciplines. The basis for the analysis of these methods is the concept of network state. The components of the state are considered to be a set of executed works and a set of works that are ready for execution and are in the buffer. Network graphics states form a finite state tree, which serves as the basis for building simulation programs. Using these programs, the user can make a comparative analysis of the considered resource management algorithms of the computing system. Using the proposed simulation algorithms also allows the user to solve the problem of the optimal choice of the number of performers. The solution to this problem allows us to find an acceptable compromise between this number and the program execution time in real time.*

Keywords: the generalized stochastic network, the state tree of the network, the execution time of the network, simulation.

УДК 519.179.2

ББК 22.176 + 65.23

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.А. Лазаревым.*

*Поступила в редакцию 28.03.2019.*

*Опубликована 31.07.2019.*

# ИСКУССТВЕННЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ АНАЛИЗА КОМПОНЕНТНОГО СОСТАВА ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ

Брокарев И.А.<sup>1</sup>

(РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина)

*Приведена постановка задачи анализа компонентного состава природного газа. Предложено применение статистического метода для решения поставленной задачи анализа компонентного состава газа. Описаны основные этапы разработки статистической модели для анализа компонентного состава природного газа. Приведены результаты корреляционного анализа, проводимого для выбора входных и выходных параметров для статистической модели. Описаны основные статистические модели, используемые для решения задач анализа компонентного состава газовых смесей. Для решения исследуемой задачи предложено применить искусственные нейронные сети и алгоритм обучения Левенберга – Марквардта. Приведено описание алгоритма обучения Левенберга – Марквардта с учетом возможных модификаций данного алгоритма. Описана архитектура предлагаемой нейросетевой модели для решения задачи анализа компонентного состава газа. Приведены диапазоны газовых смесей, используемые в обучающей и тестовой выборках. Приведены точностные характеристики работы предлагаемой модели. На основе рассчитанных точностных характеристик модели сделан вывод об адекватности применения выбранной архитектуры нейросетевой модели. Приведены результаты использования предлагаемой нейросетевой модели для получения искомого компонентного состава по измерениям физических параметров газа. Приведены дальнейшие направления исследования в области разработки предлагаемого метода анализа компонентного состава природного газа.*

Ключевые слова: нейросетевой анализ, алгоритм Левенберга – Марквардта, анализ компонентного состава, природный газ.

## 1. Введение

В настоящее время искусственный интеллект используется в решении множества прикладных задач. Одним из важных направлений искусственного интеллекта являются статистические модели. Среди большого разнообразия статистических моделей выделяют искусственные нейронные сети (ИНС) – математические модели, построенные по принципам организации и функционирования биологических нейронных сетей.

---

<sup>1</sup> Иван Андреевич Брокарев, аспирант ([brokarev.i@gubkin.ru](mailto:brokarev.i@gubkin.ru)).

Одним из главных преимуществ нейронных сетей перед традиционными алгоритмами является возможность их обучения для совершенствования способности ИНС выявлять сложные зависимости между входными и выходными данными.

В связи с модернизацией и интеллектуализацией нефтегазовой промышленности, а также со сложностью решения промышленных задач традиционными методами в данной отрасли существует большое число примеров применения нейросетей, в частности, для прогнозирования работы скважин [8, 16], при обработке экспериментальных данных процесса коксования [5], прогнозирования эффективности технологических процессов [3, 6, 7], оптимизации процесса добычи нефти [11], а также в большом количестве других направлений [9].

Одной из перспективных задач, в которых возможно применение ИНС, является задача анализа компонентного состава природного газа. Смещение газов из разных месторождений и источников в процессе транспортировки и хранения приводит к изменениям компонентного состава природного газа на местах эксплуатации или учета природного газа. Поскольку компонентный состав газа определяет показатели качества газа, для правильной и оптимальной эксплуатации, учета и транспортировки природного газа трубопроводным транспортом становятся необходимыми измерение или расчет определенных свойств природного газа. Это делает актуальной задачу определения компонентного состава газа в реальном масштабе времени, для решения которой в настоящее время разрабатываются корреляционные методы анализа качества газа [4, 10]. В такого рода методах зачастую используются статистические модели, в частности ИНС, для определения искомых свойств и состава природного газа по измерениям физических параметров газа.

В данной статье рассмотрена предлагаемая нейросетевая модель для определения компонентного состава газа.

## **2. Нейросетевая модель для решения задачи анализа компонентного состава газовых смесей**

Разработка модели для решения задачи анализа компонентного состава газовых смесей включает в себя ряд последова-

тельных этапов, а именно: выбор данных для обучения модели, выбор архитектуры модели, выбор метода обучения модели, оценка точности работы модели.

Первый этап заключался в выборе входных и выходных данных для модели. Критериями для выбора входных физических параметров являлись наличие взаимосвязи между данным параметром газа и компонентным составом, а также возможность измерения данного параметра коммерчески доступными и относительно недорогими измерительными приборами [13, 18]. Для определения взаимосвязи параметров и компонентного состава природного газа был проведен корреляционный анализ для проверки взаимозависимостей внутри множеств входных и выходных параметров и связи их между собой с целью устранения возможной мультиколлинеарности параметров – линейной взаимосвязи двух или нескольких переменных. Мультиколлинеарность может привести к нежелательным последствиям, так как при этом оценки параметров становятся ненадежными, т.е. возрастает стандартная ошибка, и становится невозможным определить изолированное влияние факторов на результирующий показатель. В качестве входных параметров необходимо использовать те показатели, которые имеют высокую корреляцию с выходными параметрами и низкую корреляцию между собой. По результатам корреляционного анализа, которые показаны в таблице 1, в качестве входных параметров были выбраны концентрация диоксида углерода, скорость звука и коэффициент теплопроводности. В качестве выходных параметров использовались подлежащие определению концентрации компонентов газовой смеси. На рис. 1 показаны результаты корреляционного анализа для параметров, которые не были выбраны в качестве входных по причине низкой корреляции (скорость звука на данном графике показана в качестве референсного параметра для сравнения). На рис. 2 показаны результаты корреляционного анализа для параметров, которые были выбраны в качестве входных по причине высокой корреляции.

Необходимо отметить, что перед обучением модели данные подвергаются кросс-валидации, т.е. перекрестной проверке – методу оценки аналитической модели и её поведения на независимых данных. Данная процедура заключается в следующем:

имеющиеся в наличии данные разбиваются на  $k$  частей, затем на  $k - 1$  частях данных производится обучение модели, а оставшаяся часть данных используется для тестирования модели. Процедура повторяется  $k$  раз; в итоге каждая из  $k$  частей данных используется для тестирования. В результате получается оценка эффективности выбранной модели с наиболее равномерным использованием имеющихся данных. Для данной задачи выборка размером  $N = 711480$  элементов разбивалась на  $k = 10$  частей. Также обучающая выборка перед тренировкой подвергалась процедуре нормализации с целью улучшения результатов прогноза исследуемой нейросетевой моделью. Диапазоны входящих в обучающую выборку компонентов показаны в таблице 2.

*Таблица 1. Коэффициенты корреляции входных физических параметров по отношению к содержанию компонентов газа*

	Скорость звука, с, м/с	Коэффициент теплопроводности, $\chi$ , мВт/(м·К)	Содержание метана, %	Содержание азота, %	Содержание диоксида углерода, %	Содержание этана, %	Содержание пропана, %
Скорость звука, с, м/с	1	0,99	0,93	-0,24	-0,61	-0,33	-0,67
Коэффициент теплопроводности, $\chi$ , мВт/(м·К)	0,99	1	0,91	-0,15	-0,53	-0,45	-0,71
Содержание метана, %	0,93	0,91	1	-0,52	-0,52	-0,48	-0,49
Содержание азота, %	-0,24	-0,15	-0,52	1	0	0	0
Содержание диоксида углерода, %	-0,61	-0,53	-0,52	0	1	0	0
Содержание этана, %	-0,33	-0,45	-0,48	0	0	1	0
Содержание пропана, %	-0,68	-0,75	-0,49	0	0	0	1

