

**Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН**

# **УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ**

***Выпуск 82  
Ноябрь 2019***

**СБОРНИК  
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл. №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

**Москва – 2019**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
*Институт проблем управления*  
*им. В.А. Трапезникова*

**УПРАВЛЕНИЕ  
БОЛЬШИМИ  
СИСТЕМАМИ**

**СБОРНИК ТРУДОВ**

*Выпуск 82*

**Москва – 2019**

### КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Кузнецов О.П., Кульба В.В., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Главный редактор:** член-корр. РАН Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Калимулина Э.Ю. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИПМ РАН), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), Галаев А.А. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук: Зоркальцев В.И. (ИСЭМ СО РАН), проф. Калашников А.О. (ИПУ РАН), проф. Калянов Г.Н. (ГУ ВШЭ), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Клочков В.В. (ИПУ РАН), д-р техн. наук Коргин Н.А. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук: проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (МФТИ), д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р биол. наук проф. Михальский А.И., д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н. (ИПС РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Орлов А.И. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), проф. Райгородский А.М. (МГУ), проф. Савватеев А.В. (РЭШ), д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), Совлуков А.С. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ), проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

### РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

**Арзамас** – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – академик РАН Бычков И.В., д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ).

**Адрес редакции:** 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

**Адрес в интернете:** [ubs.mtas.ru](http://ubs.mtas.ru).

## СОДЕРЖАНИЕ

### *Системный анализ*

---

|  |   |
|--|---|
| <b>Белов М.В., Новиков Д.А., Рогаткин А.Д.</b><br><i>Оценки кривых научения.....</i> | 6 |
|--|---|

### *Математическая теория управления*

---

|  |    |
|--|----|
| <b>Беломестный Д.В., Иосипой Л.С.</b><br><i>Об оценке плотности распределения с помощью<br/>ряда Фурье .....</i> | 28 |
|--|----|

### *Анализ и синтез систем управления*

---

|  |    |
|--|----|
| <b>Корнеев В.П.</b><br><i>Оптимизационный метод выбора результирующего<br/>ранжирования объектов, представленных<br/>в ранговой шкале измерения.....</i> | 44 |
|--|----|

### *Управление в медико-биологических и экологических системах*

---

|  |    |
|--|----|
| <b>Цурко В.В.</b><br><i>Рекомендательные системы в здравоохранении .....</i> | 61 |
|--|----|

### *Программы и системы моделирования объектов, средств и систем управления*

---

|  |    |
|--|----|
| <b>Павлов Д.В., Петров Д.С.</b><br><i>Применение нового метода для математического<br/>моделирования нештатной работы системы<br/>терморегулирования космического аппарата .....</i> | 74 |
|--|----|



## ОЦЕНКИ КРИВЫХ НАУЧЕНИЯ

Белов М. В.<sup>1</sup>

(Компания ИБС, Москва)

Новиков Д. А.<sup>2</sup>, Рогаткин А. Д.<sup>3</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Итеративное научение как обучение в строго повторяющихся условиях – одна из простейших разновидностей научения; оно лежит в основе формирования навыков у человека, условных рефлексов у животных, обучения многих технических (материализованных) и кибернетических (абстрактно-логических) систем и является предметом исследования в педагогике, психологии и физиологии человека и животных, в теории управления и в других науках. Для модели индивидуального научения в дискретном времени получены верхняя и нижняя оценки кривых научения, охарактеризована их асимптотика по времени и значениям параметров. Для модели совместного научения в непрерывном времени получены верхние и нижние оценки, а также нижняя асимптотическая (по числу агентов) оценка агрегированного уровня научения. Приведены стохастические асимптотические (по времени) оценки процесса научения, а также получены доверительные интервалы для значений уровня научения.*

Ключевые слова: модель научения, кривая научения, совместное научение.

### 1. Введение

Научение (learning) – процесс и результат приобретения индивидуального опыта. Ниже рассматривается один из видов научения, а именно *итеративное научение* (iterative (от лат. Iterativus) – повторяемый) – многократное повторение обучаемой системой (живой, т.е. человеком, животным, группой людей, или неживой, т.е. технической или кибернетической) действий, проб, попыток и т.д. для достижения фиксированной цели при постоянных внешних условиях. Современный обзор тематических моделей итеративного научения можно найти

---

<sup>1</sup> Михаил Валентинович Белов, д.т.н. (mbelov59@mail.ru).

<sup>2</sup> Дмитрий Александрович Новиков, д.т.н., чл.-корр. РАН, профессор (novikov@tushino.com).

<sup>3</sup> Андрей Дмитриевич Рогаткин, к.ф.-м.н., м.н.с. (andreyrogatkin@gmail.com).

в [1], обзор моделей научения в теории автоматического управления – в [3].

В книге [1] предложена достаточно общая (включающая многие известные) вероятностная модель научения в дискретном (см. выражение (1) ниже) и непрерывном (см. выражение (17)) времени. Целью настоящей работы является получение простых предельных/асимптотических (по значениям параметров модели или времени) верхних и нижних оценок (в основном экспоненциальных) кривых научения.

Во втором разделе в соответствии с [1] кратко описана модель научения в дискретном времени; оценки соответствующих кривых научения приведены в третьем разделе.

В четвертом разделе сравниваются одноуровневая и двухуровневая схемы научения.

В пятом разделе рассмотрена модель научения в непрерывном времени, которая в шестом разделе обобщена на случай совместного научения нескольких субъектов, для которого получены оценки соответствующих кривых научения.

Седьмой раздел посвящен агрегированному описанию совместного научения, восьмой – сетевым моделям научения.

Девятый раздел содержит стохастические оценки значений уровня научения.

## **2. Дискретная модель научения**

Пусть *обучаемый* должен освоить новый для него вид *деятельности*, имеющий конечное число  $K \geq 2$  независимых *компонентов*. Процесс научения заключается в предъявлении обучаемому последовательно (в моменты времени  $t = 1, 2, \dots$ ), но случайным образом, *ситуаций*, в каждой из которых, предъявленной впервые, он должен освоить один определенный компонент деятельности (между ситуациями и компонентами деятельности существует взаимно однозначное соответствие). Введем следующие предположения (описываемую ими модель называют *базовой моделью научения*).

**I.** До начала научения обучаемый не встречался ни с одной из ситуаций. Ситуации предъявляются ему по одной случайным образом, причем в любой момент времени вероятность предъяв-

ления конкретной ситуации постоянна и не зависит от предыстории (в терминах теории вероятностей: рассматривается  $K$ -цветная урновая схема с возвращением).

**II.** Каждый компонент деятельности может быть либо уже освоен, либо пока не освоен.

**III.** Если предъявляется ситуация, еще не встречавшаяся обучаемому ранее в процессе научения, то он на текущем шаге гарантированно осваивает соответствующий этой ситуации компонент своей деятельности.

**IV.** Если предъявляется ситуация, уже встречавшаяся обучаемому ранее в процессе научения, то он успешно идентифицирует соответствующую этой ситуации компонент своей деятельности (забывания не происходит).

**V.** Значением критерия уровня научения является вероятность того, что обучаемому будет предъявлена уже встречавшаяся ранее ситуация (математическое ожидание доли освоенных ситуаций).

Таким образом, в соответствии с предположениями I–V:

- начальное значение (в нулевой момент времени) уровня научения равно нулю;

- кривая научения (последовательность значений уровня научения) не убывает и асимптотически стремится к единице.

Обозначим через  $p_k > 0$  вероятность того, что на очередном шаге обучаемому будет предъявлена  $k$ -я ситуация (очевидно, что  $\sum_{k=1}^K p_k = 1$ ). Вектор этих вероятностей обозначим через

$P = (p_1, \dots, p_K)$ , значение критерия уровня научения в момент времени  $t$  – через  $x_t$ .

В [1] доказано, что

$$(1) \quad x_t(P) = 1 - \sum_{k=1}^K p_k (1 - p_k)^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Для кривой научения (1) имеют место следующие достаточно грубые экспоненциальные оценки:

$$(2) \quad 1 - e^{\gamma^- t} \leq x_t(P) \leq 1 - e^{\gamma^+ t},$$

где  $\gamma^- = -\ln(1 - \min_k \{p_k\})$ ,  $\gamma^+ = -\ln(1 - \max_k \{p_k\})$ .

Введем параметр  $\rho \in [0; 1/K]$ . Обозначим через



$$(3) P_{\rho, K} = \{P = (p_1, \dots, p_K) \mid \sum_{k=1}^K p_k = 1, p_k \geq \rho, k = \overline{1, K}\}$$

множество  $K$ -мерных распределений вероятностей, значение каждой из которых не менее порога  $\rho$ .

В [1] доказано, что максимум выражения (1) по всевозможным распределениям вероятностей  $P \in P_{\rho, K}$  достигается на равномерном распределении. Подставляя  $p_k = 1/K, k = \overline{1, K}$  в выражение (1), получим

$$(4) x_t^*(K) = 1 - \left(1 - \frac{1}{K}\right)^t = 1 - \exp(-\gamma t),$$

где  $\gamma(K) = \ln(1 + 1/(K - 1))$  – скорость научения.

### 3. Оценки «дискретных» кривых научения

Рассмотрим оценки кривых научения в зависимости от распределений  $P \in P_{\rho, K}$  и значений параметров  $\rho$  и  $K$ . Начнем с оценки снизу.

**Утверждение 1.**  $\forall K \geq 2, \forall \rho \in (0; 1/K] \exists t^*(\rho) = 2/\rho - 1$  такое, что  $\forall \tau > t^*(\rho)$  решение  $p^{min}$  задачи

$$(5) x_\tau(P) \rightarrow \min_{P \in P_{\rho, K}}$$

имеет вид

$$(6) p_1^{min} = 1 - (K - 1)\rho, p_k^{min} = \rho, k = \overline{2, K}.$$

Доказательство. В [1] доказана

**Лемма 1.**  $\forall \rho \in (0; 1/K] \exists t^*(\rho)$  такое, что  $\forall \tau > t^*(\rho)$   $\sum_{k=1}^K p_k(1 - p_k)^\tau$  – строго выпуклая функция по каждой из переменных  $\{p_k\}_{k=\overline{1, K}}$  (оценка  $t^*(\rho) = 2/\rho - 1$  получается непосредственно из условия положительности второй производной слагаемых).

Строго выпуклая функция достигает на ограниченном выпуклом множестве своего максимума в одной из крайних точек этого множества. Точка  $p^{min}$  является крайней точкой выпуклого

многогранника  $P_{\rho, k}$ . В силу симметрии целевой функции (1), минимум последней достигается в том числе и в этой точке (отметим, что значения во всех  $K$  крайних точках одинаковы). Утверждение 1 доказано.

Воспользовавшись результатом (6) утверждения 1, вычислим при  $\tau > t^*(\rho)$  оценку снизу величины (1):

$$(7) \quad x_{\tau}^{\min}(\rho, K) = 1 - (K-1)^{\tau} \rho^{\tau} [1 - (K-1)\rho] - (K-1)\rho(1-\rho)^{\tau}.$$

Найдем теперь оценку кривой научения (1) сверху. В [1] показано, что при  $\tau > t^*(\rho)$  максимум  $x_{\tau}(P)$  достигается при равномерном распределении вероятностей реализации ситуаций. Подставляя в (1)  $p_k = \frac{1}{K}$ ,  $k = \overline{1, K}$ , вычислим соответствующую оценку сверху:  $x_{\tau}^{\max}(\rho, K) = 1 - \left(1 - \frac{1}{K}\right)^{\tau}$  (отметим, что при  $0 \leq \tau \ll t^*(\rho)$  имеет место  $x_{\tau}^{\min}(\rho, K) \geq x_{\tau}^{\max}(\rho, K)$  - см. рис. 1).

Преобразовывая, получим

$$(8) \quad x_{\tau}^{\max}(\rho, K) = 1 - \exp(-\gamma(K)\tau).$$

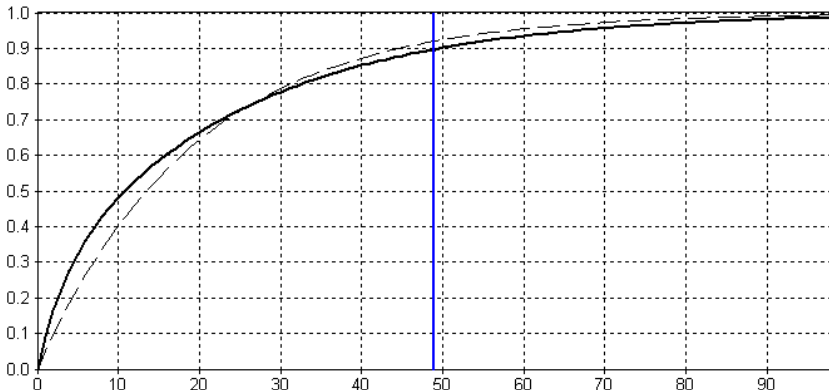


Рис. 1. Зависимости  $x_{\tau}^{\min}(\rho, K)$  (сплошная линия) и  $x_{\tau}^{\max}(\rho, K)$  (пунктирная линия) при  $K = 20$ ,  $\rho = 0,04$ .  
Вертикальная линия -  $t^*(\rho) = 49$

Так как  $\forall K \geq 2 \quad \forall \rho \in (0; 1/K], \quad \forall P \in P_{\rho, K}, \quad \forall \tau > t^*(\rho)$   
 $x_{\tau}^{\min}(\rho, K) \leq x_{\tau}(P) \leq x_{\tau}^{\max}(\rho, K)$  и  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} x_{\tau}^{\min}(\rho, K) = x_{\tau}^{\max}(\rho, K) = 1$ ,  
 то  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} x_{\tau}(P) = 1$  и  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} (x_{\tau}^{\max}(\rho, K) - x_{\tau}^{\min}(\rho, K)) = 0$ . Итак, мы  
 обосновали справедливость следующего утверждения.

**Утверждение 2.**  $\forall K \geq 2, \quad \forall \rho \in (0; 1/K], \quad \forall P \in P_{\rho, K},$

$\forall \tau > t^*(\rho)$  выполнено:

- 1)  $x_{\tau}^{\min}(\rho, K) \leq x_{\tau}(P) \leq x_{\tau}^{\max}(\rho, K)$ ;
- 2)  $x_{\tau}^{\min}(\rho, K)$  возрастает по  $\rho \in (0; 1/K]$ ;
- 3)  $x_{\tau}^{\min}(\rho, K)$  и  $x_{\tau}^{\max}(\rho, K)$  убывают по  $K$ ;
- 4)  $x_{\tau}^{\min}(\rho, K) \leq x_{\tau}^{\max}(\rho, K)$ ;
- 5)  $x_{\tau}^{\min}\left(\frac{1}{K}, K\right) = x_{\tau}^{\max}\left(\frac{1}{K}, K\right)$ ;
- 6)  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} (x_{\tau}^{\max}(\rho, K) - x_{\tau}^{\min}(\rho, K)) = 0$ .

Обозначим  $\beta(\rho) = \ln\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$ . Рассмотрим выражение (7).

Так как при  $\rho \leq \frac{1}{K}$  имеет место  $(K-1)\rho \leq 1$ , то  
 $x_{\tau}^{\min}(\rho, K) \geq (K-1)\rho(1-(1-\rho)^{\tau}) = (K-1)\rho(1-e^{-\beta(\rho)\tau})$ . Помимо  
 точных оценок (7) и (8), получаем следующую удобную для  
 практики приближительную оценку снизу  $x_{\tau}(P)$  при  $\tau > t^*(\rho)$ :  
 $\forall P \in P_{\rho, K}$

$$1 - (1 - \rho)^{\tau} \leq x_{\tau}(P) \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{K}\right)^{\tau},$$

или

$$1 - e^{-\beta(\rho)\tau} \leq x_{\tau}(P) \leq 1 - e^{-\gamma(K)\tau}.$$

Фиксируем произвольное распределение  $P \in P_{\rho, K}$ . Обозна-  
 чим через  $P^{\alpha}$  его «линейную комбинацию» с равномерным

распределением:  $p_k^\alpha = \frac{\alpha}{K} + (1-\alpha)p_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ ,  $\alpha \in [0; 1]$ . Из леммы 1 следует справедливость следующего утверждения.

**Утверждение 3а.**  $\forall \rho \in (0; 1/K]$   $\exists t^*(\rho)$  такое, что  $\forall \tau > t^*(\rho)$   $\forall P \in P_{\rho, K}$   $x_\tau(P^\alpha) \geq x_\tau(P)$  и  $x_\tau(P^\alpha)$  не убывает по  $\alpha \in [0; 1]$ .

**Эффективность научения и большое число агентов.** Отказавшись от предположения III, в настоящем подразделе будем считать, что при предъявлении  $k$ -й ситуации успешное освоение соответствующего компонента деятельности происходит с постоянной вероятностью  $w_k \leq 1$ , не зависящей от времени, достигнутого уровня научения и т.д. Вектор этих вероятностей, который можно условно назвать *эффективностью научения*, обозначим через  $W = (w_1, \dots, w_K)$ . Отметим, что вектор  $W$  в общем случае не удовлетворяет условию нормировки.

Тогда кривая научения примет вид

$$(9) \quad x_t(P, W) = \sum_{k=1}^K p_k \left( 1 - (1 - w_k p_k)^t \right), \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Отметим, что выражение (1) является частным случаем выражения (9), соответствующим единичным вероятностям научения при предъявлении любой ситуации:  $w_k = 1$ ,  $k = \overline{1, K}$ . В качестве частного случая (9) можно привести ситуацию, когда осваивается единственный компонент деятельности ( $K = 1$ ,  $p_1 = 1$ ), тогда из (9) следует, что  $x_t(w_1) = 1 - (1 - w_1)^t = 1 - \exp(-\gamma_w t)$ , где  $\gamma_w = -\ln(1 - w_1)$ .

В частном случае равномерного распределения выражение (9) примет вид:

$$(10) \quad x_t(P, W) = 1 - \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left( 1 - \frac{w_k}{K} \right)^t.$$

Фиксируем произвольный вектор  $W$ . Обозначим через  $W^\alpha$  его линейную комбинацию с единичным вектором:  $w_k^\alpha = \alpha + (1-\alpha)w_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ ,  $\alpha \in [0; 1]$ . Из леммы 1 следует справедливость следующего утверждения.

**Утверждение 3б.**  $\forall \rho \in (0; 1/K] \exists t^*(\rho)$  такое, что  $\forall \tau > t^*(\rho)$   
 $\forall W x_\tau(P, W^\alpha) \geq x_\tau(P, W)$  и  $x_\tau(P, W^\alpha)$  не убывает по  $\alpha \in [0; 1]$ .

Содержательным следствием утверждения 3б является то, что при нормированных эффективностях научения максимум уровня научения (10) будет достигаться при равных вероятностях успешного освоения всех компонентов деятельности.

#### 4. Иерархическая декомпозиция компонентов деятельности

Сравним две схемы научения: *одноуровневую*, в которой происходит освоение  $K$  компонент деятельности, и *двухуровневую*, в которой сначала на верхнем уровне субъект осваивает (учится различать) на верхнем уровне  $m \leq K$  ситуаций, а затем на нижнем уровне – параллельно для каждой из  $m$  компонент верхнего уровня – осваивает ее «детализацию» на  $K/m$  «подкомпонент» (понятно, что если подкомпоненты, соответствующие различным компонентам верхнего уровня, осваиваются последовательно, то двухуровневая схема менее эффективна). В обеих схемах число возможных компонент нижнего уровня одно и то же –  $K$ .

Двухуровневая схема научения будет предпочтительнее одноуровневой, если, во-первых, уровень научения в ней (определяемый как вероятность того, что на обоих уровнях обучаемому встретятся уже встречавшиеся ранее ситуации) выше, т.е. должно выполняться

$$(11) x_i^*(m) x_i^*(K/m) \geq x_i^*(K).$$

Подставляя выражение (4) в выражение (11), легко убедиться, что максимум левой части (11) достигается при  $m^*(K) = \sqrt{K}$ , т.е. оптимальна симметричная декомпозиция. При этом справедливо неравенство (11), принимающее вид

$$1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{K}}\right)^t \geq \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{K}\right)^t}.$$

Во-вторых, необходимо проверить, что последовательное освоение компонентов верхнего и нижнего уровня требует не

больше времени, чем в одноуровневой схеме научения. В [1] показано, что минимальное время, требуемое для достижения заданного уровня научения  $x \in [0; 1]$  при числе компонентов деятельности  $K$ , равно  $t(x, K) = \frac{\ln(1-x)}{\ln\left(1 - \frac{1}{K}\right)}$ . Для того чтобы достичь

$$t(x, K) = \frac{\ln(1-x)}{\ln\left(1 - \frac{1}{K}\right)}$$

общего уровня научения  $x$ , на каждом из двух уровней должен быть достигнут уровень научения  $\sqrt{x}$ . Получаем следующее требование на соотношение времен:

$$(12) \quad t(\sqrt{x}, K/m) + t(x\sqrt{x}, K/m) \leq t(x, K).$$

Подставляя в (12)  $m = m^*(K)$ , получим

$$(13) \quad \frac{2 \ln(1-\sqrt{x})}{\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{K}}\right)} \leq \frac{\ln(1-x)}{\ln\left(1 - \frac{1}{K}\right)}.$$

Разлагая выражения в числителе и знаменателе этого выражения в ряд Тейлора, получаем из выражения (13) следующее требование на соотношение параметров:  $x \geq 4/K$ . При  $K < 4$  декомпозиция не имеет смысла. Самая простая декомпозиция при  $K = 4$  (две ситуации на верхнем уровне, каждой из которых соответствуют по две подситуации на нижнем) требует достижения единичного уровня научения на каждом из уровней, что нереалистично в рамках рассматриваемой вероятностной модели. А вот при больших значениях  $K$  требования на достигаемые значения уровней научения могут быть вполне разумны: например, при  $K = 100$  оптимальным является разбиение множества возможных ситуаций на 10 групп по 10 ситуаций в каждой с достижением уровня научения 0,2 на верхнем и нижнем уровне.

Подставляя условие  $x \geq 4/K$  в левую часть выражения (13), получим оценку минимальной продолжительности научения, при котором целесообразна иерархическая декомпозиция множества возможных ситуаций:

$$(14) t_{\min}(K) = \frac{2 \ln \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{K}} \right)}{\ln \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{K}} \right)}.$$

Отметим, что до сих пор мы сравнивали одноуровневую и двухуровневую схемы научения. Условия эффективности последней могут быть применены и к ней самой (при переходе к трехуровневой схеме) и т.д. Поэтому перспективным, но достаточно простым с «технической» точки зрения представляется получение оценок для оптимального числа уровней симметричной (а, судя по всему, именно она оптимальна) иерархической декомпозиции множества возможных ситуаций.

## 5. Модель научения в непрерывном времени

Рассмотрим, следуя [1], общую модель научения в непрерывном времени - дифференциальное уравнение для уровня научения  $x(t) \in [0; 1], t \geq 0$ :

$$(15) \dot{x}(t) = (1 - x) f(x)$$

с начальным значением  $x(0) \in [0; 1)$ , где  $f(\cdot): [0; 1] \rightarrow (0; A]$  - непрерывная функция, где  $0 < A < +\infty$  (если значение  $f$  интерпретируется как вероятность или как значение уровня научения в другом процессе научения - см. [1], то необходимо потребовать чтобы  $A = 1$ ).

