

**Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН**

# **УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ**

***Выпуск 84  
Март 2020***

**СБОРНИК  
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл. №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

**Москва – 2020**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
*Институт проблем управления*  
*им. В.А. Трапезникова*

**УПРАВЛЕНИЕ  
БОЛЬШИМИ  
СИСТЕМАМИ**

**СБОРНИК ТРУДОВ**

*Выпуск 84*

**Москва – 2020**

### КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Кузнецов О.П., Кульба В.В., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Главный редактор:** член-корр. РАН Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Калимулина Э.Ю. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИПМ РАН), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), Галаев А.А. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук: Зоркальцев В.И. (ИСЭМ СО РАН), проф. Калашников А.О. (ИПУ РАН), проф. Калянов Г.Н. (ГУ ВШЭ), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ключков В.В. (ИПУ РАН), д-р техн. наук Коргин Н.А. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук: проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (МФТИ), д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р биол. наук проф. Михальский А.И., д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н. (ИПС РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Орлов А.И. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), проф. Райгородский А.М. (МГУ), проф. Савватеев А.В. (РЭШ), д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), Совлуков А.С. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ), проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

### РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

**Арзамас** – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – академик РАН Бычков И.В., д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ).

**Адрес редакции:** 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

**Адрес в интернете:** [ubs.mtas.ru](http://ubs.mtas.ru).

## СОДЕРЖАНИЕ

### *Системный анализ*

---

**Русев В.Н.**

*Об одном асимптотическом разложении решения уравнения восстановления* ..... 6

**Бреер В.В.**

*Пороговые модели боевых действий*..... 35

### *Математическая теория управления*

---

**Турцынский М.К.**

*Об исследовании устойчивости одного класса стационарных решений системы уравнений газовой динамики на вращающейся плоскости* ..... 51

**Ливаткин П.А.**

*Конечно-частотная идентификация запаздывания с использованием фазовых сдвигов* ..... 66

### *Анализ и синтез систем управления*

---

**Угольницкий Г.А., Горбанёва О.И., Усов А.Б., Агиева М.Т., Мальсагов М.Х.**

*Теория управления устойчивым развитием активных систем*..... 89

### *Управление в социально-экономических системах*

---

**Добронец Б.С., Попова О.А.**

*Вычислительные аспекты цифровой экономики*..... 114

**Сидельников Ю.В.**

*Разработка и реализация подхода к корректному описанию экспертного креативного метода.  
Ч. 2. Реализация подхода на примере мозговой атаки*..... 130

**Управление в медико-биологических  
и экологических системах**

---

**Кожевников А.А.**

*Особенности применения системного подхода  
при оценке степени эффективности процесса  
управления в сфере здравоохранения ..... 152*

**Надежность и диагностика  
средств и систем управления**

---

**Крыгин А.А.**

*Оценка параметров распределения Вейбулла  
при малом объеме выборки в задачах оптимизации  
планирования ремонтных работ на инженерных  
сетях..... 177*

## ОБ ОДНОМ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Русев В. Н.<sup>1</sup>

(РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина, Москва)

*Изучается уравнение восстановления, представляющее собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода типа свертки с разностным ядром. Данное уравнение рассматривается как для плотности восстановления, так и для ее первообразной – функции восстановления. Функция восстановления имеет существенное значение в теории надёжности технических систем не только в качестве описательной характеристики, но также для оптимизации стратегий эксплуатации при управлении профилактического обслуживания в предположении выполнения модели рекуррентных потоков восстановлений. Предлагается аналитический метод получения асимптотического представления решения уравнения восстановления для некоторого класса распределений при выполнении определенного ряда условий на распределение. Достоверность указанного разложения проверена на базовом в математической теории надёжности показательном распределении. В качестве примера, показывающего, что класс описанных распределений не есть пустое множество, рассматривается двухпараметрическое распределение Вейбулла – Гнеденко, которое является естественным обобщением показательного распределения. В работе используются аппарат теории рядов и метод производящей функции моментов, которая является преобразованием Лапласа плотности распределения неотрицательной непрерывной случайной величины. Попутно освещена проблема моментов Чебышёва – Маркова – Стильтеса об однозначном задании распределения последовательностью своих моментов, выполнение которой имеет значимость для указанного разложения. Выражение для решения уравнения восстановления в случае плотности восстановления представляет собой ряд типа Грама – Шарлье в терминах вероятностных моментов.*

Ключевые слова: уравнение восстановления, функция восстановления, преобразование Лапласа, производящая функция моментов, проблема моментов Чебышёва – Маркова – Стильтеса, распределение Вейбулла – Гнеденко.

### 1. Введение

Данная статья посвящена получению асимптотики решения уравнения восстановления из классической теории восстано-

---

<sup>1</sup> Владимир Николаевич Русев, к.т.н. (rusev.v@gubkin.ru).

ния, которая сформировалась как раздел математики в недрах теории надёжности в середине прошлого века.

Задача изучения асимптотического поведения решений различных классов уравнений – это традиционная задача классического анализа еще со времени А. Пуанкаре (см. [1]), составляющая значительную часть соответствующей теории уравнений. Асимптотика решений интегральных уравнений Вольтерра с разностным ядром впервые изучалась в работе [2]. В связи с задачами теории восстановления активно изучалось поведение решения уравнения восстановления, о чем подробно изложено в [14, 16].

Теория надёжности – сравнительно молодая для науки дисциплина. В истории ее развития выделяют три этапа формирования, характеризующие общие тенденции взаимоотношения науки и техники (см. [7]), когда наука сначала отстаёт от техники в своем развитии, потом постепенно догоняет технику, решая насущные технические задачи; и, наконец, наука начинает опережать технику в своем становлении, ставя и решая такие задачи, которые лишь впоследствии, на основе научных исследований и чисто теоретического подхода, находят практические приложения. Соответственно, на первом этапе (30–40 гг. XX века) попытки научного подхода к проблеме надёжности носят стихийный характер; теория надёжности уже догоняет технику, происходит бурное развитие статистических методов во время второго этапа (50–60 гг. XX века), именно в этот период в качестве одного из ответвлений естественно возникла и стала активно развиваться теория восстановления. В 70-х годах прошлого века теория надёжности начинает опережать технику в своем развитии, переходя уже на проблемы управления качеством технических устройств, промышленной безопасности и анализу рисков.

Как это часто бывает с отдельными разделами прикладной математики, развитие теории восстановления в значительной степени превысило реальные потребности науки и практики второй половины XX века. В то же время большинство достижений и выводов теории восстановления относится к инженерным приложениям, связанным с планированием и ожиданием

ремонт [10, 13, 19], а также в задачах астрофизики, биологии, медицины [16, 18].

Фундаментальные вопросы классической теории восстановления, включая асимптотические свойства основной характеристики процесса восстановления – функции восстановления – были обстоятельно рассмотрены в работах [5, 14]; применительно к интегральному уравнению восстановления для модели Вейбулла – Гнеденко можно указать ряд исследований [17, 21, 22]. Отметим, что кроме указанного аналитического подхода к решению уравнения восстановления в модели Вейбулла – Гнеденко существуют и другие способы получения, основанные на численных методах [6, 8, 20]. В частности, можно рассмотреть модификацию метода Ритца дискретизации интегрального уравнения восстановления, базирующееся на компьютерном моделировании, в результате которого были получены системы рекуррентных формул [9, 12, 13]. Там же имеется подробное освещение истории вопроса к численному подходу нахождения решения уравнению восстановления.

## 2. Основные результаты

Рассмотрим так называемое уравнение восстановления [5, 8] – уравнение вида

$$(1) \quad h(t) = f(t) + \int_0^t h(\tau) f(t - \tau) d\tau,$$

представляющее собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода типа свертки с разностным ядром с точки зрения математики [6]. Предполагается, что функции  $h(t)$ ,  $f(t)$  являются неотрицательными и достаточно гладкими. Функция  $f(t)$  считается заданной. Искомая функция  $h(t)$  называется плотностью восстановления, а её первообразная  $H(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau$  в технических приложениях именуется функцией восстановления [7, 8]. Справедливо следующее утверждение.

**Теорема.** Пусть имеется неотрицательная непрерывная случайная величина  $\xi$  с плотностью  $f(t)$  и функцией распределе-



ния  $F(t)$ , у которой существуют все начальные моменты порядка  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = \int_0^{+\infty} t^n f(t) dt$ ,  $v_1 = M\xi$ , удовлетворяющие

следующим условиям:

1.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (v_n)^{-\frac{1}{2n}} = +\infty$ ,
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ (n+1) \frac{v_n}{v_{n+1}} \right] = +\infty$ ,
3.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{v_1^n v_{n+2}}{(n+2)!} \neq 1$ ,
4.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f^{(n)}(t) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ,
5.  $\exists C > 0: |f^{(n)}(0)| < C \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ,

тогда асимптотическое представление решения уравнения восстановления (1) имеет вид:

$$h(t) = \frac{1}{v_1} \left[ F(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k}{v_1^k} F^{(k)}(t) \right],$$

где  $F^{(k)}(t)$  означает  $k$ -ю производную функции  $F(t)$ , а коэффициенты разложения  $c_k$  находятся по правилу

$$c_1 = -m_0 = -\frac{v_2}{2!}, \quad m_k = \frac{v_1^k v_{k+2}}{(k+2)!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$c_k = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -m_0 \\ -m_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & m_1 \\ m_1 & -m_0 & 1 & \dots & 0 & -m_2 \\ -m_2 & m_1 & -m_0 & \dots & 0 & m_3 \\ m_3 & -m_2 & m_1 & \dots & 0 & -m_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\ (-1)^{k+1} m_{k-2} & (-1)^k m_{k-3} & (-1)^{k-1} m_{k-4} & \dots & -m_0 & (-1)^k m_{k-1} \end{vmatrix}.$$

Справедлива рекуррентная зависимость

$$c_k = m_0 c_{k-1} - m_1 c_{k-2} + m_2 c_{k-3} - \dots + (-1)^k m_{k-1},$$

а также соотношение

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k m_k}{-1 + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k m_k} < \infty,$$

означающее, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$ , и значит,  $\exists k_0: \forall k > k_0 \Rightarrow |c_k| < 1$ .

**Замечания.**

1. Условие 1 представляет собой достаточное условие Карлемана для однозначной определенности проблемы моментов (см. раздел 6), иными словами, условие существования производящей функции моментов (см. раздел 3) для  $\xi$ .

2. Условие 2 обеспечивает абсолютную сходимость производящей функции моментов для  $\xi$  на всей комплексной плоскости  $\mathcal{C}$ .

3. Абсолютная сходимость ряда из условия 3 следует из условия 2. Действительно, применим признак Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{v_1^{n+1} v_{n+3}}{(n+3)!}}{\frac{v_1^n v_{n+2}}{(n+2)!}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_1^{n+1} v_{n+3}}{(n+3)!} \frac{(n+2)!}{v_1^n v_{n+2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_1}{(n+3)} \frac{v_{n+3}}{v_{n+2}} = \\ &= v_1 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+3)} \frac{v_{n+3}}{v_{n+2}} = \frac{v_1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ (n+1) \frac{v_n}{v_{n+1}} \right]} = 0 < 1, \end{aligned}$$

что влечет за собой сходимость ряда.

4. Выражение для асимптотического решения уравнения восстановления в случае плотности восстановления представляет собой ряд типа Грама – Шарлье [3, 4] в терминах вероятностных моментов. Формулы для нахождения коэффициентов  $c_k$  имеют простой явный вид. В этом главное отличие от работ [17, 22].

**Следствие.** Асимптотическое разложение функции восстановления  $H(t)$  в предположении, что для функции  $\frac{\tilde{f}(s)}{s^2}$  су-

существует обратное преобразование Лапласа, имеет следующий вид:

$$H(t) = \frac{1}{v_1} L^{-1} \left[ \frac{\tilde{f}(s)}{s^2} \right] - \frac{1}{v_1^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_{k+1}}{v_1^k} F^{(k)}(t),$$

где  $\tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$  обозначает преобразование Лапласа для функции  $f(t)$ ,  $s \in \mathbb{C}$ , а  $L^{-1}[G(s)]$  обозначает обратное преобразование Лапласа для функции  $G(s)$ .

### 3. Доказательства

Решим уравнение (1) относительно  $h(t)$ , используя методы операционного исчисления [6]. Пусть  $\tilde{h}(s)$  и  $\tilde{f}(s)$  обозначают преобразования Лапласа от функций  $h(s)$  и  $f(t)$  соответственно. Заметим, что преобразование Лапласа для неотрицательной непрерывной случайной величины  $\xi$  с плотностью  $f(t)$  представляет собой производящую функцию моментов, так как

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-st)^n}{n!} f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{v_n}{n!} s^n,$$

где  $s \in \mathbb{C}$ , а  $v_n$  – начальный момент порядка  $n$  случайной величины  $\xi$  с плотностью  $f(t)$ :  $v_n = \int_0^{+\infty} t^n f(t) dt$ .

Исследуем данный степенной ряд на сходимость в области комплексных чисел. Найдем радиус сходимости ряда  $R$ :

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^n \frac{v_n}{n!}}{(-1)^{n+1} \frac{v_{n+1}}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ (n+1) \frac{v_n}{v_{n+1}} \right] = +\infty$$

в силу условия 2.

Условие 1 гарантирует корректность определения производящей функции моментов, т.е. выполнение предположения об однозначном задании распределения последовательностью своих моментов на основании достаточного условия Карлема-

на [15] для однозначной определенности проблемы моментов (см. раздел 6).