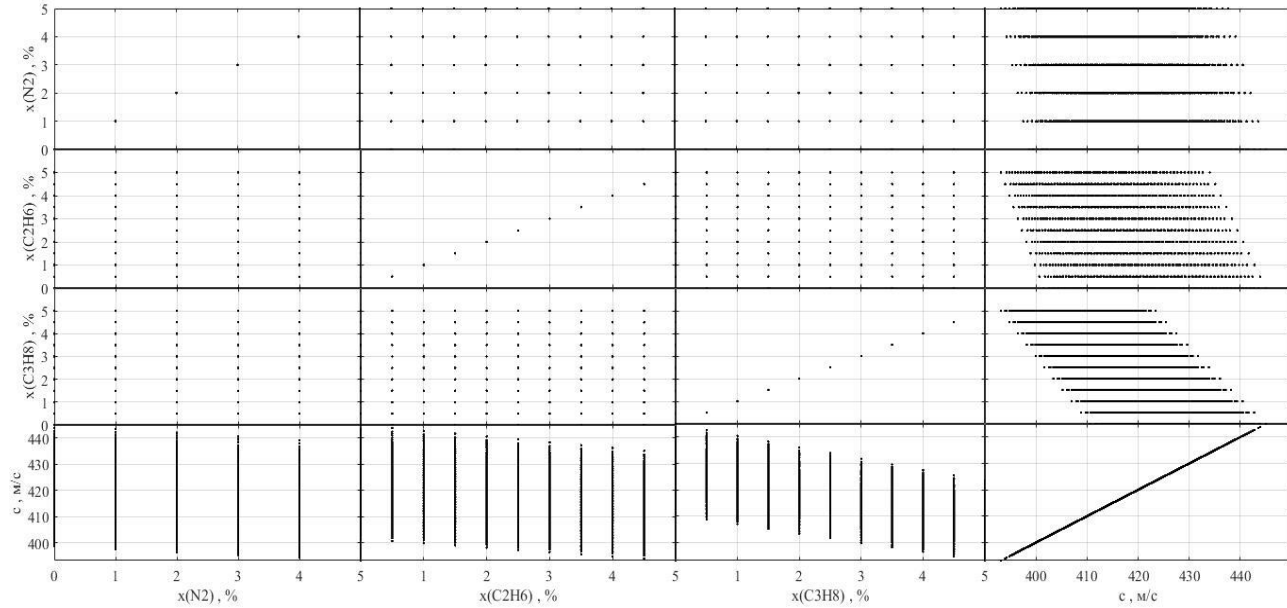


Рис. 1. Результаты корреляционного анализа для невыбранных параметров

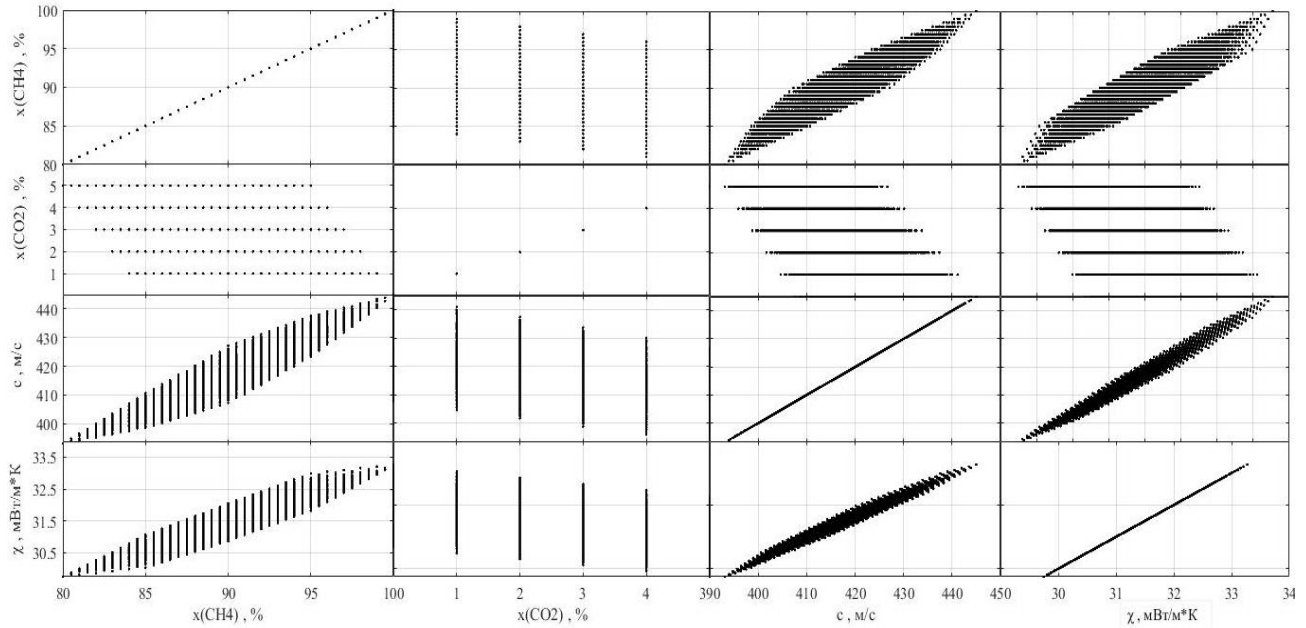


Рис. 2. Результаты корреляционного анализа для выбранных параметров

Таблица 2. Диапазоны газовых смесей для обучающей выборки

Компонент	Молярная доля, %
Метан	80 – 100
Этан	0 – 5
Пропан	0 – 5
Диоксид углерода	0 – 5
Азот	0 – 5

В качестве статистических моделей для решения задачи анализа качества газа могут быть использованы различные модели:

- Многопараметрическая линейная регрессия может служить референсной моделью. Она используется для получения результата, который будет взят для сравнения точности других моделей с регрессионной. Для данной модели необходимо отдельно производить расчет для каждого компонента исследуемой газовой смеси, что неэффективно при наличии других моделей.
- Модель на основе метода опорных векторов (support vector machine – SVM). Это набор схожих алгоритмов обучения с учителем, использующихся для задач классификации и регрессионного анализа. Основная идея метода – перевод исходных векторов в пространство более высокой размерности и поиск разделяющей гиперплоскости с максимальным зазором в этом пространстве. Данная модель не была выбрана по причине наличия существенных недостатков, в частности сложной интерпретации параметров модели и применения только для решения задач с двумя классами.
- Нейросетевая модель.

Нейросетевую модель предлагается использовать в качестве основной статистической модели в рассматриваемой задаче. Для решения поставленной задачи в качестве архитектуры модели использовалась трехслойная сеть (многослойный персептрон), включающая в себя два нейрона во входном слое – по числу компонент входного вектора, одиннадцать нейронов во втором слое и четыре нейрона в выходном слое – по числу компонентов



выходного вектора. Входной слой представляет собой вектор  $X = \{x_0, x_1, x_2\}$ . Нейроны каждого следующего слоя связаны с нейронами предыдущего слоя, причем каждый входной сигнал имеет определенный вес, который в данном случае одинаков для всех входных нейронов в силу равной важности всех входных величин. У каждого нейрона есть функция активации, аргументом которой является входной сигнал нейрона. У нейронов скрытого слоя функция активации сигмоидальная в виде гиперболического тангенса, у нейронов выходного слоя – линейная. В качестве обучающего алгоритма выбран алгоритм Левенберга – Марквардта (Levenberg – Marquardt) [2]. Данный алгоритм используется для оптимизации параметров нелинейных регрессионных моделей. Отметим, что в данном алгоритме критерием оптимизации является среднеквадратичная ошибка модели на обучающей выборке. Основная идея алгоритма состоит в том, чтобы достичь искомого локального оптимума путем приближения к нему заданных начальных значений параметров.

Пусть заданы регрессионная выборка, т.е. множество пар свободной переменной  $X$  и зависимой переменной  $Y$ , и регрессионная модель – непрерывно дифференцируемая функция  $F$ . Требуется найти такое значение вектора параметров  $W$ , в котором функция ошибки  $F_\varepsilon$  достигает своего локального минимума:

$$(1) \quad F_\varepsilon = \sum_{i=1}^N (Y_i - F(X_i, W))^2 .$$

На первой итерации алгоритма задается начальный вектор параметров  $W_0$ . На каждой следующей итерации вектор заменяется на вектор  $W_0 + \Delta W$ . Для оценки приращения  $\Delta W$  используется приближение функции  $F$ :

$$(2) \quad F(W_0 + \Delta W, X) - F(W_0, X) = J * \Delta W ,$$

где  $J$  – якобиан функции  $F$ .

Приращение  $\Delta W$  в точке, доставляющий минимум функции  $F_\varepsilon$ , равно нулю, поэтому для нахождения последующего значения приращения  $\Delta W$  необходимо приравнять нулю вектор частных производных функции  $F_\varepsilon$  по  $W$ . Для этого  $F_\varepsilon$  необходимо представить в следующем виде и раскрыть скобки:

$$(3) \quad F_\varepsilon = |Y - F(W + \Delta W)|^2.$$

$$(4) \quad F_\varepsilon = (Y - F(W + \Delta W))^T * (Y - F(W + \Delta W)) + Y^T * Y - 2 * Y^T * F(W + \Delta W).$$

Дифференцируя данное выражение по  $W$ , получим выражение

$$(5) \quad \frac{\partial F_\varepsilon}{\partial W} = J^T * J * \Delta W - J^T * (Y - F(W)).$$

Приравняв частную производную к нулю, можем получить значение  $\Delta W$ :

$$(6) \quad \Delta W = (J^T * J)^{-1} * J^T * (Y - F(W)).$$

Для рассматриваемого алгоритма важным является следующий параметр – число обусловленности матрицы, которое показывает, насколько матрица близка к матрице неполного ранга (для квадратных матриц – к вырожденности). Учитывая, что число обусловленности матрицы  $J^T * J$  равно квадрату числа обусловленности матрицы  $J$ , то матрица  $J^T * J$  может оказаться вырожденной. По этой причине в данном алгоритме введен параметр регуляризации  $\lambda \geq 0$ . Данный параметр выбирается на каждой итерации алгоритма. Учитывая параметр регуляризации, выражение для  $\Delta W$  примет вид:

$$(7) \quad \Delta W = (J^T * J + \lambda * E)^{-1} * J^T * (Y - F(W)),$$

где  $E$  – единичная матрица.

Возможна модификация данного метода [14]: параметр регуляризации умножается на матрицу  $D$  – диагональную матрицу с элементами, совпадающими с диагональными элементами матрицы  $J^T * J$ . Данный подход применяется для снижения влияния параметра регуляризации на значение  $\Delta W$ . Необходимо, однако, отметить, что недостатком рассматриваемого алгоритма является низкая сходимость при постоянной длине шага. Эта проблема решается путем ввода коэффициента  $K$ , который определяет длину шага и увеличивает сходимость метода. Учитывая две описанные поправки, выражение для  $\Delta W$  примет следующий вид:

$$(8) \quad \Delta W = K * (J^T * J + \lambda * D)^{-1} * J^T * (Y - F(W)).$$

Значение вектора  $W$  на последней итерации алгоритма считается искомым. Оно достигается либо в случае если рассчитан-

ное приращение  $\Delta W$  меньше заданного значения  $\Delta W_{set}$ , либо если значение функции ошибки  $F_e$  меньше заданной величины  $F_{e\,set}$  при данном значении вектора  $W$ .

Архитектура используемой нейросетевой модели показана на рис. 3. Количество нейронов во входном слое  $n = 3$  для случая, когда в векторе входных параметров присутствуют концентрация диоксида углерода, скорость звука и теплопроводность. Количество нейронов в скрытом слое  $k = 11$  для данной конкретной модели и выбрано в соответствии с анализом различных моделей. Количество нейронов в выходном слое  $m = 4$  для случая пятикомпонентной газовой смеси.  $W_i$  и  $b_i$  – весовые коэффициенты и коэффициенты смещения для скрытого слоя,  $W_j$  и  $b_j$  – для выходного слоя.

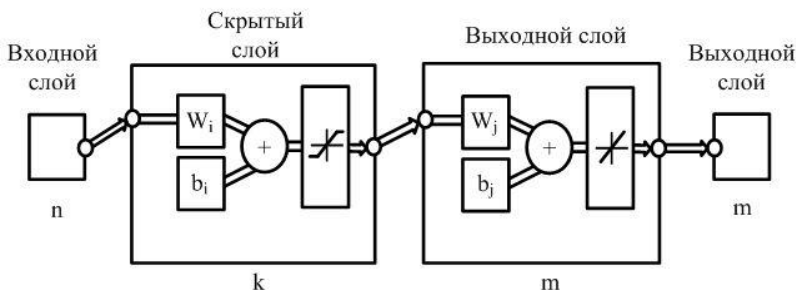


Рис. 3. Архитектура предлагаемой нейросетевой модели

Следующий шаг заключается в обучении созданной сети на сформированных заранее теоретических данных с использованием рассмотренного выше алгоритма Левенберга – Марквардта. Перед этим необходимо задать критерий окончания обучения, например, максимальное значение отклонения, при котором обучение будет считаться законченным. В нашем случае для получения оценки вычисляется сумма квадратичных отклонений выходов сети от истинных значений. Также при обучении модели одним из критериев окончания обучения может выбираться максимальное количество циклов обучения, но, как видно из рис. 4, выбор такого критерия приводит к неэффективному увеличению времени обучения.

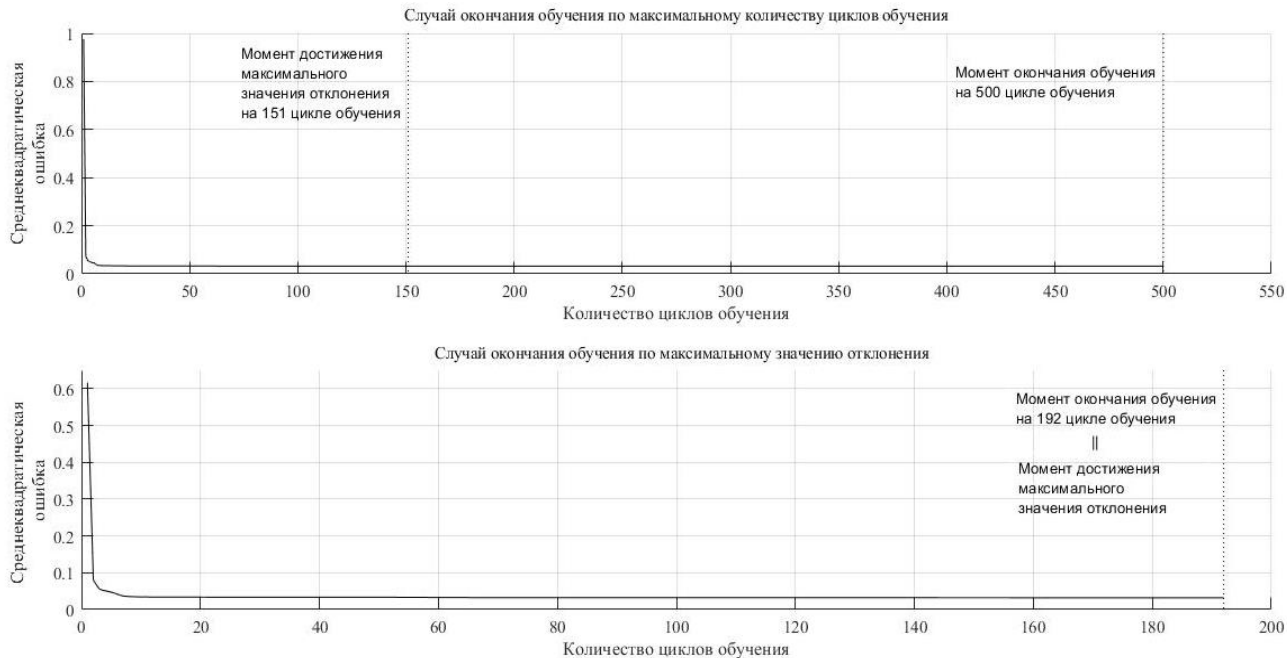


Рис. 4. Случаи окончания обучения для разрабатываемой нейросетевой модели

После успешного окончания обучения полученная нейросетевая модель тестируется на данных, которые не участвовали в тренировке модели. Затем для оценки точности работы модели рассчитываются следующие точностные параметры:

- Максимальная абсолютная погрешность:

$$(9) \Delta Y = \max[|Y_{out} - Y_{target}|],$$

где  $Y_{out}$  – значения выхода нейросети,  $Y_{target}$  – целевые значения параметра.