В [1] показано, что из вида правой части уравнения (15) и введенных предположений следует, что:

- а) решение уравнения (15) существует и единственно;
- б) кривая научения  $x(t)$  является строго монотонно возрастающей и  $\forall t \geq 0 \dot{x}(t) \leq A$ , т.е. скорость ее роста ограничена;

в) кривая научения мажорируется экспоненциальной кривой:

$$(16) \forall t \geq 0 \quad x(t) \leq 1 - (1 - x(0)) \exp(-At),$$

г) кривая научения  $x(t)$  является замедленно-асимптотической, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}(t) = 0.$$

Варьируя функцию  $f(\cdot)$ , можно получать различные кривые научения. Частными случаями решения уравнения (15) являются экспоненциальные, степенные, логистические и другие хрестоматийные классы кривых научения [1].

## 6. Совместное научение

Пусть имеется  $n \geq 1$  «обучаемых» - *агентов*, которые могут представлять собой либо отдельных субъектов, либо метакомпоненты деятельности одного субъекта. Обозначая через  $i$  номер агента, через  $x_i \in [0;1]$  – уровень его научения, через  $x_i(0) \in [0;1]$  – начальное значение уровня его научения, через  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – вектор уровней научения, запишем для каждого из агентов аналог уравнения (15):

$$(17) \dot{x}_i(t) = (1 - x_i) f_i(X), \quad i = \overline{1, n}.$$

Относительно *функций взаимного влияния агентов*  $f_i(\cdot)$ :  $[0; 1]^n \rightarrow (0; A_i]$  предположим, что:

A.1. они непрерывно дифференцируемы по всем переменным и  $0 < A_i < +\infty$  (если значение  $f_i$  интерпретируется как вероятность или как значение уровня научения в другом процессе научения – см. [1], то необходимо потребовать, чтобы  $A_i = 1$ );

A.2.  $\forall X \in [0;1]^n \quad \forall i, j = \overline{1, n}$  частные производные  $\frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j}$  зна-

копостоянны.

Отсюда следует, что, во-первых, кривые научения агентов удовлетворяют вышеприведенным свойствам а)–г). Во-вторых, последнее предположение позволяет получить более «тонкие» оценки, нежели выражения типа (16). Обозначим

$$\xi_{ij} = \max \left\{ \text{Sign} \left( \frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j} \right); x_j(0) \right\}, \quad \zeta_{ij} = \max \left\{ -\text{Sign} \left( \frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j} \right); x_j(0) \right\},$$

$$\mu_i^- = (\zeta_{i1}, \dots, \zeta_{in}), \quad \mu_i^+ = (\xi_{i1}, \dots, \xi_{in}), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

**Утверждение 4.** В рамках предположений A.1–A.2 справедливы следующие оценки кривых научения  $\{x_i(t)\}$ , являющихся решениями системы дифференциальных уравнений (17):



$$\forall i = \overline{1, n} \quad \forall t \geq 0 \quad x_i^{\min}(t) \leq x_i(t) \leq x_i^{\max}(t),$$

где

$$(18) \quad x_i^{\min}(t) = 1 - (1 - x_i(0)) \exp(-f_i(\mu_i^-) t),$$

$$(19) \quad x_i^{\max}(t) = 1 - (1 - x_i(0)) \exp(-f_i(\mu_i^+) t).$$

Справедливость утверждения 4 следует из того, что в рамках предположения А.2 непрерывные монотонные (по соответствующим переменным) функции  $\{f_i(\cdot)\}$  достигают своих минимумов и максимумов в вершинах куба  $\prod_{i=1}^n [x_i(0); 1]$ .

## 7. Агрегированное описание

Рассмотрим частный случай системы дифференциальных уравнений (17), когда  $f_i(X) = \gamma_i G(X)$ ,  $\gamma_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , где  $G: [0; 1]^n \rightarrow (0; 1]$  - гладкая строго монотонно возрастающая по каждой из переменных функция агрегирования, значение которой  $g(t) = G(X(t))$  может интерпретироваться как уровень научения системы в целом – агрегированный уровень научения.

В силу системы (17) можно записать следующее уравнение динамики агрегированного уровня научения:

$$(20) \quad \dot{g}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial G(X)}{\partial x_i} \dot{x}_i(t) = g(t) \sum_{i=1}^n \frac{\partial G(X)}{\partial x_i} \gamma_i (1 - x_i).$$

В рамках введенных предположений правая часть выражения (20) строго положительна, поэтому агрегированный уровень научения монотонно возрастает, асимптотически стремясь к единице.

Подставляя  $f_i(X) = \gamma_i G(X)$  в (17), получим

$$(21) \quad \frac{\dot{x}_i(t)}{\gamma_i(1 - x_i)} = G(X), \quad i = \overline{1, n}.$$

При большом числе агентов можно в первом приближении (так называемое приближение *среднего поля*) пренебречь влиянием отдельного агента на значение агрегированного уровня научения. Тогда из (21) получаем, что справедлива оценка

$$(22) \quad \tilde{x}_i(t) = 1 - (1 - x_i(0)) \exp\left(-\gamma_i \int_0^t g(\tau) d\tau\right).$$

Рассмотрим случай  $G(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ . Выражение (20) примет

вид

$$(23) \quad \dot{g}(t) = g(t) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \gamma_i (1 - x_i(0)) \exp\left(-\gamma_i \int_0^t g(\tau) d\tau\right).$$

При больших  $n$  в силу результатов [2] среднее в правой части (23) может быть оценено как  $\gamma^{\sim} (1 - g(t))$ , где  $\gamma^{\sim} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \gamma_i$ .

Получаем следующее уравнение динамики агрегированного уровня научения:

$$(24) \quad \dot{g}(t) = \gamma^{\sim} g(t)(1 - g(t))$$

с начальным условием  $g(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(0)$ . Решением дифференциального уравнения Бернулли (24) является логистическая кривая

$$(25) \quad g(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{g(0)} - 1\right) \exp(-\gamma^{\sim} t)}.$$

Вычислим  $\int_0^t g(\tau) d\tau = \frac{1}{\gamma^{\sim}} \ln \left[ g(0) \left( \exp(\gamma^{\sim} t) + \frac{1}{g(0)} - 1 \right) \right]$  и

подставим в выражение (22):

$$(26) \quad \tilde{x}_i(t) = 1 - \frac{1 - x_i(0)}{[1 + g(0)(\exp(\gamma^{\sim} t) - 1)]^{\frac{\gamma_i}{\gamma^{\sim}}}}.$$

Отметим, что при  $n = 1$  выражения (26) и (25) совпадают.

Величина  $\int_0^t g(\tau) d\tau$ , которая асимптотически линейна по  $t$ , может интерпретироваться как «эффективное время» в обучаемой системе.

## 8. Сетевая модель научения

Рассмотрим конечное множество  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  агентов,  $n \geq 2$ , и сеть  $G = (N, E)$  (ориентированный связный граф без циклов), вершины которой соответствуют агентам, а множество дуг  $E \subseteq N \times N$  отражает «технологические» связи между агентами, причем номера агентов образуют правильную нумерацию вершин сети. Обозначим через  $N_i = \{j \in N / (j; i) \in E\}$  множество предшественников  $i$ -го агента в сети  $G$ ,  $i \in N$ .

Предположим, что сеть имеет единственный выход (вершину, не имеющую исходящих дуг) –  $n$ -ю вершину. Обозначим через  $M_0 \subseteq N$  множество входов рассматриваемой сети (вершин, не имеющих входящих дуг), через  $M_k$  – множество вершин, в которые входят дуги только из вершин, принадлежащих множествам  $\{M_j\}$ ,  $j = \overline{0, k-1}$  (число  $k(i)$  называется рангом вершины  $i$ , принадлежащей множеству  $M_k$ ),  $k = \overline{1, m}$ ,  $m \leq n-1$ ,  $M_m = \{n\}$ . Набор множеств  $\{M_k\}$ ,  $k = \overline{0, m}$ , является разбиением множества  $N$ . Обозначим через  $M^k = \bigcup_{j=0}^{k-1} M_j$ ,  $k = \overline{1, m}$ , и положим  $M^0 = \emptyset$ .

Будем считать, что направленные связи между агентами отражают возможности их научения: вероятность освоения агентом «своего» компонента деятельности зависит (равна произведению  $\prod_{j \in N_i} x_j(t)$ ) от уровней научения его предшественников.

Такая ситуация имеет место либо при взаимодействии агентов, осваивающих компоненты сложной технологии, либо при последовательной отработке взаимосвязанных навыков одним субъектом.

Получаем, что сеть структурирует правые части уравнений (17) следующим образом:

$$(27) f_i(X) = \gamma_i \prod_{j \in N_i} x_j(t), \gamma_i > 0, i = \overline{1, n}.$$

Действительно, система уравнений

$$(28) \dot{x}_i(t) = \gamma_i(1 - x_i) \prod_{j \in N_i} x_j(t), \quad i = \overline{1, n},$$

с учетом структуры сети допускает последовательное (по множествам  $\{M_k\}$ ,  $k = \overline{1, m}$ ) интегрирование. Входы сети (агенты из множества  $M_0$ ) будут обучаться по экспоненциальному закону (для простоты будем считать, что начальные значения уровней научения всех агентов равны нулю):

$$(29) x_i(t) = 1 - \exp(-\gamma_i t), \quad i \in M_0.$$

Подставляя (29) в (27), для агентов из множества  $M_1$  получаем:

$$(30) \dot{x}_i(t) = \gamma_i(1 - x_i) \prod_{j \in M_0} (1 - \exp(-\gamma_j t)), \quad i \in M_1.$$

Решая (30), запишем:

$$(31) x_i(t) = 1 - \exp\left\{-\gamma_i \int_0^t \prod_{j \in M_0} (1 - \exp(-\gamma_j \tau)) d\tau\right\}, \quad i \in M_1.$$

И так далее, в общем случае для агентов из множества  $M_k$  получаем:

$$x_i(t) = 1 - \exp\left\{-\gamma_i \int_0^t \prod_{j \in M_{k-1}} x_j(\tau) d\tau\right\}, \quad i \in M_k, \quad k = \overline{1, m}.$$

Пример. Пусть сеть имеет вид цепочки из двух агентов, упорядоченных в соответствии со своими номерами. Тогда из (31) получаем, что  $M_0 = \{1\}$ ,  $M_1 = \{2\}$  и  $x_1(t) = 1 - \exp(-\gamma_1 t)$ ,

$$x_2(t) = 1 - \exp\left\{-\gamma_2 \int_0^t (1 - \exp(-\gamma_1 \tau)) d\tau\right\} = 1 - \exp(-\gamma_2 t) \exp\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} x_1(t)\right).$$

## 9. Стохастические оценки

До сих пор мы рассматривали уровень научения как вероятность того, что обучаемый встретится с уже известной ситуацией. Рассмотрим теперь модель, в которой процесс научения описывается совокупностью ситуаций, деятельность в условиях которых им уже освоена (базовая модель рассмотрена в [1]).

Исследуем случай равномерного распределения вероятностей реализации различных ситуаций:  $p_k = \frac{1}{K}$ . В этом случае процесс обучения может быть описан простой марковской цепью с числом состояний  $K + 1$ . Номер состояния соответствует количеству ситуаций, для которых соответствующие компоненты деятельности уже освоены. Из состояния  $n$  возможен либо возврат в состояние  $n$ , либо переход в состояние  $(n + 1)$  – см. рис. 2. Обозначим долю освоенных ситуаций в момент времени  $t$  через  $L_t$ .

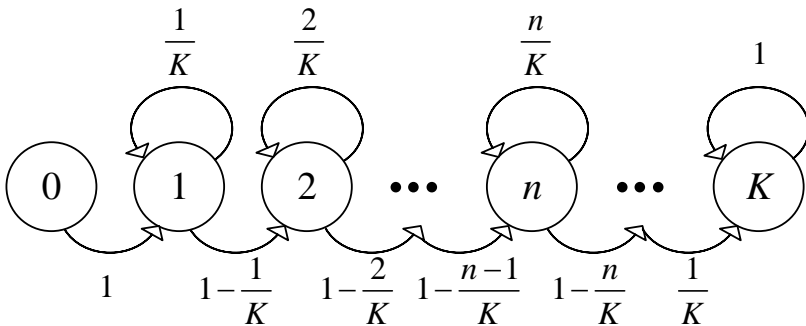


Рис. 2. Диаграмма марковской цепи процесса обучения для случая равномерного распределения

Обозначим для упрощения выкладок  $\delta = 1/K$ . Переходные вероятности принимают значения

$$\Pr(L_t = n\delta \mid L_{t-1} = (n-1)\delta) = 1 - (n-1)\delta,$$

$$\Pr(L_t = n\delta \mid L_{t-1} = n\delta) = n\delta.$$

Уравнение динамики принимает вид

$$(32) \quad \Pr(L_t = n\delta) = \Pr(L_{t-1} = n\delta)n\delta + \Pr(L_{t-1} = (n-1)\delta)(1 - (n-1)\delta).$$

Поставим задачу найти в явном виде выражение для  $\Pr(L_t = n\delta)$  при  $\Pr(L_0 = 0) = 1$ . При  $n = 0$ ,  $n = 1$ , очевидно,  $\Pr(L_t = 0) = \chi_{t=0}(t)$ , где  $\chi_A$  – индикатор множества  $A$ .

$$(33) \quad \Pr(L_t = 1) = \delta^{t-1}, \quad t \geq 1.$$

При  $t = n$ ,  $n > 1$ , имеем

$$(34) \Pr(L_n = n\delta) = (1-\delta)(1-2\delta)\dots(1-(n-1)\delta) = \prod_{i=1}^{n-1} (1-i\delta).$$

При  $n = 2$  из (32) следует

$$(35) \Pr(L_t = 2\delta) = \Pr(L_{t-1} = 2\delta)2\delta + \Pr(L_{t-1} = \delta)(1-\delta) = \\ = 2\delta\Pr(L_{t-1} = 2\delta) + \delta^{t-2}(1-\delta).$$

Выражая  $\Pr(L_{t-1} = 2\delta)$  по формуле (35) и подставляя в правую часть (35), получаем

$$\Pr(L_t = 2\delta) = 2\delta(2\delta\Pr(L_{t-2} = 2\delta) + \delta^{t-3}(1-\delta)) + \delta^{t-2}(1-\delta).$$

Продолжая выражать  $\Pr(L_{t-k} = 2\delta)$  через  $\Pr(L_{t-k-1} = 2\delta)$  и раскрывая скобки, имеем

$$(36) \Pr(L_t = 2\delta) = (1-\delta)\delta^{t-2} \sum_{i=0}^{i=k-1} 2^i + 2^k \delta^k \Pr(L_{t-k} = 2\delta) = \\ = (2^k - 1)(1-\delta)\delta^{t-2} + 2^k \delta^k \Pr(L_{t-k} = 2\delta).$$

Подставим в (36) значение  $t - k = 2$ . Учитывая

$$\Pr(L_2 = 2\delta) = (1-\delta),$$

получаем

$$\Pr(L_t = 2\delta) = (2^{t-2} - 1)(1-\delta)\delta^{t-2} + 2^{t-2}\delta^{t-2}(1-\delta) = (2^{t-1} - 1)\delta^{t-2}(1-\delta).$$

Итак,

$$(37) \Pr(L_t = 2\delta) = (2^{t-1} - 1)\delta^{t-2}(1-\delta), \quad t \geq 2.$$

Вид формулы (37) и её вывод (а также выражение (34) для  $t = n$ ) позволяют выдвинуть гипотезу о том, что вероятность  $\Pr(L_t = n\delta)$  имеет вид

$$(38) \Pr(L_t = n\delta) = (\alpha_n^n n^{t-1} + \alpha_{n-1}^n (n-1)^{t-1} + \dots + \alpha_1^n) \delta^{t-n} (1-\delta) \dots (1-(n-1)\delta).$$

где  $t \geq n$ , а  $\{\alpha_i^n\}$  – некоторые коэффициенты, не зависящие от  $t$ .

Для удобства введём обозначения  $a_i^n = \sum_{i=1}^n \alpha_i^n i^{t-1}$ ,

$b_t^n = \delta^{t-n} \prod_{i=1}^{n-1} (1-i\delta)$ . Тогда гипотеза (38) принимает следующий

вид.

**Лемма 2.**  $\Pr(L_t = n\delta) = a_t^n b_t^n, \quad t \geq n.$

Докажем лемму 2 по индукции. При  $n = 2$  она верна. Предположим, что утверждение леммы выполняется для  $n - 1$ . Докажем, что тогда она верно для  $n$ . Запишем уравнение динамики (32):

$$(39) \Pr(L_t = n\delta) = n\delta \Pr(L_{t-1} = n\delta) + (1 - (n-1)\delta) a_{t-1}^{n-1} b_{t-1}^{n-1}.$$

Выражая  $\Pr(L_{t-1} = n\delta)$  из (39) и подставляя в правую часть (39), получаем

$$(40) \Pr(L_t = n\delta) = n\delta (n\delta \Pr(L_{t-2} = n\delta) + (1 - (n-1)\delta) a_{t-2}^{n-1} b_{t-2}^{n-1}) + (1 - (n-1)\delta) a_{t-1}^{n-1} b_{t-1}^{n-1}.$$

Продолжая выражать  $\Pr(L_{t-k} = n\delta)$  через  $\Pr(L_{t-k-1} = n\delta)$  и раскрывая скобки, а также принимая во внимание, что  $\delta b_{t-1}^n = b_t^n, (1 - (n-1)\delta) b_t^{n-1} = \delta b_t^n$ , имеем

$$\Pr(L_t = n\delta) = n^k \delta^k \Pr(L_{t-k} = n\delta) + b_t^n \sum_{i=0}^{k-1} n^i a_{t-1-i}^{n-1}.$$

Подставляя  $k = t - n$ , с учётом  $a_{n-1}^{n-1} = 1$  (что следует из (34)) получаем

$$\begin{aligned} \Pr(L_t = n\delta) &= n^{t-n} b_t^n + b_t^n \sum_{j=0}^{j=t-n-1} n^j a_{t-j-1}^{n-1} = b_t^n \sum_{j=0}^{j=t-n} n^j a_{t-j-1}^{n-1} = b_t^n \sum_{j=0}^{j=t-n} n^j \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{n-1} i^{t-j-2} = \\ &= b_t^n \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{n-1} \sum_{j=0}^{j=t-n} n^j i^{t-j-2} = b_t^n \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{n-1} i^{n-2} \sum_{j=0}^{j=t-n} n^j i^{t-n-j} = \\ &= b_t^n \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{n-1} i^{n-2} \frac{n^{t-n+1} - i^{t-n+1}}{n-i} = \\ &= b_t^n \sum_{i=1}^{n-1} \left( -\frac{\alpha_i^{n-1}}{n-i} \right) i^{t-1} + n^{t-1} \left( n^{2-n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i^{n-1} i^{n-2}}{n-i} \right) = b_t^n \sum_{i=1}^n \alpha_i^n i^{t-1} = a_t^n b_t^n, \end{aligned}$$

где

$$(41) \alpha_i^n = -\frac{\alpha_i^{n-1}}{n-i}, \quad i < n,$$

$$(42) \alpha_n^n = n^{2-n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i^{n-1} i^{n-2}}{n-i} = -n^{2-n} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^n i^{n-2}.$$

Лемма 2 доказана.

Для нахождения явного вида вероятности  $\Pr(L_i = n\delta)$  остаётся определить явный вид коэффициентов  $\alpha_i^n$ . Используя формулу (41), получаем

$$(43) \alpha_i^n = -\frac{\alpha_i^{n-1}}{n-i} = \frac{\alpha_i^{n-2}}{(n-i)(n-1-i)} = \dots = \frac{(-1)^{n+i}}{(n-i)!} \alpha_i^i.$$

Докажем, что

$$(44) \alpha_i^i = \frac{1}{(i-1)!}$$

по индукции. Для  $i = 1, i = 2$  выражение (44) верно, согласно (33) и (37). Пусть (44) верно для всех  $i$  от 1 до  $n-1$ . Докажем, что тогда оно верно и для  $i = n$ .

Подставляя в (42) выражения (42), (44), получаем

$$\begin{aligned} \alpha_n^n &= -n^{2-n} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^n i^{n-2} = -n^{2-n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n+i}}{(n-i)!} \alpha_i^i i^{n-2} = \\ &= -n^{2-n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n+i}}{(n-i)!(i-1)!} i^{n-2} = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} - n^{2-n} (-1)^n \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{(n-i)!(i-1)!} i^{n-2} = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} - \frac{n^{2-n} (-1)^n}{n!} \sum_{i=1}^n (-1)^i C_n^i i^{n-1}. \end{aligned}$$

Известно (см. например [4]), что  $\sum_{i=1}^n (-1)^i C_n^i i^{n-1} = 0$ . Следова-

тельно,  $\alpha_n^n = \frac{1}{(n-1)!}$ .

Объединяя (43) и (44), получаем, что



$$(45) \alpha_i^n = \frac{(-1)^{n+i}}{(n-i)!(i-1)!}, i < n.$$

Подставляя (45) в (38), получаем окончательно:

$$(46) \Pr(L_t = n\delta) = \left( \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{n+i} i^{t-1}}{(n-i)!(i-1)!} \right) \delta^{t-n} (1-\delta) \dots (1-(n-1)\delta) = \\ = \left( \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \frac{C_n^i}{n!} i^t \right) \delta^{t-n} (1-\delta) \dots (1-(n-1)\delta).$$

Используя (46), можно численно строить доверительные интервалы. Например, найти интервал значений  $(a, b)$ , такой, что  $L_t \in (a, b)$  с заданной вероятностью  $p$ .

Из вышеизложенного следует справедливость следующего утверждения.

**Утверждение 5.** Имеют место следующие стохастические оценки процесса научения:

1.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \Pr(L_t = n\delta) = -\ln \frac{K}{n}$  (большие уклонения);
2.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \Pr(L_t < 1) = -\ln \frac{K}{K-1}$  (большие уклонения);
3.  $\Pr(L_t = 1) = \left( \sum_{i=1}^n (-1)^{K+i} \frac{C_K^i}{K!} i^t \right) \frac{1}{K^{t-K}} \left( 1 - \frac{1}{K} \right) \dots \left( 1 - \frac{(K-1)}{K} \right)$ ;
4.  $\Pr\left(\frac{l}{K} \leq L_t \leq \frac{m}{K}\right) = \sum_{n=l}^{n=m} \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \frac{C_n^i}{n!} i^t \delta^{t-n} \prod_{i=1}^{n-1} (1-i\delta)$ .

## 10. Заключение

Таким образом, в настоящей работе для модели индивидуального научения (1) в дискретном времени получены грубые оценки (2) кривых научения, нижняя (7) и верхняя (8) оценки; в утверждениях 2 и 3 охарактеризована их асимптотика по времени и значениям параметров.

Для модели (15), (17) совместного научения в непрерывном времени получены верхние и нижние оценки (18) и (19), а также

нижняя асимптотическая (по числу агентов) оценка (26) агрегированного уровня научения.

В утверждении 5 приведены стохастические асимптотические (по времени) оценки процесса научения, а также получены доверительные интервалы для значений уровня научения.

### Литература

1. БЕЛОВ М.В., НОВИКОВ Д.А. *Модели технологий*. – М.: Ленанд, 2019. – 160 с.
2. ОПОЙЦЕВ В.И. *Задачи и проблемы асимптотического агрегирования* // Автоматика и телемеханика. – 1991. – №8. – С. 133–144.
3. *Теория управления (дополнительные главы)* / Под ред. Д.А. Новикова. – М.: Ленанд, 2019. – 552 с.
4. GOULD H. *Euler's Formula for Nth Differences of Powers* // The American Mathematical Monthly. – 1978. – Vol. 85, No. 6. - P. 450–467.
5. LASRY J., LIONS P. *Mean Field Games* // Jpn. J. Math. – 2007. – Vol. 2, No. 1. – P. 229–260.

