

КОНЕЧНО-ЧАСТОТНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФАЗОВЫХ СДВИГОВ¹

Ливаткин П. А.²
(ООО "Триа Групп", Москва)

Предлагается метод конечно-частотной идентификации с использованием фазовых сдвигов для устойчивых объектов с запаздыванием в присутствии неизвестного внешнего возмущения. Этот метод использует испытательные сигналы, представляющие собой гармоники. Возможна как последовательная подача каждой из них, так и любые их суммы. Подача каждой гармоники позволяет идентифицировать два параметра объекта. Под параметрами понимаются коэффициенты передаточной функции и величина запаздывания. Для улучшения результатов можно использовать дополнительные гармоники. Предлагаемый метод идентификации основан на двух идеях. Во-первых, влияние запаздывания при прохождении через объект на каждую из гармоник можно компенсировать при помощи сдвига фазы. Существует аналитически выражаемая взаимосвязь между частотой, запаздыванием и сдвигом по фазе. Во-вторых, передаточная функция объекта с запаздыванием будет одинакова на разных наборах гармоник со сдвинутыми фазами, компенсирующими влияние запаздывания. Для однозначного определения запаздывания предполагается, что известна верхняя оценка запаздывания. Рассматривается вопрос выбора частот идентификации с указанием оптимальных с теоретической точки зрения (позволяющих определить запаздывание не зная его оценки сверху). На основе этого подхода предлагаются три алгоритма идентификации, отличающиеся вычислительной сложностью и чувствительностью к внешним возмущениям.

Ключевые слова: теория автоматического управления, идентификация динамических объектов, идентификация запаздывания, конечно-частотная идентификация запаздывания.

1. Введение

На сегодняшний день в теории автоматического управления разработаны две группы методов идентификации объектов, опи-

¹ Автор признателен д-ру физ.-мат. наук А.Г. Александрову за постановку задачи, а также коллективу лаборатории №7 Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, за активное обсуждение работы и полезные комментарии.

² Павел Анатольевич Ливаткин (pal2010@yandex.ru).

сываемых линейными дифференциальными уравнениями. Они различаются в зависимости от предположений о помехах измерения и внешних возмущениях, действующих на объект. Методы из первой группы рассматривают объекты, подверженные стохастическим воздействиям (например белый шум). Для их идентификации применяют методы стохастической аппроксимации и подходы, являющиеся различными модификациями метода наименьших квадратов [7]. Вторая группа методов рассматривает объекты с неизвестными ограниченными внешними возмущениями (при этом статистические характеристики полагают неизвестными). В этих случаях прибегают к конечно-частотной идентификации [9, 10] и рандомизированным алгоритмам [6].

Процесс идентификации может быть активным или пассивным. При активном подходе ко входу объекта прибавляется сигнал, называемый испытательным. В этом заключается ключевое отличие от пассивной идентификации, при которой сигнал на входе может иметь произвольную форму, в том числе такую, что процесс идентификации не будет давать необходимую точность или вообще не будет сходиться.

Метод конечно-частотной идентификации разработан для активной идентификации. Испытательный сигнал представляет собой гармонику или их сумму. Выбор амплитуд и частот влияет на точность идентификации. В работе [11] анализируется их влияние и предлагаются алгоритмы настройки. Испытательный сигнал, согласно этим алгоритмам, выбирается так, чтобы оказывать незначительное влияние на выход объекта по сравнению с внешним возмущением и помехами.

Преимущество метода конечно-частотной идентификации, по сравнению с существующими методами, в том, что он сходится несмотря на неизвестный тип и интенсивность внешнего возмущения, если оно не содержит составляющих с частотами испытательного сигнала [2]. В случае если внешнее возмущение или помехи измерения все же содержат компоненты с частотами испытательного сигнала, может быть применен алгоритм с последовательными парами [3], являющийся двумя одинаковыми по

длительности процессами идентификации на одной и той же положительной и отрицательной частоте.

Под рассмотрением попадают и задачи идентификации объектов с запаздыванием. Обзор методов идентификации таких объектов, в основном при случайных внешних возмущениях и помехах, приводится в [13], где также даются рекомендации по выбору подходящего метода идентификации. Адаптивный наблюдатель, способный оценивать коэффициенты объекта и величину запаздывания, предлагается в [14, 16]. В работе [8] предлагается двухстадийная идентификация.

В работе [1], на которой основана данная статья, метод конечно-частотной идентификации развивается для объектов с запаздыванием. В отличие от [12], в ней предложен подход для однозначного определения запаздывания, на основе которого построены соответствующие алгоритмы идентификации. В составе статьи приводится пример идентификации объекта с запаздыванием предложенным алгоритмом. Настройка частот и амплитуд не рассматривается.

В данной статье анализируется алгоритм конечно-частотной идентификации запаздывания из работы [1]. Далее будет показано, что он имеет ограниченные возможности для практического применения из-за особенностей используемого испытательного сигнала. Предлагается оригинальный алгоритм идентификации запаздывания на основе конечно-частотного подхода. Он основан на эквивалентности явления сдвига по фазе при прохождении гармоники через объект и её смещении в результате запаздывания. Это приводит к возможности модифицировать фильтры Фурье, введя отрицательный сдвиг по фазе в функцию свёртки. Результат расчета фильтров Фурье используется для восстановления коэффициентов передаточной функции объекта, которые сравниваются с результатом идентификации на другом наборе частот. Совпадение идентифицированных моделей говорит о том, что искусственно введённый сдвиг по фазе скомпенсировал запаздывание объекта, а значит равен ему. Рассматривается три разных способа оценки близости идентифицированных моделей.

Рассказано о недостатках этих способов. Даны рекомендации по выбору частот испытательного сигнала. В конце статьи приведен пример идентификации объекта с запаздыванием из [1], к которому применены разработанные алгоритмы. Произведено сравнение результатов идентификации между собой, а также сравнение с результатами, полученными в [1].

2. Постановка задачи

Рассмотрим полностью управляемый, асимптотически устойчивый объект с запаздыванием, описываемым уравнением

$$(1) \quad d_n y^{(n)}(t) + \dots + d_1 \dot{y}(t) + y(t) = k_m u^{(m)}(t - \tau) + \dots + k_0 u(t - \tau) + f(t),$$

где $y(t)$ – выход объекта; $u(t)$ – вход (управление); τ – запаздывание, ограниченное сверху известным значением τ^* ($\tau^* > \tau > 0$); кусочно-непрерывная функция $f(t)$ – неизвестное ограниченное возмущение:

$$(2) \quad |f(t)| \leq f^*,$$

где f^* – некоторое неизвестное положительное число.