- Средняя абсолютная погрешность:

$$(10) \Delta Y = \text{avg}[|Y_{out} - Y_{target}|].$$

- Максимальная относительная погрешность (в %):

$$(11) \delta_Y = \max\left[\frac{|Y_{out} - Y_{target}|}{Y_{target}}\right].$$

- Средняя относительная погрешность (в %):

$$(12) \delta_Y = \text{avg}\left[\frac{|Y_{out} - Y_{target}|}{Y_{target}}\right].$$

- Среднеквадратическое отклонение:

$$(13) MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{out} - Y_{target})^2}{n}.$$

• Коэффициент детерминации – параметр, показывающий насколько исследуемая модель соответствует данным. Равенство коэффициента детерминации единице означает, что данные в точности описываются рассматриваемой моделью:

$$(14) R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{out} - Y_{target})^2}{\left(\sum_{i=1}^n Y_{out} - \frac{\sum_{i=1}^n Y_{out}}{n}\right)^2}.$$

По перечисленным параметрам делается вывод о возможности использования модели для решения исследуемой задачи. В случае если модель обладает низкими точностными характе-

ристиками, повторяется этап обучения модели либо применяется другая архитектура модели.

### 3. Применение разработанной нейросетевой модели

По результатам проведенного исследования была получена нейросетевая модель для расчета компонентного состава газа по измеряемым физическим параметрам. Для проверки точности работы предложенного метода было проведено исследование на тестовой выборке данных. Данная выборка включала данные, которые не участвовали в обучении нейросетевой модели. Тестовая выборка включала 4356 газовых смесей, диапазоны входящих в нее компонентов показаны в таблице 3. Расчет физико-химических параметров для смоделированной выборки производился с помощью программного комплекса NIST REFPROP [17]. При расчете скорости звука использовалось уравнение состояния газа GERG-2008 для стандартных условий по температуре и давлению. Теплопроводность газовой смеси рассчитывалась на основе моделей для индивидуальных компонентов и расширенной модели соответствующих состояний, реализованных в NIST REFPROP.

Таблица 3. Диапазоны газовых смесей для тестовой выборки

Компонент	Молярная доля, %
Метан	80,5 – 99,5
Этан	0,5 – 4,5
Пропан	0,5 – 4,5
Диоксид углерода	0,5 – 4,5
Азот	0,5 – 4,5

Точностные характеристики результата предсказания моделью компонентного состава природного газа на тестовой выборке показаны в таблице 4 и на рис. 5. Отклонение для диоксида углерода принималась равным нулю, так как содержание в газе данного компонента в рассматриваемой задаче считается известным из-за наличия доступной технологии для его измерения, а именно технологии недисперсионного поглощения ин-

фракрасного излучения (NDIR) [12]. Расчет параметров, а также построение, обучение и тестирование нейросетевой модели проводились в пакете Matlab 2018a с использованием функционала Deep Learning Toolbox [15].

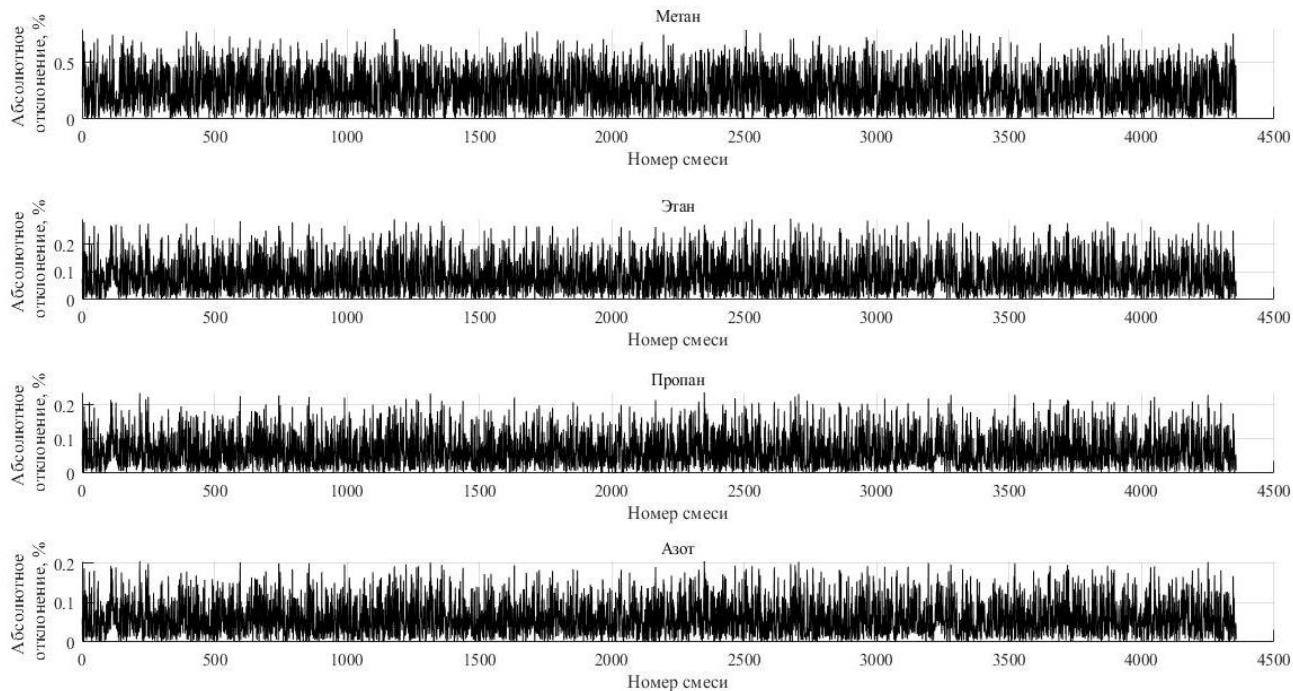
*Таблица 4. Точность предсказания компонентного состава газа разработанной нейросетевой моделью*

Компонент	Максимальное абсолютное отклонение, %	Среднее абсолютное отклонение, %	Среднеквадратическое отклонение	Коэффициент детерминации
Метан	0,75	0,32	0,34	0,9999
Этан	0,37	0,15	0,17	0,9999
Пропан	0,25	0,11	0,13	0,9999
Азот	0,21	0,09	0,10	0,9999
Диоксид углерода	0	0	0	1

#### **4. Выводы и дальнейшие исследования**

Предложенная нейросетевая модель использовалась для прогноза состава газа по значениям его физико-химических параметров. Параметры природного газа, выбранные в качестве входных для модели, можно измерять с помощью коммерчески доступного измерительного оборудования. Анализ адекватности применения разработанной модели показал, что методологическая ошибка при определении содержания метана, этана, пропана и азота удовлетворяет требованиям газовой промышленности [1]. Дальнейшие исследования в данной области заключаются в проверке метода в лабораторных и промышленных условиях. Также планируется реализовать модель с использованием более сложной архитектуры для улучшения точности ее работы.

Автор выражает благодарность международным проектам сотрудничества между университетами BRISK II TA и Erasmus+ 2017-1-SE01-KA107-034292 Staff Mobility за предоставленную возможность для проведения данного исследования.



*Рис. 5. Абсолютное отклонение результата предсказания моделью компонентного состава природного газа на тестовой выборке*



### **Литература**

1. *ГОСТ 5542-2014. Газ горючий природный промышленного и коммунально-бытового назначения.* – М.: Стандартинформ, 2015. – С. 7–8.
2. ДЕМИДЕНКО Е.З. *Оптимизация и регрессия.* – М.: Наука, 1989. – С. 223–228.
3. КЕЛЛЕР Ю.А. *Разработка искусственных нейронных сетей для предсказания технологической эффективности от выравнивания профиля приемистости // Известия Томского политехнического университета. Информационные технологии.* – 2014. – №5. – С. 60–65.
4. КОТУРБАШ Т.Т., БРОКАРЕВ И.А. *Метод определения свойств и состава природного газа по измерениям его физических параметров // Датчики и системы.* – 2018. – №6. – С. 43–50.
5. ЛЕОНОВ М.Г., ЖИРНОВ Б.С. *Обработка экспериментальных данных процесса коксования с помощью нейронных сетей // Нефтегазовое дело.* – 2014. – №2. – С. 151–165.
6. МАНДРИК И.Э., ШАХВЕРДИЕВ А.Х., СУЛЕЙМАНОВ И.В. *Оценка и прогноз нефтеотдачи на основе моделирования нейронными сетями // Нефтяное хозяйство.* – 2005. – №10. – С. 31–34.
7. ПЧЕЛЬНИКОВ И.В., БОРХОВИЧ С.Ю., НАТАРОВ А.Л. *Перспективы прогнозирования эффективности ГТМ на основе нейросетевого моделирования // Нефть. Газ. Новации.* – 2016. – №4. – С. 37–40.
8. СОЛОМАТИН Г.И., ЗАХАРЯН А.З., АШКАРИН Н.И. *Прогнозирование работы скважин с помощью искусственных нейронных сетей // Нефтяное хозяйство.* – 2002. – №10. – С. 92–96.
9. ASHENA R., THONHAUSER G *Application of Artificial Neural Networks in Geoscience and Petroleum Industry // Artificial Intelligent Approaches in Petroleum Geosciences.* – 2015. – P. 127–166.

10. DÖRR H., KOTURBASH T., KUTCHEROV V. *Review of impacts of gas qualities with regard to quality determination and energy metering of natural gas* // Measurement Science and Technology. – 2019. – Vol. 30, No. 2. – P. 1–20.
11. JIMENEZ DE LA CRUZ G., RUZ-HERNANDEZ J., SHELOMOV E., SALAZAR-MENDOZA R. *Optimization of an Oil Production System using Neural Networks and Genetic Algorithms* // Proc. of the Joint 2009 Int. Fuzzy Systems Association World Congress and 2009 European Society of Fuzzy Logic and Technology Conference. – 2009. – P. 1815–1820.
12. KAUR J., ADAMCHUK V., WHALEN J., ISMAIL A. *Development of an NDIR CO2 Sensor-Based System for Assessing Soil Toxicity Using Substrate-Induced Respiration* // Sensors. – 2015. – №15. – P. 4734–4748.
13. KOTURBASH T., BICZ A., BICZ W. *New instrument for measuring velocity of sound and quantitative characterization of binary gas mixtures composition* // Measurement Automation Monitoring. – 2016. – P. 254–258.
14. MARQUARDT D.W. *An algorithm for least squares estimation of non-linear parameters* // J. Soc. of Appl. Math. – 1963. – Vol. 2. – P. 431–441.
15. *Matlab Software*. – URL: <https://www.mathworks.com>.
16. MIRZAEI-PAIAMAN A., SALAVATI S. *The Application of Artificial Neural Networks for the Prediction of Oil Production Flow Rate* // Energy Sources, Part A: Recovery, Utilization, and Environmental Effects. – 2012. – No. 34:19. – P. 1834–1843.
17. *REFPROP Software*. – URL: <https://www.nist.gov/srd/refprop>.
18. *Thermal Conductivity Gauge* [Electronic resource]. – URL: <http://www.xensor.nl>.