### LEARNING CURVES ESTIMATES

**Mikhail Belov**, IBS Company, Moscow, Doctor of Science (mbelov@ibs.ru).

**Dmitry Novikov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (novikov@ipu.ru).

**Andrew Rogatkin**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (andreyrogatkin@gmail.com).

*Abstract: Iterative learning as learning in strictly repeating conditions is one of the simplest varieties of learning; it underlies the formation of human skills, conditioned reflexes in animals, the training of many technical (materialized) and cybernetic (abstract-logical) systems and is the subject of research in pedagogy, psychology and physiology of humans and animals, in control theory and in other sciences. For the model of individual learning in discrete time, upper and lower bounds for learning curves are obtained, their asymptotic behavior in time and parameter values is characterized. For the model of joint learning in continuous time, upper and lower bounds are obtained, as well as a lower asymptotic (by the number of agents) estimate of the aggregated level of learning. Stochastic asymptotic (in time) estimates of*

*the learning process are presented, and confidence intervals for the values of the learning level are obtained.*

Keywords: iterative learning, learning curve, joint activity and learning.

УДК 004.827

ББК 32.81 87 65.05 72.4

DOI: 10.25728/ubs.2019.82.1

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии М.В. Губко.*

*Поступила в редакцию 03.09.2019.*

*Опубликована 30.11.2019.*

## ОБ ОЦЕНКЕ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ РЯДА ФУРЬЕ<sup>1</sup>

Беломестный Д. В.<sup>2</sup>, Иосипой Л. С.<sup>3</sup>

(Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики», Москва)

*Рассматривается классическая статистическая задача оценки плотности распределения по выборке из этого распределения. Данная задача возникает в различных прикладных областях при попытке изучить вероятностную структуру некоторого случайного процесса. Например, с помощью оценки плотности можно идентифицировать некоторую структуру в сложной системе, а затем сделать выводы о неизвестных параметрах этой системы. В данной работе предлагается новый способ оценивания плотности распределения, основанный на аппроксимации логарифма плотности рядом Фурье, коэффициенты которого вычисляются с помощью решения некоторой системы линейных уравнений. Анализ теоретических свойств такой оценки является основной задачей данной работы. Основными результатами данной работы являются оценка отклонения в супремум-норме и оценка расстояния Кульбака – Лейблера между аппроксимацией плотности и истинным значением. Полученные оценки являются параметрическими и имеют порядок сходимости «с большой вероятностью»  $O(1/\sqrt{N})$ , что является стандартными порядками в задачах параметрического оценивания. Константы в порядках получены с точностью до некоторого абсолютного множителя, т.е. исследована ее зависимость от всех параметров задачи. В качестве численного примера рассматривается оценка плотности распределения Коши.*

Ключевые слова: оценка плотности, ряд Фурье, расстояние Кульбака – Лейблера.

### 1. Введение

В данной статье рассматривается задача оценки плотности распределения вероятности по выборке из этого распределения. Данная задача возникает в различных прикладных областях при попытке изучить вероятностную структуру некоторого случайного процесса. Эта задача является критически важной, по-

---

<sup>1</sup> Результаты данной статьи получены при поддержке гранта РФФ №19-71-30020.

<sup>2</sup> Денис Витальевич Беломестный, к.ф.-м.н., профессор (dbelomestny@hse.ru).

<sup>3</sup> Леонид Сергеевич Иосипой, м.н.с. (liosipoi@hse.ru).

скольку с помощью плотности распределения можно описывать систему, из которой были получены данные. Таким образом, оценка плотности может быть использована для того, чтобы идентифицировать некоторую структуру в сложной системе, а затем сделать выводы о неизвестных параметрах этой системы.

Оценка плотности распределения является классической статистической задачей. Для ее решения было разработано множество различных подходов, которые можно разделить на параметрические и непараметрические. В параметрическом подходе обычно предполагается, что плотность известна с точностью до конечного числа параметров, в то время как в непараметрическом подходе обычно предполагается, что плотность принадлежит некоторому бесконечному набору кривых (например, классу непрерывно дифференцируемых функций). Литература на данную тему достаточно обширна, см. [7, 4, 2, 1, 14, 6] и список литературы в данных работах. Хорошим введением в данную задачу являются [5, глава 22] и [14, главы 1, 2].

Обозначим через  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  неизвестную плотность распределения, которую необходимо оценить по выборке  $X_1, \dots, X_N$  (элементы выборки получены независимо). В данной работе предлагается новая параметрическая оценка  $p(x)$ , которая заключается в приближении функции  $\log p(x)$  с помощью ряда Фурье. Коэффициенты Фурье данной аппроксимации вычисляются через коэффициенты Фурье плотности  $p(x)$ , которые, в свою очередь, оцениваются с помощью выборки  $X_1, \dots, X_N$ . Анализ теоретических свойств такой оценки является основной задачей данной работы. Обратим внимание, что плотность любого распределения является функцией неотрицательной, что усложняет применение известных методов из классической теории аппроксимации функций. Например, при использовании обычных или тригонометрических полиномов оценка плотности может начать принимать отрицательные значения. Этим обосновывается подход, в котором сначала оценивается  $\log p(x)$ , а затем от данной оценки берется экспонента.

**Обозначения.** В данной работе евклидова векторная норма обозначается как  $\|\cdot\|$ . Так же обозначается и подчиненная ей

матричная норма, которую мы будем называть операторной. Для подмножества действительных чисел  $T \subset \mathbb{R}$  через  $C^S(T)$  мы будем обозначать множество всех непрерывно дифференцируемых действительнзначных функций на  $T$ . Для действительнзначной функции  $h: T \rightarrow \mathbb{R}$  мы положим  $\|h\|_\infty = \sup_{x \in T} |h(x)|$  (супремум-норма) и  $\|h\|_{L^k(T)} = (\int_T |h(x)|^k dx)^{1/k}$  ( $L^k$ -норма), где  $k \in \mathbb{N}$ . Множество всех функций, для которых  $\|h\|_{L^k(T)} < \infty$ , мы будем обозначать через  $L^k(T)$ . Для плотности  $p(x)$  некоторого абсолютно непрерывного распределения на  $\mathbb{R}$  мы положим  $\|h\|_{L^k(T,p)} = (\int_T |h(x)|^k p(x) dx)^{1/k}$ . Расстояние Кульбака – Лейблера между плотностями распределения вероятностей  $p_1$  и  $p_2$  будет обозначаться через  $KL(p_1, p_2)$ . Вероятность и математическое ожидание будут обозначаться соответственно через  $\mathbb{P}$  и  $\mathbb{E}$ .

## 2. Основные результаты

Чтобы избежать некоторых технических деталей, мы будем предполагать, что плотность  $p(x)$  имеет конечный носитель, т.е. что существует такой отрезок  $T = [-\tau, \tau]$ ,  $\tau > 0$ , для которого  $p(x) > 0$  для  $x \in T$  и  $p(x) = 0$  для  $x \notin T$ , а также  $p(\tau) = p(-\tau)$ . Но рассмотренный ниже метод оценки можно применять и в общем случае (необходимо рассмотреть функцию  $p_0(x)$ , которая для некоторого большого  $\tau > 0$  удовлетворяет  $p_0(\tau) = p_0(-\tau)$  и которая близка к  $p(x)$  на  $T = [-\tau, \tau]$ , и оценить ошибку аппроксимации  $p(x)$  с помощью  $p_0(x)$ ).

Рассмотрим идею, предложенную в [6], которая связывает коэффициенты Фурье функций  $p(x)$  и  $g(x) = \log p(x)$ . Предположим, что обе функции могут быть представлены на  $T$  с помощью своих рядов Фурье:

$$p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ik\frac{\pi}{\tau}x}, \quad \text{где } b_k = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} p(x) e^{-ik\frac{\pi}{\tau}x} dx,$$

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{\pi}{\tau}x}, \quad \text{где } c_k = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} g(x) e^{-ik\frac{\pi}{\tau}x} dx.$$

Тогда коэффициенты  $b_k$  и  $c_k$  удовлетворяют следующему отношению: для любого  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$2\tau k b_k = k \int_T p(x) e^{-ik\frac{\pi}{\tau}x} dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= i \frac{\tau}{\pi} \left( p(x) e^{-ik \frac{\pi}{\tau} x} \Big|_{-\tau}^{\tau} - \int_{\tau} p'(x) e^{-ik \frac{\pi}{\tau} x} dx \right) = \\
 &= -i \frac{\tau}{\pi} \int_{\tau} p(x) g'(x) e^{-ik \frac{\pi}{\tau} x} dx = \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} j c_j \int_{\tau} p(x) e^{-i(k-j) \frac{\pi}{\tau} x} dx = \\
 &= 2\tau \sum_{j=-\infty}^{\infty} j c_j b_{k-j}.
 \end{aligned}$$

То есть  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} j b_{k-j} c_j = k b_k$ , что можно рассматривать как бесконечную систему линейных уравнений относительно  $c_j$ .

В [6] было предложено «обрезать» данную систему уравнений, что приводило к системе  $Ax = b$ , где

$$\begin{aligned}
 (1) \quad A &= \begin{pmatrix} b_0 & b_{-1} & \dots & b_{-2n} \\ b_1 & b_0 & \dots & b_{-2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2n} & b_{2n-1} & \dots & b_0 \end{pmatrix}, \\
 x &= \begin{pmatrix} -nc_{-n} \\ -(n-1)c_{-(n-1)} \\ \vdots \\ nc_n \end{pmatrix}, \\
 b &= \begin{pmatrix} -nb_{-n} \\ -(n-1)b_{-(n-1)} \\ \vdots \\ nb_n \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Решив данную систему, мы сможем найти все  $c_{-n}, \dots, c_n$ , кроме  $c_0$ , так как центральный элемент вектора  $x$  равен 0,  $c_0 = 0$ . Данное обстоятельство не приводит к проблемам, так как благодаря теплицевой структуре системы и наличию некоторой симметрии (подробнее см. [9, с. 317]) решение  $x$  тоже будет содержать 0 на данном месте. Обозначим полученную аппроксимацию через

$$g_n(x) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik \frac{\pi}{\tau} x} = c_0 + \sum_{1 \leq |k| \leq n} c_k e^{ik \frac{\pi}{\tau} x},$$

где оставшийся неизвестный коэффициент  $c_0$  найдем из условия

$$\int_{\tau} e^{g_n(x)} dx = \int_{\tau} p(x) dx = 1,$$

что эквивалентно

$$c_0 = -\log \left( \int_{\tau} e^{(\sum_{1 \leq |k| \leq n} c_k e^{ik \frac{\pi}{\tau} x})} dx \right).$$

Как уже упоминалось, в данной работе мы изучаем свойства подобной аппроксимации в случае, когда коэффициенты  $b_k$  неизвестны и оцениваются с помощью

$$\tilde{b}_k = \frac{1}{2\tau N} \sum_{j=1}^N e^{ik\frac{\pi}{\tau} X_j},$$

где, напомним,  $X_1, \dots, X_N$  – это выборка. Данные оценки являются несмещенными и состоятельными. Определим новую «возмущенную» систему уравнений

$$(2) \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_0 & \tilde{b}_{-1} & \dots & \tilde{b}_{-2n} \\ \tilde{b}_1 & \tilde{b}_0 & \dots & \tilde{b}_{-2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{b}_{2n} & \tilde{b}_{2n-1} & \dots & \tilde{b}_0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} -n\tilde{c}_{-n} \\ -(n-1)\tilde{c}_{-(n-1)} \\ \vdots \\ n\tilde{c}_n \end{pmatrix},$$

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} -n\tilde{b}_{-n} \\ -(n-1)\tilde{b}_{-(n-1)} \\ \vdots \\ n\tilde{b}_n \end{pmatrix}.$$

и аппроксимацию

$$(3) \quad \tilde{g}_n(x) = \sum_{k=-n}^n \tilde{c}_k e^{ik\frac{\pi}{\tau} x},$$

где коэффициент  $\tilde{c}_0$  определяется из аналогичного условия,

$$\tilde{c}_0 = c_0 = -\log \left( \int_T e^{\left( \sum_{1 \leq |k| \leq n} c_k e^{ik\frac{\pi}{\tau} x} \right)} dx \right).$$

Основными результатами данной работы являются оценка максимального отклонения аппроксимации  $\tilde{p}_n = e^{\tilde{g}_n}$  от истинной плотности  $p = e^g$ , а также оценка расстояния Кульбака – Лейблера между ними. Данные результаты сформулированы ниже.

**Теорема 1 (Супремум-норма).** Пусть  $p \in C^s(T)$ ,  $s \geq 2$  и  $|p^{(s)}(x)| < \infty$ . Пусть также  $m = \text{ess inf}_{x \in T} p(x)$ ,  $M = \text{ess sup}_{x \in T} p(x)$  и  $0 < m \leq M < \infty$ . Если  $N \geq (6n \log(\frac{10n}{\delta})) / (\tau^2 m^2)$ , тогда с вероятностью не менее  $1 - \delta$



$$\|g - \tilde{g}_n\|_\infty \lesssim \frac{n^2}{\tau m^2} \sqrt{\frac{\log(\frac{n}{\delta})}{N}} + \sqrt{\frac{M\tau}{m}} \frac{1}{n^s},$$

где  $\lesssim$  означает неравенство с точностью до некоторой абсолютной константы.

Подобный теоретический результат уже был получен в работе [9], но в детерминированной постановке, когда коэффициенты Фурье  $p(x)$  считались известными и их не нужно было оценивать. Обобщение, рассмотренное в данной статье, требует получения равномерной концентрации оценок коэффициентов Фурье  $p(x)$ , а также исследования устойчивости решения системы линейных уравнений, с помощью которой вычисляются коэффициенты Фурье  $\log p(x)$ . Обратим также внимание на условие  $N \geq (6n \log(\frac{10n}{\delta})) / (\tau^2 m^2)$ , которое отсутствует в [9] и которое необходимо, чтобы гарантировать близость решений систем уравнений (1) и (2).

С помощью теоремы 1 можно получить следующие следствия.

**Следствие 1 (Расстояние в супремум-норме).** В условиях теоремы 1

$$\|\tilde{p}_n - p\|_\infty \lesssim M \left( \frac{n^2}{\tau m^2} \sqrt{\frac{\log(\frac{n}{\delta})}{N}} + \sqrt{\frac{M\tau}{m}} \frac{1}{n^s} \right).$$

**Следствие 2 (Расстояние Кульбака – Лейблера).** В условиях теоремы 1

$$\text{KL}(p, \tilde{p}_n) \lesssim 2\tau M \left( \frac{n^2}{\tau m^2} \sqrt{\frac{\log(\frac{n}{\delta})}{N}} + \sqrt{\frac{M\tau}{m}} \frac{1}{n^s} \right).$$

Построенная оценка  $\tilde{p}_n$  является параметрической оценкой плотности  $p$ , и порядки сходимости  $O(1/\sqrt{N})$ , полученные в следствиях 1 и 2, являются стандартными в задачах параметрического оценивания. В случае непараметрического оценивания порядки сходимости получаются хуже. Так, например, в работе [4, теорема 4] была получена следующая минимаксная оценка (т.е. для наилучшей оценки  $\tilde{p}_n$  наихудшей плотности  $p$  из некоторого класса):  $E \|\tilde{p}_n - p\|_\infty \lesssim n^{-\frac{s}{2s+1}}$ . Здесь оценивает-

ся ожидаемое уклонение  $\|\tilde{p}_n - p\|_\infty$ , а не его значение «с большой вероятностью», как в результатах выше. В последнее время интерес представляют именно оценки «с большой вероятностью» как более информативные. Упомянутый результат из [4] был обобщен в работе [10] на оценку «с большой вероятностью», которая также равна  $O(n^{-\frac{s}{2s+1}})$ .

**Пример.** В качестве примера, рассмотрим задачу оценивания плотности Коши  $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ . Зафиксируем параметры  $\tau = 3\pi$  и  $n = 5$ . Оценивать  $p(x)$  будем с помощью выборки размера  $N = 100$  и  $N = 100000$ . Для этого, согласно предложенному алгоритму, сначала оценим выборочные коэффициенты Фурье  $\tilde{b}_k$  и решим систему (2). После этого найдем  $\tilde{c}_0$ , вычислим  $\tilde{g}_n$  по (3) и положим  $\tilde{p}_n = e^{\tilde{g}_n}$ . Вне отрезка  $T = [-3\pi, 3\pi]$ , по определению,  $\tilde{p}_n(x) = 0$ . Результаты приведены на рис. 1 и 2.

Остальная часть данной статьи посвящена доказательству данных результатов.

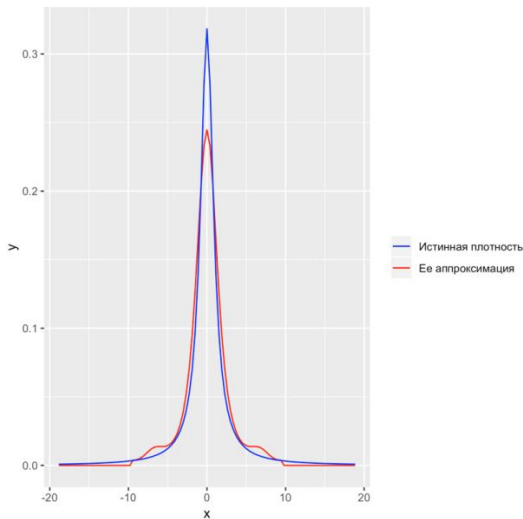


Рис. 1. Оценивание плотности Коши по  $N = 100$  наблюдениям

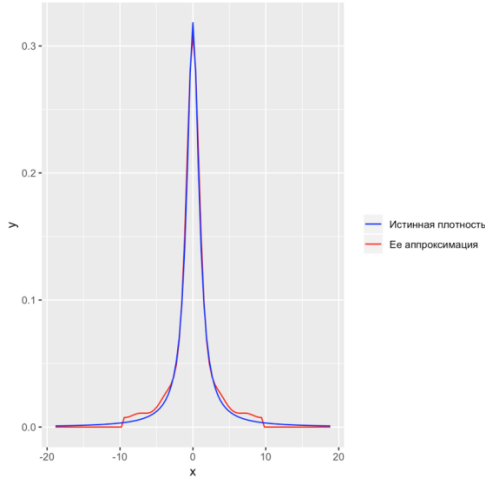


Рис. 2. Оценивание плотности Коши по  $N = 100000$  наблюдениям

### 3. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1, следствия 1 и следствия 2 разделено на следующие этапы. В разделе 3.1 мы получим оценки на близость всех коэффициентов  $b_k$  и  $\tilde{b}_k$ , которые участвуют в системах уравнений (1) и (2). Затем в разделе 3.2 мы проведем общий анализ стабильности системы линейных уравнений при возмущении. В разделе 3.3 мы оценим евклидово расстояние между решениями  $x$  и  $\tilde{x}$  систем (1) и (2) соответственно. И, наконец, в разделе 3.4 мы докажем теорему 1, а в разделе 3.5 и разделе 3.6 – следствие 1 и следствие 2 соответственно.

#### 3.1. КОНЦЕНТРАЦИЯ ЭМПИРИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

В этом разделе мы получим результат, который описывает, насколько хорошо эмпирические коэффициенты Фурье

$$(4) \quad \tilde{b}_k = \frac{1}{2\tau N} \sum_{j=1}^N e^{ik\frac{\tau}{N}x_j},$$

посчитанные по выборке  $X_1, \dots, X_n$ , близки к истинным коэффициентам Фурье  $b_k$  для  $k = -2n, \dots, 2n$ .

**Лемма 1.** Пусть  $b_k$  являются коэффициентами Фурье функции  $p(x)$ , а  $\tilde{b}_k$  – их эмпирические оценки (4), посчитанные по выборке  $X_1, \dots, X_N$ . Тогда для всех  $b_k$  из диапазона  $k = -2n, \dots, 2n$  выполнено

$$|\tilde{b}_k - b_k| \lesssim \sqrt{\frac{\log(\frac{10n}{\delta})}{2\tau^2 N}} \text{ с вероятностью не менее } 1 - \delta.$$

**Доказательство.** Обозначим  $Y_{k,j} = (2\tau)^{-1} e^{ik\frac{\pi}{\tau} X_j}$  для  $j = 1, \dots, N$ . Заметим, что  $\tilde{b}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_{k,j}$  и  $b_k = \mathbb{E}Y_{k,j}$  для всех  $j = 1, \dots, N$ . По неравенству Хеффдинга (см. [11]) для любого  $k = -2n, \dots, 2n$ ,

$$\mathbb{P}(|\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (Y_{k,j} - \mathbb{E}Y_{k,j})| \geq t) \leq 2e^{-2\tau^2 t^2 N}.$$

Суммируя вероятности для всех  $k = -2n, \dots, 2n$ , мы получим

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\tilde{b}_k - b_k| \geq t \text{ для всех } k = -2n, \dots, 2n) &\leq \\ &\leq 2(4n + 1)e^{-2\tau^2 t^2 N} \leq 10ne^{-2\tau^2 t^2 N}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbb{P}(|\tilde{b}_k - b_k| \geq \sqrt{\frac{\log(\frac{10n}{\delta})}{2\tau^2 N}} \text{ для всех } k = -2n, \dots, 2n) \leq \delta,$$

что может быть переписано как

$$|\tilde{b}_k - b_k| \lesssim \sqrt{\frac{\log(\frac{10n}{\delta})}{2\tau^2 N}}$$

для всех  $k = -2n, \dots, 2n$  с вероятностью не менее  $1 - \delta$ . Лемма доказана.

### 3.2. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СЛАУ

В данном разделе мы проведем анализ устойчивости решения системы линейных уравнений  $Ax = b$  при возмущении матрицы коэффициентов  $A$  и столбца свободных членов  $b$ . Данный анализ является общим и верен для любой векторной нормы  $\|\cdot\|$  и подчиненной ей матричной норме.

Итак, пусть  $x$  является решением системы  $Ax = b$ , а  $\tilde{x}$  – решением возмущенной системы  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ . Определим

$$\Delta A = A - \tilde{A} \text{ и } \Delta b = b - \tilde{b}.$$

Мы покажем, что при малых значениях  $\| \Delta A \|$  и  $\| \Delta b \|$  значение  $\| x - \tilde{x} \|$  также будет мало. Рассмотрим сначала вспомогательные леммы.

**Лемма 2.** Пусть  $I$  будет единичной матрицей и  $\Delta I$  будет любой матрицей с  $\| \Delta I \| < 1$ . Тогда матрица  $I - \Delta I$  является невырожденной и

$$\| (I - \Delta I)^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \|\Delta I\|}.$$

Более того,

$$\| I - (I - \Delta I)^{-1} \| \leq \frac{\|\Delta I\|}{1 - \|\Delta I\|}.$$

**Доказательство.** Так как  $\| x \| \leq \| x - \Delta Ix \| + \| \Delta Ix \|$ , мы имеем

$$\begin{aligned} \| (I - \Delta I)x \| &\geq \| x \| - \| \Delta Ix \| \geq \| x \| - \| \Delta I \| \| x \| = \\ &= (1 - \| \Delta I \|) \| x \| > 0 \end{aligned}$$

для всех  $x \neq 0$ . Следовательно, матрица  $I - \Delta I$  является невырожденной. Рассмотрим равенство  $(I - \Delta I)(I - \Delta I)^{-1} = I$ , с помощью которого мы получим

$$(5) \quad (I - \Delta I)^{-1} = I + \Delta I(I - \Delta I)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \| (I - \Delta I)^{-1} \| &\leq \| I \| + \| \Delta I \| \| (I - \Delta I)^{-1} \| \\ &= 1 + \| \Delta I \| \| (I - \Delta I)^{-1} \|. \end{aligned}$$

Разрешая это неравенство относительно  $\| (I - \Delta I)^{-1} \|$ , мы докажем первое утверждение леммы. Далее, равенство (5) также влечет

$$I - (I - \Delta I)^{-1} = -\Delta I(I - \Delta I)^{-1}.$$

Используя первое утверждение леммы, мы имеем

$$\| I - (I - \Delta I)^{-1} \| \leq \| \Delta I \| \| (I - \Delta I)^{-1} \| \leq \frac{\|\Delta I\|}{1 - \|\Delta I\|}.$$

Лемма доказана.