Необходимо решить задачу определения коэффициентов $k_j, j = \overline{0, m}; d_i, i = \overline{1, n}$, и запаздывания τ объекта (1).

3. Анализ исходного алгоритма

В [1] решается задача определения коэффициентов $k_j, j = \overline{0, m}; d_i, i = \overline{1, n}$, и запаздывания τ объекта (1).

Передаточная функция объекта (1) имеет вид

$$(3) \quad W_z(s) = W(s)e^{-\tau s},$$

где $W(s) = k(s)/d(s), k(s) = \sum_{i=0}^m k_i s^{(i)}, d(s) = 1 + \sum_{i=1}^n d_i s^{(i)}$,

s – символ преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях.

Для произвольной частоты w_i в [1] вводятся следующие обозначения частотных параметров:

$$(4) \quad \begin{aligned} \varphi_i &= \operatorname{Re}(W(jw_i)), & \psi_i &= \operatorname{Im}(W(jw_i)), \\ \alpha_i &= \operatorname{Re}(W_z(jw_i)), & \beta_i &= \operatorname{Im}(W_z(jw_i)), \end{aligned}$$

где j – мнимая единица.

Для нахождения φ_i и ψ_i потребуется вычислить коэффициенты $W(s)$. Для этого в [1] применяется следующий подход. По определению:

$$(5) \quad \frac{k(jw_i)}{d(jw_i)} e^{-\tau jw_i} = \alpha_i + j\beta_i,$$

где α_i и β_i вычисляются при помощи фильтров Фурье вида)

$$(6) \quad \alpha_i = \frac{2}{\rho_i t^i} \int_{t_F^i}^{t_F^i + t^i} y(t) \sin(w_i t) dt, \beta_i = \frac{2}{\rho_i t^i} \int_{t_F^i}^{t_F^i + t^i} y(t) \cos(w_i t) dt,$$

где t^i – длительность фильтрации, кратная целому числу периодов $2\pi/w_i$; t_F^i – момент начала фильтрации; $y(t)$ – выход объекта, к входному сигналу $u(t)$ которого прибавили испытательный сигнал вида $u_{ei}(t)$ согласно (7) (или сумму нескольких таких сигналов):

$$(7) \quad u_{ei}(t) = \rho_i \sin(w_i t).$$

Для объектов без запаздывания ($W(jw_i) = W_z(jw_i)$), так как $\tau = 0$. Значит и $\varphi_i = \alpha_i, \psi_i = \beta_i$ необходимо $l = \lceil (n + m + 1)/2 \rceil$ уравнений конечно-частотной идентификации [1], позволяющих составить систему (8) и вычислить коэффициенты полиномов $k(s)$ и $d(s)$:

$$(8) \quad \begin{cases} k(jw_1) = (\varphi_1 + j\psi_1)d(jw_1), \\ k(jw_2) = (\varphi_2 + j\psi_2)d(jw_2), \\ \dots, \\ k(jw_l) = (\varphi_l + j\psi_l)d(jw_l). \end{cases}$$

Для объектов с запаздыванием ($\tau \neq 0$) система (8) примет вид

$$(9) \quad \begin{cases} k(jw_1) = (\varphi_1 + j\psi_1)e^{-\tau jw_1} d(jw_1), \\ k(jw_2) = (\varphi_2 + j\psi_2)e^{-\tau jw_2} d(jw_2), \\ \dots, \\ k(jw_l) = (\varphi_l + j\psi_l)e^{-\tau jw_l} d(jw_l). \end{cases}$$

К сожалению, неизвестен способ аналитически решить (9). В работе [1] для восстановления коэффициентов $W(jw)$ левая и

правая части (9) домножаются на соответствующие комплексно-сопряженные выражения, вследствие чего пропадает сомножитель с запаздыванием, а уравнения принимают вид (10). Используя $n + m + 1$ частот, можно записать систему, решение которой даст коэффициенты полиномов $k(s)$ и $d(s)$ из алгебраических уравнений вида

$$(10) \quad \frac{k(jw_i)k(-jw_i)}{d(jw_i)d(-jw_i)} e^{-\tau jw_i} e^{\tau jw_i} = \frac{k(jw_i)k(-jw_i)}{d(jw_i)d(-jw_i)} = \alpha_i^2 + \beta_i^2.$$

Следующим этапом производится идентификация запаздывания при помощи частотных параметров:

$$(11) \quad \begin{aligned} \varphi_\lambda &= \operatorname{Re}(W(\lambda + jw_\lambda)), \psi_\lambda = \operatorname{Im}(W(\lambda + jw_\lambda)), \\ \alpha_\lambda &= \operatorname{Re}(W_z(\lambda + jw_\lambda)), \beta_\lambda = \operatorname{Im}(W_z(\lambda + jw_\lambda)), \end{aligned}$$

где $\varphi_\lambda, \psi_\lambda$ вычисляются с помощью идентифицированной по формулам (6), (7) и (10) передаточной функции $W(s)$; $\alpha_\lambda, \beta_\lambda$ ищутся экспериментально при помощи испытательного сигнала вида $u_{e\lambda}(t)$ согласно (12) и (13):

$$(12) \quad u_{e\lambda}(t) = \rho_\lambda e^{\lambda t} \sin(\omega_\lambda t),$$

где λ – настраиваемый параметр, не равный нулю. При $\lambda < 0$ оптимальная длительность фильтрации ограничена, поскольку амплитуда испытательного сигнала падает до слишком малых величин и внешнее возмущение начинает преобладать в фильтрах (13), что будет пояснено ниже. При $\lambda > 0$ длительность подачи идентифицирующего сигнала физически ограничена допустимой амплитудой входного сигнала, что также не позволяет получить асимптотическую сходимость фильтрации при действии внешнего возмущения.

В дальнейшем используются фильтры специального вида, являющиеся модификацией (6) для испытательного сигнала (12):

$$(13) \quad \begin{aligned} \alpha_\lambda &= \frac{2}{\rho_\lambda t^\lambda} \int_{t_F^\lambda}^{t_F^\lambda + t^\lambda} e^{-\lambda t} y(t) \sin(\omega_\lambda t) dt, \\ \beta_\lambda &= \frac{2}{\rho_\lambda t^\lambda} \int_{t_F^\lambda}^{t_F^\lambda + t^\lambda} e^{-\lambda t} y(t) \cos(\omega_\lambda t) dt, \end{aligned}$$

где $y(t)$ – выход объекта, x входному сигналу $u(t)$ которого прибавили испытательный сигнал вида $u_{e\lambda}(t)$ согласно (12) (или сумму нескольких таких сигналов); t^λ – длительность фильтрации

(целое число периодов $\sin(w_\lambda t)$); t_F^λ – момент начала фильтрации.