## **USING ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS FOR SOLVING THE PROBLEM OF ANALYSIS OF THE COMPOSITION OF GAS MIXTURES**

**Ivan Brokarev**, National University of Oil and Gas (Gubkin University), Moscow, Ph.D. Student (brokarev.i@gubkin.ru).

*Abstract: The problem formulation of natural gas composition analysis is described. The statistical method is proposed to use for solving the problem of gas composition analysis. The main stages of the statistical model development for the natural gas composition analysis are described. The results of the correlation analysis for the selection of input and output parameters for the statistical model are presented. The main statistical models that used for solving of the problem of gas mixtures composition analysis are shown. The artificial neural networks and Levenberg – Marquardt algorithm are used within the study. The description of the Levenberg – Marquardt training algorithm is given taking into account possible modifications of the algorithm. The architecture of the proposed neural network is described. The gas mixtures ranges that used in the training and test samples are given. The accuracy characteristics of the proposed model are given. It was concluded that the chosen neural network model architecture is adequate, based on the calculated accuracy characteristics of the model. The results of predicting the gas mixtures composition by measurements of gas physical parameters are shown. Further research directions in the development of the proposed method for analyzing the natural gas composition are given.*

**Keywords:** artificial neural network analysis, Levenberg – Marquardt algorithm, analysis of the composition, natural gas.

УДК 519.6  
ББК 30.1

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии В.М. Вишневым.*

*Поступила в редакцию 07.03.2019.  
Опубликована 31.07.2019.*

## **АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ НАХОЖДЕНИЯ КООРДИНАТ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ В КОРРЕЛЯЦИОННО- ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ ПО РЕЛЬЕФУ МЕСТНОСТИ**

**Огородников К. О.<sup>1</sup>**

*(ПАО «АНПП «Темп-Авиа», Арзамасский политехнический институт (филиал НГТУ), Арзамас)*

*Проведено исследование влияния погрешностей информационного обеспечения и условий функционирования на корректирующие поправки, выдаваемые рекуррентно-поисковым алгоритмом корреляционно-экстремальной навигационной системы по рельефу местности. Как известно, величина ошибок зависит от множества факторов, в том числе от погрешностей инерциальной системы, эталонной информации, измерителя геофизического поля, информативности рассматриваемого участка и др. Результаты анализа говорят о том, что погрешность, вызванная ошибкой по скорости, возрастает с увеличением количества измерений геофизического поля, а составляющая, обусловленная погрешностями информационного обеспечения, уменьшается. Также в рамках статьи получены выражения, которые могут использоваться при планировании маршрута полета и выбора участков рельефа для проведения коррекции. В частности, синтезировано уравнение, устанавливающее связь между среднеквадратическим отклонением градиента высот, среднеквадратическим отклонением высот и радиусом корреляции поля высот рельефа. Также сформулировано выражение, позволяющее вычислить оптимальное число измерений геофизического поля, необходимых для коррекции, в условиях имеющихся погрешностей измерителей и траектории движения. Для подтверждения корректности результатов проведено математическое моделирование и осуществлено сравнение с оценками, полученными статистическими методами. В качестве эталонного массива высот использован фрагмент карт Shuttle Radar Topographic Mission.*

**Ключевые слова:** корреляционно-экстремальная навигационная система, анализ точности нахождения координат местоположения, рекуррентно-поисковый алгоритм.

---

<sup>1</sup> Кирилл Олегович Огородников, инженер-математик, аспирант (okplay@mail.ru).

## **1. Введение**

Корреляционно-экстремальные навигационные системы (КЭНС) – системы навигации, функционирующие по информации, получаемой от инерциальных датчиков и измерителя геофизического поля. Сопоставление наблюдаемого поля с заранее подготовленным эталоном осуществляется в бортовой цифровой вычислительной системе при помощи функционала типа корреляционной функции, а посредством идентификации экстремума функционала определяется текущая погрешность бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС) и обеспечивается автономная коррекция [3, 6].

На данный момент выделяются беспойсковые, поисковые и рекуррентно-поисковые типы алгоритмического обеспечения КЭНС.

Беспойсковые алгоритмы основаны на линейаризации информативного поля и включения его в модель системы, после чего искомые неизвестные становятся наблюдаемыми. Оценка производится рекуррентным фильтром, поэтому достигается высокая вычислительная эффективность и возможность оценивать значительное количество параметров. Существенным ограничением беспойсковых методов является невозможность устранения больших неопределенностей по координатам, превышающих радиус корреляции информативного поля.

Поисковые алгоритмы используют перебор гипотез о значениях искомых параметров. Оценка истинности гипотезы производится не по одному измерению датчика поля, а на достаточно длительном участке полета. Поисковые методы устраняют ограничение на величину неопределенности искомых параметров, но требуют больших вычислительных затрат на проверку всех гипотез. Кроме того, вычислительная сложность значительно возрастает при увеличении количества оцениваемых параметров.

Рекуррентно-поисковые алгоритмы осуществляют перебор гипотез по ограниченному набору параметров, который может быть оценен только поисковым способом, а уже для каждой гипотезы методами рекуррентной фильтрации оцениваются

остальные искомые параметры. Когда истинная гипотеза найдена, состояние ее фильтра используется в качестве оценки оставшихся параметров. Очевидным достоинством данного подхода является снижение требований к производительности вычислителя по сравнению с поисковым методом.

При проведении коррекции местоположения путем использования КЭНС одной из важнейших задач является оценка точности выдаваемых корректирующих поправок, величина ошибок которых зависит от множества факторов, в том числе от погрешностей инерциальной системы, эталонной информации, измерителя геофизического поля, информативности рассматриваемого участка и др. Подробное исследование всех составляющих позволяет сделать вывод о достижении заданной точности в текущих условиях функционирования.

В данной работе проводится анализ погрешностей, вносимых имеющимися источниками информации, а также исследуется их влияние на итоговые поправки в рекуррентно-поисковом алгоритме КЭНС по рельефу местности.

## **2. Анализ точности нахождения координат местоположения**

Исходными данными для алгоритма КЭНС по рельефу местности являются инерциальные оценки координат БИНС, измерения радиовысотомера (РВ) и цифровая карта высот местности. По информации БИНС формируется траектория полета в некоторые дискретные моменты времени  $i \in [1, N]$ :

$$t_{\text{изм}}(i) = [B(i), L(i), h(i)],$$

где  $B(i)$ ,  $L(i)$  – инерциальные оценки координат в геодезической системе координат,  $h(i)$  – инерциальная оценка высоты.

Разность высот БИНС и РВ представляет собой профиль траектории:

$$(1) \quad p_{\text{РВ}}(i) = h(i) - h_{\text{РВ}}(i).$$

Используя модель ошибок БИНС, можно определить множество допустимых траекторий  $T$ . Значительная неопределенность по координатам устраняется только поисковыми метода-

ми, поэтому параметризуем множество  $T$  по координатам ( $f: R^2 \rightarrow T$ ), а остальные неизвестные будем оценивать рекуррентными способами.

Каждой траектории  $t \in T$  соответствует профиль  $p \in P$ , таким образом, используя карту высот, можно отобразить траекторию в профиль ( $g: T \rightarrow P$ ).

Задача КЭНС состоит в нахождении такой траектории  $t \in T$ , которая соответствует измеренному профилю  $p_{рв}$ :

$$(2) \quad g(t) = p_{рв}.$$

Уравнение (2) не имеет точного решения из-за погрешностей измерений, однако, как и во всех подобных случаях, может быть сведено к оптимизационной задаче. Для этого понадобится оценивать «расстояние» между профилями ( $\rho: P \times P \rightarrow R$ ).

Искомое  $t$  доставляет минимум функции  $\rho$ :

$$\rho(g(t), p_{рв}) \rightarrow \min.$$

Добавляя сюда параметризацию  $t$ , получаем:

$$\rho(g(f(\Delta x, \Delta y)), p_{рв}) \rightarrow \min,$$

где  $\Delta x, \Delta y$  – искомые поправки координат (в пространстве карты).

Далее будем рассматривать выражение  $\rho(g(f(\Delta x, \Delta y)), p_{рв})$  как функцию оценки  $F(\Delta x, \Delta y)$ :

$$F(\Delta x, \Delta y) \rightarrow \min.$$

Входной информацией для функции оценки являются профили, полученные из карты

$$(3) \quad p_{кар}(i) = m(x(i) + \Delta x, y(i) + \Delta y),$$

и измерений БИНС и РВ (1), где  $x(i), y(i)$  – инерциальные оценки координат (в пространстве карты),  $m(x, y)$  – функция выборки высот из эталона по координатам  $x, y$ .

Предполагая, что для искомых поправок разность профилей (1) и (3) будет содержать лишь случайную (погрешности измерений) и квадратичную (характер ошибок БИНС) составляющие, запишем модели объекта и измерений:

$$\begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix}_{i-1} + w(i),$$

$$h_{\text{пв}}(i) = h(i) - m(x(i) + \Delta x, y(i) + \Delta y) + v(i),$$

где  $\chi_2(i)$  – оценка ошибки БИНС,  $\chi_1(i)$  – скорость изменения ошибки БИНС,  $w(i)$  – случайный процесс,  $v(i)$  – погрешности измерения.

Для оценки параметров вектора состояния используется фильтр Калмана [7].

Примем значение функции оценки в виде суммы квадратов ошибок фильтрации:

$$F(\Delta x, \Delta y) = \sum_{i=1}^N \left[ m(x(i) + \Delta x, y(i) + \Delta y) - (h(i) - h_{\text{пв}}(i)) + \chi_2(i) \right]^2.$$

Состояние фильтра, соответствующее минимуму  $F$ , может быть использовано как оценка ошибки по высоте и вертикальной скорости.

Рассмотрим значение функции оценки  $F(\Delta x, \Delta y)$  на искомом минимуме. Без потери общности можно принять  $\Delta x = 0$  и  $\Delta y = 0$ . Тогда значение функции оценки зависит от ошибок оценивания поправок координат и ошибок скоростей:

$$\begin{aligned} F(\partial x, \partial y) = \\ (4) \quad = \sum_{i=1}^N \left[ m(x(i) + \partial x + \partial v_x i, y(i) + \partial y + \partial v_y i) - m(x(i), y(i)) - \alpha(i) \right]^2, \end{aligned}$$

где  $\partial x$ ,  $\partial y$  – ошибки оценивания поправок координат,  $\partial v_x$ ,  $\partial v_y$  – ошибки скорости (в единицах карты на такт измерения),  $\alpha(i)$  – реализации случайной величины, представляющие собой погрешности информационного обеспечения.