**Лемма 3.** Пусть  $A$  является невырожденной матрицей, а  $\Delta A$  — любой матрицей с  $\| A^{-1}\Delta A \| < 1$ . Тогда  $A + \Delta A$  является невырожденной и

$$\| (A - \Delta A)^{-1} \| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|}.$$

Более того,

$$\| A^{-1} - (A - \Delta A)^{-1} \| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \| A^{-1}\Delta A \|.$$

**Доказательство.** Рассмотрим равенство  $A + \Delta A = A(I + A^{-1}\Delta A)$ . Так как  $\|A^{-1}\Delta A\| < 1$ , по лемме 2 матрица  $I + A^{-1}\Delta A$  является невырожденной и, следовательно,  $A + \Delta A$  тоже невырождена. Рассмотрим далее равенство

$$(6) \quad (A + \Delta A)^{-1} = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1}.$$

Используя опять лемму 2, мы получим

$$\begin{aligned} \|(A + \Delta A)^{-1}\| &= \|(I + A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1}\| \leq \\ &\leq \|(I + A^{-1}\Delta A)^{-1}\| \|A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|}, \end{aligned}$$

что доказывает первое утверждение леммы. Чтобы оценить норму разности матриц  $A^{-1}$  и  $(A + \Delta A)^{-1}$ , мы используем равенство (6) и лемму 2 еще раз.

$$\begin{aligned} \|A^{-1} - (A + \Delta A)^{-1}\| &\leq \|I - (I + A^{-1}\Delta A)^{-1}\| \|A^{-1}\| \leq \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \|A^{-1}\Delta A\|, \end{aligned}$$

что доказывает второе утверждение леммы.

**Предложение 1.** Пусть  $x$  является решением системы  $Ax = b$ , а  $\tilde{x}$  является решением возмущенной системы  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ . Обозначим  $\Delta A = A - \tilde{A}$  и  $\Delta b = b - \tilde{b}$ . Если  $\|A^{-1}\| \|\Delta A\| < 1/2$ , тогда

$$\|\tilde{x} - x\| \leq 2 \|A^{-1}\| (\|A^{-1}\| \|b\| + \|\Delta b\|).$$

**Доказательство.** Мы имеем

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} - x\| &= \|(A + \Delta A)^{-1}(b + \Delta b) - A^{-1}b\| \leq \\ &\leq \|(A + \Delta A)^{-1}b - A^{-1}b\| + \|(A + \Delta A)^{-1}\Delta b\| \leq \\ &\leq \|(A + \Delta A)^{-1} - A^{-1}\| \|b\| + \|(A + \Delta A)^{-1}\| \|\Delta b\|. \end{aligned}$$

По условию  $\|A^{-1}\Delta A\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta A\| < 1/2$ . Следовательно, применив лемму 3, мы получим

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} - x\| &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} (\|A^{-1}\Delta A\| \|b\| + \|\Delta b\|) \leq \\ &\leq 2 \|A^{-1}\| (\|A^{-1}\| \|b\| + \|\Delta b\|). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

### 3.3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

Приведем без доказательства вспомогательные утверждения, которые будут использованы позже. Первое утверждение связывает спектр матрицы  $A$ , определенной в (1), с множеством значений плотности  $p(x)$ .

**Лемма 4 ([13, теорема 1.2]).** Пусть  $p \in L^1(T)$  и пусть  $m = \text{ess inf}_{x \in T} p(x)$ ,  $M = \text{ess sup}_{x \in T} p(x)$ . Определим для любого целого  $n$  матрицу  $A = (b_{j-k})_{j,k=1,\dots,n}$ , где  $b_k$  – коэффициенты Фурье функции  $p(x)$ . Тогда матрица  $A$  является эрмитовой и все ее собственные значения лежат в интервале  $(m, M)$ .

В следующем утверждении показано, что функция  $g_n$ , которая является аппроксимацией функции  $g$ , является решением некоторой оптимизационной задачи.

**Лемма 5 ([9, теорема 2]).** Пусть  $p \in C^s(T)$ ,  $s \geq 1$  и  $|p^{(s)}(x)| < \infty$ . Пусть также  $m = \text{ess inf}_{x \in T} p(x)$ ,  $M = \text{ess sup}_{x \in T} p(x)$  и  $0 < m \leq M < \infty$ . Тогда функция  $g_n$ , определенная в (3), является единственным решением оптимизационной задачи

$$\begin{cases} \min_{h \in F_n} \| (g)' - (h)' \|_{L^2(T,p)}^2, \\ \int_T e^{g_n(x)} = 1, \end{cases}$$

где  $F_n$  – линейная оболочка множества функций  $\{1, e^{\pm i\frac{\pi}{\tau}x}, \dots, e^{\pm in\frac{\pi}{\tau}x}\}$ .

В следующем предложении мы воспользуемся предыдущими двумя леммами, чтобы охарактеризовать евклидову норму разности векторов  $x$  и  $\tilde{x}$ , решениями систем уравнений (1) и (2) соответственно.

**Предложение 2.** Пусть  $p \in C^s(T)$ ,  $s \geq 2$  и  $|p^{(s)}(x)| < \infty$ . Пусть также для  $m = \text{ess inf}_{x \in T} p(x)$ ,  $M = \text{ess sup}_{x \in T} p(x)$  и  $0 < m \leq M < \infty$ . Если  $N \geq (6n \log(\frac{10n}{\delta})) / (\tau^2 m^2)$ , тогда с вероятностью не менее  $1 - \delta$ ,

$$\| \tilde{x} - x \| \lesssim \frac{1}{m^2 \tau} \sqrt{\frac{n^3 \log(\frac{n}{\delta})}{N}},$$

где  $\lesssim$  означает неравенство с точностью до некоторой абсолютной константы.

**Доказательство.** Согласно предложению 1, если  $\| A^{-1} \| \| \Delta A \| < 1/2$ , то

$$(7) \quad \| \tilde{x} - x \| \leq 2 \| A^{-1} \| (\| A^{-1} \| \| b \| \| \Delta A \| + \| \Delta b \|).$$

Оценим каждый множитель в этой формуле отдельно. Напомним, что у гладкой функции  $p \in C^s(T)$  с  $|p^{(s)}(x)| < \infty$

коэффициенты Фурье убывают как  $b_k \leq c|k|^{-s}$ , где  $c$  – это некоторая константа (см., например, [3]).

- $\|A^{-1}\|$ : по лемме 4  $\|A^{-1}\| \leq 1/m$ .
- $\|b\|$ :  $\|b\|^2 = \sum_{k=-n}^n k^2 b_k^2 \leq 2c \sum_{k=1}^n k^{-(2s-2)} \leq 2c \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \leq c\pi^2/3$ .
- $\|\Delta A\|$ : используя лемму 1, с вероятностью не менее  $1 - \delta$

$$\|\Delta A\| \leq \sqrt{2n+1} \max_{1 \leq i, j \leq 2n+1} |(\Delta A)_{i,j}| \leq \sqrt{\frac{(2n+1)\log(\frac{10n}{\delta})}{2\tau^2 N}}$$

- $\|\Delta b\|$ : используя лемму 1, с вероятностью не менее  $1 - \delta$

$$\begin{aligned} \|\Delta b\|^2 &= \sum_{k=-n}^n k^2 (\tilde{b}_k - b_k)^2 \leq \frac{2\log(\frac{10n}{\delta})}{N} \sum_{k=-n}^n k^2 \leq \\ &\leq \frac{2(2n^3 + 3n^2 + n)\log(\frac{10n}{\delta})}{3N}, \end{aligned}$$

где в последнем неравенстве мы использовали формулу Фаульхабера.

Заметим, что условие  $N \geq (6n\log(\frac{10n}{\delta})) / (\tau^2 m^2)$  влечет

$\|A^{-1}\| \leq 1/m$ . Подставив полученные оценки в (7) (пренебрегая константами для простоты), мы получим

$$\|\tilde{x} - x\| \lesssim \frac{1}{m} \left( \frac{1}{m} \sqrt{\frac{n\log(\frac{n}{\delta})}{\tau^2 N}} + \sqrt{\frac{n^3\log(\frac{n}{\delta})}{\tau^2 N}} \right) \lesssim \frac{1}{m^2\tau} \sqrt{\frac{n^3\log(\frac{n}{\delta})}{N}}.$$

Предложение доказано.

### 3.4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Заметим, что по построению  $\int_T \tilde{p}_n(x) dx = \int_T p(x) dx = 1$ .

Так как обе функции  $\tilde{p}_n(x)$  и  $p(x)$  непрерывны, то существует  $x_0 \in T$ , что  $\tilde{p}_n(x_0) = p(x_0)$ . Следовательно,  $\tilde{g}_n(x_0) = g(x_0)$ . Используя этот факт и неравенство Коши – Буняковского, мы получим

$$\begin{aligned} \|\tilde{g}_n - g\|_{\infty} &= \sup_{x \in T} \left| \int_{x_0}^x (\tilde{g}'_n(x) - g'(x)) dx \right| \leq \\ &\leq \int_T |\tilde{g}'_n(x) - g'(x)| dx \leq \sqrt{2\tau} \|\tilde{g}'_n - g'\|_{L^2(T)}. \end{aligned}$$

По неравенству треугольника

$$\|\tilde{g}'_n - g'\|_{L^2(T)} \leq \|\tilde{g}'_n - g'_n\|_{L^2(T)} + \|g'_n - g'\|_{L^2(T)}.$$



Оценим каждое слагаемое отдельно. Для первого слагаемого, с помощью неравенства Коши – Буняковского и предложения 2, мы получим

$$\begin{aligned} \| \tilde{g}'_n - g'_n \|_{L^2(T)} &= \frac{\pi}{\tau} \left( \int_T \left| \sum_{k=-n}^n k (\tilde{c}_k - c_k) e^{\frac{ik\pi x}{\tau}} \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{\pi}{\tau} \| \tilde{x} - x \| \cdot \sqrt{2\tau} \cdot \sqrt{2n+1} \lesssim \frac{n^2}{\tau^{3/2} m^2} \sqrt{\frac{n^3 \log(\frac{n}{\delta})}{\tau^2 N}}, \end{aligned}$$

где векторы  $x$  и  $\tilde{x}$  определены в (1) и (2). Для второго слагаемого мы получим

$$\begin{aligned} \| g'_n - g' \|_{L^2(T)}^2 &\leq \frac{1}{m} \| g'_n - g' \|_{L^2(T,p)}^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{m} \inf_{h \in F_n} \| g' - h' \|_{L^2(T,p)}^2 \leq \frac{M}{m} \inf_{h \in F_n} \| g' - h' \|_{L^2(T)}^2. \end{aligned}$$

Согласно неравенству Джексона – Стечкина (см., например, [8]),

$$\inf_{h \in F_n} \| g' - h' \|_{L^2(T)} \leq \frac{c}{n^s},$$

где  $c$  – некоторая (зависящая только от  $s$ ) константа. Собрвав все полученные оценки, мы получим

$$\| g - \tilde{g}_n \|_{\infty} \lesssim \frac{n^2}{\tau m^2} \sqrt{\frac{n^3 \log(\frac{n}{\delta})}{N}} + \sqrt{\frac{M\tau}{m}} \frac{1}{n^s},$$

с вероятностью не менее  $1 - \delta$ .

### 3.5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1

Чтобы оценить расстояние между  $\tilde{p}_n(x)$  и  $p(x)$  в супремум-норме, заметим, что

$$\begin{aligned} \| \tilde{p}_n - p \|_{\infty} &\leq \| p \|_{\infty} \left\| \frac{\tilde{p}_n}{p} - 1 \right\|_{\infty} \leq M |e^{\|\tilde{g}_n - g\|_{\infty}} - 1| \lesssim \\ &\lesssim M \| \tilde{g}_n - g \|_{\infty}, \end{aligned}$$

так как в разложении экспоненты в ряд Тейлора все последующие члены будут иметь больший порядок малости. Подстановка оценки из теоремы 1 завершает доказательство.

### 3.6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2

Для расстояния Кульбака – Лейблера мы имеем

$$\begin{aligned} KL(p, \tilde{p}_n) &= \int_T p(x) \log \frac{p(x)}{\tilde{p}_n(x)} dx \leq \\ &\leq M \int_T |g(x) - \tilde{g}_n(x)| dx \leq 2\tau M \| g(x) - \tilde{g}_n(x) \|_{\infty}. \end{aligned}$$

Подстановка оценки из теоремы 1 завершает доказательство.

### Литература

1. ГОЛУБЕВ Г.К. *Непараметрическое оценивание гладких плотностей распределения в  $L_2$*  // Проблемы передачи информации. – 1992. – №28. – С. 52–62.
2. ЕФРОЙМОВИЧ С.Ю. *Непараметрическое оценивание плотности неизвестной гладкости* // Теория вероятностей и ее применения. – 1985. – №30. – С. 524–534.
3. ЗОРИЧ В.А. *Математический анализ*. – М.: МЦНМО, 2012.
4. ИБРАГИМОВ И.А., ХАСЬМИНСКИЙ Р.З. *Об оценке плотности распределения* // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1986. – №153. – С. 45–59.
5. ЛАГУТИН М.Б. *Наглядная математическая статистика*. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2009.
6. BORWEIN J.M., HUANG W.Z. *A fast heuristic method for polynomial moment problems with Boltzmann-Shannon entropy* // SIAM J.Opt. – 1995. – Vol. 5. – P. 68–99.
7. BRETAGNOLLE J., HUBER C. *Estimation des densites: risque minimax* // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete – 1979. – Vol. 47. – P. 119–137.
8. DEVORE R.A., LORENTZ G.G. *Constructive Approximation*. – Springer, Berlin, 1993.
9. FASINO D. *Approximation of nonnegative functions by means of exponential trigonometric polynomials* // J. of Computational and Applied Mathematics. – 2002. – Vol. 140. – P. 315–329.
10. JIANG H. *Uniform Convergence Rates for Kernel Density Estimation* // Proc. of the 34th Int. Conference on Machine Learning, PMLR. – 2017. – Vol. 70 – P. 1694–1703.
11. HOEFFDING W. *Probability inequalities for sums of bounded random variables* // J. of the American Statistical Association. – 1963. – Vol. 58, No. 301. – P. 13–30.
12. SERRA S. *On the extreme spectral properties of Toeplitz matrices generated by  $L^1$  functions with several minima (maxima)* // BIT Numerical Mathematics. – 1996. – Vol. 36. – P. 135–142.
13. SERRA S. *On the extreme eigenvalues of Hermitian (block) Toeplitz matrices* // Linear Algebra and its Applications. – 1998. – Vol. 270. – P. 109–129.

14. TSYBAKOV A. *Introduction to Nonparametric Estimation. Springer Series in Statistics // Springer Series in Statistics.* – 2009.
15. TYRTYSHNIKOV E. *A Unifying Approach to Some Old and New Theorems on Distribution and Clustering // Linear Algebra and its Applications* – 1996. – Vol. 232, No. 1. – P. 2–43.

## ON DENSITY ESTIMATION VIA FOURIER SERIES

**Denis Belomestny**, National Research University Higher School of Economics, Moscow, Cand.Sc., professor (dbelomestny@hse.ru).

**Leonid Iosipoi**, National Research University Higher School of Economics, Moscow, junior research fellow (liosipoi@hse.ru).

*Abstract: In this paper, we consider the classical statistical problem of probability density estimation based on a sample from this distribution. This problem naturally arises in many applications when one aims at investigation of a probability structure in a random process. For instance, it is possible to identify some structure in a complex system using density estimation. In this paper, a new approach to estimate a density function is proposed. This approach is based on approximation of a log-density via Fourier series with coefficients obtained by solving a system of linear equations. Analysis of theoretical properties of such estimate is the main purpose of this work. As the main results, we prove bounds on the difference between target density and its approximation in the supremum norm and the Kullback-Leibler divergence. Obtained rates are parametric and have order  $O(1/\sqrt{N})$  with high probability, which is a standard rate in parametric estimation problems. The constants in the rates are obtained up to an absolute factor, which means that we investigated the dependence on all parameters. As a numerical example, we consider a problem of Cauchy density estimation.*

Keywords: density estimation, Fourier series, Kullback–Leibler divergence.

УДК 519.23

ББК 22.172

DOI: 10.25728/ubs.2019.82.2

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Э.Ю. Калимулиной.*

*Поступила в редакцию 03.09.2019.  
Опубликована 30.11.2019.*

# ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ МЕТОД ВЫБОРА РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕГО РАНЖИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ В РАНГОВОЙ ШКАЛЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Корнеенко В. П.<sup>1</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*В настоящее время не существует оптимального метода построения результирующего ранжирования, известного как медиана Кемени-Снелла, по матричному критерию между упорядочениями объектов экспертами, представленными матрицами бинарных отношений на множестве пар объектов. Однако задачу построения результирующего ранжирования по матричному критерию между упорядочениями объектов экспертами, представленными матрицами бинарных отношений на множестве пар объектов, можно свести к эквивалентной оптимизационной задаче, если ранжирования объектов представить в ранговой шкале измерения. В этом случае в качестве критерия оптимальности выступает расстояние между ранжированиями объектов, представленными в виде векторных ранговых оценок, в том числе и с учётом оценок объектов со связанными рангами. В статье показано, что введённые расстояния между ранжированиями объектов в ранговой шкале удовлетворяют традиционным аксиомам метрического пространства. Обоснованность перехода от постановки задачи построения медианы Кемени-Снелла по матричному критерию к постановке задачи по критерию близости между ранжированиями в ранговой шкале связана с тем, что между ранжированиями, представленными матрицами бинарных отношений на множестве пар объектов и ранжированиями в ранговой шкале, как показано в данной статье, существует взаимнооднозначное соответствие.*

Ключевые слова: ранговая шкала, расстояние и медиана Кемени, бинарные отношения, ранжирование объектов.

## 1. Введение

Сегодня неуклонно возрастает роль информационно-аналитической поддержки принятия эффективных по многим критериям решений в различных сферах деятельности общества и государства.

При многокритериальной оценке эффективности объектов экспертами в конкретной предметной области возникает задача

---

<sup>1</sup> Виктор Павлович Корнеенко, к.т.н., доцент (vkor@ipr.ru).

выбора результирующего (группового) ранжирования объектов, представленных точечными и интервальными оценками [1–7, 10–14, 20, 22, 23]. В частности, при построении иерархической системы показателей на начальном этапе возникает задача ранжирования показателей по убыванию их значимости, когда мнения экспертов (аналитиков) не совпадают [9, 16].

В развитии теории экспертных оценок выявлена исключительная роль расстояния и медианы Кемени [10–14]. В классической постановке задача построения результирующего ранжирования, известного как медиана Кемени, по матричному критерию между упорядочениями объектов, представленными матрицами бинарных отношений, относится к классу NP-полных комбинаторных задач [8]. На данный момент для данного класса задач с матричным критерием не существует оптимального метода решения.

Данная статья посвящена оптимизационному методу построения результирующего ранжирования объектов, измеренных в ранговой (порядковой) шкале и представленных в виде векторов (точек) евклидова метрического пространства.

## **2. Задача выбора результирующего ранжирования объектов, представленных матрицами бинарных отношений**

Одним из первоначальных методов построения результирующего ранжирования (упорядочения)  $n$  объектов по предпочтительности  $m$  экспертами был предложен Дж. Кемени и Дж. Снеллом в работе 1962 г. под названием «Mathematical Models in the Social Sciences» [21] и изданной на русском языке в 1972 г. [6]. В работе [21] упорядочения объектов представлены матрицами бинарных отношений на множестве пар объектов.

### **2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ВЫБОРА РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕГО РАНЖИРОВАНИЯ ПО КРИТЕРИЮ БЛИЗОСТИ МАТРИЦ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ**

Рассмотрим ранжирования  $n$  объектов из множества  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$   $m$  экспертами  $\mathcal{E}_j, j = \overline{1, m}$ :

$$(1) P_j: a_{j_1} \succcurlyeq a_{j_2} \succcurlyeq \dots \succcurlyeq a_{j_l} \succcurlyeq \dots \succcurlyeq a_{j_n}.$$

Ранжирование  $P_j$  (1) экспертом представляется в виде квадратной матрицы бинарных отношений частичного и линейного порядка [16]:

$$(2) M(P_j) = [p_{kq}^j], k, q = \overline{1, n},$$

$$\text{где } p_{kq}^j = \begin{cases} 1, & \text{если объект } a_k \text{ в } P_j \text{ ранжировании} \\ & \text{предпочтительнее объекта } a_q; \\ -1, & \text{если объект } a_q \text{ в } P_j \text{ ранжировании} \\ & \text{предпочтительнее объекта } a_k; \\ 0, & \text{если объекты } a_q \text{ и } a_k \text{ в } P_j \text{ ранжировании} \\ & \text{равноценны.} \end{cases}$$

Расстояние между произвольными ранжированиями  $P_i$  и  $P_j$  можно рассчитывать по матричным  $l_1$ -норме и  $l_2$ -норме по формулам [19]

$$(3) d_1(P_i, P_j) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^n |p_{kq}^i - p_{kq}^j|;$$

$$(4) d_2(P_i, P_j) = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^n (p_{kq}^i - p_{kq}^j)^2}.$$

Понятно, что представление предпочтений объектов в виде матриц бинарных отношений не позволяет метрически определить расстояния между смежными или любыми парами объектов  $a_q, a_k \in A$  ранжирования  $P_j$  (1). В работе Дж. Кемени и Дж. Снелла приводится следующее определение результирующего ранжирования (см. с. 33–34 [6]): медианой данного множества упорядочений  $P_1, \dots, P_m$  (не обязательно различных) называется такое упорядочение  $R$ , для которого сумма расстояний

$$(5) \sum_{j=1}^m d(P_j, R)$$

минимальна, а средним значением – упорядочение  $R$ , для которой минимальна величина

$$(6) \sum_{j=1}^m d(P_j, R)^2.$$

Расстояние (5), часто называемое как «расстояние Кемени-Снелла», между произвольными ранжированиями  $P_i$  и  $P_j$ , представленными в матричном виде  $M(P_j)$ , можно вычислить с помощью элементов, расположенных над главной диагональю, по формуле

$$(7) d(P_i, P_j) = \sum_{k < q} |p_{kq}^i - p_{kq}^j|,$$

значение которой равно количеству поразрядных несовпадений элементов матриц  $M(P_i)$  и  $M(P_j)$  ранжирований  $P_i$  и  $P_j$ .