Тогда верно следующее соотношение:

$$(14) \quad \frac{k(\lambda + jw_\lambda)}{d(\lambda + jw_\lambda)} e^{-\tau(\lambda + jw_\lambda)} = \\ = (\varphi_\lambda + j\psi_\lambda) e^{-\tau\lambda} (\cos(w_\lambda\tau) - j \sin(w_\lambda\tau)) = \alpha_\lambda + j\beta_\lambda.$$

Из последнего равенства получим (14) получим τ :

$$(15) \quad \tau = \frac{1}{2\lambda} \ln \left(\frac{\varphi_\lambda^2 + \psi_\lambda^2}{\alpha_\lambda^2 + \beta_\lambda^2} \right).$$

Достоинство такого подхода – возможность идентификации объекта во время работы, не нарушая его обычного функционирования, благодаря выбору малых амплитуд испытательных сигналов.

Недостатки подхода:

1) необходимость идентификации объекта по полиномам удвоенных степеней с помощью нахождения их корней, что для высоких порядков является вычислительно трудной задачей и иногда может приводить к большим погрешностям;

2) подход можно использовать только для минимально-фазовых объектов;

3) отсутствие асимптотической сходимости процесса фильтрации (13) при наличии внешних возмущений.

Последний пункт вызван особенностью фильтрации при наличии внешнего возмущения. Рассмотрим фильтры (13) в условиях действия внешнего возмущения:

$$(16) \quad \alpha_{f\lambda} = \frac{2}{\rho_\lambda t^\lambda} \int_{t_F^\lambda}^{t_F^\lambda + t^\lambda} e^{-\lambda t} y_f(t) \sin(w_\lambda t) dt, \\ \beta_{f\lambda} = \frac{2}{\rho_\lambda t^\lambda} \int_{t_F^\lambda}^{t_F^\lambda + t^\lambda} e^{-\lambda t} y_f(t) \cos(w_\lambda t) dt,$$

где $y_f(t)$ – составляющая выхода объекта, порожденная внешним возмущением.

При $\lambda < 0$ результат интегрирования растет быстрее чем $\frac{2}{\rho_\lambda t^\lambda}$, что приводит к всё более нарастающей ошибке. Данный

недостаток проиллюстрирован (см. рис. 1). На рисунке изображено изменение первого интеграла (16) при отсутствии испытательного сигнала при действии внешнего полигармонического возмущения (границы интегрирования $t_F^\lambda = 0, t^\lambda = 600$). Явно видно, что ошибка нарастает. Минимум ошибки отмечен стрелкой.

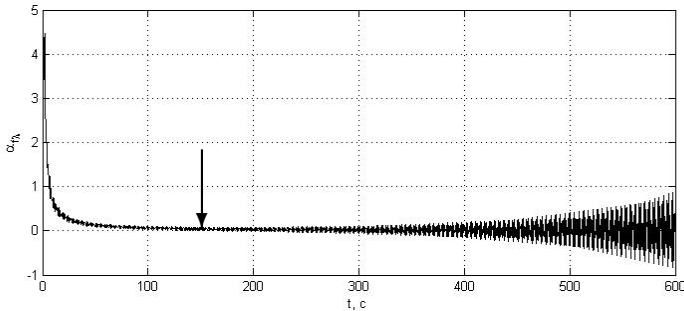


Рис. 1. График изменения фильтра Фурье $\alpha_{F\lambda}$ согласно формуле (16)

Далее предлагается алгоритм идентификации запаздывания, также основанный на конечно-частотном подходе, который позволяют преодолеть указанный недостаток.

4. Конечно-частотная идентификация объекта с запаздыванием с использованием фазовых сдвигов

4.1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Вернёмся к уравнениям (6). Запись в них измеряемого сигнала как $y(t)$ осложняет анализ запаздывания. Поэтому представим его как (17) для объекта без запаздывания и как (18) для объекта с запаздыванием в τ :

$$(17) \quad y(t) = A(jw_i) \sin(w_i t + \delta(jw_i)),$$

$$(18) \quad y(t) = A(jw_i) \sin(w_i t - w_i \tau + \delta(jw_i)),$$

где $A(jw_i) = \rho_i \cdot |W(jw_i)|$ – изменение амплитуды ρ_i входного сигнала $u(t)$ на частоте w_i объектом $W(s)$; $\delta(jw_i) = \arg[W(jw_i)]$ – изменение объектом $W(s)$ фазы входного сигнала $u(t)$ на частоте w_i .

Хотелось бы ввести в уравнение (18) параметр θ так, чтобы выполнялись следующие требования:

1) компенсировался вводимый запаздыванием член $w_i\tau$, приводя уравнение (18) к виду (17), для которого уже разработана теория конечно-частотной идентификации;

2) параметр имел математическую связь с запаздыванием, позволяя по θ вычислить τ ;

3) единственное значение параметра θ обеспечивало компенсацию $w_i\tau$.

С учётом требований уравнения (6) дополняются (18) и искусственно введённым сдвигом по фазе $w_i\theta$:

$$(19) \quad \alpha_{i,\theta} = \frac{2}{\rho_i t^i} \int_{t_F^i}^{t_F^i + t^i} A(jw_i) \sin(w_i t - w_i\tau + w_i\theta + \delta(jw_i)) \sin(w_i t) dt,$$

$$\beta_{i,\theta} = \frac{2}{\rho_i t^i} \int_{t_F^i}^{t_F^i + t^i} A(jw_i) \sin(w_i t - w_i\tau + w_i\theta + \delta(jw_i)) \cos(w_i t) dt.$$

Уравнения (19) можно получить на практике несколькими путями. Например, вводя $w_i\theta$ в испытательный сигнал (7), вычисляя $\alpha_{i,\theta}$ и $\beta_{i,\theta}$, сдвигая θ до тех пор пока запаздывание не будет скомпенсировано:

$$(20) \quad u_{ei}(t) = \rho_i \sin(w_i t + w_i\theta),$$

$$y(t) = A(jw_i) \sin(w_i t - w_i\tau + w_i\theta + \delta(jw_i)).$$

Уравнения (19) и (20) хорошо показывают, на чём основан предлагаемый метод идентификации объекта с запаздыванием, однако при использовании на практике такой подход будет занимать много времени, либо памяти, либо вычислительных ресурсов. Поэтому в тексте работы будут встречаться отсылки к (19), поясняющие алгоритм, хотя применимы на практике эквивалентные им уравнения (34), нуждающиеся в единственном экспериментальном вычислении параметров α_i и β_i .