Положим, что величину  $\alpha(i)$  можно считать некоррелированной и нормально распределенной с  $M[\alpha(i)] = 0$ , и ее можно представить в виде суммы следующих слагаемых:

$$\alpha(i) = \beta(i) + \gamma(i) + \eta(i),$$

где  $\beta(i)$  – погрешности эталонной информации,  $\gamma(i)$  – погрешности РВ,  $\eta(i)$  – погрешности, вызванные отличием пятен засветки карты и РВ, которые при их несоответствии возрастают с уве-



личением пересеченности местности и величины дискрета карты.

При анализе погрешностей период измерения принимается таковым, что в единицах карты расстояние между соседними измерениями по одной из координат превосходит единицу. В противном случае  $\beta(i)$  и  $\beta(j)$  при  $i \neq j$  могут быть коррелированы, если используется интерполяция высот карты.

Выбор слишком малого периода измерения не приводит к повышению точности, а только усложняет анализ из-за вышесказанного и увеличивает вычислительную сложность. С другой стороны, чрезмерно большой период ведет к потере (неиспользованию) данных, что также не улучшает точность. Поэтому период измерения следует выбирать так, чтобы он соответствовал дискрету карты при заданной скорости.

Нас интересуют значения  $\partial x$  и  $\partial y$ , доставляющие минимум функции  $F$ . Здесь и далее для краткости будут записаны уравнения только для  $x$  координаты. Найдем частную производную для выражения (4):

$$(5) \quad \frac{\delta F(\partial x, \partial y)}{\delta \partial x} = 2 \sum_{i=1}^N [m(x(i) + \partial x + \partial v_x i, y(i) + \partial y + \partial v_y i) - m(x(i), y(i)) - \alpha(i)] \frac{\delta m(x(i) + \partial x + \partial v_x i, y(i) + \partial y + \partial v_y i)}{\delta \partial x}.$$

Введем обозначение для градиента поля высот рельефа  $m$ :

$$(6) \quad K_x(i) = \frac{\delta m(x(i) + \partial x + \partial v_x i, y(i) + \partial y + \partial v_y i)}{\delta \partial x}.$$

Примем производные постоянными, т.е. высоту из эталонного массива высот будем считать линейно зависимой от координат в некоторой окрестности точки с координатами  $x(i)$ ,  $y(i)$ , и перепишем выражение (5) с учетом введенного обозначения  $K_x(i)$ :

$$(7) \quad \frac{\delta F(\partial x, \partial y)}{\delta \partial x} = 2 \sum_{i=1}^N [K_x(i)(\partial x + \partial v_x i) - \alpha(i)] K_x(i).$$

Для нахождения минимума приравняем выражение (7) к нулю:

$$\sum_{i=1}^N [K_x(i)(\partial x + \partial v_x i) - \alpha(i)]K_x(i) = 0$$

и раскроем скобки:

$$\partial x \sum_{i=1}^N K_x^2(i) + \partial v_x \sum_{i=1}^N iK_x^2(i) - \sum_{i=1}^N \alpha(i)K_x(i) = 0.$$

Найдем выражение для  $\partial x$ :

$$\partial x = \frac{\sum_{i=1}^N \alpha(i)K_x(i) - \partial v_x \sum_{i=1}^N iK_x^2(i)}{\sum_{i=1}^N K_x^2(i)}.$$

Рассматривая  $\partial v_x$  как случайную величину при проведении большого количества испытаний, примем, что  $M[\partial v_x] = 0$ . Тогда с учетом  $M[\alpha(i)] = 0$  получаем  $M[\partial x] = 0$ .

Найдем дисперсию  $\partial x$ :

$$D[\partial x] = M[(\partial x - M[\partial x])^2] = M[\partial x^2],$$

$$M[\partial x^2] = M \left[ \frac{\left( \sum_{i=1}^N \alpha(i)K_x(i) - \partial v_x \sum_{i=1}^N iK_x^2(i) \right)^2}{\left( \sum_{i=1}^N K_x^2(i) \right)^2} \right],$$

$$M[\partial x^2] = \frac{M \left[ \left( \sum_{i=1}^N \alpha(i)K_x(i) \right)^2 \right]}{\left( \sum_{i=1}^N K_x^2(i) \right)^2} -$$

(8)

$$\frac{M \left[ 2\partial v_x \sum_{i=1}^N iK_x^2(i) \sum_{i=1}^N \alpha(i)K_x(i) \right]}{\left( \sum_{i=1}^N K_x^2(i) \right)^2} + \frac{M[\partial v_x^2] \left( \sum_{i=1}^N iK_x^2(i) \right)^2}{\left( \sum_{i=1}^N K_x^2(i) \right)^2}.$$

Так как  $\partial v_x$  и  $\alpha(i)$  независимы, то можно записать следующее:

$$M \left[ 2\partial v_x \sum_{i=1}^N i K_x^2(i) \sum_{i=1}^N \alpha(i) K_x(i) \right] = 0.$$

Открывая скобки и учитывая, что  $\alpha(i)$  не зависит от  $\alpha(j)$ , если  $i \neq j$ , получаем:

$$(9) \quad M \left[ \left( \sum_{i=1}^N \alpha(i) K_x(i) \right)^2 \right] = M \left[ \alpha^2 \right] \sum_{i=1}^N K_x^2(i).$$

Тогда выражение (8) переписется в следующем виде:

$$M[\partial x^2] = \frac{D[\alpha] \sum_{i=1}^N K_x^2(i) + D[\partial v_x] \left( \sum_{i=1}^N i K_x^2(i) \right)^2}{\left( \sum_{i=1}^N K_x^2(i) \right)^2}.$$

Пренебрегая конечностью выборки  $K_x^2(i)$ , получим итоговое выражение для дисперсии поправки координат:

$$(10) \quad D[\partial x] \approx \frac{D[\alpha]}{NM [K_x^2]} + \frac{D[\partial v_x] N^2}{4}.$$

Исходя из выражения (10), можно сделать вывод, что погрешность, вызванная ошибкой по скорости, возрастает с увеличением длины отрезка коррекции (количества измерений  $N$ ), а составляющая, обусловленная погрешностями информационного обеспечения, уменьшается. Возникает идея определения оптимального  $N$ , которое минимизирует итоговую погрешность. Найдем производную по  $N$  от выражения (10):

$$(11) \quad \frac{\delta}{\delta N} \left( \frac{D[\alpha]}{NM [K_x^2]} + \frac{D[\partial v_x] N^2}{4} \right) = \frac{D[\partial v_x] N}{2} - \frac{D[\alpha]}{N^2 M [K_x^2]}.$$

Приравняв выражение (11) к нулю, найдем  $N$ :

$$\frac{D[\partial v_x] N}{2} - \frac{D[\alpha]}{N^2 M [K_x^2]} = 0,$$

$$D[\partial v_x] N^3 M [K_x^2] = 2D[\alpha],$$

$$N = \sqrt[3]{\frac{2D[\alpha]}{D[\partial v_x]M[K_x^2]}}$$

Величина  $M[K_x^2]$ , характеризующая информативность соответствующего участка местности, может быть получена прямым путем с помощью вычисления первых разностей в соответствии с выражением (6):

$$M[K_x^2] = M\left[\frac{m(x(i) + l_x, y(i)) - m(x(i), y(i))}{l_x}\right]^2,$$

где  $l_x$  – размер дискрета по оси  $x$ .

Множество точек  $[x(i), y(i)]$  задает область, по которой будет рассчитана информативность участка.

Теперь примем экспоненциальную функцию ковариации для поля высот рельефа:

$$(12) \quad M[m(i, j)m(i + l_x, j)] = \text{cov}(l_x) = D[m] \exp\left(\frac{l_x}{r_{mx}} \ln \frac{1}{2}\right),$$

где  $r_{mx}$  – радиус корреляции поля высот рельефа по уровню 0,5 в единицах дискретизации по оси  $x$ .

Величина  $M[K_x^2]$  с учетом (12) запишется как:

$$(13) \quad M[K_x^2] = \frac{2M[m^2]}{l_x^2} \left(1 - \exp\left(\frac{l_x}{r_{mx}} \ln \frac{1}{2}\right)\right).$$

Таким образом, полученное выражение (13) устанавливает взаимосвязь между среднеквадратическим отклонением (СКО) градиента высот, СКО высот и радиусом корреляции поля высот рельефа.

Ранее предполагалось, что величина  $\alpha(i)$  некоррелирована. Теперь рассмотрим случай, когда  $\alpha(i)$  имеет экспоненциальную функцию ковариации:

$$M[\alpha(i)\alpha(i + c)] = \text{cov}(c) = D[\alpha] \exp\left(\frac{c}{r_\alpha} \ln \frac{1}{2}\right),$$

где  $c$  – аргумент функции ковариации,  $r_\alpha$  – радиус корреляции по уровню 0,5 в единицах дискретизации.

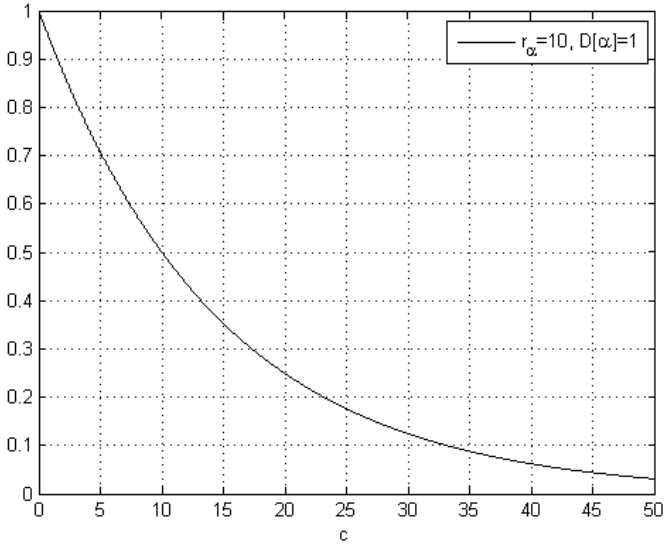


Рис. 1. График функции корреляции при  $r_\alpha = 10$  и  $D[\alpha] = 1$

Тогда выражение (9) будет представлено в виде суммы следующих слагаемых:

$$\begin{aligned}
 M \left[ \left( \sum_{i=1}^N \alpha(i) K_x(i) \right)^2 \right] &= M \left[ \sum_{i=1}^N \alpha(i) \alpha(i) K_x(i) K_x(i) \right] + \\
 (14) \quad &+ 2M \left[ \sum_{i=1}^{N-1} \alpha(i) \alpha(i+1) K_x(i) K_x(i+1) \right] + \\
 &+ 2M \left[ \sum_{i=1}^{N-2} \alpha(i) \alpha(i+2) K_x(i) K_x(i+2) \right] + \\
 &+ 2M \left[ \sum_{i=1}^{N-3} \alpha(i) \alpha(i+3) K_x(i) K_x(i+3) \right] + \dots
 \end{aligned}$$

Считая, что  $\alpha(i)$  не зависит от  $K_x(i)$ , возьмем математическое ожидание от произведений  $\alpha(i)$  и перепишем выражение (14):

$$\begin{aligned}
 & M \left[ \left( \sum_{i=1}^N \alpha(i) K_x(i) \right)^2 \right] = \\
 & = \sum_{i=1}^N \operatorname{cov}(0)_{\alpha} M [K_x(i) K_x(i)] + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \operatorname{cov}(1)_{\alpha} M [K_x(i) K_x(i+1)] + \\
 & + 2 \sum_{i=1}^{N-2} \operatorname{cov}(2)_{\alpha} M [K_x(i) K_x(i+2)] + \\
 & + 2 \sum_{i=1}^{N-3} \operatorname{cov}(3)_{\alpha} M [K_x(i) K_x(i+3)] + \dots
 \end{aligned}$$