Роли медианы Кемени-Снелла в экспертных оценках и её вычислению посвящён ряд работ [3–7, 10–14, 18]. При этом возникает вопрос: каков математический смысл критериев (5), (6)? Очевидно, что расстояние (5) представляет из себя  $l_1$ -норму разности матриц  $M(R)$  и  $M(P_j)$ , а расстояние в формуле (6) – квадрат евклидовой нормы той же разности матриц [19], в которых в качестве неизвестных асимметричного бинарного отношения выступают  $n(n-1)/2$  наддиагональных элементов матрицы  $M(R)$ , принимающие значения из множества  $\{-1, 0, +1\}$ . По сути задача построения медианы Кемени по матричным критериям (5) или (6) относится к классу комбинаторных задач.

Действительно, каждому произвольному ранжированию

$$(8) P_\sigma: a_{\sigma_1} \geq a_{\sigma_2} \geq \dots \geq a_{\sigma_n}$$

соответствует матрица бинарных отношений  $M(P_\sigma) = [p_{kq}^\sigma]$ ,  $k, q = \overline{1, n}$ , объектов, где  $\sigma = (i_1, \dots, i_n)$  – перестановка на множестве  $\{1, 2, \dots, n\}$  номеров объектов.

Тогда исходная задача выбора результирующего ранжирования относительно мнений  $m$  экспертов сводится к поиску перестановки  $\sigma^* = (i_1^*, \dots, i_n^*)$  объектов ранжирования, минимизирующей сумму расстояний до исходных ранжирований  $P_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ :

$$(9) R_*(P_1, \dots, P_m) = \min_{(i_1, \dots, i_n)} \sum_{j=1}^m d(P_j, P_\sigma),$$

где  $d(P_j, P_\sigma) = \sum_{k < q} |p_{kq}^j - p_{kq}^\sigma|$ .

## 2.2. СУЩЕСТВУЮЩИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫБОРА

В примерах, приведённых в работах [10, 13, 14], в качестве результирующего ранжирования  $R_*$  выступает одно из исходных ранжирований  $P_j$ , наименее удалённое в среднем от остальных, хотя в общем случае результирующее ранжирование может не совпадать ни с одним из исходных ранжирований (мнений экспертов).

Формально постановка задачи (9) построения результирующего ранжирования относится к классу комбинаторных задач

при достаточно больших  $n$  [8], поскольку множество решений ранжирований объектов состоит из  $n!$  ( $n$ -факториал) всевозможных перестановок только строгих, не считая нестрогих, которых тоже не менее  $n!$ .

Поэтому в статье [14] вместо классической медианы Кемени предлагается применять «модифицированную медиану Кемени», всегда совпадающую с мнением одного из экспертов, что позволяет избежать эффекта «центра дырки от бублика», т.е., по мнению автора, если предположить, что мнения экспертов равномерно распределены по поверхности тора, то классическая медиана Кемени – центр «дырки от бублика», что делает её расчёт бессмысленным.

Понятно, что такая «модифицированная» медиана медианой ранжирования не является.

### **3. Сведение исходной задачи выбора медианы Кемени к задаче по критерию близости ранжирований объектов, представленных в ранговой шкале**

#### *3.1. ВЗАИМОСВЯЗЬ РАНЖИРОВАНИЙ В ГРАДАЦИЯХ РАНГОВОЙ ШКАЛЫ С МАТРИЦАМИ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ НА МНОЖЕСТВЕ ПАР ОБЪЕКТОВ*

Каждому объекту  $a_k \in A$  в ранжировании  $P_j$  (2.1) поставим в соответствие его ранг  $r_j^{(k)}$  как порядковое (натуральное) число в ранжировании или связный ранг как среднеарифметическое чисел рангов для равноважных объектов. Ранжирование  $\mathcal{E}_j$  экспертом  $P_j$  будем представлять в виде векторной оценки в ранговой шкале:

$$(10) \vec{r}_j = (r_j^{(1)}, r_j^{(2)}, \dots, r_j^{(n)}).$$

Для порядкового типа шкал измерения в качестве допустимых преобразований принято множество монотонно возрастающих преобразований [15]. Таким преобразованием, например, является  $\varphi_{II}(x) = x^2$ , которое линейные шкальные балльные оценки объектов переводит в нелинейные. При этом упорядочение между объектами хотя и сохраняется, но сравнение объек-



тов после преобразования в шкале разности теряет смысл, т.е. такие шкалы не являются эквивалентными.

Переход от порядковой шкалы к количественной введём с помощью операции метризации расстояния между ранговыми оценками объектов, включая и оценки со связанными рангами [8, 16].

Рассмотрим векторную оценку ранжирования  $P_j$  (10) объектов как точку в  $n$  мерном евклидовом арифметическом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Тогда расстояния между ранжированиями  $P_i$  и  $P_j$  можно представить в виде меры близости между векторными оценками

$$(11) \rho_1(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \sum_{k=1}^n |r_i^{(k)} - r_j^{(k)}|,$$

в котором отображение  $\rho_1: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  задаёт метрику пространства [17].

Очевидно, что расстояние между векторами можно вычислить и по формуле евклидовой нормы

$$(12) \rho_2(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (r_i^{(k)} - r_j^{(k)})^2}.$$

Легко убедиться, что введённые расстояния между ранжированиями объектов удовлетворяют традиционным аксиомам метрического пространства, а именно: аксиомам тождества, симметрии и треугольника [17].

Взаимосвязь между ранговыми оценками объектов  $a_k$  ранжирований  $P_j$  и элементами  $p_{kq}^j$  матрицы  $M(P_j)$  (2) бинарных отношений между парой объектов можно представить соотношениями:

а) для объектов с обратным порядком предпочтения –

$$(13) r_{j\downarrow}^{(k)} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{q=1, k \neq q}^n (1 - p_{kq}^j);$$

б) для объектов с прямым порядком предпочтения –

$$(14) r_{j\uparrow}^{(k)} = n - \frac{1}{2} \sum_{q=1, k \neq q}^n (1 - p_{kq}^j).$$

Рассмотрим пример. Для ранжирования пяти объектов

$$P_j: a_1 > a_4 > \{a_3 \approx a_5\} > a_2$$

матрица бинарного нестрогого отношения примет вид:

$$(15) M(P_j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ранги для объектов, например, с прямым порядком предпочтения, по элементам матрицы  $M(P_j)$  (15):

$$r_{j\uparrow}^{(1)} = 5 - \frac{1}{2} [(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1)] = 5;$$

$$r_{j\uparrow}^{(2)} = 5 - \frac{1}{2} [(1 + 1) + (1 + 1) + (1 + 1) + (1 + 1)] = 1;$$

$$r_{j\uparrow}^{(3)} = 5 - \frac{1}{2} [(1 + 1) + (1 - 1) + (1 + 1) + (1 - 0)] = 2,5;$$

$$r_{j\uparrow}^{(4)} = 5 - \frac{1}{2} [(1 + 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1)] = 4;$$

$$r_{j\uparrow}^{(5)} = 5 - \frac{1}{2} [(1 + 1) + (1 - 1) + (1 - 0) + (1 + 1)] = 2,5.$$

Для обратного порядка предпочтения вектор ранговых оценок имеет вид

$$\vec{r}_{j\downarrow} = (1; 5; 3,5; 2; 3,5),$$

где  $r_{j\downarrow}^{(1)} = 1; r_{j\downarrow}^{(2)} = 5; r_{j\downarrow}^{(3)} = 3,5; r_{j\downarrow}^{(4)} = 2; r_{j\downarrow}^{(5)} = 3,5$ .

Возникает вопрос о связи расстояний между ранжированиями, представленными в ранговой шкале, и элементами матриц бинарных отношений. Ответ даёт следующая теорема.

**Теорема 1** (Корнеевко). Пусть  $P_j, j = \overline{1, m}$ , – упорядочения  $n$  объектов  $a_k \in A$  группой из  $m$  экспертов, представленные в виде векторных оценок  $\vec{r}_j$  (10) в ранговой шкале измерения и матрицами бинарных отношений  $M(P_j)$  (2).

Тогда расстояния  $d_1$  (3),  $d_2$  (4),  $\rho_1$  (2),  $\rho_2$  (3) удовлетворяют неравенству:

$$(16) \rho_1(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \leq d_1(P_i, P_j) \text{ и } \rho_2(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \leq d_2(P_i, P_j).$$

Доказательство. Представим формулы (13) и (14) перехода от элементов матриц бинарных отношений к ранговым градациям в следующем виде:

$$r_{j\downarrow}^{(k)} = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{q=1, q \neq k}^n p_{kq}^j; r_{j\uparrow}^{(k)} = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{q=1, q \neq k}^n p_{kq}^j.$$

Имеем

$$\left[ r_i^{(k)} - r_j^{(k)} \right] = \left[ r_{i\uparrow}^{(k)} - r_{j\uparrow}^{(k)} \right] = \left[ r_{i\downarrow}^{(k)} - r_{j\downarrow}^{(k)} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \sum_{q=1, q \neq k}^n p_{kq}^i - \sum_{q=1, q \neq k}^n p_{kq}^j \right|,$$

откуда с учётом свойств модуля, а именно:

$$| |a| - |b| | \leq |a| + |b|,$$

приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \rho_1(\vec{r}_i, \vec{r}_j) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left| - \sum_{q=1, q \neq k}^n p_{kq}^j \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{q=1, q \neq k}^n |p_{kq}^i - p_{kq}^j| = d_1(P_i, P_j). \end{aligned}$$

Причём равенство  $\rho_1(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = d_1(P_i, P_j)$  имеет место, если выполняется соотношение

$$\left| \sum_{q=1, q \neq k}^n p_{kq}^i - \sum_{q=1, q \neq k}^n p_{kq}^j \right| = \sum_{q=1, q \neq k}^n |p_{kq}^i - p_{kq}^j|.$$

Аналогично можно показать, что  $\rho_2(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \leq d_2(P_i, P_j)$ . Теорема 1 доказана. ■

### 3.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЫБОРА МЕДИАНЫ КЕМЕНИ ПО КРИТЕРИЮ БЛИЗОСТИ РАНЖИРОВАНИЙ В РАНГОВОЙ ШКАЛЕ

Каждому объекту  $a_k \in A$  в  $P_j$  ранжировании поставим в соответствие его ранг  $r_j^{(k)}$ , рассматривая его, с учётом связанных рангов, как вещественное число, а само ранжирование  $P_j$  будем представлять в виде векторных оценок  $\vec{r}_j$  (10) арифметического пространства  $\mathbb{R}^n$ . В связи с этим от комбинаторной задачи (9) нахождения медианы Кемени, обеспечивающей минимум суммы расстояния от  $m$  ранжирований  $P_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ , представленных в виде матриц бинарных отношений, перейдём к эквивалентной задаче, в которой ранжирования представлены в ранговой шкале. Векторную оценку произвольного ранжирования с неизвестными значениями компонент представим в виде

$$\vec{r} = (r_1, \dots, r_k, \dots, r_n).$$

При этом будем предполагать, что  $r_k$  – переменное шкальное значение объекта  $a_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , принимающее значения на множестве вещественных положительных чисел  $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ .

В качестве меры близости между произвольными ранжированиями  $P_i$  и  $P_j$  в ранговой шкале примем расстояние между векторными оценками по формуле квадрата евклидовой нормы:

$$(17) d(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \sum_{k=1}^n (r_i^{(k)} - r_j^{(k)})^2,$$

тогда в качестве критерия расстояния между результирующим  $R_*$  и остальными  $m$  ранжированиями в ранговой шкале можно взять показатель

$$(18) D(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_m) = \sum_{j=1}^m d(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (r_j^{(k)} - r_k)^2.$$

Математическая постановка задачи нахождения медианы (результирующего) ранжирования  $R_*$  сводится к минимизации показателя (18) по переменным  $r_k, k = \overline{1, n}$ :

$$(19) \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (r_j^{(k)} - r_k)^2 \rightarrow \min_{(r_1, \dots, r_n)}$$

при условии:

$$(20) \sum_{k=1}^n r_k = \frac{1+n}{2} \cdot n.$$

Условие (20) означает, что поскольку для ранговых оценок объектов выполняется соотношение  $\sum_{k=1}^n r_j^{(k)} = \frac{1+n}{2} \cdot n$ , то это соотношение должно выполняться и для оценок объектов результирующего ранжирования  $R_*$ .

В обосновании построения результирующего ранжирования объектов (медианы Кемени) по критерию минимума расстояния в ранговой шкале лежит следующее утверждение.

**Теорема 2** (Корнеенко). Пусть ранжирования  $P_j, j = \overline{1, m}$ , объектов представлены в виде оценок  $r_j^{(k)} = r_j(a_k), k = \overline{1, n}$ , с прямым (обратным) порядком предпочтения объектов в ранговой шкале.

Тогда оптимальным решением задачи (19)–(20) по переменным  $r_k, k = \overline{1, n}$ , являются среднеарифметические числа рангов объектов по числу  $m$  ранжирований (экспертов):

$$(21) r_k^* = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m r_j^{(k)}, \forall k = \overline{1, n},$$

и результирующее ранжирование:

$$(22) R_*: a_{k_1} \succcurlyeq a_{k_2} \succcurlyeq \dots \succcurlyeq a_{k_n},$$

объектам которого поставим в однозначное соответствие ранг в канонической ранговой шкале:

а) при прямом направлении возрастания предпочтения объектов:

$$(23) r_{k_1}^* > r_{k_2}^* > \dots > r_{k_n}^* \implies r_{k_1}^* = n; r_{k_2}^* = n - 1; \dots; r_{k_n}^* = 1;$$

б) при обратном направлении убывания предпочтения объектов:

$$(24) r_{k_1}^* < r_{k_2}^* < \dots < r_{k_n}^* \Rightarrow r_{k_1}^* = 1; r_{k_2}^* = 2; \dots; r_{k_n}^* = n.$$

При равенстве шкальных оценок  $r_{k+1}^* = r_{k+2}^* = \dots = r_{k+s}^*$  объектам, занимающим места с  $(k + 1)$ -го по  $(k + s)$ -е, присвоим «средний» ранг равный

$$(25) r_{k+i}^* = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (k + i) = k + \frac{1+s}{2}, \forall i = \overline{1, s}.$$

Доказательство теоремы базируется на построении функции Лагранжа для задачи выпуклого программирования (19)–(20) и выполнении необходимых и достаточных условиях существования минимума функции Лагранжа.

Рассмотрим пример. Пусть тремя экспертами упорядочены четыре объекта:  $P_1: a_2 > a_4 > a_1 > a_3$ ;  $P_2: \{a_2 \approx a_3\} > a_4 > a_1$ ;  $P_3: a_3 > a_2 > \{a_1 \approx a_4\}$ , которым соответствуют векторные оценки в ранговой шкале с прямым порядком предпочтения объектов:  $\vec{r}_1 = (2, 4, 1, 3)$ ;  $\vec{r}_2 = (1; 3,5; 3,5; 2)$ ;  $\vec{r}_3 = (1,5; 3; 4; 1,5)$ .

По формуле  $r_k^*$  (21) для  $k = 1, 2, 3, 4$  находим оптимальные оценки объектов, которые представим в виде векторной оценке в количественной шкале измерения  $\vec{r}_* = \left(\frac{9}{6}, \frac{21}{6}, \frac{17}{6}, \frac{13}{6}\right)$ , и соответствующее ей результирующее ранжирование:

$$R_*: a_2 > a_3 >> a_4 > a_1,$$

которому соответствует векторная оценка в канонической ранговой шкале  $\vec{r}_* = (1, 4, 3, 2)$ .

### 3.3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ВЫБОРА

В связи с отсутствием в работе Кемени и Снелла конструктивного метода построения результирующего ранжирования, для решения проблемы группового выбора был предложен ряд правил и принципов согласования индивидуальных мнений экспертов, позволяющих строить результирующее отношение [10, 11, 13, 14].

Наряду с правилом выбора медианы Кемени в соответствии с показателем расстояния (2.9) рассмотрим правила согласования индивидуальных мнений экспертов, представленных бинарными отношениями в виде:

$$(a_k, a_q) \in \mathcal{R} \subset A \times A, \quad \forall a_k, a_q \in A.$$

Правило согласования по большинству голосов даёт возможность весьма простым образом определить результирующее (групповое) предпочтение.

Пусть  $m$  – число экспертов,  $n_{kq} = n(a_k, a_q)$  – число экспертов предпочитающих объект  $a_k$  объекту  $a_q$ , т.е. для которых имеет место  $a_k > a_q$ . Тогда правило голосования по большинству в  $l$  голосов, выполняющих роль порога, определяется следующим образом:

$$a_k > a_q \Leftrightarrow n(a_k, a_q) \geq l.$$

Если мерой различия ранжирований выбрано «расстояние Кемени» (2.5), то справедлива следующая теорема, устанавливающая связь мажоритарного правила с медианой Кемени [11].

**Теорема 3** (Миркин). Мажоритарное групповое отношение  $\mathcal{R}^*(\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_m)$ , полученное по принципу простого большинства:

$$a_k \succcurlyeq a_q \Leftrightarrow n(a_k, a_q) \geq \frac{m}{2},$$

среди бинарных отношений  $\mathcal{R}_j, j = \overline{1, m}$ , на множестве объектов  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  является медианой в классе всех бинарных отношений.

Рассмотрим пример. Пусть тремя экспертами на основе исходных транзитивных бинарных отношений

$$\mathcal{R}_1 = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_1, a_3)\};$$

$$\mathcal{R}_2 = \{(a_3, a_1), (a_1, a_2), (a_3, a_2)\};$$

$$\mathcal{R}_3 = \{(a_2, a_3), (a_3, a_1), (a_2, a_1)\}$$

получены ранжирования трёх объектов  $a_1, a_2, a_3$  в виде

$$P_1: a_1 > a_2 > a_3; P_2: a_3 > a_1 > a_2; P_3: a_2 > a_3 > a_1\}.$$

Тогда при  $l \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$  получаем нетранзитивное групповое предпочтение  $\mathcal{R}^* = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_1)\}$ .

Для данных ранжирований в качестве медианы Кемени в соответствии с результатами теорем 2 и 3 будет результирующее ранжирование:

$$R_*: a_1 \approx a_2 \approx a_3.$$

Рассмотрим пример. Пусть ранжирования объектов экспертами представлены в виде (здесь исходные данные взяты из примера на с. 75 работы [10]):

$$P_1: a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5, P_2: a_2 > a_5 > a_1 > a_4 > a_3,$$

$$P_3: a_3 > a_2 > a_1 > a_4 > a_5, P_4: a_1 > a_5 > a_3 > a_2 > a_4,$$

$$P_5: a_4 > a_3 > a_1 > a_5 > a_2,$$

поставим им в соответствие ранг с прямым порядком предпочтения (см. столбцы 2–6 таблицы 1).

Таблица 1. Исходные данные и результирующие ранжирования

| Объекты, $a_k$ | Ранги объектов ранжирований, $P_j$ |             |             |             |             | $\vec{r}_{opt}$ | $\vec{r}_*$ | Результирующее ранжирование   |   |
|----------------|------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-----------------|-------------|---|---|
|                | $r_1^{(k)}$                        | $r_2^{(k)}$ | $r_3^{(k)}$ | $r_4^{(k)}$ | $r_5^{(k)}$ |                 |             | $R_*$ , в ранговой шкале  | $M_*$ , по мажоритарному правилу  |
| <b>1</b>       | <b>2</b>                           | <b>3</b>    | <b>4</b>    | <b>5</b>    | <b>6</b>    | <b>7</b>        | <b>8</b>    | <b>9</b>  | <b>10</b>   |
| $a_1$          | 5                                  | 3           | 3           | 5           | 3           | 3,8             | 5           | $\left( \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \approx a_3 \\ a_4 \approx a_5 \end{array} \right)$ | $\left( \begin{array}{c} a_1 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} \right)$ |
| $a_2$          | 4                                  | 5           | 4           | 2           | 1           | 3,2             | 3,5         |   |   |
| $a_3$          | 3                                  | 1           | 5           | 3           | 4           | 3,2             | 3,5         |   |   |
| $a_4$          | 2                                  | 2           | 2           | 1           | 5           | 2,4             | 1,5         |   |   |
| $a_5$          | 1                                  | 4           | 1           | 4           | 2           | 2,4             | 1,5         |   |   |
| Сумма          | 15                                 | 15          | 15          | 15          | 15          | 15              | 15          |   |   |

Количественные оценки объектов результирующего ранжирования, вычисленные по формуле  $r_k^*$  (21), представим в виде оптимального вектора:  $\vec{r}_{opt} = (3,8; 3,2; 3,2; 2,4; 2,4)$ , которому в ранговой шкале соответствует вектор оценок со связанными рангами:

$$(26) \vec{r}_* = (5; 3,5; 3,5; 1,5; 1,5).$$

Результирующее ранжирование (медиана Кемени)  $R_*$ , которому соответствует векторная оценка (26), представлено в столбце 9 таблице 2 в виде вектор-столбца.

В соответствии с мажоритарным правилом для каждой пары объектов  $a_k, a_q \in A$  подсчитаем  $n_{qk}$  – число экспертов, считающих объект  $a_q$  предпочтительнее  $a_k$ . Поскольку, например:

$$n(a_1, a_2) > n(a_2, a_1),$$

где если  $n(a_1, a_2) = 3$ ,  $n(a_2, a_1) = 2$ , то  $a_1 > a_2$ , и т.д.

В результате получим медиану Кемени по мажоритарному правилу, которая представлена в столбце 10 таблицы 2, т.е.

$$a_1 > a_3 > a_2 > a_4 > a_5.$$

Сравним результаты формирования медианы Кемени по мажоритарному правилу и как решение оптимизационной задачи.

Рассчитаем меру близости результирующих ранжирований до исходных ранжирований  $P = \{P_j\}, j = 1 \div 5$ , в градациях матриц бинарных  $M(P_j)$  (2) отношений  $\{-1, 0, +1\}$  и в градациях ранговой шкалы (см. столбцы 2–6 таблицы .2). По формулам расстояния

$$(27) D_1(R_*, P) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sum_{k < q} |p_{kq}^j - p_{kq}^*|.$$

$$(28) D_2(R_*, P) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sum_{k < q} (p_{kq}^j - p_{kq}^*)^2.$$

$$(29) S_1(\vec{r}_*, \{\vec{r}_j\}_{j=1}^m) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m d(\vec{r}_j, \vec{r}_*) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n |r_j^{(k)} - r_k^*|.$$

$$(30) S_2(\vec{r}_*, \{\vec{r}_j\}_{j=1}^m) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m d(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (r_j^{(k)} - r_k^*)^2.$$

Результаты сравнений ранжирований в ранговой шкале и градаций матрицы бинарных отношений представлены в таблице 2.

Таблица 2. Оценка ранжирований объектов, полученных различными методами

| Медиана | Показатели    |               |   |   |
|---------|---------------|---------------|---|---|
|         | $D_1(R_*, P)$ | $D_2(R_*, P)$ | $S_1(\vec{r}_*, \{\vec{r}_j\}_{j=1}^m)$ | $S_2(\vec{r}_*, \{\vec{r}_j\}_{j=1}^m)$ |
| $R_*$   | 7,6           | <b>13,2</b>   | 6                                       | <b>11,8</b>                             |
| $M_*$   | <b>7,2</b>    | 14,4          | 6                                       | 12,8                                    |

Из таблицы 3 видно, что медиана Кемени  $R_*$ :  $a_1 > \{a_2 \approx a_3\} > \{a_4 \approx a_5\}$ , вычисленная в ранговой шкале, не совпадает с медианой Кемени, полученной по мажоритарному правилу:  $M_* : a_1 > a_3 > a_2 > a_4 > a_5$ .