При $\theta = \tau$ результат вычисления фильтров Фурье (19) становится эквивалентен получению фильтров Фурье от объекта без

запаздывания $W(s)$ (согласно (4)) на той же частоте:

$$(21) \quad \begin{aligned} \varphi_i &= \frac{2}{\rho_i t^i} \int_{t_F^i}^{t_F^i + t^i} A(jw_i) \sin(w_i t + \delta(jw_i)) \sin(w_i t) dt, \\ \psi_i &= \frac{2}{\rho_i t^i} \int_{t_F^i}^{t_F^i + t^i} A(jw_i) \sin(w_i t + \delta(jw_i)) \cos(w_i t) dt. \end{aligned}$$

Из уравнения (19) видно, что при изменении введённого фазового сдвига θ величины $(\alpha_{i,\theta}, \beta_{i,\theta})$ будут повторяться через период $P_i = \frac{2\pi}{w_i}$. Следовательно, не только $\alpha_{i,\tau} = \varphi_i$ и $\beta_{i,\tau} = \psi_i$, но и

$$(22) \quad \begin{aligned} \alpha_{i,\theta} &= \varphi_i, \theta = \tau + P_i n, n \in N, \\ \beta_{i,\theta} &= \psi_i, \theta = \tau + P_i n, n \in N. \end{aligned}$$

Частотные параметры $(\alpha_{i,\theta}, \beta_{i,\theta})$ используются для записи системы уравнений конечно-частотной идентификации. Решение системы (23), аналогичной (8), из $l = \lceil (n + m + 1)/2 \rceil$ линейных уравнений относительно коэффициентов полиномов $k(s)$ и $d(s)$ соответствует *фиктивной* передаточной функции $W_\theta(s)$, для которой, очевидно, выполняется соотношение $\alpha_{i,\theta} + j\beta_{i,\theta} = W_\theta(jw_i)$:

$$(23) \quad \begin{cases} k(jw_1) = (\alpha_{1,\theta} + j\beta_{1,\theta})d(jw_1), \\ k(jw_2) = (\alpha_{2,\theta} + j\beta_{2,\theta})d(jw_2), \\ \dots, \\ k(jw_l) = (\alpha_{l,\theta} + j\beta_{l,\theta})d(jw_l). \end{cases}$$

Каждое из уравнений данной системы (23) будет обладать свойством (22), но при этом иметь свой уникальный период P_i .

Введём понятие наименьшего общего кратного (*lcm*) для рациональных чисел a, b, c, \dots : $lcm(a, b, c, \dots)$ – это наименьшее рациональное число, которое при делении на любой из аргументов даёт целое число. Наименьшее общее кратное с иррациональным числом даёт ∞ .

Тогда решение системы (23), являющееся коэффициентами передаточной функции $W_\theta(s)$, будет совпадать с решением (8) при

$$(24) \quad \theta = \tau + P(W_\theta),$$

где $P(W_\theta)$ – период, с которым повторяется величина *всех* коэффициентов $(\alpha_{i,\theta}, \beta_{i,\theta})$ системы уравнений (23) согласно (25):

$$(25) \quad P(W_\theta) = lcm(P_1, P_2, \dots, P_l),$$

где $P_i, i = \overline{1, l}$, – периоды на частотах w_i из системы (23).

Решение системы (8) неизвестно. Чтобы его отыскать, необходимо подать дополнительные испытательные сигналы (хотя бы 1, что является преимуществом по сравнению с методом, предлагаемым в [1]) на частотах w_i ($i = \overline{l+1, l+p}$). Точное количество выбирается исходя из неравенства (26). Таким образом могут быть получены ещё $p \geq 1$ уравнений для построения систем вида (23) из l уравнений. Благодаря этому на разных наборах частот можно составить до $M = \frac{(l+p)!}{p!l!}$ вариантов систем. Для обозначения передаточных функций, полученных решением таких систем, введём обозначение $W_{q,\theta}(s), q = \overline{1, M}$. Поскольку $W_{1,\tau}(s) = W_{2,\tau}(s) = \dots = W_{q,\tau}(s) = W(s)$, то равенство между собой идентифицированных $W_{q,\theta}(s), q = \overline{1, M}$, может служить критерием обнаружения истинного запаздывания: $\theta = \tau$.

Выберем частоты $w_i, i = \overline{1, l+p}$, так, чтобы период повтора всех систем частотных уравнений составил

$$(26) \quad P_\tau = lcm(P(W_{1,\theta}), P(W_{2,\theta}), \dots, P(W_{M,\theta})) > \tau^*.$$

Из этого следует, что идентифицированные на разных наборах частот передаточные функции $W_{q,\theta}(s), q = \overline{1, M}$, совпадут между собой *единственный раз* в допустимом диапазоне. Это условие позволит однозначно идентифицировать запаздывание, и, как следствие, рассчитать коэффициенты передаточной функции объекта без запаздывания:

$$(27) \quad 0 \leq \theta = \tau < \tau^*.$$

Передаточные функции $W_{q,\theta}(s)$ могут оказаться *близки*, но не равны между собой, поскольку на объект действует неизвестное ограниченное возмущение $f(t)$. Тем не менее, значение $\bar{\theta}$, при котором $W_{q,\bar{\theta}}(s)$ наиболее близки, принимается лучшей оценкой τ .

Окончательно приходим к задаче минимизации функционала, характеризующего близость $W_{q,\theta}$ между собой. Предлагается несколько критериев близости передаточных функций.

4.2. ВАРИАНТЫ ОЦЕНКИ БЛИЗОСТИ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Близость корней полиномов.

Обозначим корни полиномов числителей $k_{q,\theta}(s)$ передаточных функций $W_{q,\theta}(s)$ как $R_{q,\theta} = [r_{1,q,\theta}, r_{2,q,\theta}, \dots, r_{m,q,\theta}]$, а корни знаменателей $d_{q,\theta}(s)$ – как $X_{q,\theta} = [x_{1,q,\theta}, x_{2,q,\theta}, \dots, x_{n,q,\theta}]$.