Принимая ковариационную функцию градиента высот рельефа также экспоненциальной:

$$M [K_x(i) K_x(i+c)] = \operatorname{cov}_K(c) = M [K_x^2] \exp \left( \frac{c}{r_{Kx}} \ln \frac{1}{2} \right),$$

запишем следующее:

$$\begin{aligned}
 & M \left[ \left( \sum_{i=1}^N \alpha(i) K_x(i) \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^N \operatorname{cov}(0)_{\alpha} \operatorname{cov}(0)_K + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \operatorname{cov}(1)_{\alpha} \operatorname{cov}(1)_K + \\
 & + 2 \sum_{i=1}^{N-2} \operatorname{cov}(2)_{\alpha} \operatorname{cov}(2)_K + 2 \sum_{i=1}^{N-3} \operatorname{cov}(3)_{\alpha} \operatorname{cov}(3)_K + \dots
 \end{aligned}$$

При вычислении сумм пренебрегаем пределами суммирования, считая всегда их равными от 1 до  $N$ :

$$\begin{aligned}
 & M \left[ \left( \sum_{i=1}^N \alpha(i) K_x(i) \right)^2 \right] = N \operatorname{cov}(0)_{\alpha} \operatorname{cov}(0)_K + 2 \operatorname{cov}(1)_{\alpha} \operatorname{cov}(1)_K + \\
 & + 2 \operatorname{cov}(2)_{\alpha} \operatorname{cov}(2)_K + 2 \operatorname{cov}(3)_{\alpha} \operatorname{cov}(3)_K + \dots.
 \end{aligned}$$

Теперь выразим итоговую погрешность через введенные параметры  $r_{\alpha}$  и  $r_{Kx}$ :

$$\begin{aligned}
 & M \left[ \left( \sum_{i=1}^N \alpha(i) K_x(i) \right)^2 \right] = N \operatorname{cov}(0)_{\alpha} \operatorname{cov}(0)_K + 2N \sum_{i=1}^N \operatorname{cov}(i)_{\alpha} \operatorname{cov}(i)_K = \\
 & = N \operatorname{cov}(0)_{\alpha} \operatorname{cov}(0)_K + \\
 & + 2N \operatorname{cov}(0)_{\alpha} \operatorname{cov}(0)_K \sum_{i=1}^N \exp \left( \frac{i}{r_{\alpha}} \ln \frac{1}{2} \right) \exp \left( \frac{i}{r_{Kx}} \ln \frac{1}{2} \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= N \operatorname{cov}_{\alpha}(0) \operatorname{cov}_K(0) \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^N \exp \left( \frac{i}{r_{\alpha}} \ln \frac{1}{2} + \frac{i}{r_{kx}} \ln \frac{1}{2} \right) \right) = \\
 &= N \operatorname{cov}_{\alpha}(0) \operatorname{cov}_K(0) \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^N \exp \left( i \frac{r_{\alpha} + r_{kx}}{r_{\alpha} r_{kx}} \ln \frac{1}{2} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Приближенно вычисляя сумму в последнем выражении, получаем:

$$\begin{aligned}
 &M \left[ \left( \sum_{i=1}^N \alpha(i) K_x(i) \right)^2 \right] \approx \\
 &\approx N \operatorname{cov}_{\alpha}(0) \operatorname{cov}_K(0) \left( 1 + 2 \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{2 \left( \frac{r_{\alpha} + r_{kx}}{r_{\alpha} r_{kx}} \right)}} - 1 \right) \right) = \\
 &= ND[\alpha] M \left[ K_x^2 \right] \left( \frac{2}{1 - \exp \left( \frac{r_{\alpha} + r_{kx}}{r_{\alpha} r_{kx}} \ln \frac{1}{2} \right)} - 1 \right).
 \end{aligned}$$

С учетом выражения (10) окончательно находим:

$$(15) \quad M[\partial x^2] = \frac{D[\alpha] R}{NM \left[ K_x^2 \right]} + \frac{D[\partial v_x] N^2}{4},$$

где первое слагаемое отличается от (10) на коэффициент  $R$ :

$$R = \frac{2}{1 - \exp \left( \frac{r_{\alpha} + r_{kx}}{r_{\alpha} r_{kx}} \ln \frac{1}{2} \right)} - 1.$$

### 3. Результаты моделирования

В качестве эталонного массива высот использован фрагмент карт Shuttle Radar Topographic Mission (SRTM), содержащий реальные данные для района г. Арзамас. Моделировался

прямолинейный полет с постоянной скоростью 250 м/с, размер дискрета составлял  $125 \times 125$  м.

На рис. 2 показаны средние значения СКО погрешностей поправок по различным траекториям для различных величин шума (погрешностей информационного обеспечения), при одинаковом количестве измерений  $N = 50$  и нулевой ошибке по скорости. Оценки сделаны с помощью полученных выражений. Для сравнения приведены оценки, полученные статистическими методами по 200 испытаниям.

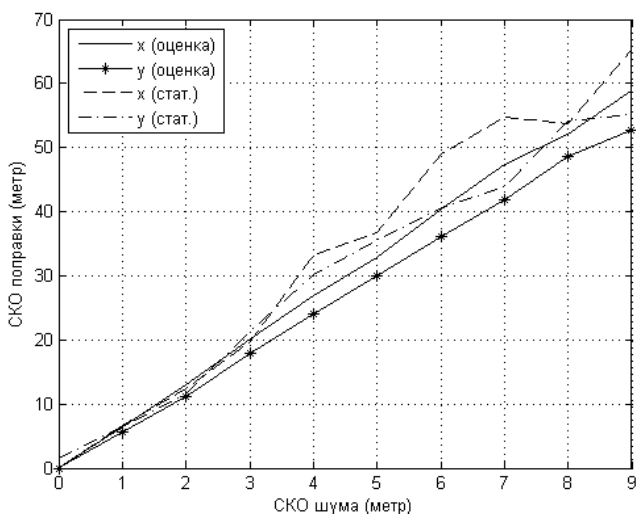


Рис. 2. Зависимость СКО поправки от СКО шума измерения

На рис. 3 и 4 показана зависимость погрешности от количества измерений при условии наличия только ошибки по скорости или только шума измерения соответственно. СКО ошибки по скорости составляло 0,5 м/с, СКО шума – 3 метра.

На рис. 5 приведен график зависимости погрешности от количества измерений при наличии ошибки по скорости и шума измерения. Выражение для оценки оптимального  $N$  дает результат 47 для данного варианта. Величины СКО ошибок аналогичны предыдущему случаю.



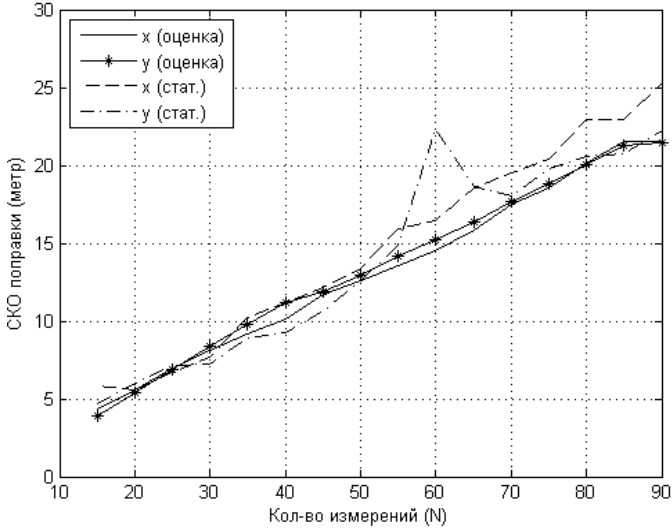


Рис. 3. Погрешность, вызванная ошибкой по скорости от  $N$

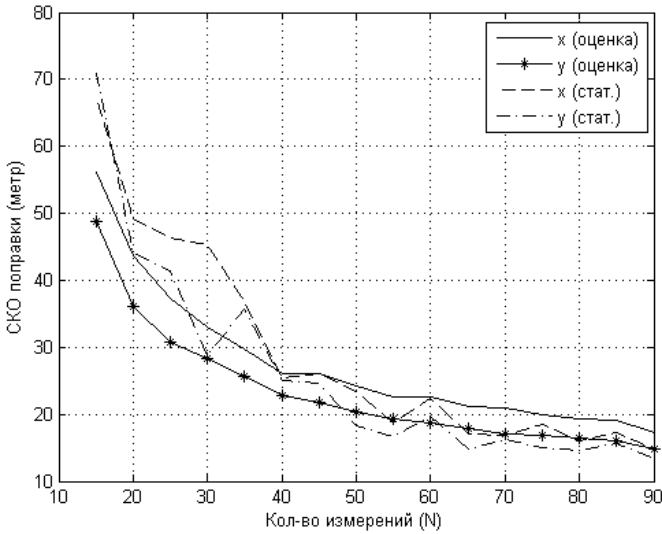


Рис. 4. Погрешность, вызванная шумом измерения от  $N$

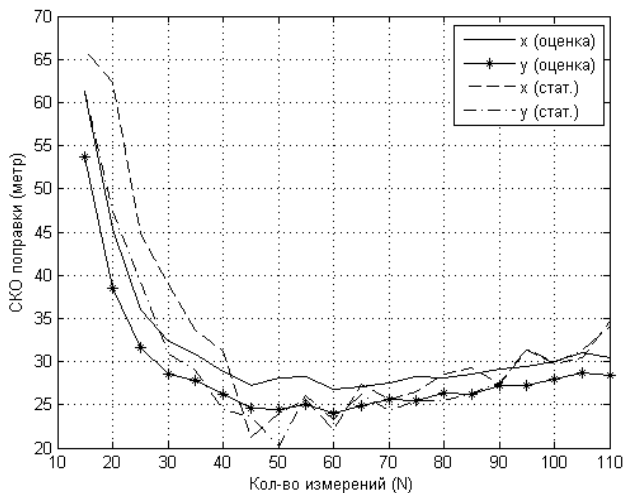


Рис. 5. Оптимальное количество измерений  $N$

На рис. 6 приведена зависимость погрешности от радиуса корреляции шума при нулевой ошибке по скорости, СКО шума – 5 метров.

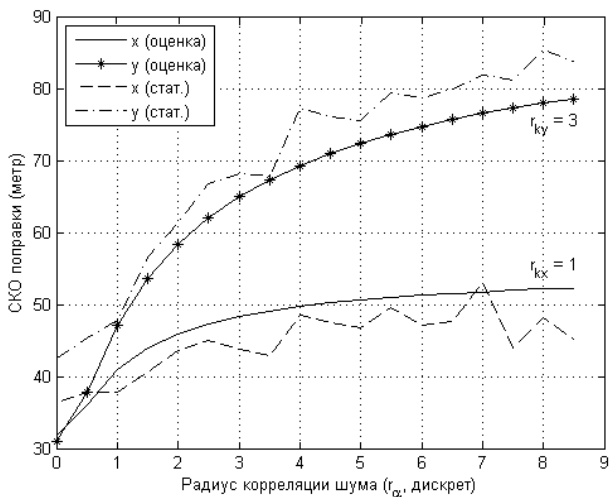


Рис. 6. Зависимость СКО поправки от радиуса корреляции шума

На рис. 7 показана зависимость погрешности поправок от СКО шума измерения при заданном радиусе корреляции  $r_\alpha = 3$  и нулевой ошибке по скорости.