Соотношение (1) на языке преобразования Лапласа в силу его свойств преобразуется к виду

$$\tilde{h}(s) = \tilde{f}(s) + \tilde{h}(s)\tilde{f}(s).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{h}(s) &= \frac{\tilde{f}(s)}{1 - \tilde{f}(s)} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{V_n}{n!} s^n}{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{V_n}{n!} s^n} = \frac{1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{V_n}{n!} s^n}{-\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{V_n}{n!} s^n} = \\ &= -\frac{1}{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{V_n}{n!} s^n} - 1 = -\frac{1}{s \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{V_n}{n!} s^{n-1}} - 1. \end{aligned}$$

Применим технику деления бесконечных рядов (см., например, [3]) и найдем ряд, обратный к

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{V_n}{n!} s^{n-1}.$$

Будем искать его в виде:

$$\frac{1}{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{V_n}{n!} s^{n-1}} = \frac{c_0}{V_1} + \frac{c_1}{V_1^2} s + \frac{c_2}{V_1^3} s^2 + \frac{c_3}{V_1^4} s^3 + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{n-1}}{V_1^n} s^{n-1}.$$

Отсюда следует, что

$$1 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{V_n}{n!} s^{n-1} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{n-1}}{V_1^n} s^{n-1}$$

или

$$1 = \left( -\frac{V_1}{1!} + \frac{V_2}{2!} s - \frac{V_3}{3!} s^2 + \frac{V_4}{4!} s^3 - \dots \right) \left( \frac{c_0}{V_1} + \frac{c_1}{V_1^2} s + \frac{c_2}{V_1^3} s^2 + \frac{c_3}{V_1^4} s^3 + \dots \right).$$

Раскрывая скобки и группируя слагаемые по степеням  $s$ , получаем бесконечную систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $c_n$ :

$$\begin{cases} c_0 = -1, \\ c_1 - m_0 c_0 = 0, \\ c_2 - m_0 c_1 + m_1 c_0 = 0, \\ c_3 - m_0 c_2 + m_1 c_1 - m_2 c_0 = 0, \\ c_4 - m_0 c_3 + m_1 c_2 - m_2 c_1 + m_3 c_0 = 0, \\ c_5 - m_0 c_4 + m_1 c_3 - m_2 c_2 + m_3 c_1 - m_4 c_0 = 0, \\ \dots \\ c_n - m_0 c_{n-1} + m_1 c_{n-2} - m_2 c_{n-3} + \dots + (-1)^{n+1} m_{n-2} c_1 - (-1)^{n+1} m_{n-1} c_0 = 0, \\ \dots \end{cases}$$

где

$$m_k = \frac{V_1^k \cdot V_{k+2}}{(k+2)!}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Пусть  $A = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$  по определению. Тогда из указанной системы уравнений, которую можно рассмотреть по столбцам и сложить все её строки, получаем соотношение:

мы уравнений, которую можно рассмотреть по столбцам и сложить все её строки, получаем соотношение:

$$A \left( 1 - \frac{V_1^0 \cdot V_2}{2!} + \frac{V_1^1 \cdot V_3}{3!} - \frac{V_1^2 \cdot V_4}{4!} + \dots \right) = -1,$$

или

$$A(1 - m_0 + m_1 - m_2 + m_3 \dots) = -1.$$

Следовательно,

$$A = \frac{1}{-1 + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{V_1^k \cdot V_{k+2}}{(k+2)!}} = \frac{1}{-1 + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k m_k}.$$

Предполагая выполнение условия 3  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{V_1^n V_{n+2}}{(n+2)!} \neq 1$ , та-

ким образом, получаем

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n < \infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0,$$

что означает

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \Rightarrow |c_k| < 1.$$

Найдем компактное выражение для коэффициентов  $c_n$ . Для этого указанную выше систему перепишем в виде

$$\begin{cases} c_0 = -1, \\ c_1 = -m_0, \\ c_2 - m_0 c_1 = m_1, \\ c_3 - m_0 c_2 + m_1 c_1 = -m_2, \\ c_4 - m_0 c_3 + m_1 c_2 - m_2 c_1 = m_3, \\ c_5 - m_0 c_4 + m_1 c_3 - m_2 c_2 + m_3 c_1 = -m_4, \\ \dots \\ c_n - m_0 c_{n-1} + m_1 c_{n-2} - m_2 c_{n-3} + \dots + (-1)^{n+1} m_{n-2} c_1 = (-1)^{n+2} m_{n-1}, \\ \dots \end{cases}$$

Для нахождения первых  $n$  коэффициентов  $c_n$  искомого ряда рассмотрим конечную систему

$$\begin{cases} c_1 = -m_0, \\ c_2 - m_0 c_1 = m_1, \\ c_3 - m_0 c_2 + m_1 c_1 = -m_2, \\ c_4 - m_0 c_3 + m_1 c_2 - m_2 c_1 = m_3, \\ c_5 - m_0 c_4 + m_1 c_3 - m_2 c_2 + m_3 c_1 = -m_4, \\ \dots \\ c_n - m_0 c_{n-1} + m_1 c_{n-2} - m_2 c_{n-3} + \dots + (-1)^{n+1} m_{n-2} c_1 = (-1)^n m_{n-1} \end{cases}$$

и воспользуемся правилом Крамера решения систем линейных уравнений:

$$c_k = \frac{\Delta_{c_k}}{\Delta}, \quad k = 1, \dots, n,$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -m_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_1 & -m_0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -m_2 & m_1 & -m_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_3 & -m_2 & m_1 & -m_0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n+1}m_{n-2} & (-1)^n m_{n-3} & (-1)^{n-1}m_{n-4} & (-1)^{n-2}m_{n-5} & (-1)^{n-3}m_{n-6} & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

и

$$\Delta_{c_k} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -m_0 & \dots & 0 \\ -m_0 & 1 & 0 & \dots & m_1 & \dots & 0 \\ m_1 & -m_0 & 1 & \dots & -m_2 & \dots & 0 \\ -m_2 & m_1 & -m_0 & \dots & m_3 & \dots & 0 \\ m_3 & -m_2 & m_1 & \dots & -m_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n+1}m_{n-2} & (-1)^n m_{n-3} & (-1)^{n-1}m_{n-4} & \dots & (-1)^n m_{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Причем определитель  $n$ -го порядка  $\Delta_{c_k}$  редуцируется в итоге к определителю  $k$ -го порядка на основании свойств вычисления определителей (см., например, [3]).

В частности,

$$c_1 = -m_0,$$

$$c_2 = \begin{vmatrix} 1 & -m_0 \\ -m_0 & m_1 \end{vmatrix} = -m_0^2 + m_1,$$

$$c_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -m_0 \\ -m_0 & 1 & m_1 \\ -m_1 & -m_0 & -m_2 \end{vmatrix} = -m_0^3 + 2m_0m_1 - m_2,$$

$$c_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -m_0 \\ -m_0 & 1 & 0 & m_1 \\ m_1 & -m_0 & 1 & -m_2 \\ -m_2 & m_1 & -m_0 & m_3 \end{vmatrix} = -m_0^4 + 3m_0^2m_1 - m_1^2 - 2m_0m_2 + m_3.$$

Или в общем случае

$$c_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -m_0 \\ -m_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & m_1 \\ m_1 & -m_0 & 1 & \dots & 0 & -m_2 \\ -m_2 & m_1 & -m_0 & \dots & 0 & m_3 \\ m_3 & -m_2 & m_1 & \dots & 0 & -m_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\ (-1)^{k+1} m_{k-2} & (-1)^k m_{k-3} & (-1)^{k-1} m_{k-4} & \dots & -m_0 & (-1)^k m_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Справедливо также рекуррентное соотношение:

$$c_n = m_0 c_{n-1} - m_1 c_{n-2} + m_2 c_{n-3} - \dots + (-1)^{n+2} m_{n-2} c_1 + (-1)^{n+1} m_{n-1} c_0, \\ c_0 = -1, \quad c_1 = -m_0.$$

Итак, получаем следующий ряд:

$$\tilde{h}(s) = -\frac{1}{s} \frac{1}{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{v_n}{n!} s^{n-1}} - 1 = -\frac{1}{s} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{n-1}}{v_1^n} s^{n-1} - 1 = \\ = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{n-1}}{v_1^n} s^{n-2} - 1 = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{v_1^{n+1}} s^{n-1} - 1.$$

Выпишем несколько первых членов найденного разложения:

$$(2) \quad \tilde{h}(s) = \frac{1}{v_1 s} + \left( \frac{v_2}{2v_1^2} - 1 \right) + \frac{3v_2^2 - 2v_1 v_3}{12v_1^3} s + \\ + \frac{3v_2^3 - 4v_1 v_2 v_3 + v_1^2 v_4}{24v_1^4} s^2 + \\ + \frac{45v_2^4 - 90v_1 v_2^2 v_3 + 20v_1^2 v_3^2 + 30v_1^2 v_2 v_4 - 6v_1^3 v_5}{720v_1^5} s^3 + o(s^3).$$

Если от изображения  $\tilde{h}(s)$  перейти к оригиналу  $h(t)$ , то получим следующее выражение:

$$h(t) = \frac{1}{v_1} + \left( \frac{v_2}{2v_1^2} - 1 \right) \delta(t) + \frac{3v_2^2 - 2v_1 v_3}{12v_1^3} \delta'(t) + \frac{3v_2^3 - 4v_1 v_2 v_3 + v_1^2 v_4}{24v_1^4} \delta''(t) + \\ + \frac{45v_2^4 - 90v_1 v_2^2 v_3 + 20v_1^2 v_3^2 + 30v_1^2 v_2 v_4 - 6v_1^3 v_5}{720v_1^5} \delta'''(t) + \dots,$$



где  $\delta(t)$  обозначает дельта-функцию Дирака, а  $\delta'(t)$ ,  $\delta''(t)$ ,  $\delta'''(t)$ , ... – её первую, вторую, третью и т.д. производные соответственно.

Известно (см., например, [6]), что решение уравнения (1) имеет вид

$$h(t) = f(t) + R * f,$$

где  $R(t)$  – резольвента уравнения (1), а символ  $*$  обозначает свертку функций. Применяя преобразование Лапласа к данному выражению, получаем

$$\tilde{h}(s) = \tilde{f}(s) + \tilde{R}(s)\tilde{f}(s).$$

Следовательно,

$$\tilde{R}(s) = \frac{\tilde{h}(s) - \tilde{f}(s)}{\tilde{f}(s)}.$$

Тогда с учетом того, что  $\tilde{h}(s) = \frac{\tilde{f}(s)}{1 - \tilde{f}(s)}$ , имеем:

$$\tilde{R}(s) = \frac{\frac{\tilde{f}(s)}{1 - \tilde{f}(s)} - \tilde{f}(s)}{\tilde{f}(s)} = \frac{\tilde{f}(s)}{1 - \tilde{f}(s)} = \tilde{h}(s).$$

Таким образом,

$$h(t) = f(t) + h * f$$

или

$$h(t) = f(t) + \tilde{h}(s)\tilde{f}(s).$$

Отсюда, если в последнее соотношение подставить ряд, содержащий дельта-функции, то получим решение в виде бесконечной суммы сверток дельта-функций и их производных с функцией  $f(t)$ . Приведем выкладку, обеспечивающую указанное разложение.

В силу известных из теории обобщенных функций свойств дельта-функции имеем (см. [3, 6]) в точках непрерывности функции  $f(t)$ :

$$\delta * f = f(t), \quad \delta' * f = f'(t), \quad \delta'' * f = f''(t), \quad \delta''' * f = f'''(t), \dots$$

а также

$$1 * f = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

В итоге получаем, что

$$\begin{aligned} h(t) = & f(t) + \frac{1}{v_1} \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau + \left( \frac{v_2}{2v_1^2} - 1 \right) f(t) + \\ & + \frac{3v_2^2 - 2v_1v_3}{12v_1^3} f'(t) + \frac{3v_2^3 - 4v_1v_2v_3 + v_1^2v_4}{24v_1^4} f''(t) + \\ & + \frac{45v_2^4 - 90v_1v_2^2v_3 + 20v_1^2v_3^2 + 30v_1^2v_2v_4 - 6v_1^3v_5}{720v_1^5} f'''(t) + \dots \end{aligned}$$

Или после упрощения:

$$\begin{aligned} (3) \quad h(t) = & \frac{1}{v_1} \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau + \frac{v_2}{2v_1^2} f(t) + \frac{3v_2^2 - 2v_1v_3}{12v_1^3} f'(t) + \\ & + \frac{3v_2^3 - 4v_1v_2v_3 + v_1^2v_4}{24v_1^4} f''(t) + \\ & + \frac{45v_2^4 - 90v_1v_2^2v_3 + 20v_1^2v_3^2 + 30v_1^2v_2v_4 - 6v_1^3v_5}{720v_1^5} f'''(t) + \dots \end{aligned}$$

В качестве первичного обоснования заметим, что

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = & \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{v_1} \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau + \frac{v_2}{2v_1^2} f(t) + \frac{3v_2^2 - 2v_1v_3}{12v_1^3} f'(t) + \dots \right) = \\ = & \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{v_1} \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau \right) = \frac{1}{v_1} \cdot \int_0^{+\infty} f(\tau) d\tau = \frac{1}{v_1}, \end{aligned}$$

в силу выполнения условия 4:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f''(t) = 0 \quad \text{и т.д.}$$

Отметим также, что полученное разложение для  $h(t)$  имеет только асимптотический характер при  $t \rightarrow +\infty$ . Действительно, в силу (2) коэффициенты выражаются через моменты распределения с плотностью  $f(t)$ :

$$\tilde{h}(s) = \frac{1}{v_1 s} + c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}(s)\tilde{f}(s) &= \frac{1}{v_1 s} \tilde{f}(s) + c_0 \tilde{f}(s) + c_1 s \tilde{f}(s) + c_2 s^2 \tilde{f}(s) + c_3 s^3 \tilde{f}(s) + \dots = \\
 &= \frac{1}{v_1 s} \tilde{f}(s) + c_0 \tilde{f}(s) + c_1 (s \tilde{f}(s) - f(0) + f(0)) + \\
 &+ c_2 (s^2 \tilde{f}(s) - s f(0) - f'(0) + s f(0) + f'(0)) + \\
 &+ c_3 (s^3 \tilde{f}(s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0) + s^2 f(0) + s f'(0) + f''(0)) + \dots = \\
 &= \frac{1}{v_1 s} \tilde{f}(s) + c_0 \tilde{f}(s) + c_1 f'(t) + c_2 f''(t) + c_3 f'''(t) + \dots + \\
 &+ c_1 f(0) + c_2 s f(0) + c_2 f'(0) + c_3 s^2 f(0) + c_3 s f'(0) + c_3 f''(0) + \dots = \\
 &= \frac{1}{v_1} \int_0^t f(x) dx + c_0 f(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k f^{(k)}(t) + f(0) (c_1 + c_2 s + c_3 s^2 + c_4 s^3 + \dots) + \\
 &+ f'(0) (c_2 + c_3 s + c_4 s^2 + c_5 s^3 + \dots) + f''(0) (c_3 + c_4 s + c_5 s^2 + \dots) + \\
 &+ f'''(0) (c_4 + c_5 s + c_6 s^2 + \dots) + \dots = \\
 &= \frac{1}{v_1} \int_0^t f(x) dx + c_0 f(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k f^{(k)}(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{k+1} f^{(k)}(0) + o(s), \quad (s \rightarrow 0).
 \end{aligned}$$

В результате получаем:

$$\begin{aligned}
 h(t) = f(t) + \tilde{\omega}(s)\tilde{f}(s) &= \frac{1}{v_1} \int_0^t f(x) dx + c_0 f(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k f^{(k)}(t) + \\
 &+ \delta(t) \sum_{k=1}^{+\infty} c_{k+1} f^{(k)}(0) + o(t), \quad (t \rightarrow +\infty).
 \end{aligned}$$

Берутся во внимание только первые три слагаемые в предположении, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_{k+1} f^{(k)}(0) < \infty.$$

Но по условию 5 имеем  $\exists C > 0: |f^{(n)}(0)| < C \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

А значит,

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} c_{k+1} f^{(k)}(0) \right| < \sum_{k=1}^{+\infty} c_{k+1} |f^{(k)}(0)| < C \sum_{k=1}^{+\infty} c_{k+1} < CA < +\infty.$$

Полученное разложение (3) можно записать более компактно:

$$h(t) = \frac{1}{v_1} \left[ F(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k}{v_1^k} F^{(k)}(t) \right],$$

где коэффициенты  $c_k$  определены выше.