При $\theta = \tau$ будут выполняться равенства

$$(28) \quad R_{i,\theta} = R_{i+1,\theta}; X_{i,\theta} = X_{i+1,\theta}; i = \overline{1, M-1}.$$

Поскольку при экспериментальном определении (α_i, β_i) присутствует некоторая ошибка, то следует искать θ , минимизирующую функционал

$$(29) \quad E_1 = \min_{\theta} \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{i=j+1}^M (R_{j,\theta} - R_{i,\theta})(R_{j,\theta} - R_{i,\theta})^H + \\ + (X_{j,\theta} - X_{i,\theta})(X_{j,\theta} - X_{i,\theta})^H.$$

Минимизация этого функционала требует «правильной» упорядоченности корней в векторах $R_{i,\theta}$ и $X_{i,\theta}$, что теоретически является вычислительно трудной задачей. Однако если корни полиномов передаточных функций близки друг к другу либо порядок полиномов объекта не превышает 2, то правильное упорядочивание является простым.

2. Близость коэффициентов полиномов.

Альтернативной, более простой с точки зрения вычислений, но менее точной по результатам, может служить минимизация суммарного «расстояния» между коэффициентами идентифицированных передаточных функций $W_{q,\theta}(s)$. При равенстве коэффициентов полиномов их корни также будут равны, что приведёт к выполнению (28), а значит, эквивалентно (29). При этом (30) не требует вычисления корней полиномов и правильной их упорядоченности, что представляло сложности в первом способе.

$$(30) \quad E_2 = \min_{\theta} \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{i=j+1}^M (K_{j,\theta} - K_{i,\theta})(K_{j,\theta} - K_{i,\theta})^T + \\ + (D_{j,\theta} - D_{i,\theta})(D_{j,\theta} - D_{i,\theta})^T,$$

где $K_{j,\theta}, K_{i,\theta}$ – векторы коэффициенты полиномов $k_{j,\theta}(s)$ и $k_{i,\theta}(s)$ соответственно; $D_{j,\theta}, D_{i,\theta}$ – векторы коэффициенты полиномов $d_{j,\theta}(s)$ и $d_{i,\theta}(s)$ соответственно.

К недостаткам следует отнести свойство некоторых полиномов при небольших изменениях коэффициентов иметь большие отклонения в корнях. В результате можно получить малые значения функционала при полиномах с существенно различными корнями. Потенциально можно изменить функционал, вводя веса коэффициентов.

3. Близость измеренных и расчётных частотных параметров.

Третьим вариантом является подстановка некоторой новой частоты w_x в передаточную функцию $W_{q,\theta}(jw_i)$, которая была получена без использования w_x . То есть сравнение расчётного значения $W_{q,\theta}(jw_x)$ с измеренными значениями (19) по расстоянию на комплексной плоскости:

$$(31) \quad |\alpha_{x,\theta} + j\beta_{x,\theta} - W_{q,\theta}(jw_x)| = \sqrt{(\operatorname{Re}\{W_{q,\theta}(jw_x)\} - \alpha_{x,\theta})^2 + (\operatorname{Im}\{W_{q,\theta}(jw_x)\} - \beta_{x,\theta})^2}.$$

Выражение (31) должно равняться 0 при $\theta = \tau$, так как точка $(\alpha_{x,\tau}, \beta_{x,\tau})$ принадлежит годографу $W_\tau(s)$.

Поскольку при экспериментальном определении $(\alpha_{x,\theta}, \beta_{x,\theta})$ присутствует некоторая ошибка, то следует искать θ , минимизирующую функционал

$$(32) \quad E_3 = \min_{\theta} \sum_{q=1}^M \sum_{x=1}^p |\alpha_{x,\theta} + j\beta_{x,\theta} - W_{q,\theta}(jw_x)|.$$

4.3. УПРОЩЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛОВ

Во всех трех случаях необходимо проверить большое количество значений θ , что приводит к повторному вычислению интегралов (19). Для ускорения поиска $\bar{\theta}$ получим формулы для вычисления $\alpha_{i,\theta}$ и $\beta_{i,\theta}$ с меньшей вычислительной сложностью. Идея заключается в том, что экспериментально получаемые параметры α_i и β_i идентифицируемого объекта могут быть преоб-

разованы к параметрам аналогичного объекта $W_\theta(jw_i)$ с произвольным сдвигом по фазе θ подобно введению запаздывания:

$$(33) \quad W_\theta(jw_i) = W_z(jw_i)e^{\theta jw_i} = (\alpha_i + j\beta_i)e^{\theta jw_i} = \alpha_{i,\theta} + j\beta_{i,\theta}.$$

Применяя формулу Эйлера к $e^{\theta jw_i}$ в (33), получим следующие равенства, позволяющие быстро вычислить $(\alpha_{i,\theta}, \beta_{i,\theta})$ по экспериментально получаемым по формулам (6) значениям (α_i, β_i) :

$$(34) \quad \begin{aligned} \alpha_{i,\theta} &= \alpha_i \cos(w_i\theta) - \beta_i \sin(w_i\theta), \\ \beta_{i,\theta} &= \beta_i \cos(w_i\theta) + \alpha_i \sin(w_i\theta). \end{aligned}$$

4.4. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫБОРУ ЧАСТОТ

Поскольку метод базируется на конечно-частотной идентификации и фильтрах Фурье, то все ограничения оригинального алгоритма сохраняются. При фазовых сдвигах частотных параметров появляется зависимость максимально возможного запаздывания, которое можно однозначно определить, от выбранных частот испытательного сигнала. В результате появляется ряд ограничений, приведённых ниже:

1. Не стоит выбирать их слишком близкими. На близких частотах будут получаться близкие значения (α_i, β_i) , что может приводить к некорректным решениям системы (23) из-за близости к вырожденности самой системы.

2. Иррациональные числа кажутся хорошим выбором, поскольку могут обеспечить $P_\tau = \infty$ при добавлении всего одной дополнительной испытательной частоты ($p = 1$). Благодаря этому отпадает необходимость заранее знать верхнюю оценку запаздывания. К сожалению, их невозможно реализовать физически, тем не менее использование их приближений может существенно увеличить P_τ .

Алгоритм 1.

1. Зададимся $\theta = 0, \tau^*$ и шагом $\Delta\theta$ (чем меньше, тем лучше, исходя из вычислительных мощностей).

2. Зададимся набором частот $w_i, i = \overline{1, l+p}$, удовлетворяющим критерию (26). Для каждой из них экспериментально найдем значения (α_i, β_i) согласно (6).