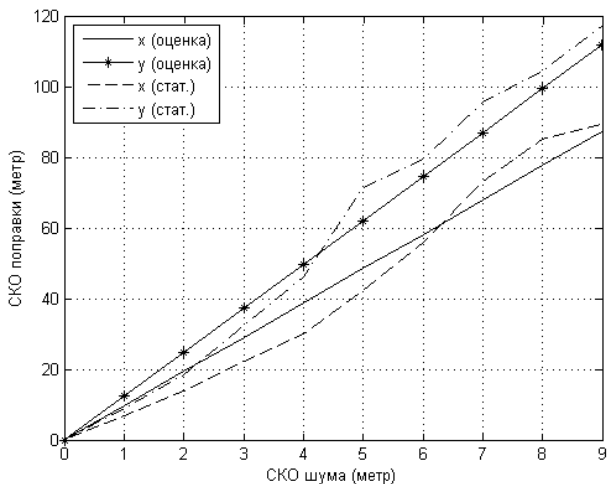


Рис. 7. Зависимость СКО поправки от СКО шума измерения

Таким образом, математическое моделирование показало корректность выражений, полученных в предположении некоррелированности погрешности информационного обеспечения  $\alpha(i)$  и  $\alpha(j)$  при  $i \neq j$ .

Приняв экспоненциальные функции ковариации для  $\alpha(i)$  и  $K_x(i)$ , можно увидеть, что результаты, полученные статистическими методами, незначительно отличаются от сформированных оценок. Это объясняется тем, что непосредственный расчет радиусов корреляции градиента поля высот рельефа  $r_{kx}$  и  $r_{ky}$  производится с погрешностью ввиду использования при их вычислении вторых производных поля высот рельефа. Кроме того, истинный вид функций ковариации для величин  $\alpha(i)$  и  $K_x(i)$  отличается от экспоненциального и неизвестен, что не позволяет получить достаточно точные численные оценки. Тем не менее, выражение (15) можно применять для анализа характера зависимостей.

#### 4. Заключение

Исследование влияния ошибок, вносимых различными источниками информации, на корректирующие поправки КЭНС позволило выделить возрастание погрешности, вызванной ошибкой по скорости, и уменьшение погрешностей информационного обеспечения при увеличении количества измерений  $N$  геофизического поля. Выражение, сформированное для вычисления оптимального  $N$ , минимизирующего итоговую погрешность, предоставляет возможность рассчитать корректное значение числа измерений при движении по произвольной траектории и имеющихся погрешностях.

Полученные результаты можно использовать при анализе функционирования КЭНС в заданных условиях, для планирования маршрута и выбора участков рельефа, а также для принятия решения о коррекции БИНС.

#### Литература

1. БАКЛИЦКИЙ В.К. *Корреляционно-экстремальные методы навигации и наведения* – Тверь: ТО «Книжный клуб», 2009. – 360 с.
2. БАКЛИЦКИЙ В.К., БОЧКАРЕВ А.М., МУСЬЯНОВ М.П. *Методы фильтрации сигналов в корреляционно-экстремальных системах навигации* – М.: Радио и связь, 1986. – 216 с.
3. БЕЛОГЛАЗОВ И.Н., ДЖАНДЖГАВА Г.И., ЧИГИН Г.П. *Основы навигации по геофизическим полям* – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 328 с.
4. БЕЛОГЛАЗОВ И.Н., ЕРМИЛОВ А.С., КАРПЕНКО Г.И. *Рекуррентно-поисковое оценивание и синтез алгоритмов корреляционно-экстремальных навигационных систем // Автоматика и телемеханика.* – 1979. – №7. – С. 68–79.

5. ДЖАНДЖГАВА Г.И., ГЕРАСИМОВ Г.И., АВГУСТОВ Л.И. *Навигация и наведение по пространственным геофизическим полям* // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – №3(140). – С. 74–84.
6. КРАСОВСКИЙ А.А., БЕЛОГЛАЗОВ И.Н., ЧИГИН Г.П. *Теория корреляционно-экстремальных навигационных систем.* – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 448 с.
7. ЛЛОЙД Э., ЛЕДЕРМАН У., АЙВАЗЯН С.А., ТЮРИН Ю.Н. *Справочник по прикладной статистике. Том. 2.* – М.: Финансы и статистика, 1990. – 526 с.
8. НАУМОВ А.И. *Принятие решения о коррекции координат системой навигации по геофизическому полю в условиях постоянных ошибок измерения* // Научный вестник МГТУ ГА – 2012. – №185 – С. 118–123.
9. ЦЕРБИНИН В.В., *Построение инвариантных корреляционно-экстремальных систем навигации и наведения летательных аппаратов.* – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 230 с.
10. BERGMAN N. *Bayesian Inference in Terrain Navigation. Division of Automatic Control.* – Department of Electrical Engineering. Linkoping University, Sweden, 1997.

## POSITION ACCURACY ANALYSIS IN TERRAIN-AIDED NAVIGATION SYSTEMS

**Kirill Ogorodnikov**, PJSC «Arzamas Research and Production Enterprise «Temp-Avia», Arzamas Polytechnic institute, Arzamas, engineer-mathematician, post-graduate student (okplay@mail.ru).

*Abstract: The influence of information support uncertainties and operating conditions on corrections provided by the recurrent-research algorithm of the terrain-aided navigation system has been studied. As is known, uncertainties of the position coordinates depends on many factors, including the inertial system errors, reference information errors, a measurer of the geophysical field errors, the information value of the terrain area, etc. The results of the analysis show that the uncertainty caused by the error in speed rises with an increase of the number of the geophysical*

*field measurements. The component caused by uncertainties of information support, on the contrary, decreases. Also, in this article expressions were obtained that can be used when planning the flight route and choosing terrain areas for performing correction. In particular, an equation has been synthesized that establishes a relationship between the standard deviation of the heights gradient, standard deviation of the heights, and the height field correlation radius. An expression has also been formed that allows us to calculate the optimal measurements number necessary for correction, under the conditions of the measurers errors and the movement trajectory.*

Keywords: terrain-aided navigation system, position accuracy analysis, recurrent-search algorithm.

УДК 681.5.23

ББК 32.965

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.*

*Поступила в редакцию 31.10.2018.*

*Опубликована 31.07.2019.*

## ЗАДАЧА О ВЗБИРАНИИ РОБОТА-КУБА НА СТЕНУ<sup>1</sup>

Шевляков А. А.<sup>2</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Создание и исследование поведения взаимодействующих групп роботов остается актуальной проблемой современной робототехники. Наиболее хорошо изучены возможности групп беспилотных летающих аппаратов, однако автономные группы роботов в других средах представляют не меньший интерес. Данная проблема порождает множество научных и инженерных задач, в том числе в разделе управления движением. Робот-куб представляет интерес как элемент группы взаимодействующих роботов, так как форма позволяет им образовывать устойчивые структуры вместе с другими роботами. В статье рассматривается задача о взбирании робота-куба на вертикальную стену при наличии такой же стены на противоположной стороне ямы. Рассматривается двумерное движение в вертикальной плоскости. Построена математическая модель движения, предложено управление, решающее задачу об оптимальном отскоке от стенки ямы – решена задача о максимальном размере ямы, из которой может выбраться робот-куб при наличии ограничений на управление. На основе библиотек Vox2D и ImGUI написано программное обеспечение, позволяющее моделировать и визуализировать движение робота и взаимодействие со средой, а также пробовать различные законы управления.*

Ключевые слова: управление, односторонние связи, контакт, робототехника, прыжок.

### 1. Введение

Исследование возможностей нестандартных шасси для роботов остается важной проблемой, в рамках которой возникают задачи как для робототехники, так и для теории управления. В частности такие оригинальные решения (в том числе шасси в виде куба) находят применение в архитектуре как элемент самосборных конструкций. Коллектив Architectural Association's Design Research Laboratory создал ряд эскизных проектов и прототипов (noMAD, OWO, HyperCell, HEXY) [1, 2, 3, 4, 7], в которых исследовались различные типовые автономные модули, способные пе-

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №18-31-00032.

<sup>2</sup> Андрей Анатольевич Шевляков, к.ф.-м.н. (aash29@gmail.com).

ремещаться и соединяться. В Bartlett School of Architecture была разработана модель робота pizzabot [5], позволяющего возводить павильоны и мебель из типовых фанерных конструкций. В отличие от других подобных роботов, приводы в нем отделены от конструктивных элементов, что позволяет их многократное использование. Такого рода конструкции могут быть оправданы в экстремальных условиях, в том числе в космосе и на других планетах, когда альтернативы подобным распределенным системам может не быть.

Таким образом, использование групп взаимодействующих роботов остается перспективным направлением во многих отраслях, что делает актуальным исследование задач об управлении их движением.

## **2. Задача о взбирании на стену**

Предположим, что робот-куб находится на дне прямоугольной ямы, стенки которой находятся на расстоянии  $L$ . В качестве управления возьмем момент, приложенный к кубу. Будем считать куб и окружающие его поверхности твердыми телами, между которыми есть сухое трение. Будем рассматривать плоское движение куба в плоскости  $xOz$ . В качестве основного сценария рассмотрим положение куба, показанное на рис. 1.

## **3. Математическая модель**

Будем считать куб твердым телом, ограниченным односторонними связями. У подобной системы может быть много режимов движения в зависимости от положения в пространстве:

- 1) свободное движение в отсутствие контакта (3 степени свободы);
- 2) контакт с проскальзыванием (2 степени свободы);
- 3) контакт без проскальзывания (1 степень свободы).

В данной работе мы ограничимся рассмотрением контакта с проскальзыванием, и уравнения движения запишутся в следующем виде:



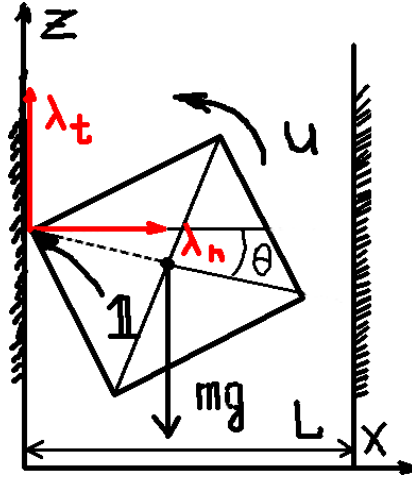


Рис. 1. Схема основных действующих сил

$$(1) \quad \begin{aligned} \ddot{x} &= \lambda_n, \\ \ddot{z} &= -g + \lambda_t, \\ \ddot{\theta} &= u - \lambda_t \cos \theta - \lambda_n \sin \theta, \end{aligned}$$

где  $x, z$  – координаты центра масс куба,  $\theta$  – угол ориентации,  $u$  – момент, приложенный к кубу,  $\lambda_t, \lambda_n$  – тангенциальная и нормальная составляющая реакции опоры соответственно. Момент может создаваться раскруткой маховика, находящегося внутри или снаружи куба (по этой схеме выполнен Cubli [10]), или же наоборот, его резким торможением (как сделано в M-Cube [9]).

Для режима трения скольжения эти составляющие связаны соотношением

$$\lambda_t = -\text{sign}(\dot{z}_1) \mu \lambda_n,$$

где  $z_1$  – координата  $z$  точки 1,  $\mu$  – коэффициент сухого трения. В рассматриваемом случае

$$\lambda_t = \mu \lambda_n.$$

Запишем условие касания стены вершиной куба:

$$x_1 = x - \cos \theta = 0,$$

$x_1$  – координата  $x$  точки 1.