Перейдем к функции восстановления. Соотношение  $h(t) = H'(t)$  в терминах преобразования Лапласа можно записать как  $\tilde{H}(s) = \tilde{h}(s) / s$ . Принимая во внимание (2), имеем

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tilde{h}(s)}{s} = \frac{1}{v_1 s^2} + \left( \frac{v_2}{2v_1^2} - 1 \right) \frac{1}{s} + \frac{3v_2^2 - 2v_1 v_3}{12v_1^3} + \frac{3v_2^3 - 4v_1 v_2 v_3 + v_1^2 v_4}{24v_1^4} s + \dots$$

Введем обозначения  $d_k$ , связанные с введенными выше  $c_k$ :

$$d_k = \frac{c_k}{v_1^{k+1}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

так что  $d_0 = \frac{1}{v_1}$ ,  $d_1 = \frac{v_2}{2v_1^2}$ ,  $d_2 = \frac{3v_2^2 - 2v_1 v_3}{12v_1^3}$ ,  $d_3 = \frac{3v_2^3 - 4v_1 v_2 v_3 + v_1^2 v_4}{24v_1^4}$ ,

$$d_4 = \frac{45v_2^4 - 90v_1 v_2^2 v_3 + 20v_1^2 v_3^2 + 30v_1^2 v_2 v_4 - 6v_1^3 v_5}{720v_1^5}.$$

Тогда

$$\tilde{H}(s) = \frac{d_0}{s^2} + (d_1 - 1) \frac{1}{s} + d_2 + d_3 s + d_4 s^2 + d_5 s^3 + d_6 s^4 + \dots$$

Следовательно,

$$H(t) = F(t) + L^{-1} \left[ \frac{d_0}{s^2} \tilde{f}(s) + (d_1 - 1) \frac{1}{s} \tilde{f}(s) + d_2 \tilde{f}(s) + d_3 s \tilde{f}(s) + d_4 s^2 \tilde{f}(s) + \dots \right],$$

где  $L^{-1}[G(s)]$  обозначает обратное преобразование Лапласа для функции  $G(s)$ .

Таким образом,

$$H(t) = F(t) + L^{-1} \left[ \frac{d_0}{s^2} \tilde{f}(s) \right] + (d_1 - 1) \int_0^t f(\tau) d\tau + \\ + d_2 f(t) + d_3 f'(t) + d_4 f''(t) + \dots =$$

$$= L^{-1} \left[ \frac{d_0}{s^2} \tilde{f}(s) \right] + d_1 F(t) + d_2 F'(t) + d_3 F''(t) + d_4 F'''(t) + \dots,$$

что совпадает с представлением

$$H(t) = \frac{1}{v_1} L^{-1} \left[ \frac{\tilde{f}(s)}{s^2} \right] - \frac{1}{v_1^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_{k+1}}{v_1^k} F^{(k)}(t)$$

с учётом  $d_k = \frac{c_k}{v_1^{k+1}}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ .

#### 4. Проверка разложения на тестовом распределении

Проверим формулу (3) на простом законе распределения, когда известно, чему равен в точности параметр потока отказов, а именно, показательном распределении с плотностью

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Как известно (см., например, [7,8]), в этом случае

$$(4) \quad h(t) \equiv \lambda.$$

Действительно, для показательного распределения имеем (см. [4]):

$$v_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad v_2 = \frac{2}{\lambda^2}, \quad v_3 = \frac{6}{\lambda^3}, \quad \dots, \quad v_n = \frac{n!}{\lambda^n},$$

т.е.

$$\frac{v_n}{n!} = \frac{1}{\lambda^n}.$$

Значит

$$m_k = \frac{v_1^k \cdot v_{k+2}}{(k+2)!} = \frac{1}{\lambda^{2k+2}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Тогда, пользуясь рекуррентной зависимостью для  $c_n$ , получаем

$$c_0 = -1, \quad c_1 = -\frac{1}{\lambda^2}, \quad c_2 = m_0 c_1 + m_1 = \frac{1}{\lambda^2} \left( -\frac{1}{\lambda^2} \right) - \frac{1}{\lambda^3} \frac{1}{\lambda} (-1) = 0,$$

$$c_3 = m_0 c_2 - m_1 c_1 - m_2 = 0 - \frac{1}{\lambda^3} \frac{1}{\lambda} \left( -\frac{1}{\lambda^2} \right) - \frac{1}{\lambda^4} \frac{1}{\lambda^2} (-1) = 0,$$

$$c_4 = m_0 c_3 - m_1 c_2 + m_2 c_1 + m_3 = 0 + 0 + \frac{1}{\lambda^4} \frac{1}{\lambda^2} \left( -\frac{1}{\lambda^2} \right) - \frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{\lambda^3} (-1) = 0,$$

$$c_5 = m_0 c_4 - m_1 c_3 + m_2 c_2 - m_3 c_1 - m_4 =$$

$$= 0 + 0 + 0 - \frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{\lambda^3} \left( -\frac{1}{\lambda^2} \right) + \frac{1}{\lambda^6} \frac{1}{\lambda^4} (-1) = 0.$$

Используя метод доказательства по индукции, получаем

$$c_n = m_0 c_{n-1} - m_1 c_{n-2} + m_2 c_{n-3} - \dots + (-1)^n m_{n-1} =$$

$$= 0 + 0 + \dots + \frac{1}{\lambda^n} \frac{1}{\lambda^{n-2}} \left( -\frac{1}{\lambda^2} \right) - \frac{1}{\lambda^{n-1}} \frac{1}{\lambda^{n+1}} (-1) = 0$$

Следовательно, для показательного распределения получаем

$$\tilde{h}(s) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{v_1^{n+1}} s^{n-1} - 1 = -1 + \frac{1}{sv_1} + \frac{1}{\lambda^2 v_1^2} = \frac{1}{\lambda^2 v_1^2} - 1 + \frac{1}{sv_1},$$

что означает

$$h(t) = f(t) + \frac{1}{v_1} \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau + \left( \frac{1}{\lambda^2 v_1^2} - 1 \right) f(t).$$

В итоге получаем

$$h(t) = \lambda e^{-\lambda t} + \frac{1}{v_1} \cdot \int_0^t \lambda e^{-\lambda \tau} d\tau + (1-1) \lambda e^{-\lambda t} = \lambda e^{-\lambda t} + \lambda \cdot (1 - e^{-\lambda t}) \equiv \lambda,$$

что согласуется с указанным выше свойством параметра потока отказов для показательного распределения (4).

## 5. Случай распределения Вейбулла – Гнеденко

Рассмотрим выражение для плотности вероятности неотрицательной случайной величины в виде

$$(5) \quad f(t) = \begin{cases} \alpha^\beta \beta t^{\beta-1} e^{-(\alpha t)^\beta}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0; \end{cases}$$

представляющее собой двухпараметрическое распределение Вейбулла – Гнеденко с параметром формы  $\beta > 0$ , являющейся

безразмерной величиной, и параметром масштаба  $\alpha > 0$ , имеющей размерность времени.

Начиная с 70-х годов прошлого века распределение Вейбулла – Гнеденко использовалось в весьма обширном спектре прикладных задач из самых разных областей знаний и нашло чрезвычайно широкое применение в машиностроении, приборостроении, радиоэлектронике, особенно в аспекте теории надёжности. Анализ данных на основе распределения Вейбулла – Гнеденко включает в себя: моделирование скорости ветра над океаном, изучение моделей продолжительности промышленных кризисов, динамические модели течения этнополитических конфликтов, задачи об оффшорных торгах по аренде нефтяных и газовых месторождений, описание процессов ползучести материалов, изучение проблем надёжности нефтепромыслового оборудования [7, 8, 9, 18, 20].

Преобразование Лапласа для данного распределения в терминах производящей функции моментов имеет вид:

$$\tilde{f}(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right) \left(\frac{s}{\alpha}\right)^n,$$

где  $s \in \mathbb{C}$ .

Найдем радиус сходимости ряда  $R$ , используя функциональное свойство и асимптотическое разложение для гамма-функции Эйлера (см., например [3]) в зависимости от значений параметра  $\beta > 0$ :

$$\Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right) = \frac{n}{\beta} \Gamma\left(\frac{n}{\beta}\right), \Gamma(x) = e^{-x} x^{x-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} \left[1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right], \quad (x \rightarrow +\infty),$$

$$\Gamma(1 + \kappa n) = \kappa n \Gamma(\kappa n) \approx \kappa n e^{-\kappa n} (\kappa n)^{\kappa n - \frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}, \quad (n \rightarrow +\infty),$$

где  $\kappa = \frac{1}{\beta}$ .

$$\begin{aligned}
 R &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n!} \Gamma(1 + \kappa n) \alpha^{-n}}{\frac{1}{(n+1)!} \Gamma(1 + \kappa(n+1)) \alpha^{-(n+1)}} = \\
 &= \alpha \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \Gamma(1 + \kappa n)}{\Gamma(1 + \kappa(n+1))} = \\
 &= \alpha \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \kappa n e^{-\kappa n} (\kappa n)^{\kappa n - \frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}}{\kappa(n+1) e^{-\kappa(n+1)} (\kappa(n+1))^{\kappa(n+1) - \frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} = \\
 &= \alpha \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n e^{\kappa} (\kappa n)^{\kappa n - \frac{1}{2}}}{(\kappa(n+1))^{\kappa(n+1) - \frac{1}{2}}} = \alpha \frac{e^{\kappa}}{\kappa^{\kappa}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{\kappa n - \frac{1}{2}} \frac{n}{(n+1)^{\kappa}} = \\
 &= \alpha \frac{e^{\kappa}}{\kappa^{\kappa}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-n\kappa} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \frac{n}{(n+1)^{\kappa}} = \\
 &= \alpha \frac{1}{\kappa^{\kappa}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{(n+1)^{\kappa}} = \begin{cases} 0, & \kappa > 1 \Leftrightarrow \beta < 1, \\ \alpha, & \kappa = 1 \Leftrightarrow \beta = 1, \\ \infty, & \kappa < 1 \Leftrightarrow \beta > 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Итак, при  $\beta > 1$  указанный ряд сходится абсолютно везде в области комплексных чисел, а при  $\beta \geq 1$  ряд сходится в окрестности нуля:  $|s| \leq \alpha$ . Предельная ситуация  $s \rightarrow 0$  соответствует случаю  $t \rightarrow +\infty$ , который нас интересует в первую очередь.

Докажем, что ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k m_k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{v_1^k \cdot v_{k+2}}{(k+2)!}$$

абсолютно сходится в случае распределения Вейбулла – Гнеденко.

Действительно,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |(-1)^k m_k| = \sum_{k=0}^{+\infty} m_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{v_1^k v_{k+2}}{(k+2)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left( \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right)^k \Gamma\left(1 + \frac{k+2}{\beta}\right)}{\alpha^{2k+2} (k+2)!}$$

в силу того, что



$$v_k = \frac{1}{\alpha^k} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}\right).$$

Для обоснования сходимости полученного ряда используем признак Даламбера, учитывая, что  $\beta > 1$ , и применяя формулу Стирлинга:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{m_{k+1}}{m_k} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{v_1^{k+1} \cdot v_{k+3} \cdot (k+2)!}{(k+3)! \cdot v_1^k \cdot v_{k+2}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{v_1}{k+3} \cdot \frac{v_{k+3}}{v_{k+2}} = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{1}{\alpha^{k+3}} \Gamma\left(1 + \frac{k+3}{\beta}\right)}{k+3 \frac{1}{\alpha^{k+2}} \Gamma\left(1 + \frac{k+2}{\beta}\right)} = \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k+3} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{k+3}{\beta}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{k+2}{\beta}\right)} = \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{k+3}{\beta}\right)^{\frac{k+3}{\beta} - \frac{1}{2}} e^{-\frac{k+3}{\beta}} \sqrt{2\pi}}{(k+3) \left(\frac{k+2}{\beta}\right)^{\frac{k+2}{\beta} - \frac{1}{2}} e^{-\frac{k+2}{\beta}} \sqrt{2\pi}} = \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{\beta}}}{\alpha^2} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k+3} \left(\frac{k+3}{k+2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{k+3}{\beta}\right)^{\frac{1+k+2}{\beta}}}{\left(\frac{k+2}{\beta}\right)^{\frac{k+2}{\beta}}} = \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{\beta}}}{\alpha^2} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{k+3}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}}{k+3} \left(\frac{k+3}{k+2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{k+3}{k+2}\right)^{\frac{k+2}{\beta}} = \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{\beta}}}{\alpha^2} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(k+3)^{\frac{1}{\beta}}}{k+3} \left(\frac{k+3}{k+2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left[\left(1 + \frac{1}{k+2}\right)^{k+2}\right]^{\frac{1}{\beta}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{\beta}} e^{\frac{1}{\beta}}}{\alpha^2} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} \lim_{k \rightarrow +\infty} (k+3)^{\frac{1}{\beta}-1} \left(\frac{k+2}{k+3}\right)^{\frac{1}{2}} = 0 < 1.$$

Численные расчеты, выполненные в среде Wolfram Mathematica, показывают, что  $-1 + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k m_k \neq 0$ ,  $\forall \beta > 0$ ,  $\forall \alpha > 0$ .