3. По формуле (34) с учётом текущего значения θ вычислим частотные параметры $(\alpha_{i,\theta}, \beta_{i,\theta})$.

4. Выберем до $M = \frac{(l+p)!}{p!l!}$ наборов значений $(\alpha_{i,\theta}, \beta_{i,\theta})$, исключая p пар фазочастотных параметров. Для каждого набора составим систему из l уравнений вида (23). Решая её найдем коэффициенты $W_{i,\theta}(s), i = \overline{1, M}$.

5. Оценим близость E полученных передаточных функций $W_{i,\theta}(s), i = \overline{1, M}$, по одному из предложенных критериев (29), (30), (32) или их сумме.

6. Если $E = 0$, т.е. полученные $W_{i,\theta}(s), i = \overline{1, M}$, совпадают, то $\theta = \tau$ согласно (24) и задача идентификации объекта с запаздыванием решена. Конец алгоритма 1.

7. Если $\theta < \tau^*$, то сохраним текущую пару (θ, E) . Будем увеличивать θ на величину $\Delta\theta$ и возвращаться к пункту (3) после каждого изменения θ .

8. Среди сохраненных пар (θ, E) ближайшим к τ значением $\bar{\theta}$ будет то, у которого значение критерия E минимально. Конец алгоритма 1.

5. Примеры

5.1. РЕЗУЛЬТАТЫ ИСХОДНОГО АЛГОРИТМА

В [1] приведён объект с запаздыванием и ограниченным возмущением

$$(35) \quad 0,7\ddot{y}(t) + 0,8\dot{y}(t) + y(t) = 0,4\dot{u}(t - 3) + u(t - 3) + f(t),$$

где внешнее возмущение

$$(36) \quad f(t) = 2\text{sign}[\sin(5t)].$$

В тексте статьи предлагалась двухэтапная идентификация, где на первом этапе к входу объекта прибавляется испытательный сигнал вида (7) длительностью около 186 с (21 период наименьшей испытательной частоты) с интервалом дискретизации по времени $h = 0,01$:

$$(37) \quad u_{ei}(t) = 0,05 \sin(0,707t) + 0,075 \sin(1,41t) + \\ + 0,1 \sin(2,12t) + 0,15 \sin(2,83t).$$

После чего на втором этапе идентификации на 60 с к входу объекта прибавляется испытательный сигнал вида (12):

$$(38) \quad u_{e\lambda}(t) = 0,1e^{-0,01t} \sin(0,707t).$$

В результате идентификации был получен объект:

$$(39) \quad 0,65\ddot{y}(t) + 0,83\dot{y}(t) + y(t) = 0,32\dot{u}(t - 3,48) + \\ + 1,06u(t - 3,48) + f(t).$$

5.2. РЕЗУЛЬТАТЫ ФАЗО-ЧАСТОТНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ С АНАЛОГИЧНЫМ ИСПЫТАТЕЛЬНЫМ СИГНАЛОМ

Для сравнения эффективности алгоритмов ко входу объекта был прибавлен испытательный сигнал близкий к (37): с теми же частотами и амплитудами компонент, но *меньшим числом гармоник*. Согласно алгоритму 1:

1. Выбраны параметры $\tau^* = 10$ и $\Delta\theta = 0,001$.

2. Выбраны две частоты $w_1 = 0,707$ и $w_2 = 1,41$ ($l = 2$), а также одна дополнительная частота $w_3 = 2,12$ ($p = 1$). На них проведена идентификация длительностью в 21 период наименьшей испытательной частоты. Интервал дискретизации по времени $h = 0,01$. Испытательный сигнал принял вид

$$(40) \quad u_{ei}(t) = 0,05 \sin(0,707t) + 0,075 \sin(1,41t) + \\ + 0,1 \sin(2,12t).$$

Получены пары значений: $(\alpha_1; \beta_1) = (-0,9723; -0,7862)$, $(\alpha_2; \beta_2) = (0,7988; 0,6021)$ и $(\alpha_3; \beta_3) = (-0,1392; -0,452)$.

3. По формуле (34) с учётом текущего значения θ они пересчитаны в частотные параметры $(\alpha_{1,\theta}; \beta_{1,\theta})$, $(\alpha_{2,\theta}; \beta_{2,\theta})$ и $(\alpha_{3,\theta}; \beta_{3,\theta})$.

4. Из полученных частотных параметров создаётся $M = 3$ системы уравнений вида (23):

$$(41) \quad \begin{cases} k(jw_1) = (\alpha_{1,\theta} + j\beta_{1,\theta})d(jw_1), \\ k(jw_2) = (\alpha_{2,\theta} + j\beta_{2,\theta})d(jw_2); \\ k(jw_1) = (\alpha_{1,\theta} + j\beta_{1,\theta})d(jw_1), \\ k(jw_3) = (\alpha_{3,\theta} + j\beta_{3,\theta})d(jw_3); \\ k(jw_2) = (\alpha_{2,\theta} + j\beta_{2,\theta})d(jw_2), \\ k(jw_3) = (\alpha_{3,\theta} + j\beta_{3,\theta})d(jw_3). \end{cases}$$

5. Вычислены значения E_1, E_2 и E_3 полученных передаточных функций $W_{1,\theta}(s), W_{2,\theta}(s), W_{3,\theta}(s)$ по критериям (29), (30), (32) соответственно.

6. Фаза сдвигалась на величину $\Delta\theta$: $\theta = \theta + \Delta\theta$ и повторялись пункты с (3) по (5) до тех пор, пока $\theta < \tau^* = 10$. Получаемые на каждом цикле E сохранялись в соответствующие массивы. Полученные зависимости $E(\theta)$ приведены в соответствии с графиком на рис. 2.