Данный пример иллюстрирует вывод теоремы 1 о том, что величина расстояний ранжирований объектов до результирующей



щего ранжирования  $R_*$  в ранговой шкале не превосходит величин расстояний объектов до результирующего ранжирования  $M_*$  по матричному критерию. Кроме того, результирующее ранжирование  $R_*$ , как видно из примера, может иметь наименьшую сумму расстояний по критериям  $S_2$  (30),  $D_2$  (28) и не хуже по критерию  $S_1$  (29). Результирующее ранжирование  $M_*$  имеет наименьшую сумму расстояний только по критерию  $D_1$  (27). Легко показать, что данный критерий не всегда позволяет определить оптимальное расстояние, если речь идёт, например, об определении расстояний на плоскости.

Таким образом, для приведенного примера можно сделать следующие выводы:

1. В обоих случаях объект  $a_1$  оказался строго предпочтительнее всех остальных объектов.

2. Объекты  $a_2$  и  $a_3$  в обоих случаях строго предпочтительнее объектов  $a_4$  и  $a_5$ . Однако между собой в первом случае они эквивалентны, а во втором случае объект  $a_3$  строго предпочтительнее  $a_2$ . Поэтому следует дополнительно опросить экспертов о предпочтениях данных объектов.

3. Объекты  $a_4$  и  $a_5$  в обоих случаях оказались строго менее предпочтительнее всех остальных объектов. Однако, как и в предыдущем случае, между собой в первом случае они эквивалентны, а во втором случае объект  $a_4$  строго предпочтительнее  $a_5$ . Поэтому в данном случае следует также дополнительно опросить экспертов о предпочтениях данных объектов. В качестве обобщённого решения подходит медиана Кемени  $R_*$  в ранговой шкале, поскольку она имеет лучшие значения по показателям  $D_2$ ,  $S_1$  и  $S_2$  чем медиана  $M_*$ , полученная по мажоритарному правилу.

#### 4. Заключение

Задача ранжирований объектов, представленных матрицами бинарных отношений, предложенных Дж. Кемени и Дж. Снеллом, относится к классу комбинаторных NP-полных задач, для которых в настоящее время не существует оптимального метода нахождения результирующего ранжирования по матричному критерию.

При этом представление предпочтений объектов в виде матриц бинарных отношений не позволяет метрически определить расстояния между смежными или любыми парами объектов произвольного ранжирования.

Результирующее ранжирование (медиана Кемени) является оптимальным решением оптимизационной задачи выбора для исходных ранжирований экспертов, представленных в ранговой шкале.

### **Литература**

1. АЛЕСКЕРОВ Ф.Т., БАУМАН Е.В., ВОЛЬСКИЙ В.И. *Методы обработки интервальных экспертных оценок* // Автоматика и телемеханика. – 1984. – №3. – С. 127–133.
2. АЙЗЕРМАН М.А., АЛЕСКЕРОВ Ф.Т. *Выбор вариантов: основы теории*. – М.: Наука, 1990. – 240 с.
3. БЕШЕЛЕВ С.Д., ГУРВИЧ Ф.Г. *Математико-статистические методы экспертных оценок*. – М.: Статистика, 1980. – 263 с.
4. ГЛОТОВ В.А., ПАВЕЛЬЕВ В.В. *Векторная стратификация*. – М.: Наука, 1984. – 95 с.
5. ДУБОВ Ю.А., ТРАВКИН С.И., ЯКИМЕЦ В.Н. *Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем*. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
6. КЕМЕНИ ДЖ., СНЕЛЛ ДЖ. *Кибернетическое моделирование: Некоторые приложения*. – М.: Советское радио, 1972. – 192 с.
7. КЕНДЭЛ М. *Ранговые корреляции*. – М.: Мир, 1975. – 216 с.
8. КОРНЕЕНКО В.П. *Методы оптимизации* : учебник. – М.: Высшая школа, 2007. – 664 с.
9. КОРНЕЕНКО В.П., ОЖИГАНОВ Э.Н. *Методика рейтинговой оценки эффективности использования человеческого капитала* // Экономика и предпринимательство. – 2014. – №12 (ч. 3). – С. 183–191.
10. ЛИТВАК Б.Г. *Экспертная информация: Методы получения и анализа*. – М.: Радио и связь, 1982. – 184 с.
11. МИРКИН Б.Г. *Проблема группового выбора*. – М.: Наука, 1974. – 256 с.

12. НОВИКОВ Д.А., ОРЛОВ А.И. *Экспертные оценки – инструменты аналитика* // Заводская лаборатория. – 2013. – Т. 79, №4. – С. 3–4.
13. ОРЛОВ А.И. *Роль медиан Кемени в экспертных оценках и статистическом анализе данных* // Теория активных систем: Труды международной научно-практической конференции (14-16 ноября 2011 г., Москва, Россия). Том I. / Под общ. ред. В.Н. Буркова, Д.А. Новикова. – М.: ИПУ РАН, 2011. – С. 172–176.
14. ОРЛОВ А.И. *Средние величины и законы больших чисел в пространствах произвольной природы* [Электронный ресурс] // Научный журнал КубГАУ. – 2013. – №89(05). – URL: <http://www.mtas.ru/theory/orlov2011a.pdf> (дата обращения: 23.03.2017).
15. ПФАНЦАГЛЬ И. *Теория измерений*. – М.: Мир, 1976. – 247 с.
16. РАМЕЕВ О.А., КОРНЕЕНКО В.П. *Основы теории многокритериального оценивания объектов с многоуровневой структурой показателей эффективности*: монография. – М.: МАКС-Пресс, 2018. – 2018. – 414 с.
17. СИБИРЯКОВ Г.В., МАРТЫНОВ Ю.А. *Метрические пространства: учеб. пособие*. – Томск: Изд-во Том. университета, 2012. – 166 с.
18. ФАЙН В.Б., ДЕЛЬ М.В. *Турнирный метод ранжирования вариантов* // Заводская лаборатория. – 2005. – Т. 71, №7. – С. 58–60.
19. ХОРН Р., ДЖОНСОН Ч. *Матричный анализ*. – М.: Мир, 1989. – 352 с.
20. ШМЕРЛИНГ Д.С., КУЗНЕЦОВА Т.Ю., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., ЧУРКИН Э.П. *Применение экспертных оценок для задач стратегического планирования*. – М.: Московская школа экономики VUE, 2008. – 36 с.
21. KEMENY J.G., SNELL J.L. *Mathematical Models in the Social Sciences*. – New York, University of Michigan, 1962. – 168 p.
22. JACKSON B.N., SCHNABLE P.S., ALURU S. *Consensus Genetic Maps as Median Orders from Inconsistent Sources* // IEEE/ACM Transactions on computational biology and bioinformatics. – 2008. – Vol. 5, No. 2. – P. 161–171.

23. ISHIZAKA A., LABIB A. *Analytic hierarchy process and Expert Choice: benefits and limitation* // ORinsight. – 2009. – Vol. 24. – P. 201–220.

## **OPTIMIZATION METHOD OF SELECTING THE RESULTING RANKING OF OBJECTS PRESENTED IN RANK SCALE OF MEASUREMENT**

**Viktor Korneenko**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Senior Researcher, Ph.D (vkorn@ipu.ru).

*Abstract: At present, there is no optimal method for constructing the resulting ranking, known as the Kemeny-Snell median, according to the matrix criterion between orderings of objects by experts, represented by matrices of binary relations on a set of pairs of objects. However, the task of constructing the resulting ranking according to the matrix criterion between orderings of objects by experts represented by matrices of binary relations on a set of pairs of objects can be reduced to an equivalent optimization problem if the ranking of objects is presented in a ranking scale of measurements. In this case, the distance between the object rankings presented in the form of vector rank ratings, including taking into account the ratings of objects with related ranks, acts as an optimality criterion. The article shows that the introduced distances between the ranking of objects in the rank scale satisfy the traditional axioms of metric space. The validity of the transition from the statement of the problem of constructing the Kemeny-Snell median by the matrix criterion to the statement of the problem by the criterion of proximity between rankings in the rank scale is related to the fact that between the rankings represented by the binary relations matrices on the set of pairs of objects and the rankings in the rank scale, as shown in this article, there is a one-to-one correspondence.*

**Keywords:** rank scale, Kemeny distance and median, binary relations, object ranking.

УДК 519.8

ББК 22.18

DOI: 10.25728/ubs.2019.82.3

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.*

*Поступила в редакцию 10.06.2019.*

*Опубликована 30.11.2019.*

## РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ В ЗДРАВООХРАНЕНИИ

Цурко В. В.<sup>1</sup>

( ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Рекомендательные системы получили широкое распространение в различных интернет-сервисах: контекстная реклама, интересные для пользователя фильмы и музыка, подбор товаров и услуг в интернет-магазинах. Алгоритмы построения рекомендаций учитывают профиль пользователя, историю его запросов, покупок и информацию о пользователях, похожих на него. Эти алгоритмы быстро развиваются и доказали свою эффективность, их внедрение повышает посещаемость сервисов и продажи. Новой областью применения рекомендательных систем является здравоохранение. За десятилетия накоплены огромные объемы медицинских данных, таких как истории болезни, базы смертности и заболеваемости, протоколы лечения и даже данные о здоровье непрерывно снимаемые с человека специальными датчиками. Разрабатываются интеллектуальные системы диагностики заболеваний, выбора способа лечения, отслеживания ежедневного здоровья человека. В статье приводится общее введение в рекомендательные системы, обзор литературы о применении рекомендательных систем в здравоохранении, а также рассматривается проблема построения рекомендательных систем для оптимизации больничных закупок.*

Ключевые слова: рекомендательные системы, здравоохранение, оптимизация больничных закупок.

### **1. Введение**

По мере накопления данных по поисковым запросам в Интернете, по результатам выбора предлагаемых услуг и товаров появилась возможность создавать индивидуальные и групповые профили пользователей, на основании которых разработаны компьютерные системы для прогноза товаров и услуг, которые могут заинтересовать конкретного пользователя в будущем. Такие системы получили название *рекомендательные*.

Рекомендательные системы широко распространены в Интернете, помогают людям найти релевантный товар, а компани-

---

<sup>1</sup> Варвара Владимировна Цурко, к.т.н., с.н.с. (v.tsurko@gmail.com).

ям – повысить прибыль. Алгоритмы учитывают профиль пользователя, историю его запросов, покупок и информацию о пользователях, похожих на него, для того чтобы предсказать, какая музыка, ресторан, отель или товар в интернет-магазине могут ему понравиться.

Методология создания рекомендательных систем является универсальным методом машинного обучения и может быть распространена на другие сферы, не связанные с интернетом. Это, например, финансы, управление дорожным движением, распределение ресурсов, оптимизация подготовки спортсменов к соревнованиям. Перспективным является внедрение рекомендательных систем в здравоохранении. Как часть системы интеллектуальной поддержки врача, такая система может применяться не только на этапе диагностики заболевания и выбора оптимального лечения, но и на этапе планирования закупок лекарств и оборудования, формирования кадрового состава специалистов для более полного удовлетворения нужд конкретного лечебного учреждения.

Статья посвящена обзору публикаций по применению рекомендательных систем в здравоохранении и адаптации методов построения рекомендательных систем для целей оптимизации больничных закупок. В разделе 2 вводится формализация понятия «рекомендательная система», примеры рекомендательных систем и алгоритмы их построения. В разделе 3 описаны применения рекомендательных систем в здравоохранении, адресованные врачам и пациентам. Врачам такие системы помогают точнее ставить диагноз, а пациентам для снижения индивидуальных рисков развития заболевания такие системы могут предоставлять рекомендации, например, по правильному питанию и здоровому образу жизни. В разделе 4 рассматривается формализация проблемы и методы построения рекомендательных систем для закупки лекарств для больниц.

## **2. Рекомендательные системы**

Для лучшего понимания контекста последующих частей статьи приведем основные термины теории рекомендательных систем.

### *2.1. Определения и обозначения*

*Пользователь/субъект* – человек, использующий систему и получающий рекомендации.

*Объект* (предмет, товар и т.п.) – объект, который рекомендуют пользователю.

*Рейтинг* – рейтинг проставляется пользователем на объект/товар. Рейтинг может проставляться явно или неявно, т.е. зависеть от активности пользователя (перешел по ссылке, открыл документ). Рейтинг характеризует ценность объекта для пользователя.

*Матрица рейтингов* – матрица, по строкам которой находится информация о всех субъектах/пользователях, а по столбцам – о всех возможных объектах. Элементами матрицы является информация о рейтинге конкретного объекта для пользователя. Если пользователь еще не оценил объект, то соответствующее значение в матрице пусто. Часто матрица бывает разреженной, т.е. большинство ее элементов пусто.

*Проблема холодного старта* – ситуация, при которой для новых пользователей или объектов система содержит мало информации для прогнозирования достоверного рейтинга объекта или построения надежной рекомендации субъекту.

### *2.2. Примеры рекомендательных систем*

Цель рекомендательной системы заключается в нахождении объектов (фильмов, товаров, отелей и т.п.), релевантных для пользователя, на основании его предыдущих решений, пользовательского поведения.

Наиболее распространены рекомендательные системы, советующие купить тот или иной товар. Субъектом является пользователь интернет-магазина, объектом – товары. Рейтинг формиру-

ется на основе информации о покупках пользователей. Задачами подобной рекомендательной системы могут являться не только рекомендации наиболее релевантного товара клиенту, но и предложение взаимодополняемых товаров, информирование о новых товарах. Классическим примером рекомендательной системы товаров являются рекомендации в интернет-магазине Amazon.

Существуют рекомендательные системы, дающие советы пользователям, какую веб-страницу посетить. В этом случае субъектами являются пользователи сети Интернет, объектами – веб-страницы. Рейтинги проставляются на основе истории посещений пользователей. Задача – выбрать для пользователя ранжированный список интересных ему ресурсов. Примеры таких систем: Яндекс.Дзен, Surfingbird.

В 2006 году компания Netflix предоставила открытую выборку пользовательских рейтингов фильмов и предложила всем желающим поучаствовать в соревновании предсказания рейтингов оставшейся, неопубликованной части данных. Приз составлял один миллион долларов. Соревнование привело к быстрому развитию алгоритмов построения рекомендательных систем и созданию эффективного алгоритма построения рекомендаций – Bellkor's Pragmatic Chaos [8].

### 2.3. Алгоритмы

Центральным аспектом при построении рекомендательной системы является выбор алгоритма. Использование того или иного алгоритма обусловлено исходными данными, их размерностью и контекстом рекомендаций. В данной части будут описаны основные алгоритмические подходы к построению рекомендательных систем.

Метод *коллаборативной фильтрации* основан на индивидуальных рейтингах пользователей. Метод пытается предсказать наиболее релевантный объект для пользователя, используя матрицу рейтингов. Обычно матрица рейтингов является разреженной. Существуют различные способы заполнения пустых значений в матрице, которые могут быть использованы в качестве рекомендаций.



Простейшими являются *корреляционные модели* коллаборативной фильтрации (Memory-based Collaborative Filtering). Их особенностями являются хранение всей матрицы рейтингов и измерение сходства между объектами и пользователями с помощью корреляции строк и столбцов матрицы. Для заполнения пропусков в данных используется непараметрическая регрессия для пользователей или для объектов. Корреляционные методы интуитивно понятны, легко реализуемы. Основными недостатками корреляционных методов являются проблема холодного старта и необходимость хранения огромной разреженной матрицы рейтингов. Латентные модели лишены этих недостатков.

Для увеличения производительности методов используются *латентные модели* коллаборативной фильтрации. По матрице рейтингов оценивается профиль пользователей и профиль объектов, имеющие существенно меньшую размерность, чем исходные данные. Латентные модели могут быть основаны на кластеризации, вероятностном подходе и матричных разложениях. Чаще всего используется сингулярное разложение матриц.

Для оценки качества рекомендательной системы обычно используются метрики из теории информации: точность, чувствительность, F-мера, ROC-кривая, RMSE [9].

### **3. Рекомендательные системы в здравоохранении**

Рекомендательные системы в здравоохранении не получили пока столь широкого распространения, как в интернет-бизнесе и торговле. Тем не менее, они имеют большой потенциал. В первую очередь, благодаря большому объему медицинских данных, протоколов лечения и тому факту, что многие процессы и принятие решений в области здравоохранения возможно автоматизировать с помощью применения методов машинного обучения.

Цифровые технологии и рекомендации могут сопровождать человека на разных этапах его жизни и лечения. Прежде всего следить за здоровым образом жизни: отслеживать необходимую физическую активность, время сна, питание, помогать при отказе от вредных привычек, контролировать уровень стресса и сохра-

нять концентрацию в течение дня [3]. Основанием для рекомендаций по здоровому образу жизни является заполненная пользователем информация о физическом состоянии, хронических заболеваниях, занесенный в программу рацион питания и активность человека в течение дня. Последняя может быть измерена специальным носимым оборудованием, таким как «умные» браслеты и часы, или программным обеспечением, установленным на смартфон. Человек в этом случае получает рекомендации на основе личной статистики и общепризнанных медицинских рекомендаций по поддержанию здоровья.

Автоматизированные системы принятия решений могут выявлять случаи отклонения от нормы и симптомы заболеваний, выдавать рекомендации о посещении врача или сдачи анализов. Для определения симптомов заболеваний используют специальные биосенсоры, такие как датчики давления, измерения глюкозы в крови, пульсометры и термометры. Хотя последние тенденции направлены на то, чтобы встраивать биосенсоры в повседневные вещи: мобильные телефоны или часы. Так, Apple Watch могут измерять частоту сердцебиения, снимать электрокардиограмму и сообщать своему владельцу случаи отклонения от нормы. Встроенные в часы акселерометр и гироскоп определяют падение человека, а устройство вызывает помощь, если человек не отвечает более 60 секунд [2].

Методы машинного обучения могут помочь при постановке диагноза. Имея медицинскую карту пациента, методами коллаборативной фильтрации можно показать, какие заболевания чаще всего встречаются у людей, имеющих похожую историю болезни, и, таким образом, предсказать заболевания, которые могут быть пока не диагностированы у пациента. Распознавание образов уже помогает выявлять аутизм по видеосъемке ребенка, что позволяет диагностировать заболевание на ранней стадии и достичь лучших результатов в лечении [4].

Актуально развитие рекомендательных систем, дающих советы пациентам, нуждающимся в постоянном приеме лекарств и отслеживании показателей здоровья. Больные сахарным диа-

бетом могут заносить данные о чувстве голода, болях, уровне глюкозы и приеме лекарств в мобильное приложение, которое агрегирует все показатели и напоминает о приеме необходимых лекарств [6]. Аналогично программа EpiWatch [7] позволяет больным эпилепсией вести учет возникновения и длительности приступа и регистрировать принимаемые медикаменты. Строя корреляционную модель между приемом лекарств и приступами, программа, установленная на смартфон, прогнозирует возможный приступ и при необходимости может вызвать помощь.

В статье [11] обсуждаются два основных сценария построения рекомендательных систем в здравоохранении. Первый сценарий рассматривает пациентов как конечных пользователей; он имеет огромный потенциал для развития, и, как описано выше, применим как для ведения здорового образа жизни, так и в качестве помощника уже заболевшим людям.

Второй сценарий заключается в предоставлении рекомендаций врачам. Врачи через рекомендации могут получить ссылки на похожие случаи заболевания, описания сопутствующих заболеваний и симптомов, ссылки на протоколы лечения и литературу, информацию о том, какие лекарственные средства дают наибольший эффект при лечении конкретного заболевания.

Приложения, следящие за здоровьем и образом жизни пользователей, могут агрегировать информацию и помогать врачам набирать участников в медицинские исследования. Таким образом, информация может собираться более регулярно, так как для измерения личных данных не надо посещать больницу, а можно направлять их исследователям напрямую из приложения. Так можно собрать более обширную и разнообразную выборку.

Существует мобильное приложение, позволяющее сфотографировать меланому и следить за ее изменением в будущем. А врачи, набрав фотографии нескольких десятков тысяч опухолей, изменяющихся во времени, могут создать алгоритм, способный распознавать злокачественную опухоль на ранних стадиях ее развития [10].

Возможен и третий сценарий предоставления рекомендаций,

в котором конечными пользователями являются организации. Кажется перспективным перенести опыт построения рекомендательных систем в торговле на фармацевтический рынок. Имея информацию о закупках больниц, можно строить ежемесячные рекомендации о том, какие препараты нужно добавить в ассортимент, чтобы повысить удовлетворенность пациентов и избежать дефицита необходимых лекарств. Информация о больничных закупках находится в открытом доступе, к этим данным применимы методы коллаборативной фильтрации, описанные в разделе 2, которые могут помочь оптимизировать больничные закупки.

#### **4. Оптимизация больничных закупок**

Процесс закупок для медицинских учреждений регулируется Федеральным законом, обязывающим публиковать сведения о закупках и их стоимости на официальных сайтах [5]. Таким образом, информация о государственных закупках находится в открытом доступе, что позволяет применять алгоритмы анализа данных и машинного обучения для автоматизации составления закупки и оптимизации ассортимента лекарственных средств, которые закупает больница. В данном разделе описана система, рекомендуемая добавление в закупку больницы товаров, которые часто и в больших количествах закупают другие похожие больницы.

##### *4.1. Постановка задачи*

Рассмотрим множество больниц  $S = \{S_1, \dots, S_T\}$ . Каждая больница имеет известные закупки и характеризуется профилем, количеством коек, площадью, количеством корпусов, количеством отделений и профилем этих отделений, также известен адрес больницы. Таким образом, можно составить признаковое описание каждой больницы  $S_i = (S_i(1), \dots, S_i(t))$ . Закупки больницы  $S_i$  – это вектор уникальных товаров (лекарств и изделий медицинского назначения)  $A(S_i) = \{p_1^i, \dots, p_{k(S_i)}^i\}$ , где  $k(S_i)$  – количество товаров в закупке. Пусть  $u_{ij}$  – количество единиц закупленного товара  $p_j^i$ .

Задача состоит в анализе совместных закупок больниц множества и построении рекомендательной системы по высоко востребованным товарам, которые следовало бы добавить в закупку конкретной больницы.

#### 4.2. Метод построения рекомендательной системы

Закупки больниц сильно зависят от характеристик больницы, таких как терапевтический профиль больницы, ее величина. Нельзя сравнивать закупки больниц разных профилей и строить рекомендации на этом сравнении. Поэтому первым шагом решения задачи является кластеризация больниц на основе их признаков. Задача состоит в построении функции кластеризации, принимающей на вход вектор описания больницы и выдающей номер кластера, к которому эту больницу следует отнести.

В разработанном методе применяется алгоритм кластеризации  $k$ -средних [1], результат работы которого легко интерпретируем и понятен экспертам. В качестве признакового описания используются доступные характеристики больницы. Также в признаковое описание добавлено среднее количество закупленных упаковок товаров за месяц. Таким образом, кластеризация учитывает возможные ограничения склада. Результатом первого шага предложенного метода является разделение всего множества больниц на  $c$  непересекающихся кластеров:

$$S = Q_1 \cup \dots \cup Q_c,$$

где  $Q_i = \cup_j S_j$ ,  $Q_j \cap Q_i = \emptyset \quad \forall i, j$ .

На втором шаге строится оценка объема закупок нового продукта больницей. Для этого данные о закупках различных больниц в кластере представляются в виде матрицы размером  $n \cdot m$ , где  $n$  – количество больниц в рассматриваемом кластере  $Q$ , а  $m$  – количество товаров в объединенной закупке всех больниц рассматриваемого кластера,  $m = |A(S_1) \cup \dots \cup A(S_n)|$ ,

$S_1, \dots, S_n \in Q$ ,  $|\cdot|$  – мощность множества:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} \dots u_{1m} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ u_{n1} \dots u_{nm} \end{bmatrix}.$$

Не все товары будут присутствовать во всех больницах кластера, поэтому часть ячеек матрицы будет иметь пустые значения. Интерес представляет предсказание результата в пустых ячейках для оценки потенциальности закупки нового товара больницей.