В частности, первые четыре коэффициента имеют вид

$$c_0 = \frac{1}{v_1}, \quad c_1 = \frac{v_2}{2v_1^2}, \quad c_2 = \frac{3v_2^2 - 2v_1v_3}{12v_1^3}, \quad c_3 = \frac{3v_2^3 - 4v_1v_2v_3 + v_1^2v_4}{24v_1^4},$$

$$c_4 = \frac{45v_2^4 - 90v_1v_2^2v_3 + 20v_1^2v_3^2 + 30v_1^2v_2v_4 - 6v_1^3v_5}{720v_1^5}.$$

Более того, учитывая общую формулу для производной  $n$ -го порядка от сложной функции из [3], которая для распределения Вейбулла – Гнеденко принимает вид

$$\left(e^{-(\alpha t)^\beta}\right)^{(k)} = e^{-(\alpha t)^\beta} t^{-k} \sum_{l=0}^k \sum_{j=0}^l \frac{(-1)^j \left(-(\alpha t)^\beta\right)^l (1 + \beta(l-j) - k)_k}{j!(l-j)!},$$

где  $(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$  – символ Похгаммера, можно записать следующую формулу для нахождения  $h(t)$ :

$$h(t) = \frac{1}{v_1} \left[ 1 - e^{-(\alpha t)^\beta} + e^{-(\alpha t)^\beta} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^k \sum_{j=0}^l \frac{c_k}{v_1^k t^k} \frac{(-1)^j \left(-(\alpha t)^\beta\right)^l (1 + \beta(l-j) - k)_k}{j!(l-j)!} \right].$$

**Замечание.** Следует отметить, что при  $\beta = 2$  (т.е. в случае распределения Рэлея [4]) формула для  $h(t)$  представляет собой разложение по ортогональным полиномам Чебышёва – Эрмита [3].

Укажем теперь выражение для функции восстановления в модели распределения Вейбулла – Гнеденко. В силу того, что в этом случае

$$\begin{aligned}
 L^{-1}\left[\frac{d_0}{s^2}\tilde{f}(s)\right] &= d_0\int_0^t(t-\tau)\alpha^\beta\beta\tau^{\beta-1}e^{-(\alpha\tau)^\beta}d\tau = \\
 &= d_0\alpha^\beta\beta\left[t\int_0^t\tau^{\beta-1}e^{-(\alpha\tau)^\beta}d\tau - \int_0^t\tau^\beta e^{-(\alpha\tau)^\beta}d\tau\right] = \\
 &= d_0\alpha^\beta\beta\left[\frac{t}{\alpha^\beta\beta}\gamma\left(1,(\alpha t)^\beta\right) - \frac{1}{\alpha^{\beta+1}\beta}\gamma\left(1+\frac{1}{\beta},(\alpha t)^\beta\right)\right] = \\
 &= d_0\left[tF(t) - \frac{1}{\alpha}\gamma\left(1+\frac{1}{\beta},(\alpha t)^\beta\right)\right],
 \end{aligned}$$

где  $\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt$  – неполная гамма-функция Эйлера [3], и ввиду равенств

$$\int_0^t \tau^\mu e^{-(\alpha\tau)^\beta} d\tau = \frac{1}{\alpha^{\mu+1}\beta} \cdot \gamma\left(\frac{\mu+1}{\beta}, (\alpha t)^\beta\right), \quad \gamma\left(1, (\alpha t)^\beta\right) = \int_0^{(\alpha t)^\beta} e^{-z} dz = F(t),$$

окончательно получаем следующее представление:

$$\begin{aligned}
 H(t) &= F(t) + d_0\left[t \cdot F(t) - \frac{1}{\alpha} \cdot \gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}, (\alpha t)^\beta\right)\right] + \\
 &+ (d_1 - 1)F(t) + d_2F'(t) + d_3F''(t) + \dots \\
 &= F(t)[1 + d_0t] - \frac{d_0}{\alpha} \gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}, (\alpha t)^\beta\right) + (d_1 - 1)F(t) + d_2F'(t) + d_3F''(t) + \dots = \\
 &= d_0t \cdot F(t) - \frac{d_0}{\alpha} \gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}, (\alpha t)^\beta\right) + d_1F(t) + d_2F'(t) + d_3F''(t) + \dots,
 \end{aligned}$$

где коэффициенты  $d_k = \frac{c_k}{v_1^{k+1}}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$

Другая запись полученного соотношения:

$$\begin{aligned}
 H(t) &= F(t)\left(\frac{1}{v_1}t + d_1\right) - \frac{d_0}{\alpha} \gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}, (\alpha t)^\beta\right) + \\
 &+ d_2F'(t) + d_3F''(t) + d_4F'''(t) + \dots
 \end{aligned}$$

Полученное соотношение согласуется с асимптотической формой функции восстановления [5] (асимптотика Смита), которая в наших обозначениях имеет вид:

$$H(t) = \frac{1}{v_1} t + d_1 - 1 + o(1), \quad t \rightarrow +\infty.$$

**Замечание.** В работах [9–12] подробно рассмотрены примеры прикладного использования полученных результатов в газовой отрасли промышленности.

## **6. Проблема моментов Чебышёва – Маркова – Стилтъеса**

### *6.1. ИСТОРИЧЕСКИЙ ЭКСКУРС*

Задача однозначного определения распределения вероятностей по последовательности ее моментов впервые (когда распределение рассматривается на отрезке конечной длины) была рассмотрена великим русским математиком и механиком П.Л. Чебышёвым еще в 1874 году в связи с исследованиями по предельным теоремам теории вероятностей. Данная задача носит название проблемы моментов, и позже оказалось, что она тесно связана с общей теорией ортогональных многочленов, теорией непрерывных дробей, теорией квадратурных формул. Только спустя 10 лет, в 1884 году в своей диссертации А.А. Марков, один из самых известных учеников Чебышёва, полностью обосновал проблему моментов Чебышёва, восполнив единственный пробел в работе Чебышева (отсутствие доказательства одного неравенства, был намечен только путь доказательства). Позже в 1885 году П.Л. Чебышёв распространяет все на случай функции, заданной в бесконечном интервале.

Почти одновременно с А.А. Марковым, но всё же несколько позже, аналогичные результаты по проблеме моментов опубликовал голландский математик Т. Стилтъес, не упоминая, к сожалению, о работах П.Л. Чебышёва и А.А. Маркова.

На основании первого тома фундаментальной монографии по теории вероятностей и математической статистике [4], а также известной книги [15] можно сделать вывод, что в зарубеж-

ной научной литературе ничего не известно про вклад в проблему моментов П.Л. Чебышёва, а есть только проблема моментов Стилтеса (если распределение задано на неотрицательной полуоси) и проблема моментов Гамбургера (если распределение задано на всей числовой оси). С учётом вышеизложенного, будем называть проблему моментов проблемой моментов Чебышёва – Маркова – Стилтеса.

### *6.2. КРИТЕРИИ ОДНОЗНАЧНОГО ЗАДАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ СВОИМИ МОМЕНТАМИ*

Имеются различные условия, с помощью которых возможна проверка единственности проблемы моментов, являющиеся как достаточными, так и необходимыми и достаточными в случае абсолютно непрерывного распределения, каким является, например, распределение Вейбулла – Гнеденко.

Условие Карлемана (см. [15]) для неотрицательной случайной величины состоит в проверке следующего условия:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (v_n)^{-\frac{1}{2n}} = +\infty,$$

где  $v_n$  – начальный момент случайной величины с плотностью  $f(t)$  порядка  $n$ :  $v_n = \int_0^{+\infty} t^n f(t) dt$ .

Критерий Крейна М.Г. заключается в том, что если для абсолютно непрерывной неотрицательной случайной величины выполнено условие (см. [15])

$$\int_0^{+\infty} \frac{-\ln f(x^2)}{1+x^2} dx < +\infty,$$

то она **не** определяется однозначно последовательностью своих моментов  $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ .

### *6.3. КРИТЕРИИ КАРЛЕМАНА И КРЕЙНА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА – ГНЕДЕНКО*

В случае распределения Вейбулла – Гнеденко (5)

$$v_n = \int_0^{+\infty} t^n \alpha^\beta \beta t^{\beta-1} e^{-(\alpha t)^\beta} dt = \alpha^\beta \beta \int_0^{+\infty} t^{n+\beta-1} e^{-(\alpha t)^\beta} dt = \frac{1}{\alpha^n} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right)$$

и условие Карлемана выполняется только не для всех значениях параметра формы  $\beta$ .

Действительно:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{\alpha^n} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right) \right)^{-\frac{1}{2n}} = \sqrt{\alpha} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right) \right)^{-\frac{1}{2n}}.$$

Но

$$\left( \Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right) \right)^{-\frac{1}{2n}} = e^{-\frac{1}{2n} \ln \Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right)}.$$

Из формулы Стирлинга следует, что

$$\ln \Gamma(1+x) \approx \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \frac{1}{2} \ln(2\pi), \quad (x \rightarrow +\infty)$$

и тогда

$$-\frac{1}{2n} \ln \Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right) = -\frac{1}{2\beta x} \ln \Gamma(1+x), \quad x = \frac{n}{\beta}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\beta x} \ln \Gamma(1+x) &\approx -\frac{1}{2\beta x} \left[ \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \frac{1}{2} \ln(2\pi) \right] = \\ &= -\frac{1}{2\beta} \ln x - \frac{1}{4\beta} \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2\beta} - \frac{\ln(2\pi)}{4\beta x} \sim -\frac{1}{2\beta} \ln x + \frac{1}{2\beta}, \quad (x \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$e^{-\frac{1}{2n} \ln \Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right)} \sim e^{\frac{1}{2\beta}} e^{-\frac{1}{2\beta} \ln \frac{n}{\beta}} = e^{\frac{1}{2\beta}} \left(\frac{n}{\beta}\right)^{-\frac{1}{2\beta}} = (e\beta) \frac{1}{2\beta} n^{-\frac{1}{2\beta}}, \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Итак,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right) \right)^{-\frac{1}{2n}} \sim (e\beta)^{\frac{1}{2\beta}} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\frac{1}{2\beta}}.$$

Ввиду того что

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\frac{1}{2\beta}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2\beta}}} = \begin{cases} < \infty, & \frac{1}{2\beta} > 1 \\ = \infty, & \frac{1}{2\beta} \leq 1 \end{cases},$$

окончательно получаем:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (v_n)^{-\frac{1}{2n}} = \sqrt{\alpha} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \Gamma \left( 1 + \frac{n}{\beta} \right) \right)^{-\frac{1}{2n}} = \begin{cases} < \infty, & \beta < \frac{1}{2}, \\ = \infty, & \beta \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Поэтому только при значении параметра формы  $\beta \geq 0,5$  проблема моментов для распределения Вейбулла – Гнеденко решается однозначным образом.

Можно также показать, что только при значении параметра формы  $\beta \geq 0,5$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln f(x^2)}{1+x^2} dx = \infty,$$

что означает однозначную определенность распределения Вейбулла – Гнеденко своими моментами в силу выполнения критерия Крейна [15].

### Литература

1. БЕЛЛИМАН Р., КУК И.К. *Дифференциально-разностные уравнения.* – М.: Изд-во «МИР», 1966. – 548 с.
2. ВИНЕР Н., ПЭЛИ Р. *Преобразование Фурье в комплексной области.* – М.: Наука, 1964. – 268 с.
3. ГРАДШТЕЙН И.С., РЫЖИК И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 1232 с.
4. КЕНДАЛЛ М.ДЖ., СТЬЮАРТ А. *Теория распределений.* – М.: Наука, 1966. – 587 с.
5. КОКС Д.Р., СМИТ В.Л. *Теория восстановления /* Под ред. и доп. Ю.К. Беляева. – М. Советское радио, 1967. – 299 с.
6. КРАСНОВ М.Л. *Интегральные уравнения: Введение в теорию.* – М.: Едиториал УРСС, 2010.– 304 с.

7. ОСТРЕЙКОВСКИЙ В.А. *Теория надёжности: Учебник для вузов* – М.: Высшая Школа, 2008. – 463 с.
8. ПОЛОВКО А.М., ГУРОВ С.В. *Основы теории надёжности*. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 704 с.
9. РУСЕВ В.Н. *Модели и методы построения вероятностно-статистических оценок для мониторинга показателей надёжности в диспетчерском управлении транспортом газа*: дис. канд. техн. наук: 05.13.01. – М., 2019. – 180 с.
10. РУСЕВ В.Н., СЕДЫХ И.А., СКОРИКОВ А.В. *Стратегия управления эксплуатационными затратами для модели Гнеденко – Вейбулла* // Труды XIII Всероссийского совещания по проблемам управления «ВСПУ–2019» [Электронный ресурс], Москва 17–30 июня 2019 г. – М.: ИПУ РАН, 2019. – С. 2879–2883.
11. РУСЕВ В.Н., СКОРИКОВ А.В. *Анализ элементов систем газоснабжения с помощью метода производящих функций моментов* // Сборник «Труды Российского государственного университета нефти и газа им. И.М. Губкина». – 2016. – №1(282). – С. 68–79.
12. РУСЕВ В.Н., СКОРИКОВ А.В. *Аналитические и дискретные методы в исследовании параметра потока отказов в транспорте газа* // Сборник «Труды Российского государственного университета нефти и газа им. И.М. Губкина». – 2016. – №3(284). – С. 104–117.
13. РУСЕВ В.Н., СКОРИКОВ А.В. *Аппроксимации функции восстановления и стратегия управления эксплуатационными затратами* // НТЖ «Проблемы управления». – 2018. – №4. – С. 28–35.
14. СЕВАСТЬЯНОВ Б.А. *Теория восстановления* // Итоги науки и техники. Теория вероятностей, матем. статистика, теор. кибернетика. – М.: ВИНТИ, 1974. – Т. 11. – С. 99–128.
15. СТОЯНОВ Й. *Контрпримеры в теории вероятностей*. – М.: МЦНМО, 2012. – 294 с.
16. ФЕЛЛЕР В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2*. – М.: ЛИБРОКОМ, 2010. – 766 с.