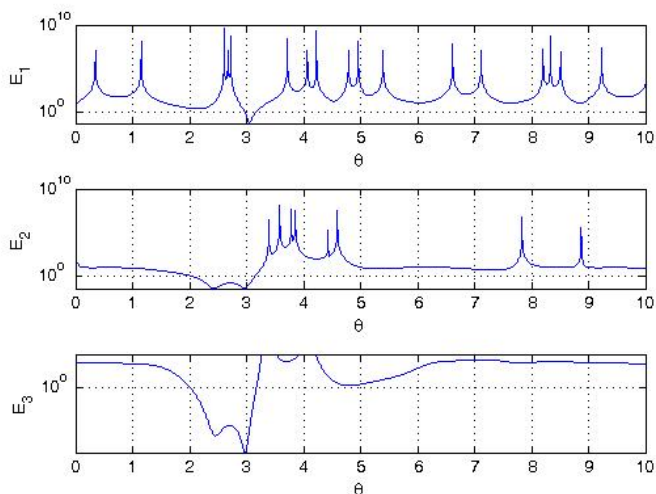


Рис. 2. График зависимости функционалов (29), (30) и (32) от θ при испытательном сигнале из [1]

7. Выбраны значения θ , соответствующие минимумам $E(\theta)$. Результаты идентификации с использованием каждого из предложенных критериев (29), (30) или (32):

а) по критерию близости корней полиномов (E_1):

$$(42) \quad 0,788\ddot{y}(t) + 0,739\dot{y}(t) + y(t) = 0,5455\dot{u}(t - 3,054) + 0,8827u(t - 3,054) + f(t).$$

б) по критерию близости коэффициентов полиномов (E_2):

$$(43) \quad 0,7184\ddot{y}(t) + 0,7036\dot{y}(t) + y(t) = 0,3981\dot{u}(t - 2,976) + \\ + 0,9509u(t - 2,976) + f(t).$$

в) по критерию близости измеренных и расчётных частотных параметров (E_3):

$$(44) \quad 0,7184\ddot{y}(t) + 0,7036\dot{y}(t) + y(t) = 0,3981\dot{u}(t - 2,976) + \\ + 0,9509u(t - 2,976) + f(t).$$

5.3. РЕЗУЛЬТАТЫ ФАЗО-ЧАСТОТНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ С ПОДОБРАННЫМИ ЧАСТОТАМИ

Для демонстрации эффективности алгоритма произведено моделирование процесса идентификации объекта из [1] согласно алгоритму (1) с использованием каждого из предложенных критериев:

1. Выбраны параметры $\tau^* = 10$ и $\Delta\theta = 0,001$.

2. Исходя из верхней оценки запаздывания τ^* и (26), учитывая [11], были выбраны две частоты $w_1 = 0,2\pi$ и $w_2 = 0,8\pi$ ($l = 2$), а также одна дополнительная частота $w_3 = \pi$ ($p = 1$). На них проведена идентификация длительностью в 80 с. Интервал дискретизации по времени $h = 0,01$.

$$(45) \quad u_{ei}(t) = 0,05 \sin(0,2\pi t) + 0,08 \sin(0,8\pi t) + 0,1 \sin(\pi t).$$

На выбранных частотах получены пары значений: $(\alpha_1; \beta_1) = (-0,4828; -1,1647)$, $(\alpha_2; \beta_2) = (-0,3747; -0,0207)$ и $(\alpha_3; \beta_3) = (0,0662; 0,2493)$.

3. По формуле (34) с учётом текущего значения θ они пересчитаны в частотные параметры $(\alpha_{1,\theta}; \beta_{1,\theta})$, $(\alpha_{2,\theta}; \beta_{2,\theta})$ и $(\alpha_{3,\theta}; \beta_{3,\theta})$.

4. Из полученных частотных параметров создаётся $M = 3$ системы уравнений, аналогично (41).

5. Вычислены значения E_1 , E_2 и E_3 полученных передаточных функций $W_{1,\theta}(s)$, $W_{2,\theta}(s)$, $W_{3,\theta}(s)$ по критериям (29), (30), (32) соответственно.

6. Фаза сдвигалась на величину $\Delta\theta$: $\theta = \theta + \Delta\theta$ и повторялись пункты с (3) по (5) до тех пор, пока $\theta < \tau^*$. Получаемые

на каждом цикле $E(\theta)$ сохранялись в соответствующие массивы и приведены в соответствии с графиком на рис. 3.

7. Выбраны значения θ , соответствующие минимумам $E(\theta)$. Результаты идентификации с использованием каждого из предложенных критериев (29), (30) или (32):

а) по критерию близости корней полиномов (E_1):

$$(46) \quad 0,8303\ddot{y}(t) + 0,5313\dot{y}(t) + y(t) = 0,5516\dot{u}(t - 3,006) + \\ + 0,8694u(t - 3,006) + f(t).$$

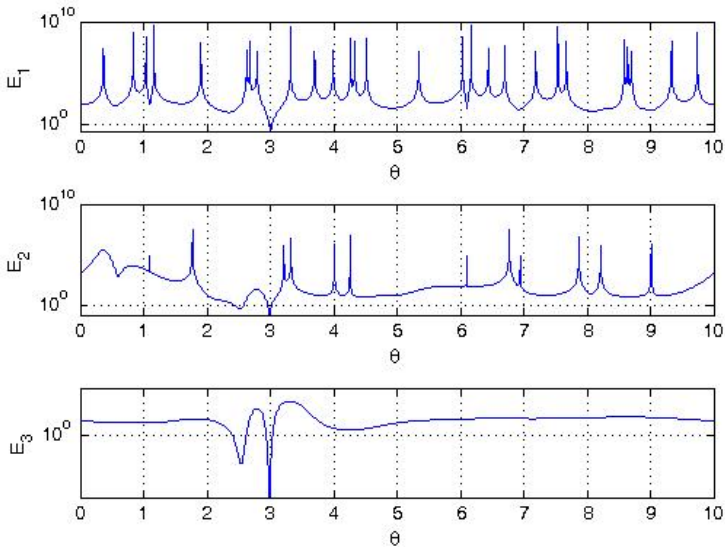


Рис. 3. График зависимости функционалов (29), (30) и (32) от θ

б) по критерию близости коэффициентов полиномов (E_2):

$$(47) \quad 0,784\ddot{y}(t) + 0,505\dot{y}(t) + y(t) = 0,4985\dot{u}(t - 2,987) + \\ + 0,8966u(t - 2,987) + f(t).$$

в) по критерию близости измеренных и расчётных частот-

ных параметров (E_3):

$$(48) \quad 0,7817\ddot{y}(t) + 0,5037\dot{y}(t) + y(t) = 0,4958\dot{u}(t - 2,986) + \\ + 0,8979u(t - 2,986) + f(t).$$

6. Результаты

Можно видеть существенное улучшение точности идентификации запаздывания. Погрешность в определении τ , рассчитанная по формуле $100(1 - \bar{\theta}/\tau)$, снизилась с 16% в (39) до 0,2% для первого критерия и до 0,43% и 0,47% – для второго и третьего соответственно. Эти результаты получены при вдвое меньшей длительности идентификации и сократившемся количестве испытательных гармоник!