Предсказывать пустые значения матрицы  $U$  можно величиной среднего значения известных элементов матрицы по строке, или по столбцу, или некоторым комбинированным методом. Но на практике матрица  $U$  имеет большую размерность и сильно разрежена. Чтобы уменьшить влияние разреженности данных и повысить производительность метода, предлагается использовать сингулярное разложение матрицы закупок.

Методы матричного разложения позволяют найти приближение матрицы, используя матрицы меньшего ранга: матрица  $U$  приближается произведением двух матриц меньшего ранга  $U \approx XY^T$ , где  $X \in R^{n \times k}$  – матрица признаков больниц,  $Y \in R^{k \times m}$  – матрица признаков товаров,  $k$  – количество признаков, которое определяется заранее. Если размерности  $X$  и  $Y$  измеряются десятками тысяч, то  $k$  порядка нескольких десятков, таким образом, резко сокращается число параметров с  $nm$  до  $(n + m)k$ .

Элемент  $u_{ij}$  матрицы  $U$  приближается выражением

$$\tilde{u}_{ij} = x_i^T y_j,$$

где  $x_i \in R^{k \times 1}$  – вектор признаков больницы,  $i$ -я строка матрицы  $X$ ,  $y_j \in R^{k \times 1}$  – вектор признаков товара,  $j$ -я строка матрицы  $Y$ .

Разложение матрицы находится путем решения задачи минимизации:

$$(1) (X^*, Y^*) = \arg \min_{X, Y} \sum_{(i,j) \in W} \left( (u_{ij} - \tilde{u}_{ij})^2 + \lambda x_i^T x_i + \lambda y_j^T y_j \right),$$

где  $\lambda$  – параметр регуляризации. Задача оптимизации (1) решается методом градиентного спуска.

На заключительном шаге метода строятся рекомендации: больнице  $S_i$  рекомендуется добавить в закупку товары, которые ранее не закупались больницей, но имеют максимальные спрогнозированные значения  $\tilde{u}_{ij}$ .

## **5. Выводы**

В настоящее время происходит цифровая революция в области здравоохранения: собираются электронные данные о пациентах, создаются базы специалистов-врачей, растет спрос на устройства и приложения, помогающие поддерживать здоровый образ жизни, следить за назначенным лечением, поддерживать связь с лечащим врачом.

Научный интерес представляет постановка новых задач управления и машинного обучения в области медицины. В связи с тем, что популярность и эффективность рекомендательных систем стабильно растет, повышается и актуальность адаптации математических методов разработки рекомендательных систем к новым областям, в частности разработка новых методов, решающих специфические задачи из области медицины.

В статье описан подход к разработке рекомендательной системы для оптимизации закупок лекарственных средств больницами на основе открытых данных о тендерах и закупках. Дальнейшими шагами исследования является апробация метода на реальных данных и оценка эффективности подхода.

## **Литература**

1. ТУ ДЖ., ГОНСАЛЕС Р. *Принципы распознавания образов.* – М.: Мир, 1978.
2. <https://www.apple.com/apple-watch-series-4/health/> (дата обращения 18.10.2018).
3. <https://www.apple.com/ios/health/> (дата обращения 18.10.2018).

4. <https://today.duke.edu/2015/10/autismbeyond> (дата обращения 19.10.2018).
5. <http://zakupki.gov.ru> (дата обращения: 03.04.2018).
6. IRVING M. *One Drop: The data-driven approach to managing diabetes*. – New Atlas. – 2017.
7. JOHNS HOPKINS MEDICINE MARKETING AND COMMUNICATIONS *EpiWatch App Records Seizure Data Using Apple Watch* // Insight Tapping Innovative Solutions and Technology as Johns Hopkins Medicine. – 2015.
8. KOREN Y. *The bellkor solution to the netflix grand prize* // Netflix prize documentation.– 2009. – Vol. 81. – P. 1–10.
9. POWERS D.M. *Evaluation: from precision, recall and f-measure to roc, informedness, markedness and correlation* // J. of Machine Learning Technologies. – 2011. – Vol. 2, Iss. 1. – P. 37–63.
10. WEBSTER D.E., SUVER C., DOERR M., MOUNTS E., DOMENICO L., PETRIE T., LEACHMAN S.A., TRISTER A.D., BOT B.M. *The Mole Mapper Study, mobile phone skin imaging and melanoma risk data collected using ResearchKit* // Scientific Data. – 2017. – Vol. 4. – P. 170005.
11. WIESNER M., PFEIFER D. *Health recommender systems: concepts, requirements, technical basics and challenges* // Int. J. of Environmental Research and Public Health. – 2014. – Vol. 11(3). – P. 2580–2607.
12. XIAOYUAN SU, TAGHI M. KHOSHGOFTAAR *A survey of collaborative filtering techniques* // Advances in Artificial Intelligence archive. – 2009. – Vol. 2009. – Article No. 4.



## **RECOMMENDER SYSTEMS IN THE HEALTHCARE**

**Varvara Tsurko**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., Researcher (v.tsurko@gmail.com).

*Abstract: Recommender systems are wide spread in Internet services: contextual advertising, movies and music interesting for an user, selection of goods and services in online stores. Algorithms take into account users' profiles, history of requests and sales and the data about similar users. These algorithms develop very fast and show its effectiveness, its implementation increase the service attendance and sales. Healthcare is the new area of recommender systems application. It is collected a huge amount of medical data such as medical records, mortality and morbidity databases, treatment protocols, and even health data continuously monitored by special sensors. Ones develop intelligent systems for primary care, choosing the treatment, daily human health tracking. The article provides the general introduction to the recommender systems, the literature review of recommender systems usage in the healthcare, and also addresses the problem of building recommender systems for optimizing hospital procurement.*

**Keywords:** recommender systems, healthcare, hospitals purchase optimization.

УДК 519.2

ББК 22.172

DOI: 10.25728/ubs.2019.82.4

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А.И. Михальским.*

*Поступила в редакцию 18.02.2019.*

*Дата опубликования 30.11.2019.*

## ПРИМЕНЕНИЕ НОВОГО МЕТОДА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕШТАТНОЙ РАБОТЫ СИСТЕМЫ ТЕРМОРЕГУЛИРОВАНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Павлов Д. В.<sup>1</sup>, Петров Д. С.<sup>2</sup>

(ПАО «РКК «Энергия», Королёв, Московская обл.)

*Рассматривается задача математического моделирования физических явлений, лежащих в основе функционирования бортовых систем космических аппаратов, в приближении сосредоточенных параметров. Особенности рассматриваемого класса технических систем являются, во-первых, наличие нелинейных физических явлений и, во-вторых, наличие большого количества элементов и разветвленная структура связей между ними. Авторами предложен вариант метода моделирования технических систем в приближении сосредоточенных параметров, который, в отличие от существующих аналогов, адаптирован для моделирования технических систем, обладающих перечисленными особенностями. На его основе разработан комплекс программ, обеспечивающий создание и модификацию математических моделей технических систем путем синтеза типовых элементов без написания исходного кода. С использованием этого комплекса программ создана модель системы терморегулирования космического аппарата. В настоящей работе рассмотрено моделирование нештатной работы исследуемой системы. Выполнена модификация этой модели: реализованы модели нештатных ситуаций, в том числе негерметичности жидкостного контура системы, доработаны модели агрегатов системы для адекватного описания функционирования при низком давлении рабочей жидкости. При помощи модифицированной модели проведены расчеты эволюции системы с учетом рассмотренных нештатных ситуаций при различных внешних условиях. Результаты расчетов с высокой точностью совпадают с данными, полученными в ходе реальных полетов.*

Ключевые слова: метод моделирования, трехстадийная декомпозиция, математическое моделирование, космический аппарат, система терморегулирования, нештатная ситуация.

---

<sup>1</sup> Дмитрий Владимирович Павлов, к.т.н. (dmitripavlov@inbox.ru).

<sup>2</sup> Дмитрий Сергеевич Петров, магистр физики (dmitry.s.petrov@gmail.com).

## 1. Введение

Компьютерное моделирование технических систем в приближении сосредоточенных параметров широко используется при решении задач, связанных с управлением полетом космических аппаратов (КА). Так, модели КА применяются для отработки программного обеспечения (ПО) бортовых вычислительных средств и методик управления КА, валидации и верификации программы полета, осуществления тренировок персонала управления и отработки командно-программной информации при сопровождении полета КА [5, 12].

К компьютерным моделям, используемым при решении перечисленных задач, предъявляется требование настраиваемости [11], в том числе – обеспечения возможности имитации нештатной работы исследуемой системы (ИС). Под настройкой в статье понимается корректировка модели, направленная на достижение ее адекватности, включающая изменение значений параметров, модификацию структуры модели и программных функций, вычисляющих зависимости между параметрами, под настраиваемостью понимается простота настройки с точки зрения затрачиваемых ресурсов: времени и квалификации исполнителей.

Как правило, на этапе проектирования модели невозможно предусмотреть всевозможные нештатные ситуации (НШС), в связи с чем возникает необходимость ее последующей настройки – имитации НШС, не предусмотренных заранее, но произошедших в ходе эксплуатации ИС. Принципы построения модели должны обеспечивать низкую ресурсоемкость этого процесса.

Для разработки настраиваемых моделей, использующих приближение сосредоточенных параметров, как правило, применяют соответствующие системы компьютерного моделирования, например, **20-sim**<sup>3</sup>, **LMS Imagine.Lab Amesim**<sup>4</sup>, **Simscape**<sup>5</sup>. В основе перечисленных компьютерных систем лежит методология

---

<sup>3</sup> URL: <http://www.20sim.com/product/bondgraphs.html>.

<sup>4</sup> URL: [http://www.plm.automation.siemens.com/en\\_us/products/lms/imagine-lab/amesim/index.shtml](http://www.plm.automation.siemens.com/en_us/products/lms/imagine-lab/amesim/index.shtml).

<sup>5</sup> URL: <http://www.mathworks.com/products/simscape/>.

Bond Graph [13–16], позволяющая моделировать течение и преобразование энергии различной физической природы. Однако для моделирования служебных бортовых систем (СБС) КА данная методология обладает существенными недостатками: во-первых, она обеспечивает моделирование только линейных физических явлений, и, во-вторых, в методологии отсутствуют встроенные средства структуризации модели.

Кроме методологии Bond Graph существует также метод физических аналогий, позволяющий представить модель ИС в виде эквивалентной электрической схемы, состоящей из резисторов, конденсаторов и катушек индуктивности [2, 4, 6]. Такой подход реализуют, например, системы компьютерного моделирования «ПА-9» и «ПА-10»<sup>6</sup> [3]. Расчетные программные модули этих систем обеспечивают формирование и решение системы линейных алгебраических уравнений и линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка. Недостатки используемого подхода аналогичны недостаткам методологии Bond Graph: он позволяет моделировать лишь линейные физические явления, в системах моделирования не представлены средства структуризации модели.

Авторами ранее (см., например, [7, 9]) был предложен оригинальный метод, обеспечивающий математическую и алгоритмическую постановку задачи моделирования, т.е. автоматическое формирование, во-первых, вектора состояния ИС и, во-вторых, программных функций, используемых при расчете состояния и эволюции ИС. Ключевой составляющей этого метода является алгоритм декомпозиции, обеспечивающий разделение ИС на повторно используемые составные части. Исходными данными для формирования вектора состояния и расчетных функций является информация о структуре модели: перечень используемых составных частей и связей между ними.

Универсальные составные части предложено объединять в программную библиотеку, для каждого класса составных частей содержащую, во-первых, вектор состояния – перечень па-

---

<sup>6</sup> URL: <http://pa10.ru/>.

раметров, определяющий состояние этой составной части, и, во-вторых, программные функции, обеспечивающие расчет связей между ее параметрами.

В работе [7] приведено описание математической модели системы терморегулирования (СТР) космических кораблей «Союз МС» и «Прогресс МС», разработанной с использованием оригинального метода моделирования. В настоящей же работе демонстрируются возможности по настройке этой модели в части имитации нештатной работы отдельных составных частей ИС.

## **2. Описание модели СТР**

Описание СТР космических кораблей «Союз МС» и «Прогресс МС» приведено, например, в работе [1]. Разработанная в [7] математическая модель этой системы имеет ряд особенностей, приведенных ниже:

1. Компьютерные программы, используемые при расчете, включая универсальную расчетную программу и подключаемые программные модули – составные части модели, – реализованы на интерпретируемом языке программирования общего назначения Python3. Данный язык, несмотря на низкую производительность вычислений по сравнению с компилируемыми языками, имеет в своем составе удобный инструментарий, позволяющий разрабатывать программы с меньшими затратами ресурсов.

2. Моделируемая система упрощена путем исключения дублирования компонентов ИС. Пневмогидравлическая схема системы изображена на рис. 1. Она включает элементы, которые необходимы для демонстрации возможностей предложенного подхода к моделированию.

СТР служит для термостатирования агрегатов КА. Агрегаты КА в ходе работы выделяют тепловую энергию, которая снимается при помощи теплообменников «Т1» и «Т2» (см. рис. 1) и в конечном итоге рассеивается на холодильнике-радиаторе путем излучения в окружающее пространство. Корпус КА за исключением холодильника-радиатора является абсолютно теплоизолированным.

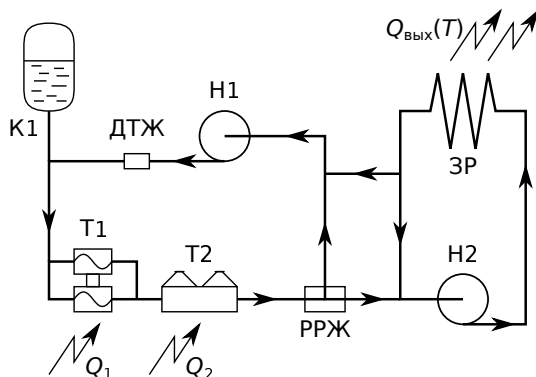


Рис. 1. Схема системы терморегулирования.  $Q_1, Q_2$  – тепловой поток на теплообменники «Т1» и «Т2»;  $Q_{\text{вых}}$  – зависящий от температуры холодильника-радиатора и внешней светотеневой обстановки рассеиваемый тепловой поток

Передача тепла от теплообменников к холодильнику-радиатору производится посредством рабочей жидкости (РЖ), текущей по замкнутому контуру. Ток РЖ обеспечивается работой насосов «Н1» и «Н2». Для компенсации теплового расширения РЖ предусмотрен газо-жидкостный компенсатор «К1». Контур СТР состоит из двух частей – наружной и внутренней, сообщаемых через регулятор расхода жидкости (РРЖ). Внутренняя часть контура обеспечивает съем тепла, в наружной части контура рабочая жидкость охлаждается при течении по змеевику радиатора «ЗР» за счет теплового контакта с холодильником-радиатором. Схема автоматического управления СТР осуществляет открытие и закрытие РРЖ таким образом, чтобы поддерживать температуру РЖ в месте установки датчика температуры «ДТЖ» в заданном интервале.

При закрытом РРЖ потоки РЖ наружной (холодной) и внутренней (горячей) частей контура не смешиваются, при открытом – РЖ циркулирует последовательно по наружной и затем по внутренней части контура, в результате чего обеспечивается максимальное охлаждение РЖ, в промежуточном положении – РЖ из наружной и внутренней частей контура смешиваются соответственно степени открытия РРЖ.

В рассмотренной модели использован набор элементов, позволяющий имитировать все физические взаимодействия (ФВ), существенные для работы СТР космических кораблей «Союз МС» и «Прогресс МС». Перечисленные упрощения были введены для наглядности.

При создании макетного образца модели СТР был использован разработанный авторами ранее метод моделирования. В основе этого метода лежит трехстадийный алгоритм декомпозиции ИС, обеспечивающий разделение всей модели ИС на универсальные составные части.

В соответствии с этим алгоритмом декомпозиции на первой стадии модель разделяется по иерархической структуре ИС. Структура модели, полученная после проведения этой стадии декомпозиции, может быть представлена в виде многоуровневого древовидного графа, корневым узлом которого является вся модель, а концевыми – модели элементов низшего уровня иерархии. Все составные части модели, полученные после первой стадии декомпозиции, были названы компонентами. Каждый компонент принадлежит определенному уровню иерархии, компонент высшего уровня иерархии включает в себя компоненты низшего уровня иерархии.

На второй стадии декомпозиции в компонентах ИС выделяются простые модели (ПМ) – модели однородных по составу и свойствам деталей, являющихся составными частями элементов ИС. Однородность состава и свойств позволяет перейти к приближению сосредоточенных параметров. Выделяются интерфейсные детали, которые обеспечивают взаимодействие элементов ИС, и соответствующие им интерфейсные простые модели.

На третьей стадии декомпозиции рассматривается участие однородных деталей в различных физических взаимодействиях. В результате ПМ разделяются на фрагменты – модели участия однородных деталей в различных ФВ. Модель взаимного влияния явлений различной физической природы внутри однородных деталей реализована в виде специальных связей фрагментов, составляющих ПМ.

Взаимные связи однородных деталей моделируются при помощи объектов-связей (ОС). Каждая ОС соединяет ровно две ПМ по указанному перечню ФВ.

Полученные в результате декомпозиции составные части классифицируемы: в силу консерватизма состава СБС КА, а, следовательно, и существенных для их работы ФВ, оказывается возможным выделить и формализовать:

- классы фрагментов;
- связи между фрагментами различных классов, входящих в состав одной ПМ;
- объекты-связи;
- модели элементов низшего уровня иерархии – клапанов, трубопроводов, баллонов, насосов, переключателей и т.д.

Кратко изложенный выше (подробнее – в работах [7, 9]) алгоритм декомпозиции позволяет представить модель ИС в виде структуры – множества составных частей и связей между ними. Для проведения вычислительных экспериментов же необходимо составить вектор состояния ИС и программные функции, используемые для решения явных и неявных алгебраических и ОДУ первого порядка, характеризующие физические взаимодействия в ИС. Метод моделирования, предложенный авторами, позволяет синтезировать эти данные из разработанного заранее программного описания составных частей модели:

- для классов компонентов и классов фрагментов такое программное описание включает структуру данных – вектор состояния экземпляра класса – и программные функции для расчета связей между полями этой структуры данных;
- для классов компонентов дополнительно указывается внутренняя структура – агрегированные ПМ, ОС и компоненты низшего уровня иерархии;
- для связей между фрагментами внутри ПМ – программные функции для расчета связей между параметрами, относящимися к различным ФВ;
- для ОС – перечни параметров соединяемых простых моделей, подчиненных соотношениям эквивалентности.



Для каждой составной части модели программное представление вектора состояния и расчетных функций агрегировано в один программный объект, расчетные функции связывают компоненты вектора состояния только рассматриваемой составной части. Связи с остальными составными частями модели описываются при помощи ОС, с математической точки зрения выполняющих объединение отдельных уравнений в общую систему – модель всей ИС.

Постановка задачи осуществляется в соответствии со специальным алгоритмом, в качестве входных данных имеющим формальное описание структуры модели, выполненное в соответствии с изложенным алгоритмом декомпозиции. Алгоритм постановки задачи описывает, во-первых, объединение векторов состояния фрагментов и компонентов в общий вектор состояния всей ИС с учетом соотношений эквивалентности, записанных в ОС и, во-вторых, синтез специальной структуры данных, описывающей порядок вызова программных функций, отвечающих за расчет связей между компонентами общего вектора состояния. На базе этого алгоритма авторами была разработана универсальная компьютерная программа, подходящая для различных моделей, построенных с помощью приведенного метода моделирования [8]. Эта программа использовалась для проведения вычислительных экспериментов, описанных в [7, 9] и в настоящей работе ниже.

Для моделирования СТР в рамках работ [7, 9, 10] были разработаны модель теплообмена и модель течения жидкостей и газов по трубопроводам, Были разработаны следующие классы фрагментов:

- для моделирования теплообмена: тепловой аккумулятор «Та», тепловой проводник «Тк»;
- для моделирования течения веществ: гидродинамический узел «Гу», гидродинамический проводник «Гп»;
- описывающий свойства вещества – идеальной жидкости: «Вж»;
- описывающий свойства объема, заполненного веществом: «Оо».

Разработанная модель течения является универсальной для различных веществ и типов течения. Течение конкретного вещества моделируется как связь фрагментов перечисленных выше классов (подробнее см. в [7, 10]).

В модели СТР течение РЖ описывалось как ламинарное течение идеальной жидкости с учетом тепломассопереноса. Параметры течения рассчитывались при помощи программных функций, входящих в состав связей между фрагменты классов, перечисленных выше.

Для моделирования СТР были разработаны классы компонентов – модели элементов ИС: насосов, теплообменников, газожидкостного компенсатора и РРЖ.

– Насос моделировался как отрезок магистрали, между входом и выходом которого создается дополнительная разность давлений такой величины, чтобы расход РЖ через этот отрезок был равен заданному (см. рис. 2).

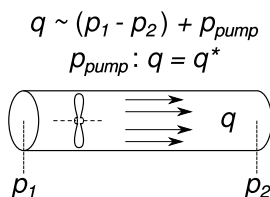


Рис. 2. Модель насоса.  $p_1$ ,  $p_2$  – давления на входе и выходе трубы,  $q$  – расход через трубу,  $p_{\text{pump}}$  – разность давлений, создаваемая насосом,  $q^*$  – расход, создаваемый насосом

– Модель теплообменника состояла из двух ПМ – модели трубы и модели массивного корпуса теплообменника, непосредственно контактирующего с охлаждаемым объектом. Считалось, что поток тепла  $Q_1$  и  $Q_2$  поступает на корпус теплообменника.

– Газожидкостный компенсатор представлялся в виде емкости, заполненной РЖ, имеющей изменяющийся объем. Давление в этой емкости зависит от величины ее объема (см. рис. 3). Конструктивно компенсатор является баллоном постоянного объема, разделенным эластичной мембраной на газовую и жидкостную

части. Жидкостная часть заполнена РЖ, газовая – инертным газом. Газ создает давление  $p_{рпгто}$ , которое можно рассчитать из уравнения Менделеева – Клапейрона.

– РРЖ моделировался как 4 соединенных трубы (см. рис. 4). Величина гидродинамической проводимости труб « $i$ » и « $ii$ » изменялась в зависимости от положения заслонки РРЖ.



Рис. 3. Схема газожидкостного компенсатора

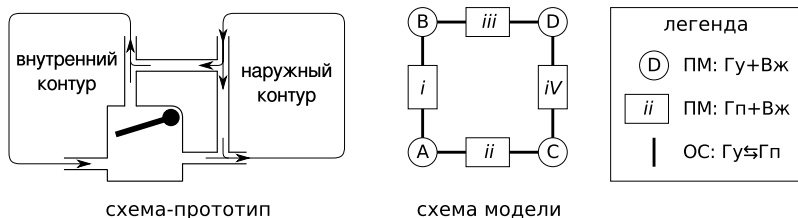


Рис. 4. Модель регулятора расхода жидкости

Детальное описание упомянутых классов фрагментов и классов компонентов дано в работах [7, 10].

### 3. Моделирование нештатной работы СТР

Как было изложено выше, компьютерная модель КА, используемая для информационного обеспечения управления полетом, должна быть настраиваемой, т.е. должна быть обеспечена возможность корректировки, направленной на достижение адекватности модели, с возможно меньшими затратами ресурсов.