17. CONSTANTINE A.G., ROBINSON N.I. *The Weibull renewal function for moderate to large arguments*. // Computational Statistics & Data Analysis. – 1997. – No. 24. – P. 9–27.
18. ELSAYED E.A. *Reliability Engineering (Wiley Series in Systems Engineering and Management)*. – John Wiley & Sons Limited, 2012. – 795 p.
19. HANSCOM M.A., CLÉROUX R. *The block replacement problem* // J. of Statistical Computation and Simulation – 1975. – Vol. 3, No. 3. – P. 233–248.
20. RINNE H. *The Weibull Distribution: a handbook*. – Horst Rinne. London, New York: Chapman and Hall/CRC Press, 2009. – 784 p.
21. RUSEV V., SKORIKOV A. *On Solution of Renewal Equation in the Weibull-Gnedenko Model* // Reliability: Theory & Applications. – 2017. – Vol. 12, No. 4(47). – P. 60–68.
22. SMITH W.L., LEADBETTER M.R. *On the Renewal Function for the Weibull Distribution* // Technometrics. – 1963. – No. 5. – P. 393–396.

## ON SOME ASYMPTOTIC EXPANSION OF SOLUTION OF RENEWAL EQUATION

**Vladimir Rusev**, National University of Oil and Gas «Gubkin University», Moscow, Cand. Sc., senior lecturer (rusev.v@gubkin.ru).

*Abstract: In this paper, the renewal equation is studied. It is the Volterra integral convolution equation of the second kind with a difference kernel. This equation is considered both for the renewal density and for its primitive, the renewal function. The renewal function is essential in the theory of technical systems reliability not only as a descriptive characteristic, but also for operational strategies optimization in the preventive maintenance management, assuming the implementation of the recurrent recovery flows model. A certain analytical method is suggested for obtaining an asymptotic representation of the recovery equation solution for the special class of distributions under some given conditions. The validity of the stated expansion was checked for the exponential distribution, which is basic in the reliability mathematical theory. To show that the class of the described distributions is not an empty set, as an example, the two-parameter Weibull-Gnedenko distribution was considered, which is a natural generalization of the exponential distribution. The apparatus of series theory and the generating moment function method are used. The last is a Laplace transform of non-negative continuous random variable*

*density distributions. The Chebyshev-Markov-Stieltjes moment problem is also highlighted. It means the possibility of the unique distribution restoration by the sequence of its moments. This problem is significant for the mentioned expansion. The expression for the renewal equation solution in the case of the renewal density has the form of Gram-Charlier's type series in terms of probability moments.*

Keywords: renewal equation, renewal function, Laplace transform, moments generating function, Chebyshev-Markov-Stieltjes moment problem, Weibull-Gnedenko distribution.

УДК 519.218.4 + 517.956.8 + 517.968.22

ББК 22.161.6 + 30.14

DOI: 10.25728/ubs.2020.84.1

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Э.Ю. Калимулиной.*

*Поступила в редакцию 26.02.2020.*

*Опубликована 31.03.2020.*

# ПОРОГОВЫЕ МОДЕЛИ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ

Бреер В. В.<sup>1</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Исследованы модифицированные модели ведения боевых действий Ланчестера – Осипова, в которых учитываются три варианта психологических характеристик агентов: сдача в плен, уклонение от борьбы с возможным ее возобновлением и конформное дезертирство. Для первых двух вариантов используется пороговая модель ограниченного партнерства Шеллинга, для последней – пороговая модель конформного поведения Грановеттера. Так, у агента существует порог по отношению к доле дезертирующих с поля боя «своих». Если эта доля больше порога, то агент также присоединяется к убегающим (здесь порог соответствует уровню его дисциплины). Для модификации использованы функции распределения порогов конформности агентов. В качестве функции распределения выбрана двухпараметрическая бета-функция. Это обусловлено тем, что ее параметры позволяют содержательно проинтерпретировать такие характеристики, как соотношения «трусов» и «храбрецов» сражающихся сторон. Так, чем больше  $\alpha$ , тем больше «трусливых» агентов в группе. Чем больше  $\beta$ , тем больше «смелых» агентов в группе. В каждой из моделей численно решена система ОДУ для определенной функции распределения порогов, построены графики динамики количества агентов, участвующих в сражении, и полученные результаты проанализированы.*

Ключевые слова: коллективное поведение, пороговая модель, модель Ланчестера – Осипова, модель Шеллинга, модель Грановеттера.

## 1. Введение

Динамическая модель Ланчестера [16], или закон Ланчестера о ходе сражения (Combat), является инструментом теоретического прогноза результатов ведения боевых действий (Warfare) [21]. В целях подтверждения теоретических результатов были проведены многочисленные исследования по идентификации этой модели по данным о реальных сражениях [10, 12, 13]. Следует отметить, что в это же время аналогичные модели исследовал М. Осипов [6], математические результаты которого были аналогичными – система дифференциальных уравнений (1) ниже.

---

<sup>1</sup> Владимир Валентинович Бреер, к.т.н. (breer@live.ru).

Модель Ланчестера – Осипова описывает динамику истощения (Attrition) численности воюющих сторон в зависимости от их показателей *эффективности* ведения боевых действий. Так, рассмотрим две сражающихся группы  $N_1$  и  $N_2$ . Пусть в начальный момент времени число солдат (далее их будем называть агентами) в соответствующих группах равно  $n_1$  и  $n_2$ . Агрегированные показатели эффективности обозначим через коэффициенты  $K_1, K_2 \in (0, +\infty)$ , а количество сражающихся агентов в момент времени  $t \in [0, +\infty)$  – соответственно через  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ . Динамическая модель Ланчестера – Осипова описывает изменение количества живых агентов и имеет вид следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -K_2 x_2, \\ \dot{x}_2 = -K_1 x_1, \\ x_1(0) = n_1, x_2(0) = n_2. \end{cases}$$

Эта простейшая модель неоднократно модифицировалась в зависимости от типа боевых действий: применение артиллерии [21], партизанская или повстанческая войны [10, 17], возможность задействовать резервы [20], условия, приводящие к хаотическому поведению [11], учет иерархии [9], игровых [4, 8] и психологических [7]. В настоящей работе предлагается учесть психологические характеристики агентов. Для этого рассмотрены три возможных случая, показанные на рис. 1:

1. Сдача в плен противнику.
2. Временное уклонение от борьбы с возможностью возврата.
3. Конформное дезертирство.

Термин «конформное» применен в психологическом смысле. Уровень конформности агентов может быть определен психологическими тестами. Если в качестве идентификации модели использовать исторические данные военной статистики, то представляется целесообразным подбирать параметры модели (коэффициенты эффективности  $K_1, K_2 \in (0, +\infty)$  и функции распределения порогов (3) так, чтобы теоретические величины согласовывались с данными статистики.

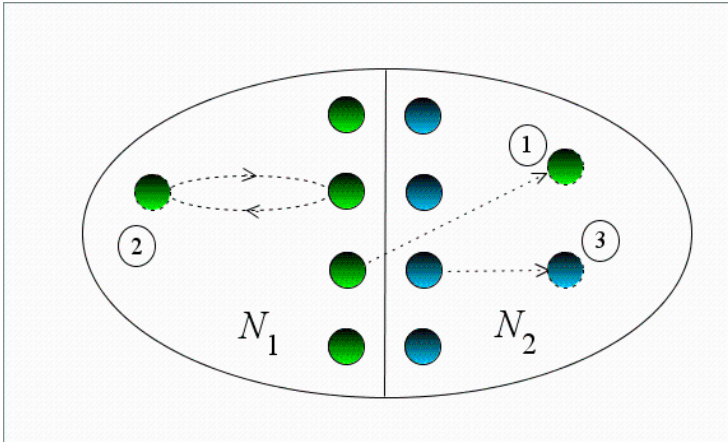


Рис. 1. Модели поведения агентов в ходе сражения

Для учета уклонения от борьбы была взята за основу *пороговая модель ограниченного окружения Шеллинга* (Bounded Neighborhood Model [19]), которая в данном контексте состоит в следующем. У каждого агента существует порог по отношению к доле сражающихся «своих». Если эта доля больше порога, то агент вступает в сражение. Иначе он уклоняется от борьбы.

Учет такого поведения вносит поправки в модель (1), зависящие от функции распределения порогов уклонения от борьбы. Возможны два случая: уклоняющийся от борьбы может сдаться или не сдаться в плен. Эти случаи отражены в соответствующих уточнениях модели.

Для учета конформности за основу взята *модель порогового конформного поведения Грановеттера* [1, 2, 14]. В рассматриваемом контексте она имеет следующую содержательную интерпретацию. У агента существует порог по отношению к доле дезертирующих с поля боя «своих». Если эта доля больше порога, то агент также присоединяется к убегающим (здесь порог соответствует уровню его дисциплины).

Ниже последовательно рассматриваются модель сдачи в плен противнику, модель уклонения от борьбы с возможным возвратом к ней и модель панического дезертирства. В каждой из моделей численно решается система ОДУ для определенной

функции распределения порогов и решения анализируются. Функция распределения выбирается так, чтобы ее параметры содержательно интерпретировались в соответствии с постановкой задачи.

## 2. Модель сдачи в плен противнику

Пусть в момент времени  $t$  все агенты делятся на сражающихся  $x_i(t)$ , сдавшихся в плен  $y_i(t)$  и убитых и раненых  $n_i - x_i(t) - y_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ .

Уменьшение числа сражающихся в момент времени  $\dot{x}_i = \dot{x}_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , зависит от:

1. Эффективного числа сражающихся противоположной группы  $K_{3-i}x_{3-i}$ , где  $K_{3-i}$  – эффективность ведения боя (согласно закону Ланчестера [16]).

2. Скорости сдавшихся в плен агентов этой группы в момент времени  $\dot{y}_i = \dot{y}_i(t)$ .

Агент группы  $N_i$ ,  $i = 1, 2$ , вступает в борьбу или сдается в плен в зависимости от своего порога. Если доля сражающихся «своих»  $\frac{x_i}{x_i + x_{3-i}}$  не меньше этого порога, то воин продолжает

борьбу. Пусть функции распределения порогов агентов равны  $F_i: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $i = 1, 2$ . Значит, величина  $F_i\left(\frac{x_i}{x_i + x_{3-i}}\right)$  пока-

зывает долю агентов, готовых продолжать борьбу. Соответственно, величина  $1 - F_i\left(\frac{x_i}{x_i + x_{3-i}}\right)$  показывает долю агентов

сдающихся в плен, а скорость числа сдающихся в плен  $\dot{y}_i$ ,  $i = 1, 2$ , зависит от числа сдающихся в плен  $\left(1 - F_i\left(\frac{x_i}{x_i + x_{3-i}}\right)\right)x_i$ . Будем

считать эту зависимость пропорциональной, а коэффициент пропорциональности для простоты опустим. Таким образом получим равенство между этими двумя величинами.

считать эту зависимость пропорциональной, а коэффициент пропорциональности для простоты опустим. Таким образом получим равенство между этими двумя величинами.

Согласно сделанным предположениям динамику можно записать в следующем виде:

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}_i = -K_{3-i}x_{3-i} - \dot{y}_i, i = 1, 2, \\ \dot{y}_i = \left( 1 - F_i \left( \frac{x_i}{x_i + x_{3-i}} \right) \right) x_i, \\ x_1(0) = n_1, x_2(0) = n_2, y_1(0) = 0, y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим в качестве функции распределения порогов бета функцию:

$$(3) \quad F_i(x) = I(x, \alpha_i, \beta_i) = \frac{\int_0^x z^{1-\alpha_i} (1-z)^{1-\beta_i} dz}{\int_0^1 z^{1-\alpha_i} (1-z)^{1-\beta_i} dz},$$

где  $\alpha_i \in [0, \infty)$ ,  $\beta_i \in [0, \infty)$ ,  $i = 1, 2$ .

Выбор этого распределения обусловлен прозрачной содержательной интерпретацией параметров  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  как величин соотношений «трусов» и «храбрецов» в распределении. Так, чем больше  $\alpha_i$ , тем больше трусливых агентов в группе  $N_i$ . Чем больше  $\beta_i$ , тем больше смелых агентов в группе  $N_i$ . Таким образом,  $\alpha_i$  – это степень *трусости*, а  $\beta_i$  – степень *храбрости*.

Пусть группа  $N_1$  состоит из равного количества «трусов» и «храбрецов» ( $\alpha_1 = \beta_1 = 0,2$ ), а группа  $N_2$  – в основном из «трусов» ( $\alpha_2 = 2, \beta_2 = 0,2$ ). Графики функций распределения (3) с указанными параметрами изображены на Рис. 2, где кривая зеленого цвета соответствует группе  $N_1$ , а синего –  $N_2$ .

Пусть первоначальное количество агентов одинаково:  $n_1 = n_2 = 1000$ , а также одинаковы эффективности борьбы:  $K_1 = K_2 = 1$ . Численно решая систему (2), получим графики зависимости числа живых  $x_i(t) + y_i(t)$  и числа сдавшихся в плен  $y_i(t)$ , изображенные на Рис. 3. Из этих графиков видно, что в момент окончания сражения группа синих  $N_2$  потерпела поражение – их осталось только 400 агентов в плену. В группе  $N_1$  выжило 600 агентов, из которых 270 сдалось в плен.