Для оценки поведения различных критериев оценки близости приведен график (см. рис. 3), полученный в ходе фазочастотной идентификации с оптимальными частотами. На нём видно, как все функционалы стремятся к нулю в окрестности τ . При этом на некоторых кривых имеются локальные минимумы, которые при негативном стечении факторов (недостаточно долгая идентификация, внешнее возмущение большой мощности, близость испытательной частоты и частоты внешнего возмущения) могут быть приняты за истинное запаздывание.

Анализируя полученные кривые, можно прийти к выводу, что оценка с использованием первого критерия (чётко выраженный минимум) менее подвержена влиянию внешних возмущений. На графиках функционалов (30) и (32) видны локальные минимумы, близкие к глобальному. Сумма критериев на одинаковых θ , по всей видимости, позволит отбросить большинство таких локальных минимумов. Погрешность в определении τ ниже у первого способа.

Следует отметить, что точность в определении коэффициентов передаточной функции сравнима с результатами [1].

Приведённый алгоритм эффективен для определения запаздывания в объекта управления, что подтверждается результатами сравнения со статьёй [1]. Особо следует подчеркнуть отсутствие

необходимости подачи дополнительных испытательных сигналов, что позволяет использовать первую часть двухэтапной идентификации, а затем использовать полученные значения (α_i, β_i) для дальнейшего вычисления τ без приложения испытательных сигналов.

7. Выводы и перспективы

В данной работе был предложен алгоритм одновременной идентификации запаздывания и коэффициентов объекта, основанный на конечно-частотной идентификации. К его достоинствам следует отнести точность в определении запаздывания, быстродействие и совместимость с результатами измерений конечно-частотных алгоритмов.

Приведённый в работе алгоритм был успешно применен на практике в системе автоматизированного управления вакуумной дуговой печью на АО «Металлургический завод “Электросталь”».

Литература

1. АЛЕКСАНДРОВ А.Г., ОРЛОВ Ю.Ф., ПАЛЕНОВ М.В. *Конечно-частотная идентификация объектов с запаздыванием* // Автоматика и телемеханика. – 2014. – №2. – С. 5–15.
2. АЛЕКСАНДРОВ А.Г., ОРЛОВ Ю.Ф. *Сравнение двух методов идентификации при неизвестных ограниченных возмущениях* // Автоматика и телемеханика. – 2005. – Т. 66, №10. – С. 128–147.
3. АЛЕКСАНДРОВ А.Г. *Частотные регуляторы* // Автоматика и телемеханика. – 1991. – №1. – С. 22–33.
4. АЛЕКСАНДРОВ А.Г. *Конечно-частотная идентификация: границы частот испытательного сигнала* // Автоматика и телемеханика. – 2001. – №11. – С. 3–14.
5. АЛЕКСАНДРОВ А.Г. *Метод частотных параметров* // Автоматика и телемеханика. – 1991. – №12. – С. 3–15.

6. ГРАНИЧИН О.Н., ПОЛЯК Б.Т. *Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах.* – М.: Наука, 2003.
7. ЛЬЮНГ Л. *Идентификация систем.* – М.: Наука, 1991.
8. AHMED S., HUANG B., SHAH S. *Process identification from sinusoidal test data by estimating step response* // Preprints of the 15th IFAC Symposium on System Identification. – Saint-Malo, France, 2009. – P. 396–401.
9. ALEXANDROV A.G. *Finite-frequency method of identification* // Proc. of 10th IFAC Symposium on System Identification. Preprints. – Vol.2 – Copengagen, Denmark, 1994. – P. 523–527.
10. ALEXANDROV A.G. *Finite-frequency identification and model validation of stable plant* // Proc. of 14th World Congress of IFAC. Preprints. – Vol. H – Beijing, China, 1999. – P. 295–301.
11. ALEXANDROV A.G. *Finite-frequency identification and model validation of stable plant* // Proc. of 16th World Congress of IFAC. Preprints. – Prague, Czech Republic, 2005.
12. ALEXANDROV A., ORLOV YU., PALENOV M. *Finite-frequency identification of plant with time delay* // Preprints of the 16th IFAC Simposium on System Identification. – Brussels, Belgium, 2012. – P. 66–70.
13. BJORKLUND S., LJUNG L. *A review of time-delay estimation techniques* // Proc. of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control. – Hawaii, USA, 2013.
14. M'SAAD M., FARZA M. *Identification of continuous-time linear systems with time-delay* // Preprints of the 15th IFAC Symposium on System Identification. – Saint-Malo, France, 2009. – P. 898–903.
15. WONG K.Y., POLAK E. *Identification of linear discrete time systems using instrumental variable method* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1967. – Vol. AC-12. – P. 707–718.

16. YAMAGUCHI H., NAGUMO K., ABE N. *Iterative design using IMC for input time-delay systems with disturbance observer* // Preprints of the 18th IFAC World Congress. – Milano, Italy, 2011. – P. 2430–2435.

FINITE-FREQUENCY IDENTIFICATION OF A DELAY VIA SLIDING PHASE LAG

Pavel Livatkin, TRIA GROUP, Moscow (pal2010@yandex.ru).

Abstract: This article proposes a phase sliding improvement of finite-frequency identification algorithm for a linear stable plant with time-delay in presence of unknown-but-bounded external disturbances (with unknown stochastic characteristics). Finite-frequency identification algorithm feeds to the plant's input a testing signal, that consist of a single harmonic or a sum of them. Phase sliding improvement allows to identify two unknown values, such as coefficients of the plant's transfer function or time-delay value for the successful identification and more than one harmonic if it is needed to increase accuracy or identify a long time-delay value. There are two ideas in the article. Firstly, phase sliding for each harmonic may be opposite for phase deviation, caused by plant's time-delay. Time-delay, phase sliding and harmonic's frequency are analytically related. Secondly, plant's transfer function will be the same for different combinations of harmonics if they are opposite to plant's time-delay. For a definite solution of the delay identification problem the upper bound of the time-delay value is required. The article describes how to select theoretically optimal harmonics, providing time-delay identification without known upper bound. There are three algorithms for the detection equality of phase-slided and time-delayed values, which differ one from each other computational complexity and sensitivity to external disturbances.

Keywords: control systems engineering, dynamical systems identification, delay identification, finite-frequency delay identification.

УДК 681.5

ББК 32.966

DOI: <https://doi.org/10.25728/ubs.2020.84.4>

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии П.С. Щербаковым.*

Поступила в редакцию 15.10.2019.

Дата опубликования 31.03.2020.