Продифференцировав его дважды, получим выражение для силы реакции  $\lambda_n$ :

$$\dot{x}_1 = \dot{x} + \sin \theta \dot{\theta} = 0,$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \ddot{x} + \cos \theta \dot{\theta}^2 + \sin \theta \ddot{\theta} = \\ (2) \quad &= \lambda_n + \cos \theta \dot{\theta}^2 + \sin \theta (u - \mu \lambda_n \cos \theta - \lambda_n \sin \theta) = \\ &= \lambda_n (1 - \mu \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta) + \cos \theta \dot{\theta}^2 + u \sin \theta = 0, \end{aligned}$$

$$(3) \quad \lambda_n = \frac{\cos \theta \dot{\theta}^2 + u \sin \theta}{\mu \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta - 1}.$$

Введем обозначение

$$(4) \quad L_T = \int_0^T \lambda_n dt = \int_0^T \frac{\cos \theta \dot{\theta}^2 + u \sin \theta}{\mu \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta - 1} dt,$$

где  $T$  – момент отрыва от стенки. Тогда начальная скорость в этот момент может быть записана как

$$\begin{aligned} (5) \quad V_x &= V_x^+ + \int_0^T \lambda_n dt, \\ V_z &= V_z^+ + \int_0^T (-g + \mu \lambda_n) dt, \end{aligned}$$

где  $V^+$  – компоненты начальной скорости после соударения.

После отрыва полет происходит по законам баллистики:

$$(6) \quad \begin{aligned} z &= z_0^0 + V_z^0 t - g \frac{t^2}{2}, \\ x &= x_0^0 + V_x^0 t. \end{aligned}$$

Оценим максимальное расстояние между стенами, при котором по ним можно подниматься вверх. Будем считать, что для этого необходимо, чтобы координата  $z$  в конце полета была не меньше, чем в начале.

Для простоты положим  $z_0 = 0$  и найдем момент времени  $t_f$ , в который  $z$  снова обращается в 0.

Согласно соотношениям (6),

$$z = V_z^0 t_f - g \frac{t_f^2}{2} = 0,$$

$$t_f = 2 \frac{V_z^0}{g}.$$

Тогда максимальная дальность полета  $x_{max} = \frac{2V_x^0 V_z^0}{g}$ .

Учитывая (5), получим

$$x_{max} = 2 \frac{(V_x^0 + L_T)(V_z^0 - gT + \mu L_T)}{g}.$$

Данная функция является квадратичной по  $L_T$ , и ее максимум достигается при максимальном значении  $L_T$ .

Определим максимум  $L_T$  при ограничении  $|u| < M$ .  $L_T$  задается формулой (4), при этом  $\theta(t)$  является решением системы (1):

$$(7) \quad \begin{aligned} \ddot{\theta} &= u - \lambda_t \cos \theta - \lambda_n \sin \theta, \\ \lambda_t &= \mu \lambda_n, \\ \lambda_n &= \frac{\cos \theta \dot{\theta}^2 + u \sin \theta}{\mu \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta - 1} \end{aligned}$$

с заданными в момент столкновения начальными условиями  $(x_0, V_x^+, z_0, V_z^+, \theta_0, \omega_0)$  и условием отрыва  $\lambda_n = 0$ .

Таким образом, мы ищем максимум функционала  $L_T$  при ограничении (7) по функции  $u(t)$ .

#### 4. Задача оптимизации

Чтобы определить управление, при котором достигается максимум, применим принцип максимума Понтрягина.

Будем решать задачу с фиксированным левым концом и потребуем, чтобы правый лежал на поверхности  $S_1$ , задаваемой уравнением  $\lambda_n = 0$ .

**Теорема 1.** Пусть  $u^* : [t_0, t_f] \rightarrow U$  – оптимальное (глобально) управление, и пусть  $x^* : [t_0, t_f] \rightarrow \mathfrak{R}^n$  – соответствующая оптимальному управлению траектория. Тогда существуют

функция  $p^* : [t_0, t_f] \rightarrow \mathfrak{R}^n$  и константа  $p_0^* \leq 0$ , удовлетворяющая  $(p_0^*, p^*(t)) \neq (0, 0)$  для любого  $t \in [t_0, t_f]$  и удовлетворяющая следующим свойствам:

1)  $x^*$  и  $p^*$  являются решением канонических уравнений

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{x}^* &= H_p(x^*, u^*, p^*, p_0^*), \\ \dot{p}^* &= -H_x(x^*, u^*, p^*, p_0^*), \end{aligned}$$

с граничными условиями  $x^*(t_0) = x_0$  и  $x^*(t_f) \in S_1$ , где гамильтониан  $H$  определен как

$$H(x, u, p, p_0) := \langle p, f(x, u) \rangle + p_0 L(x, u).$$

2) Для любого фиксированного  $t$  функция  $u \rightarrow H(x^*(t), u, p^*(t), p_0^*)$  имеет глобальный максимум в  $u = u^*(t)$ , т.е. неравенство

$$H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), p_0^*) \geq H(x^*(t), u, p^*(t), p_0^*)$$

выполняется для всех  $t \in [t_0, t_f]$  и всех  $u \in U$ .

3)  $H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), p_0^*) = 0$  для всех  $t \in [t_0, t_f]$ .

Рассматриваемая постановка задачи отличается от типичной тем, что поверхность, на которой находится правый конец траектории, зависит от  $u$ . Тем не менее, поскольку  $H$  зависит от  $u$  линейно, максимум по  $u$  должен достигаться на границе множества  $|u| \leq M$ , т.е. при  $|u| = M$ .

В настоящий момент мы не готовы предоставить строгое доказательство, однако из интуитивных соображений можно предположить, что переключений между значениями  $\pm M$  быть не должно.

Таким образом, оптимальное управление  $u^* = M$ .

## 5. Моделирование

Для моделирования взаимодействия робота-куба с внешней средой была написана программа, использующая библиотеку Vox2D [6].

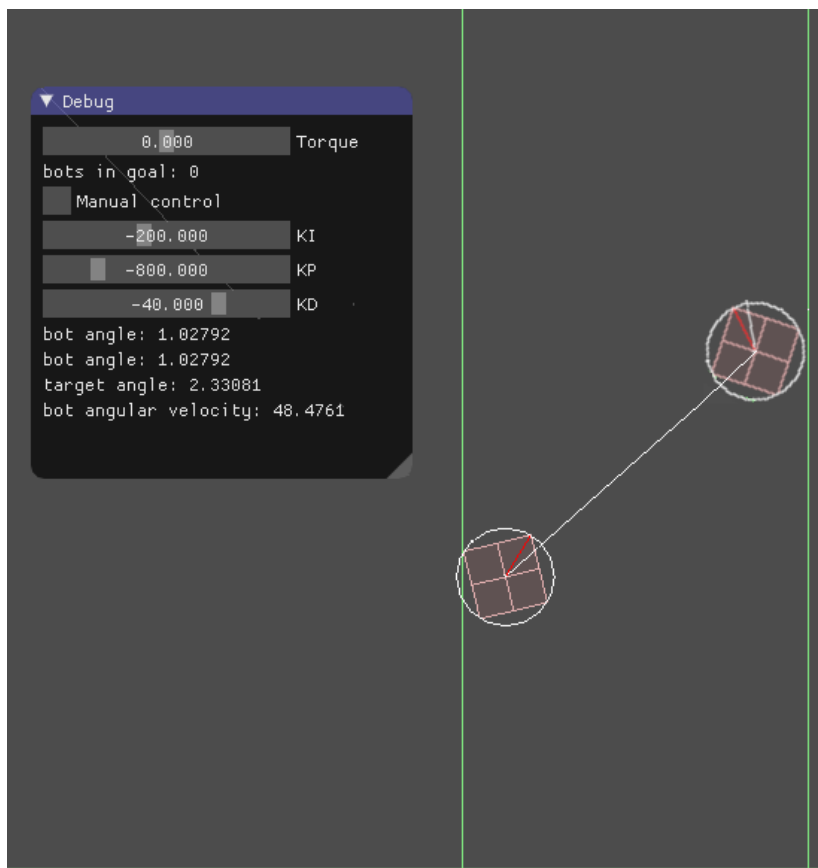


Рис. 2. Визуализация движения куба

Для расчетов используется более сложная модель взаимодействия твердых тел, чем рассмотренная в статье, в том числе благодаря возможности столкновений с ненулевой упругостью, учету трения покоя и возможностью переключения между режимами движения. Тем не менее предложенное управление позволяет решить задачу покидания ямы. С кодом программного обеспечения можно ознакомиться по адресу <https://github.com/aash29/swarm>.

## 6. Результаты

Проведен анализ задачи о взбирании робота-куба на стену. Учтены ограничения на управление, получено управление, позволяющее взобраться по двум максимально удаленным стенам. Выполнено численное моделирование.

За рамками статьи остались вопросы об управлении ориентацией куба в полете и оптимальном положении куба в момент столкновения со стеной. Также представляется интересным вопрос об управлении системой с учетом всех возможных режимов взаимодействия куба со средой (трение покоя, удар), что, однако, существенно сложнее. Наконец, следующим этапом исследования является управление группой подобных роботов, что может повысить их проходимость и открыть новые возможности.

### Литература

1. <http://drl.aaschool.ac.uk/portfolio/nomad/> (дата обращения: 11.01.2019).
2. <http://drl.aaschool.ac.uk/portfolio/OWO/> (дата обращения: 11.01.2019).
3. <http://drl.aaschool.ac.uk/portfolio/HyperCell/> (дата обращения: 11.01.2019).
4. <https://www.youtube.com/watch?v=hXL85ALIkzE> (дата обращения: 11.01.2019).
5. <https://vimeo.com/304108480> (дата обращения: 11.01.2019).
6. <https://box2d.org/about/> (дата обращения: 11.01.2019).
7. CHANG J.-R. *HyperCell: A Bio-Inspired Design Framework for Real-time Interactive Architectures* // *Architecture and the Built environment*. – 2018. – No. 1. – P. 1–250.
8. LIBERZON D. *Calculus of variations and optimal control theory: a concise introduction* – Princeton University Press, 2011.

9. ROMANISHIN J.W., GILPIN K., RUS D. *M-blocks: Momentum-driven, magnetic modular robots* // Proc. of the IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems – 2013 (IROS-2013). – P. 4288–4295.
10. GAJAMOHAN M., MERZ M., THOMMEN I., D'ANDREA R. *The cubli: A cube that can jump up and balance* // Proc. of the IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems – 2012 (IROS-2012). – P. 3722–3727.
11. RYADCHIKOV, I., SOKOLOV, D., BIRYUK, A., SECHENEV, S., SVIDLOV, ET AL. *Stabilization of a hopper with three reaction wheels* // Proc. of the 50th Int. Symposium on Robotics – 2018 (ISR-2018). – P. 1–4.

## CUBE-ROBOT CLIMBING A WALL

**Andrey Shevlyakov**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., (aash29@gmail.com).

*Abstract: Mobile robotics is a constantly evolving field, synergetic with artificial intelligence. Collective and cooperative autonomous robots are a short-term goal at the moment, with new breakthroughs reported yearly. While aerial robots get the most attention, other environments are equally important and pose challenging problems in motion control, sensing and engineering. Cube robots are interesting in this regard, as their shape allows groups of such robots to form stable structures. Additionally, it grants the robot an ability to jump. In this article we propose a control for a cube robot to climb a wall, assuming a symmetric wall facing it is available. We consider two-dimensional motion in vertical plane. The proposed control allows to optimize the rebound trajectory after a collision to reach maximum flight distance. We also present a software to model the movement of a cube robot and try various control strategies, based on Box2D and ImGUI libraries.*

Keywords: control, unilateral constraints, contact, robotics, jump.

УДК 517.977.5

ББК 22.213

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Н.А. Коргиным.*

*Поступила в редакцию 11.01.2019.*

*Дата опубликования 31.07.2019.*