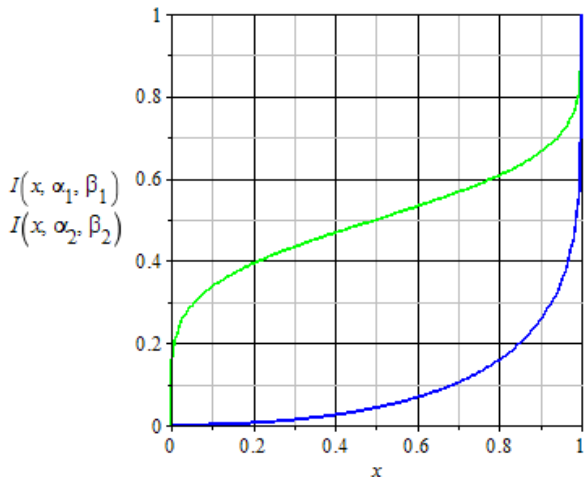


Рис. 2. Бета распределения порогов двух групп

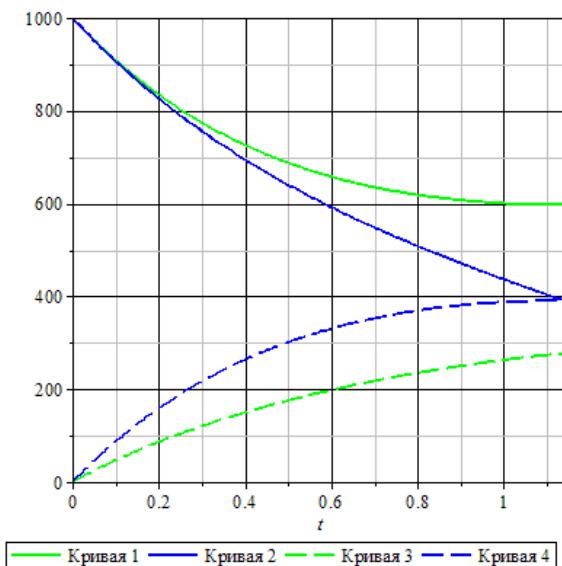


Рис. 3. Число живых:  $x_1(t) + y_1(t)$  – кривая 1 и  $x_2(t) + y_2(t)$  – кривая 2; число сдавшихся в плен:  $y_1(t)$  – кривая 3,  $y_2(t)$  – кривая 4 для модели сдачи в плен противнику



### 3. Модель уклонения от борьбы с возможным возвратом к ней

Пусть в момент времени  $t$  все агенты делятся на сражающихся  $x_i(t)$ , временно уклоняющихся от борьбы  $y_i(t)$  и убитых и раненых  $n_i - x_i(t) - y_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ .

Уменьшение числа сражающихся в единицу времени  $\dot{x}_i$ ,  $i = 1, 2$ , зависит от:

1. Эффективного числа сражающихся противоположной группы  $K_{3-i}x_{3-i}$ , где  $K_{3-i}$  – эффективность ведения боя (согласно закону Ланчестера [16]).

2. Скорости временно уклоняющихся от борьбы этой группы в единицу времени  $\dot{y}_i$ .

Агент группы  $N_i$ ,  $i = 1, 2$ , вступает в борьбу или уклоняется в зависимости от своего порога. Если доля сражающихся «своих»  $\frac{x_i}{x_i + x_{3-i}}$  не меньше этого порога, то воин продолжает борьбу.

Пусть функции распределения порогов агентов равны  $F_i: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $i = 1, 2$ . Значит величина  $F_i\left(\frac{x_i}{x_i + x_{3-i}}\right)$  показывает долю агентов, готовых продолжать борьбу.

Таким образом, *скорость* временно уклоняющихся от борьбы в единицу времени  $\dot{y}_i$ ,  $i = 1, 2$ , зависит от:

– числа уклоняющихся от борьбы  $\left(1 - F_i\left(\frac{x_i}{x_i + x_{3-i}}\right)\right)x_i$  (увеличение скорости бегства).

– числа уклонистов, готовых обратно вступить в бой  $F_i\left(\frac{x_i}{x_i + x_{3-i}}\right)y_i$  (уменьшение скорости бегства).

Согласно сделанным предположениям динамику истощения можно записать в следующем виде:

$$(4) \begin{cases} \dot{x}_i = -K_{3-i}x_{3-i} - \dot{y}_i, i=1,2, \\ \dot{y}_i = \left(1 - F_i\left(\frac{x_i}{x_i + x_{3-i}}\right)\right)x_i - F_i\left(\frac{x_i}{x_i + x_{3-i}}\right)y_i, \\ x_1(0) = n_1, x_2(0) = n_2, y_1(0) = 0, y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим опять в качестве функции распределения порогов бета функцию (3) с параметрами, как в предыдущем разделе и графиками, изображенными на Рис. 2.

Пусть первоначальное количество агентов одинаково:  $n_1 = n_2 = 1000$ , а также одинаковы эффективности борьбы:  $K_1 = K_2 = 1$ . На Рис. 4 изображены соответствующие графики для модели уклонения от борьбы с возможным возвратом к ней.

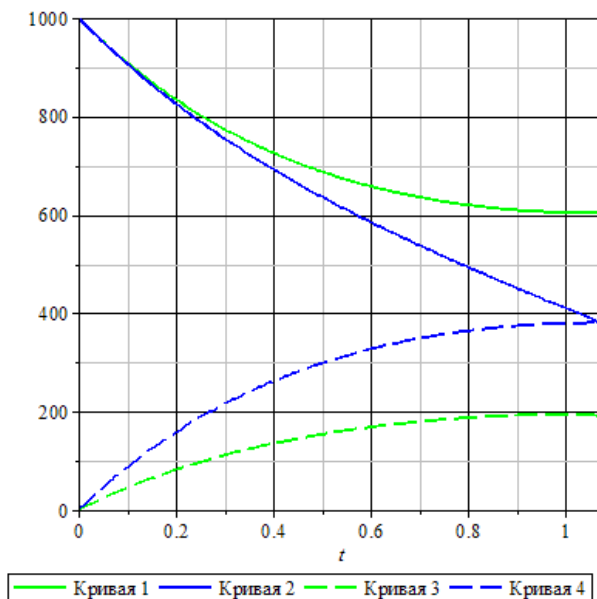


Рис. 4. Число живых:  $x_1(t) + y_1(t)$  – кривая 1 и  $x_2(t) + y_2(t)$  – кривая 2; число сдавшихся в плен:  $y_1(t)$  – кривая 3,  $y_2(t)$  – кривая 4 для модели уклонения от борьбы с возможным возвратом к ней

Динамика и конечный результат для группы синих агентов  $N_2$  почти не изменились по сравнению с моделью со сдачей в плен: их сдалось в плен 380 (вместо 400 в модели с пленением). Борьба длилась немного короче – 1,1 единицу времени по сравнению с 1,14 в модели с пленением. В живых агентов группы  $N_1$  осталось столько же, а уклонилось от борьбы 200 вместо 270 в модели со сдачей в плен. Последние два эффекта связаны с тем, что у агентов была возможность вернуться в борьбу, видя, что их группа побеждает. Соответственно время сражения стало короче и в, конечном итоге, меньше уклонилось от борьбы, чем сдалось в плен в предыдущей модели.

Итак, видно, как выражается преимущество в смелости группы  $N_1$  перед группой  $N_2$  при равных значениях эффективностей  $K_1 = K_2$  и начальных численностей  $n_1 = n_2$ . Справедливо поставить следующие вопросы: каким значением эффективности, или какой начальной численностью группы, можно компенсировать результат сражения в пользу этой группы, если в нее входят менее храбрые агенты. Иными словами, насколько должно быть больше агентов или выше эффективность вооружения, чтобы, командуя «трусам», с этим преимуществом можно было бы все же выиграть сражение.

Для ответов на эти вопросы рассмотрим два случая.

1. *Базисная* группа агентов, для которой выбраны следующие параметры  $\alpha_i = 0,5$ ,  $\beta_i = 2$ ,  $n_1 = 1000$  и  $K_1 = 1$ . То есть это группа с преобладанием *смелых* агентов. Пусть  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $K$ ,  $n$  – соответствующие параметры группы, с которой она ведет борьбу. На левом графике Рис. 5 изображена так называемая *поверхность безразличия*  $\{(\alpha, \beta): K(\alpha, \beta) > 1\}$  для эффективности  $K = K(\alpha, \beta)$  при одинаковом первоначальном количестве агентов  $n_1 = n_2 = 1000$ . Если точка  $(\alpha, \beta, K)$  лежит выше этой поверхности, то базисная группа проигрывает битву. Если точка  $(\alpha, \beta, K)$  лежит ниже этой поверхности, то базисная группа выигрывает битву. Когда точка  $(\alpha, \beta, K)$  находится на поверхности, то борьба заканчивается вничью – сражающиеся стороны истощают друг друга и в живых остаются только уклонисты. На правом графике Рис. 5 изображена *поверхность безразличия*  $\{(\alpha, \beta): n(\alpha, \beta) > 1000\}$  для начального числа агентов  $n = n(\alpha, \beta)$  при

фиксированной эффективности  $K = K_1 = 1$ . На гиперплоскостях  $(\alpha, \beta, K = 1)$  и  $(\alpha, \beta, n = 1000)$  базисная группа проигрывает.

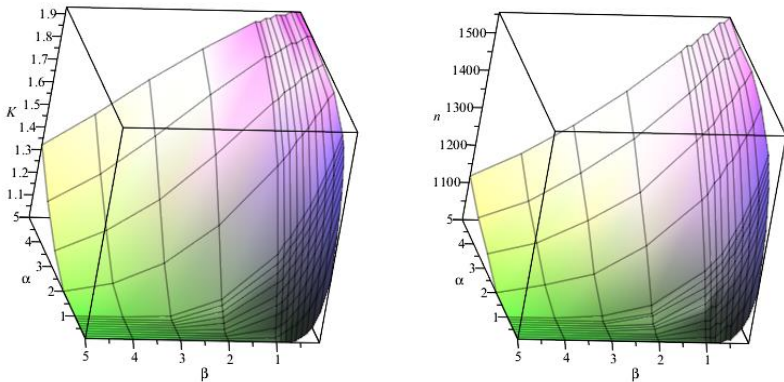


Рис. 5. Поверхности безразличия для базисной группы смелых агентов

2. Базисная группа агентов, для которой выбраны следующие параметры  $\alpha_i = 0,5$ ,  $\beta_i = 0,2$ ,  $n_1 = 1000$  и  $K_2 = 1$ . То есть это группа со смешанным количеством трусливых и смелых агентов. Пусть  $\alpha, \beta, K, n$  — соответствующие параметры группы, с которой она ведет борьбу. На левом графике Рис. 6, как и в случае 1, изображена поверхность безразличия для эффективности  $K = K(\alpha, \beta)$  при одинаковом первоначальном количестве агентов  $n_1 = n_2 = 1000$ . На правом графике Рис. 6 изображена поверхность безразличия для параметров  $(\alpha, \beta, n)$  при фиксированной эффективности  $K = K_1 = 1$ . В данном случае гиперплоскости  $(\alpha, \beta, K = 1)$  и  $(\alpha, \beta, n = 1000)$ , где базисная группа проигрывает, занимают большую площадь, чем в случае 1. Это происходит из-за того, что в базисной группе присутствует больше трусливых агентов.

Таким образом, можно ставить и решать задачи управления: зная распределение порогов своих агентов, командир может принимать решения либо об увеличении их численности, либо выбирать способы более эффективного ведения боевых действий, что, возможно, сопряжено с дополнительными затратами, и т.д.

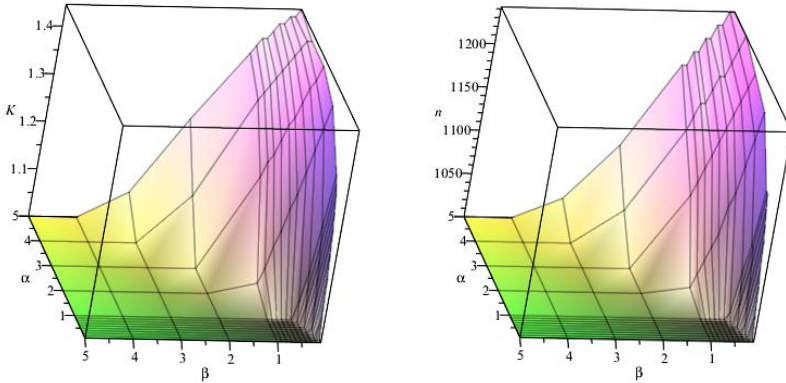


Рис. 6. Поверхности безразличия для базисной смешанной группы смелых и трусливых агентов

#### 4. Модель конформного дезертирства

Пусть в момент времени  $t$  все агенты делятся на сражающихся  $x_i(t)$ , дезертиров  $y_i(t)$  и убитых  $n_i - x_i(t) - y_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ .

Уменьшение числа сражающихся в единицу времени  $\dot{x}_i$ ,  $i = 1, 2$ , зависит от:

- эффективного числа сражающихся противоположной группы  $K_{3-i}x_{3-i}$ , где  $K_{3-i}$  – эффективность ведения сражения.
- числа дезертиров этой группы в единицу времени  $\dot{y}_i$ .

Агент группы  $N_i$ ,  $i = 1, 2$ , продолжает в борьбу или дезертирует в зависимости от своего порога. Если доля уже покинувших поле боя дезертиров  $\frac{y_i}{x_i + y_i}$  не меньше этого порога, то

агент так же покидает поле сражения (интерпретация модели Грановеттера [3]). Пусть функции распределения порогов агентов равны  $F_i: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $i = 1, 2$ . Значит, величина

$F_i\left(\frac{y_i}{x_i + y_i}\right)$  показывает долю агентов, готовых дезертировать.

Таким образом, изменение числа уклоняющихся от борьбы

в единицу времени  $\dot{y}_i$ ,  $i = 1, 2$ , зависит от числа сдающихся в плен  $F_i \left( \frac{y_i}{x_i + y_i} \right) x_i$ .

Согласно сделанным предположениям динамику можно записать в следующем виде:

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{x}_i = -K_{3-i}x_{3-i} - \dot{y}_i, i = 1, 2, \\ \dot{y}_i = F_i \left( \frac{y_i}{x_i + y_i} \right) x_i, \\ x_1(0) = n_1, x_2(0) = n_2, y_1(0) = 0, y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Если  $F_i(0) = 0$ , то изменения количества дезертиров не происходит, поэтому, чтобы увидеть изменение модели Ланчестера вследствие этого явления, будем считать, что ненулевая доля агентов имеет нулевые пороги:

$$(6) \quad F_i(0) \neq 0, i = 1, 2.$$

Выберем в качестве функции распределения порогов распределение (3), модифицированное так, чтобы выполнялось условие (6):

$$(7) \quad F_i(x) = a_i + (1 - a_i)I(x, \alpha_i, \beta_i), a_i \in [0, 1], i = 1, 2.$$

Функция вида (7) использовалась в моделях управления толпой (см. [3, 4]).