Метод моделирования, предложенный авторами, позволяет настраивать модель ИС следующими способами:

1. Изменение значений параметров составных частей модели ИС, например, коэффициентов тепловой или гидродинамической проводимости, величин объемов или пороговых значений срабатывания приборов.

2. Блокировка отдельных значений параметров, отдельных уравнений, отдельных связей или отдельных составных частей модели.

3. Корректировка структуры модели, включая добавление новых ОС, новых компонентов или новых фрагментов в существующие ПМ.

4. Модификация расчетных функций составных частей модели.

Для настройки модели способами, указанными в пп. 1–3, достаточно откорректировать структуру данных, описывающую модель, а модификация компьютерных программ не требуется.

Способ настройки, указанный в п. 4, обеспечивается путем изменения программного кода отдельных частей библиотеки стандартных элементов, причем изменению подлежат исключительно те части, которые соответствуют модифицируемым моделям. Компьютерные программы, обеспечивающие постановку задачи и расчет, являются универсальными относительно различных моделей и при настройке модели ИС не изменяются.

В настоящем разделе демонстрируются возможности по настройке макетного образца модели СТР, описанного в предыдущем разделе, разработанного при помощи предложенного авторами метода моделирования. Рассматривались следующие настройки:

1. Введена утечка<sup>7</sup> РЖ из контура СТР.
  2. Откорректирована нагрузочная характеристика насосов РЖ.
  3. Модифицирована характеристика компенсатора К1.
- Утечка РЖ из контура СТР была реализована путем коррек-

---

<sup>7</sup> Здесь под утечкой понимается истечение РЖ в окружающее пространство через не предусмотренное в конструкции ИС отверстие в стенке трубопровода, например, через трещину.

тировки структуры модели (см. рис. 5). В состав структуры модели были добавлены две составные части:

- ПМ, моделирующая гидродинамический проводник – отверстие из контура СТР в окружающее пространство;
- ОС, связывающий эту ПМ и гидродинамический узел, имитирующий жидкостную полость компенсатора «К1».

На рис. 5 серым цветом изображены составные части модели до модификации, черным – вновь созданные для имитации утечки. Расчетная компьютерная программа устанавливает для фрагмента класса «Гп», входящего в состав ПМ «отверстие», давление на входе равным давлению РЖ в компенсаторе. Давление на выходе этого фрагмента задано равным нулю.

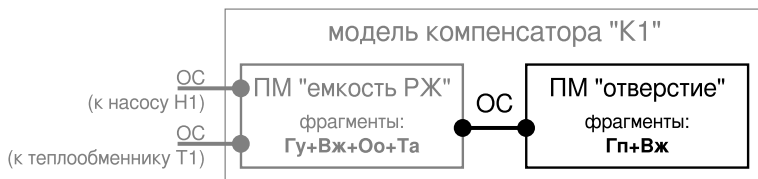


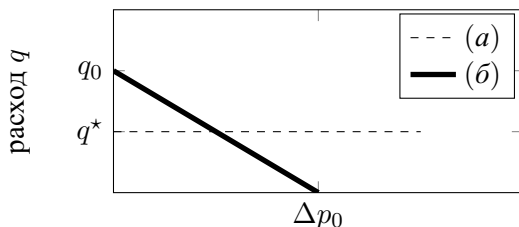
Рис. 5. Модификация структуры модели для имитации утечки РЖ из контура СТР

Модель насосов, разработанная в работе [7], не предусматривала учет нагрузочной характеристики: насос создавал постоянный расход РЖ, равный  $q^*$ . В настоящей работе использовалась линеаризованная нагрузочная характеристика насоса, изображенная на рис. 6: принималось, что создаваемый расход  $q$  линейно зависит от разности давлений РЖ между входом и выходом насоса  $\Delta p$ .

Для аналитического описания нагрузочной характеристики насоса использовалось соотношение

$$(1) \quad q - q_0 \left( 1 - \frac{\Delta p}{\Delta p_0} \right) = 0,$$

где  $q_0$  и  $\Delta p_0$  – заданные константы;  $\Delta p = (p_1 - p_2) + p_{pump}$  (см. рис. 2).



разность давлений между входом и выходом  $\Delta p$

Рис. 6. Варианты нагрузочной характеристики насоса:  
а) до модификации, б) после модификации

Как и в разработанной ранее в статье [7] модели, работа насоса обеспечивалась заданием отличного от нуля значения  $p_{pump}$ . Путем решения системы неявных алгебраических уравнений, в которую входит (1) и уравнения, определяющие течение РЖ по трубопроводам СТР, вычислялась такая величина  $p_{pump}$ , при которой расход РЖ становился равным значению, определенному из выражения (1). Для проведения расчетов с учетом модифицированной нагрузочной характеристики в составе компьютерной библиотеки стандартных элементов была реализована программная функция, вычисляющая значение  $q$  из (1). Вычисленное значение передавалось вместо  $q^*$  на вход программной функции, служащей для вычисления  $p_{pump}$ .

Для моделирования утечки из контура СТР потребовалось провести еще одну доработку модели насосов: эффективность работы насоса уменьшается при падении давления в его входной магистрали ниже определенного порога вследствие возникновения кавитации<sup>8</sup>. В настоящей работе использовалась упрощенная математическая модель кавитации: величина давления насыщенных паров РЖ считалась малой по сравнению с давлением в трубопроводах СТР, величина кинетической энергии РЖ также считалась малой, рассматривалось усредненное по времени действие этого физического явления, позволяющее учесть его в приближе-

<sup>8</sup> Кавитация – образование в РЖ пузырьков насыщенного пара вследствие местного понижения давления и последующее их схлопывание при переходе в область более высокого давления

нии сосредоточенных параметров.

Снижение эффективности насоса моделировалось следующим образом: создаваемое падение давления  $p_{pump}$  уменьшалось по мере приближения давления во входной магистрали  $p_1$  к нулю. Для расчета нагрузочной характеристики насоса с учетом рассматриваемого эффекта вместо (1) использовалось следующее неявное алгебраическое уравнение:

$$(2) \quad q - q_0 \left( 1 - \frac{\Delta p}{\Delta p_0} \right) \cdot \frac{1 + \text{th}(p_1/\delta p_1)}{2} = 0$$

здесь  $\delta p_1$  – заданная константа, характеризующая давление насыщенных паров РЖ.

Рассмотрим далее модификацию модели компенсатора.

Модель компенсатора, использованная в работе [7], не предусматривала возможности имитации негерметичности жидкостного контура СТР: программная функция, вычисляющая зависимость создаваемого компенсатором давления от количества РЖ внутри него, не учитывала возможность опустошения жидкостной полости компенсатора. Формула для расчета давления имела вид

$$(3) \quad p = \frac{p_0 V_0}{V_{к1} - V_{рж}}$$

Здесь  $p$  – текущее давление в компенсаторе;  $p_0$  – начальное давление;  $V_0$  – начальный объем газовой полости;  $V_{к1}$  – суммарный объем жидкостной и газовой полостей;  $V_{рж}$  – текущий объем жидкостной полости. Значение  $V_{рж}$  вычислялось исходя из уравнений течения РЖ в контуре СТР, причем ограничений на это значение не накладывалось. Поскольку давление в компенсаторе при штатной работе СТР изменялось в строго определенных пределах, данное упрощение модели было допустимо.

При моделировании утечки РЖ из контура СТР значение  $V_{рж}$  в какой-то момент становилось отрицательным, что невозможно и свидетельствует о некорректности модели для данного случая. В настоящей работе модель компенсатора была доработана для обеспечения возможности моделирования утечек: при расчете создаваемого компенсатором давления учитывалось общее количе-

ство РЖ в компенсаторе. Использовалось выражение

$$(4) \quad p = \frac{p_0 V_0}{V_{к1} - V_{рж}} \cdot \frac{1 + \text{th}(V_{рж}/\delta V_{рж})}{2}$$

Здесь  $\delta V_{рж}$  – заданная константа. Правый множитель уменьшает давление  $p$  по мере убывания количества РЖ в компенсаторе. Для модели компенсатора была разработана программная функция, явно вычисляющая  $p$  из уравнения (4). Эта функция использовалась при проведении расчетов вместо предыдущей версии, явно вычисляющей  $p$  из (3).

#### 4. Результаты вычислительных экспериментов

При помощи модифицированной компьютерной модели в первую очередь производился расчет штатных режимов работы СТР. Рассматривались процессы установления теплового режима КА после отделения от ракеты-носителя и термостатирование агрегатов СБС при изменении освещенности холодильника-радиатора Солнцем вследствие движения КА по орбите. Графики, характеризующие эти процессы, приведены, соответственно, на рис. 7–8.

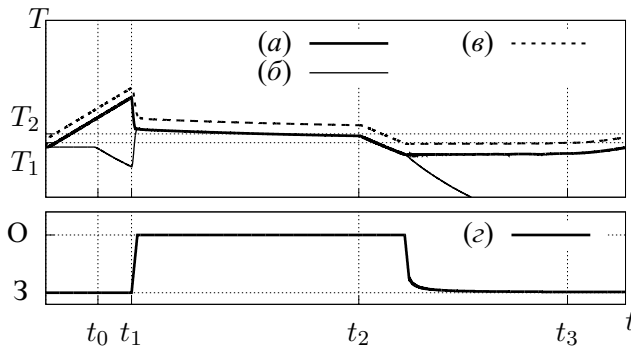


Рис. 7. Работа СТР после выведения на орбиту:  
 а), б) температура РЖ на выходе из РРЖ во внутреннюю и наружную часть контура соответственно; в) температура теплообменников  $T_1$  и  $T_2$ ; г) положение заслонки РРЖ



На рис. 7 обозначено:  $t_0$  – момент времени сброса головного обтекателя, после которого радиатор начинает излучать тепловую энергию в окружающее пространство;  $t_1$  – момент отделения от ракеты-носителя и включения автоматики СТР;  $t \in [t_1, t_2)$  – полет по отрезку траектории, освещенному Солнцем;  $t \in [t_2, t_3)$  – полет в тени Земли;  $[T_1, T_2]$  – номинальный диапазон температур теплообменников Т1 и Т2; «З», «О» – состояния полностью закрытого и открытого РРЖ соответственно.

Процесс установления теплового режима КА после отделения от ракеты-носителя характеризуется перегревом РЖ и термостабируемых агрегатов. Перегрев возникает вследствие того, что РРЖ в процессе выведения КА на орбиту закрыт, а автоматика СТР отключена. После отделения от ракеты-носителя автоматика СТР включается и переводит РРЖ в положение, соответствующее температурному режиму КА.

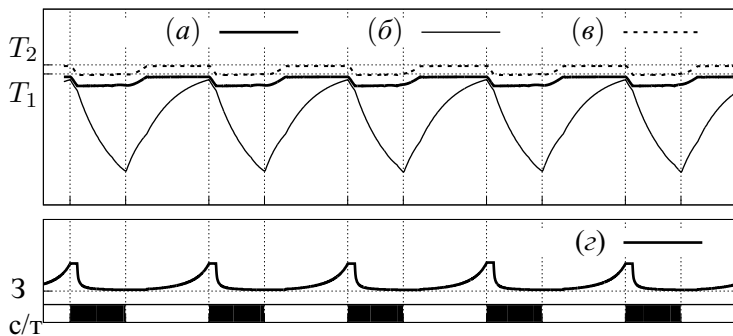


Рис. 8. Работа СТР при орбитальном полете с учетом захода в тень Земли: а), б) температура РЖ во внутренней и наружной части контура соответственно; в) температура теплообменников Т1 и Т2; з) изменение положения РРЖ

На рис. 8  $[T_1, T_2]$  – номинальный диапазон температур теплообменников Т1 и Т2; «З» – состояние полностью закрытого РРЖ; «с/т» – диаграмма, показывающая полет по освещенному участку траектории (белым) и в тени Земли (черным).

Процессы, приведенные на рис. 8, характеризуются периодичностью нагрева и охлаждения, обусловленной движением КА по орбите Земли: часть орбиты проходит в тени Земли, на другой части КА освещен Солнцем.

По графикам, приведенным на рис. 7–8, можно заметить, что результаты расчетов модифицированной модели СТР совпадают с результатами расчетов, приведенными в статье [7], также соответствующих штатной работе ИС, но произведенными без учета модификаций, изложенных здесь. Это свидетельствует, что модели насосов и компенсатора, использованные в статье [7], являются корректными при имитации штатной работы СТР.

Рассмотрим результаты моделирования нештатной работы.

Наибольший интерес для исследований представляет вариант утечки РЖ небольшой величины, при котором характерное время падения давления в контуре СТР много больше периода обращения РЖ по контуру и характерного времени нагрева термостатируемого оборудования. На рис. 9 приведены результаты моделирования такого варианта нештатной ситуации.

На рис. 9 обозначено:  $[T_1, T_2]$  – номинальный диапазон температур теплообменников  $T_1$  и  $T_2$ ; «З», «О» – состояния полностью закрытого и открытого РРЖ соответственно;  $t_k$  – момент времени появления кавитации; «с/т» – диаграмма, показывающая полет по освещенному участку траектории (белым) и в тени Земли (черным).

Кавитация, возникающая при уменьшении давления в контуре, снижает эффективность теплообмена, что проявляется:

– в переохлаждении холодильника-радиатора (см. график б) на рис. 9);

– в отсутствии возможности удержания теплового режима аппаратуры даже при крайних положениях РРЖ (см. графики в) и е) на рис. 9).

По расхождению графиков з) и д) на рис. 9 видно, что после возникновения кавитации время нагрева и охлаждения холодильника-радиатора снижается, что свидетельствует о том, что в рассматриваемой ситуации охлаждается меньшее количе-

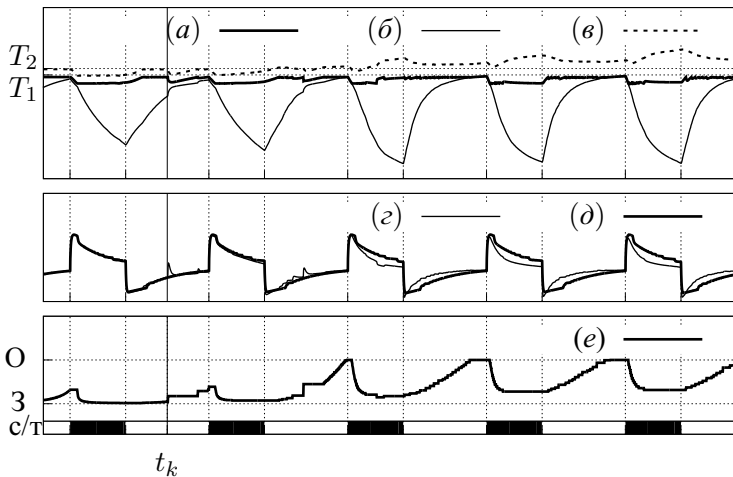


Рис. 9. Работа СТР при орбитальном полете с учетом захода в тень Земли при наличии негерметичности компенсатора К1.  
 а), б) температура РЖ во внутренней и внешней части контура соответственно; в) температура теплообменников  $T1$  и  $T2$ ; з), д) поток теплоты, передаваемый холодильнику-радиатору от РЖ, соответственно, до и после возникновения кавитации; е) – изменение положения РРЖ

ство РЖ, чем в случае штатной работы. В свою очередь это означает, что время протекания РЖ по змеевику холодильника-радиатора превышает время охлаждения содержащейся внутри змеевика РЖ.

На рис. 10 приведена зависимость давления в контуре СТР от средней по контуру температуры РЖ. При штатной работе давление однозначно определяется средней температурой РЖ в контуре (линия (2)). Падение давления в ходе изложенного в настоящей работе вычислительного эксперимента (линия (1)) относительно варианта штатной работы свидетельствует о негерметичности контура СТР. Из графика видно, что наличие утечки приводит к отклонению этой характеристики от номинальной расчетной кривой, что соответствует наблюдениям, полученным в ходе реальных полетов космических аппаратов.

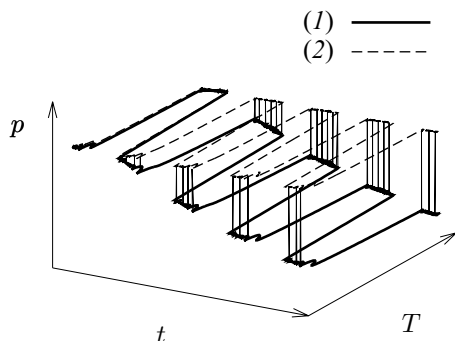


Рис. 10. Изменение давления в контуре СТР от времени и температуры

## 5. Заключение

Разработка компьютерных моделей сложных технических систем, состоящих из множества элементов и имеющих разветвленную структуру связей, при помощи распространенных систем компьютерного моделирования является ресурсоемкой задачей, а техническое сопровождение таких моделей, в частности внесение изменений для достижения адекватности, по ресурсоемкости зачастую эквивалентно повторной разработке модели.

Космические аппараты как класс технических систем безусловно входят в группу лидеров по степени сложности. Дополнительной их особенностью является существенность нелинейных физических явлений. Возможность описания таких явлений современными системами компьютерного моделирования реализована в недостаточной степени.

Авторами статьи ранее был предложен оригинальный метод моделирования, лишенный недостатков, присущих существующим подходам, используемым в современных системах компьютерного моделирования, в частности позволяющий имитировать нелинейные физические явления. На базе этого метода была раз-

работана модель системы терморегулирования космического аппарата и произведены расчеты различных сценариев ее работы.

В настоящей статье при помощи этой модели имитировалась нештатная ситуация – утечка рабочей жидкости из гидравлического контура исследуемой системы. Была произведена модификация моделей некоторых агрегатов для учета особенностей их поведения в рассматриваемом режиме: для учета физических явлений, возникающих при низком давлении в контуре бортовой системы были доработаны модели компенсатора и насоса рабочей жидкости.

При помощи модифицированной модели были произведены расчеты различных сценариев работы исследуемой системы, произведено сравнение результатов моделирования, полученных с учетом нештатной работы и без него.

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что во-первых, результаты моделирования с достаточной точностью совпадают данными, полученными с реальных космических аппаратов, и во-вторых, используемый метод моделирования позволяет с низкими затратами ресурсов моделировать рассмотренную нештатную ситуацию.

Достоинства разработанного авторами метода моделирования, изложенные в том числе в настоящей статье, позволяют сделать вывод о предпочтительном его использовании для моделирования служебных бортовых систем космических аппаратов.

### Литература

1. БЕЛОВА В.В. *Оперативный контроль телеметрических параметров системы теплового режима транспортных грузовых и пилотируемых кораблей на этапе комплексных электрических испытаний* // Вестник ФГУП «НПО им. С.А. Лавочкина». – 2012. – №1. – С. 50–58.
2. БОДРОВ В.В, ПЛОТНИКОВА Н.В., УСТЮГОВ М.Н., ФЕЛЬК З.А. *Автоматизированное построение математических моделей систем, заданных эквивалентными схемами* // Вестник Южно-Уральского государственного университета. – 2006. – №14 (69). – С. 53–58.
3. ЖУК Д.М., МАНИЧЕВ В.Б., РОДИОНОВ С.В. *Моделирование динамических систем с помощью программы RA10* // Инженерный вестник. – 2014. – №12. – С. 29.
4. ЗАРУБИН В.С. *Математическое моделирование в технике* : Учеб. для ВУЗов. / Под ред. В.С. Зарубина. – М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 496 с.
5. КРАВЕЦ В.Г. *Автоматизированные системы управления космическими полетами*. – М. : Машиностроение, 1995. – 256 с.
6. НОРЕНКОВ И.П. *Основы автоматизированного проектирования*. – М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – 432 с.
7. ПАВЛОВ Д.В., ПЕТРОВ Д.С. *Использование метода трехстадийной декомпозиции для моделирования системы терморегулирования космического аппарата* // Вестник Московского авиационного института – 2015. – Т. 22, №2. – С. 42–54.
8. ПАВЛОВ Д.В., ПЕТРОВ Д.С. *Оптимизация алгоритма расчета моделей, разработанных с использованием метода, основанного на трехстадийной декомпозиции* // Инженерный журнал: наука и инновации – 2016. – №8. – С. 1–15.

9. ПЕТРОВ Д.С. *Имитационное моделирование двигательной установки космического аппарата при помощи трехстадийного метода декомпозиции* // Вестник Московского авиационного института – 2014. – Т. 21, №1. – С. 43–57.
10. ПЕТРОВ Д.С. *Моделирование течения жидкостей и газов по трубопроводам при помощи трехстадийного метода декомпозиции* // Управление в морских и аэрокосмических системах: Материалы конференции / ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». – СПб., 2014. – С. 583–590.
11. МАТЮШИН М.М., МИШУРОВА Н.В., СКОБЕЛЕВ П.О., ЛАРЮХИН В.Б. *Поддержка принятия решений при наработке аварийных ситуаций на борту международной космической станции с использованием интеллектуальных технологий* // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина – 2014. – № 4(25). – С. 89–96.
12. СОЛОВЬЁВ В.А., ЛЫСЕНКО Л.Н., ЛЮБИНСКИЙ В.Е. *Управление космическими полётами*. – М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – 902 с.
13. GAD O. *Bond graph modeling of a two-stage pressure relief valve* // Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control – 2013. – Vol. 135, No. 4.
14. DE LA CALLE A., CELLIER F.E., YEBRA L.J., DORMIDO S. *Improvements in bondlib, the modelica bond graph library* // 2013 8th EUROSIM Congress on Modelling and Simulation. – September, 2013. – P. 282–287.
15. KARNOPP D., MARGOLIS D., ROSENBERG R. *System Dynamics: Modeling, Simulation, and Control of Mechatronic Systems*. – Wiley. com, 2012. – ISBN: 978-0-470-88908-4.
16. YANG L., HALS J., MOAN T. *Comparative study of bond graph models for hydraulic transmission lines with transient flow dynamics*. // Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control – 2012. – Vol. 134, No. 3.

## THE APPLICATION OF THE NEW METHOD FOR MATHEMATICAL MODELLING OF ABNORMAL OPERATION OF THE ONBOARD SYSTEMS OF THE SPACECRAFT

**Dmitry Pavlov**, S.P. Korolev Rocket and Space Corporation  
«Energia», Korolev, Moscow Region, Cand.Sc.  
(dmitripavlov@inbox.ru).

**Dmitry Petrov**, S.P. Korolev Rocket and Space Corporation  
«Energia», Korolev, Moscow Region, mphys.  
(dmitry.s.petrov@gmail.com).

*Abstract: The article is devoted to software design of lumped-element simulation models of the spacecraft subsystems. Considered type of engineering systems could be complicated due to 1) non-linear relations impact, 2) bi-directional bonds and 3) distributed structure, including huge element count and complex bonds network. In the previous publications we suggested a new approach for simulation models design to address the items above. Based on the new approach we implemented software package to create simulation models of engineering systems. Unlike known analogues, the package equipped with non-linear solver is capable to model non-linear physics. With this package a model could be constructed just via combining of available physical domains, no additional source code required. Spacecraft thermal control subsystem was modelled with the package. In this article we modified previously developed model of thermal control subsystem to simulate several failures, including the leakage of the hydraulic circuit. This requires to update the models of elements of the subsystem to become adequate at a low liquid pressure. We model the subsystem evolution taking into account considered failures under different external conditions and got expected results.*

Keywords: method of simulation, three-stage decomposition, computer simulation, spacecraft, thermal control system, failure.

УДК 004.942:629.78

ББК 32.973.3:39.66

DOI: 10.25728/ubs.2019.82.5

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким.*

*Поступила в редакцию 05.04.2018.*

*Дата опубликования 30.11.2019.*