Выберем те же параметры бета распределения, что и в предыдущих моделях, но здесь они будут иметь другие содержательные интерпретации:  $\alpha_i$  — характеризует долю агентов в распределении (3), не подверженных панике;  $\beta_i$  — характеризует долю паникеров. Так группа  $N_1$  состоит из равного количества «паникеров» и не подверженных панике агентов ( $\alpha_i = \beta_i = 0,2$ ), а группа  $N_2$  — в основном из не подверженных панике ( $\alpha_2 = 2, \beta_2 = 0,2$ ). Для  $a_1 = a_2 = 0,1$  графики распределения порогов (7) будут выглядеть, как показано на Рис. 7.

Пусть первоначальные количества агентов одинаковы:  $n_1 = n_2 = 1000$ , а также одинаковы эффективности борьбы:  $K_1 = K_2 = 1$ . На Рис. 8 изображены графики решения системы (5) модели с дезертирами с функциями распределения порогов (7).

Как и следовало ожидать, группа  $N_1$  проиграла сражение, при этом дезертировало 225 агентов.

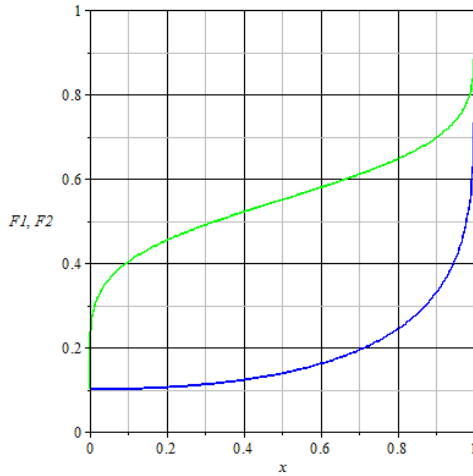


Рис. 7. Распределения порогов конформистов (7)

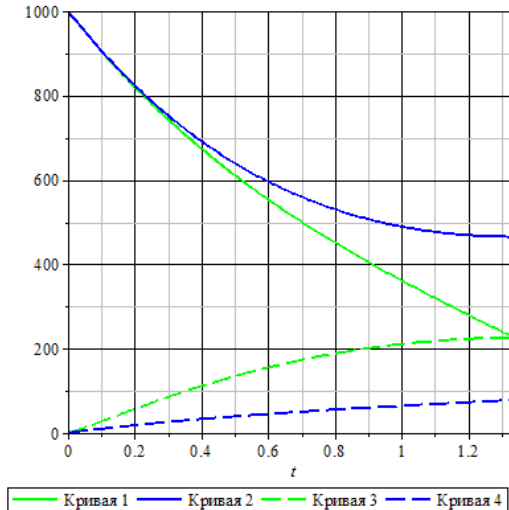


Рис. 8. Число живых:  $x_1(t) + y_1(t)$  – кривая 1 и  $x_2(t) + y_2(t)$  – кривая 2; число сдавшихся в плен:  $y_1(t)$  – кривая 3,  $y_2(t)$  – кривая 4 для модели конформного дезертирства

## 5. Заключение

Приведенные в статье модели модифицируют модель ведения боевых действий Ланчестера [16], учитывая психологические аспекты агентов воюющих сторон. Для этих целей выбраны две модели - Шеллинга [19] и Грановеттера [14], которые являются хрестоматийными для пороговых моделей социологии.

В результате проведенного исследования предложены варианты динамических систем, параметры которых содержательно интерпретируются в рамках описания боевых действий. После их численного решения при различных значениях параметров моделей, исследованы эффекты влияния смелости, трусости и паники на конечное соотношение численности оставшихся в живых агентов, сдавшихся в плен, уклонившихся от борьбы и дезертиров соответственно.

## Литература

1. БРЕЕР В.В. *Теоретико-игровые модели конформного поведения*. // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №10. – С. 111–126.
2. БРЕЕР В.В., РОГАТКИН А.Д. *Вероятностная модель порогового поведения в многоагентных системах* // Автоматика и телемеханика. – 2015. – №8. – С. 56–77.
3. БРЕЕР В.В., НОВИКОВ Д.А., РОГАТКИН А.Д. *Микро- и макромоделли управления толпой. Ч.1. Основы теории* // Проблемы управления. – 2014. – №5. – С. 28–33.
4. БРЕЕР В.В., НОВИКОВ Д.А., РОГАТКИН А.Д. *Микро- и макромоделли управления толпой. Ч. 2. Идентификация и имитационные эксперименты* // Проблемы управления. – 2014. – №6. – С. 45–51.
5. НОВИКОВ Д.А. *Иерархические модели военных действий* // Управление большими системами. – 2012. – Вып. 37. – С. 25–62.
6. ОСИПОВ М.П. *Влияние численности сражающихся сторон на их потери* // Военный сборник. – 1915. – №6. – С. 59–74; №7. – С. 25–36; №8. – С. 31–40; №9. – С. 25–37.



7. ШУМОВ В.В. *Учет психологических факторов в моделях боя (конфликта)* // Компьютерные исследования и моделирование. – 2016. – Т. 8, №6. – С. 951–964.
8. ШУМОВ В.В. *Теоретико-игровая модель обороны стационарных объектов* // Системы управления и информационные технологии. – 2019. – №2(76). – С. 18–21.
9. ШУМОВ В.В. *Иерархия моделей боевых действий и пограничных конфликтов* // Управление большими системами. – 2019. – Вып. 79. – С. 86–111.
10. BLANK L., ENOMOTO C.E., GEGAX D., MCGUCKIN T., SIMMONS C. *A Dynamic Model of Insurgency: The Case of the War in Iraq* // Peace Economics, Peace Science, and Public Policy. – 2008. – Vol. 14, No. 2. – P. 1–28.
11. DEWAR J.A., GILLOGLY J.J., JUNCOSA M. L. *Non-Monotonicity, Chaos and Combat Models*. – Santa Monica, CA: RAND Corporation, 1991.
12. ENGEL J.H. *A Verification of Lanchester's Law* // Journal of the Operations Research Society of America. – May 1954. – Vol. 2, No. 2. – P. 163–171.
13. FRICKER R.D.JR. *Attrition Models of the Ardennes Campaign* // Naval Research Logistics. – 1998. – Vol. 45.
14. HELMBOLD R.L. *Osipov: The 'Russian Lanchester'* // European Journal of Operational Research. – 1992. – No. 65. – P. 278–288.
15. GRANOVETTER M. *Threshold Models of Collective Behavior* // AJS. – 1978. – Vol.83, No. 6. – P. 1420–1443.
16. LANCHESTER F.W. *Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm* // Engineering. – 1914. – Vol. 98.–P. 422–423; 452–454.
17. KIPP J. *Tracking Down Russia's Lanchester* // The Journal of Slavic Military Studies. – 2004. – Vol. 17, No. 2. – P. 257–269.
18. SCHAFFER M.B. *Lanchester Models of Guerrilla Engagements*. – The Rand Corporation, 1968.
19. SCHELLING T. *Dynamic Models of Segregation* // Journal of Mathematical Sociology. – 1971. – Т. 1. – P. 143–186.
20. SHEEBA P.S., GHOSE D. *Optimal resource partitioning in conflicts based on Lanchester (n, 1) attrition model* // American Control Conference, 14-16 June 2006.

21. TAYLOR J.G., BROWN G.G. *Annihilation Prediction for Lanchester-Type Models of Modern Warfare // Operations Research*. – July-August 1983. – Vol. 31, No. 4. – P. 752–771.

## THRESHOLD MODELS OF WARFARE

**Vladimir Breer**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Cand.Sc., (breer@live.ru).

*Abstract: Modified models of the conduct of hostilities by Lanchester - Osipov are studied, in which three variants of the psychological characteristics of agents are taken into account: surrender, evasion of the struggle against its possible resumption, and conformal desertion. For the first two options, the threshold model of Schelling's limited partnership is used; for the latter, the threshold model of Granovetter's conformal behavior. So, the agent has a threshold in relation to the proportion of "ours" deserting from the battlefield. If this fraction is greater than the threshold, then the agent also joins the runaways (here the threshold corresponds to the level of his discipline). For modification, the distribution functions of the thresholds of conformity of agents were used. The two-parameter beta function with the distribution density  $x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}$ . is selected as the distribution function. This is due to the fact that its parameters allow meaningful interpretation of such characteristics as the ratio of "cowards" and "brave men" of the fighting parties. So, the more  $\alpha$ , the more "cowardly" agents in the group. The more  $\beta$ , the more "bold" agents in the group. In each of the models, the ODE system was numerically solved for a certain threshold distribution function, the dynamics of the number of agents participating in the battle were plotted, and the results were analyzed.*

**Keywords:** collective behavior, threshold model, Lanchester's model, Schelling's model, Granovetter's model.

УДК 519.833.2

ББК 22.176

DOI: 10.25728/ubs.2020.84.2

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А.Г. Чхартишвили.*

*Поступила в редакцию 18.03.2020.*

*Опубликована 31.03.2020.*

# ОБ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛОСКОСТИ

Турцынский М. К.<sup>1</sup>

(Российский университет транспорта (ПУТ МИИТ), Москва)

*Рассмотрена двумерная по пространству система уравнений идеального политропного газа на вращающейся плоскости, возникающая в задаче динамики атмосферы. В общей постановке система очень сложна, однако она допускает решения с линейным по пространственным переменным профилем скорости (отвечающим движениям с однородной деформацией), нахождение которых сводится к решению квадратично-нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта система обладает двумя семействами особых точек: однопараметрическим вихревым и двухпараметрическим, отвечающим сдвиговому течению газа, которое всегда является неустойчивым. Устойчивость этих особых точек означает устойчивость стационарных решений исходной системы в классе возмущений с линейным профилем скорости. В работе исследуется однопараметрическое семейство особых точек, отвечающее стационарному вихревому движению, параметр отвечает интенсивности вихря и может изменяться на всей действительной оси. Ранее были найдены промежутки изменения параметра, в которых имеет место неустойчивость, а также устойчивость по Ляпунову. Эти промежутки, однако, не покрывали всю действительную ось. Для оставшихся интервалов матрица линеаризации имеет три пары комплексно-сопряженных собственных значений с нулевыми действительными частями, поэтому исследование устойчивости традиционными методами затруднено. Мы исследуем этот вопрос при помощи перехода в лагранжесвы координаты. Удастся построить оценки, которые дают интервалы гарантированной устойчивости. Для газа с одной, двумя и тремя степенями свободы вопрос об устойчивости решен полностью.*

Ключевые слова: идеальный политропный газ, движение с однородной деформацией, положения равновесия.

## 1. Введение и постановка задачи

Рассматривается система уравнений в частных производных, задающая движение идеального политропного газа на плоскости

---

<sup>1</sup> Марко Казимирович Турцынский, ассистент (M13041@yandex.ru).

в поле силы Кориолиса:

$$(1) \quad \varrho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathcal{L} \mathbf{u}) + \nabla p = 0, \quad \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t p + (\mathbf{u} \cdot \nabla p) + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

Здесь  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ ,  $\varrho(t, \mathbf{x})$  и  $p(t, \mathbf{x})$  – скорость, плотность и давление газа соответственно;  $\mathcal{L} = lL$ ,  $L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $l = \text{const} > 0$  – параметр Кориолиса;  $\nabla$  и  $\operatorname{div}$  – градиент и дивергенция по пространственным переменным;  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ ;  $\gamma \in [1, 2]$  – показатель адиабаты.

Эта система возникает в задачах динамики атмосферы. Она получается из трехмерной модели путем осреднения по вертикальной координате (в предположении, что вертикальный масштаб процессов существенно мал по сравнению с горизонтальным, [5, 18]). Системы уравнений такого рода сложны для изучения в общем случае, часто (например, в задачах механики сплошных сред) рассматривают подклассы решений с линейным профилем скорости

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = Q(t)\mathbf{x}, \quad Q = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}.$$

В таком случае система уравнений в частных производных (1) может быть сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, исследование которой значительно упрощает задачу [14–17]:

$$(2) \quad \dot{R} + RQ + Q^T R + (\gamma - 1) \operatorname{tr} QR = 0, \quad \dot{Q} + Q^2 + \mathcal{L}Q + 2c_0 R = 0.$$

Здесь симметрическая матрица  $R = R(t) = \begin{pmatrix} A(t) & \frac{1}{2}B(t) \\ \frac{1}{2}B(t) & C(t) \end{pmatrix}$  описывает распределение плотности и давления внутри материального объема газа,  $c_0 = \text{const}$ .

Система (2) давно изучалась в двумерном и трехмерном случаях при отсутствии вращения в эйлеровых и лагранжевых координатах. В частности, в работе Г. Дирихле [9] для несжимаемого случая были найдены первые интегралы системы; сжимаемый случай впервые рассматривался в работе Л.В. Овсянникова [6], где была дана классификация случаев интегрируемости системы. Работы последнего продолжались работами Д. Линденбелла [13]

и Я.Б. Зельдовича [4] по расширению газового эллипсоида в вакууме, работой Ф. Дайсона [3], где рассматривался случай изотермического течения без предположения о политропности газа. Далее последовал цикл работ Б. Гаффэ [10–12], где найдены первые интегралы, исследована интегрируемость для случая одноатомного газа ( $\gamma = \frac{5}{3}$ ). Большое число результатов содержится в книге О.И. Богоявленского [2], где, в частности, получен лагранжевы вид системы (2), приведены примеры распределений плотности и давления газа. Результаты были по большей части получены в лагранжевых координатах.

В работах О.С. Розановой [14, 15], О.С. Розановой и автора настоящей статьи [16, 17] данная модель исследовалась для случая  $l > 0$ , рассматривались ее особые точки. В механике сплошных сред они соответствуют стационарным состояниям газа. Было показано, что система имеет особую точку, отвечающую вихревому движению:

$$(3) \quad a = d = 0, b = -c = b^*, A = C = \frac{b^*(b^*-l)}{2c_0}, B = 0,$$

и две особые точки, отвечающие сдвиговому течению, которые являются неустойчивыми. Там же в эйлеровых координатах было показано, что при  $b^* \in (0, l)$  особая точка, отвечающая вихревому движению, является устойчивой по Ляпунову, при  $b^* \in \mathbb{R}/[\frac{1-\sqrt{2}}{2}l, \frac{1+\sqrt{2}}{2}l]$  – неустойчивой. На оставшихся интервалах  $b^* \in (\frac{1-\sqrt{2}}{2}l, 0) \cup (l, \frac{1+\sqrt{2}}{2}l)$  собственные значения матрицы линейного приближения имеют 3 пары чисто мнимых комплексно-сопряженных значений, и теория линейного приближения неприменима. Исследование устойчивости возможно при помощи метода нормальных форм, основанном на критерии Бибикова [7]. Однако этот метод, при котором нужно вычислить действительную часть некоторой функции, может быть реализован только численно-аналитически при помощи методов компьютерной алгебры. Из равенства нулю действительной части этой функции вытекает существование почти-периодических решений вблизи малой окрестности особой точки. В результате счета, однако, получаются очень малые, но не тождественно равные нулю величины, которые вычисляются в достаточно большом, но ко-

нечном числе точек. Особенно проблематичны вычисления по мере приближения к границам исследуемого промежутка, где алгоритм содержит отношение двух очень малых величин. Поэтому вопрос об устойчивости особых точек на интервале, где в принципе возможно появление неустойчивости из-за резонансных частот, не может считаться решенным.

Переходом в лагранжевы координаты для  $\gamma = 2$  удалось строго доказать [8], что особая точка (3) является устойчивой на всем интервале  $b^* \in (\frac{1-\sqrt{2}}{2}l, 0) \cup (l, \frac{1+\sqrt{2}}{2}l)$ , для остальных значений показателя адиабаты  $\gamma \in [1, 2)$  вопрос оставался открытым.

В настоящей работе получены интервалы устойчивости особой точки (3) для  $\gamma \in [1, 2)$  на оставшихся неисследованными интервалах  $b^* \in (\frac{1-\sqrt{2}}{2}l, 0) \cup (l, \frac{1+\sqrt{2}}{2}l)$ . В частности, показано, что при  $\gamma = \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$  особая точка является устойчивой на всем интервале  $b^* \in (\frac{1-\sqrt{2}}{2}l, \frac{1+\sqrt{2}}{2}l)$ .

Отметим, что условие линейного профиля скорости в эйлеровых координатах соответствует условию однородной деформации поля скорости в лагранжевых [2], т.е.  $\mathbf{x}(t, \mathbf{w}) = F(t)\mathbf{w}$ , где  $F = (F_{ik})_{i,k=1..2}$  – матрица перехода от лагранжевых координат частицы газа  $\mathbf{w}$  к эйлеровым  $\mathbf{x}$ . Аналогом (2) в этом случае будет система матричных уравнений

$$(4) \quad \ddot{F}_{ik} + \frac{\partial U}{\partial F_{ik}} + \sum_j \mathcal{L}_{ij} \dot{F}_{jk} = 0.$$

Здесь  $U$  – внутренняя энергия частиц газа,  $U = U_0 |\det F|^{-\gamma} \det F$  для  $1 < \gamma \leq 2$ ,  $U = -U_0 \operatorname{sgn}(\det F) \ln |\det F|$  для  $\gamma = 1$ ,  $U_0 = \text{const}$ ,  $F$  считается невырожденной матрицей, производные берутся по времени. Для  $l = 0$  в работе С.И. Анисимова и Ю.И. Лысикова [1] были найдены первые интегралы системы (4):

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k} (\dot{F}_{ik})^2 + U = E = \text{const},$$

$$(5) \quad F_{11} \dot{F}_{21} + F_{12} \dot{F}_{22} - F_{21} \dot{F}_{11} - F_{22} \dot{F}_{12} = J = \text{const},$$

$$F_{11} \dot{F}_{12} + F_{21} \dot{F}_{22} - F_{12} \dot{F}_{11} - F_{22} \dot{F}_{21} = K = \text{const},$$

причем для  $\gamma = 2$  существует дополнительный первый интеграл  $G = \sum_{i,k=1}^2 F_{ik}^2 = \text{const}$ .

## 2. Устойчивость особой точки для $1 < \gamma \leq 2$

В данном разделе мы получим оценки, которые используются в дальнейшем для нахождения интервалов устойчивости особой точки (3). Всюду здесь и далее мы будем предполагать, что  $b^* \in (\frac{1-\sqrt{2}}{2}l, 0) \cup (l, \frac{1+\sqrt{2}}{2}l)$ , так как при остальных значениях  $b^*$  вопрос устойчивости решен. Нам понадобятся три леммы, приведенные в [8]:

**Лемма 1.** Система (4) имеет три первых интеграла:

$$(6) \quad E = \text{const}, \quad J + \frac{l}{2}G = A = \text{const}, \\ K - l \det F = B = \text{const}.$$

При  $\gamma = 2$  имеется дополнительный первый интеграл:

$$(7) \quad G = M \sin(lt + \phi_0) + \frac{4E+2lA}{l^2},$$

величины  $E, J, K, G$  определены в (5).

**Лемма 2.** Замена

$$(8) \quad \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \cos u & 0 \\ 0 & s \sin u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos w & -\sin w \\ \sin w & \cos w \end{pmatrix}$$

приводит систему первых интегралов (6)–(7) к дифференциальному уравнению

$$(9) \quad \dot{u} = \pm \sqrt{f(u, s)},$$

$$\text{где } f(u, s) = \frac{2E-s^2+Al}{s^2} - \frac{l^2}{4} - \frac{2^\gamma U_0 \sin 2u}{s^{2\gamma} |\sin 2u|^\gamma} - \frac{A^2+B^2+2AB \sin 2u}{s^4 \cos^2 2u},$$

$$\gamma \in (1, 2]$$

**Лемма 3.** Для  $\gamma \in (1, 2]$  в положении равновесия (3) имеют место равенства (звездочками обозначены значения соответствующих функций в положении равновесия):

$$(10) \quad \det F^* = - \left( \frac{U_0(\gamma-1)}{b^*(b^*-l)} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad G^* = -2 \det F^*, \quad J^* = K^* = -b^* G^*, \\ E^* = \det F^* (-b^*)^2 + \frac{b^*(l-b^*)}{\gamma-1}, \quad A^* = B^* = \det F^* (2b^* - l).$$

Также известно [8], что при наших предположениях положение равновесия (3) соответствует  $r = \sin 2u = -1$ .

Получим необходимые оценки. Уравнение (9) перепишем в виде

$$(11) \quad \frac{\dot{r}^2}{4} = \frac{2E-s^2+Al}{s^2} (1-r^2) - \frac{l^2(1-r^2)}{4} - \\ \frac{2^\gamma U_0 r |r|^{-\gamma}}{s^{2\gamma}} (1-r^2) - \frac{A^2+B^2+2ABr}{s^4},$$

откуда имеем

$$(12) \quad \frac{\dot{r}^2}{4} \leq \frac{K_\gamma(r)}{S^\gamma} - \frac{K_2(r)}{S^2} + \frac{K_1(r)}{S} - K_0(r) \equiv \psi(r, S).$$

Здесь  $S = s^2 > 0$ ,

$$K_\gamma(r) = \frac{2^\gamma U_0(1-r^2)}{(-r)^{\gamma-1}} \geq 0, \quad K_0(r) = \frac{l^2}{4}(1-r^2) \geq 0,$$

$$K_1(r) = (2E + Al)(1-r^2), \quad K_2(r) = A^2 + B^2 + 2ABr \geq 0.$$

Заметим, что коэффициенты  $K_1(r)$ ,  $K_2(r)$  зависят также от  $b^*$  (для краткости обозначений мы не будем добавлять  $b^*$  в аргументы  $K_i$ ,  $i=1,2$ ), так как от  $b^*$  зависят первые интегралы  $A, B, E$ .

От знака  $K_1(r)$  будут зависеть оценки, которые мы приведем ниже. Несложно доказать, что  $K_1(r) > 0$  при  $b^* \in (\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\sqrt{-1 + \frac{2}{2-\gamma}}, \frac{l}{2} + \frac{l}{2}\sqrt{-1 + \frac{2}{2-\gamma}})$  (в частности, при  $\gamma > \frac{4}{3}$ );  $K_1(r) < 0$  для остальных  $b^* \in (\frac{1-\sqrt{2}}{2}l, 0) \cup (l, \frac{1+\sqrt{2}}{2}l)$ . Доказательство получается непосредственной подстановкой равенств (10) в выражение для коэффициента  $K_1(r)$ . Мы также без ограничения общности положим здесь и далее, что  $U_0 = l = 1$ . Остановимся на основных неравенствах, которые приведут к доказательству теоремы о гарантированных интервалах устойчивости.

**Утверждение 1.** Если  $K_1(r) > 0$ , при  $r < r^*$  имеет место неравенство:

$$(13) \quad \frac{(r)^2}{4} \leq \psi_1^\gamma(r; b^*) \equiv -\frac{2^{\gamma-4}K_2(r)^{\gamma-2}K_1(r)^2}{f(r)} - K_0(r),$$

где  $r^*$  – корень уравнения  $f(r) \equiv K_\gamma(r)K_1(r)^{\gamma-2} - 2^{\gamma-2}K_2(r)^{\gamma-1} = 0$  на  $-1 < r < 0$ .

**Доказательство.** Заметим, что при любом фиксированном  $r$  функция  $\psi(r, S)$  имеет точку максимума  $S^*$ , удовлетворяющую уравнению

$$\psi'_S(r, S) = -\frac{\gamma K_\gamma}{S^{\gamma+1}} + \frac{2K_2}{S^3} - \frac{K_1}{S^2},$$

которое можно переписать в виде

$$(14) \quad 2K_2 - K_1S = \gamma K_\gamma S^{2-\gamma}.$$



Левая часть (14) убывает по  $S$  на  $S \in [0, \frac{2K_2}{K_1}]$ , правая часть (14) возрастает. Отсюда имеем, что точка максимума  $S^*$  лежит на отрезке  $[0, \frac{2K_2}{K_1}]$ .

Получим неравенство (13). Введем  $\sigma = \frac{S^* K_1}{2K_2}$ , тогда  $0 \leq \sigma \leq 1$  для  $S \in [0, \frac{2K_2}{K_1}]$  и отсюда имеем точку максимума  $S^* = \frac{2K_2 \sigma}{K_1}$ . Так как для этих  $\sigma$  выполнено  $\frac{1}{\sigma^\gamma} \leq \frac{1}{\sigma^2}$ , из (12) получим:

$$\begin{aligned} \psi(r, S) &\leq \psi(r, S^*) = \frac{K_\gamma(r)K_1(r)^\gamma}{2^\gamma K_2(r)^\gamma \sigma^\gamma} - \frac{K_1(r)^2}{4K_2(r)\sigma^2} + \frac{K_1(r)^2}{2K_2(r)\sigma} - K_0(r) \leq \\ (15) \quad &\leq \left( \frac{K_\gamma K_1^\gamma}{2^\gamma K_2^\gamma} - \frac{K_1^2}{4K_2} \right) \frac{1}{\sigma^2} + \frac{K_1^2}{2K_2} \frac{1}{\sigma} - K_0 = \tilde{\psi}(r, \sigma). \end{aligned}$$

Так как  $\tilde{K}_2 = -\frac{K_\gamma K_1^\gamma}{2^\gamma K_2^\gamma} + \frac{K_1^2}{4K_2} = -\frac{K_1^2 f(r)}{2^\gamma K_2^\gamma} > 0$  для  $r < r^*$  – корня уравнения  $f(r) = 0$ , мы можем продолжить неравенство (15):

$$\tilde{\psi}(r, \sigma) = -\frac{\tilde{K}_2}{\sigma^2} + \frac{\tilde{K}_1}{\sigma} - K_0 \leq \frac{\tilde{K}_1^2}{4\tilde{K}_2} - K_0 = -\frac{2^{\gamma-4} K_2(r)^{\gamma-2} K_1(r)^2}{f(r)} - K_0(r),$$

где  $\tilde{K}_1 = \frac{K_1^2}{2K_2}$ ,  $\sigma^* = \frac{2\tilde{K}_2}{K_1}$  – точка максимума  $\tilde{\psi}(r, \sigma)$ . Отсюда следует оценка (13).

**Утверждение 2.** Если  $K_1(r) < 0$ , имеет место оценка

$$(16) \quad \frac{(\dot{r})^2}{4} \leq \left( \frac{\gamma K_\gamma}{2} \right)^{\frac{2}{2-\gamma}} \cdot K_2^{-\frac{\gamma}{2-\gamma}} \left( \frac{2}{\gamma} - 1 \right) - K_0 \equiv \psi_2^\gamma(r; b^*).$$

**Доказательство.** Заметим, что для  $K_1(r) < 0$  из (12) будем иметь

$$(17) \quad \frac{(\dot{r})^2}{4} \leq \frac{K_\gamma(r)}{S^\gamma} - \frac{K_2(r)}{S^2} - K_0(r) \equiv \tilde{\psi}(r, S),$$

так как  $S = s^2 > 0$ . Аналогично утверждению 1  $\tilde{\psi}(r, S)$  имеет точку максимума  $S^*$ , которая удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\psi}'_S(r, S) = -\frac{\gamma K_\gamma}{S^{\gamma+1}} + \frac{2K_2}{S^3}.$$

Отсюда получим, что

$$(18) \quad S^* = \left( \frac{\gamma K_\gamma}{2K_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-2}}.$$

Продолжая неравенство (17), имеем

$$\tilde{\psi}(r, S) \leq \tilde{\psi}(r, S^*) = \frac{K_2}{(S^*)^2} \left( \frac{2}{\gamma} - 1 \right) - K_0,$$

подставляя в которое выражение (18) получим требуемое.

Теперь мы можем сформулировать основной результат об устойчивости особой точки (3) для  $1 < \gamma \leq 2$ .

**Теорема 1.** Пусть

$$b_i^* = \sup_{b^* \in (1, \frac{1+\sqrt{2}}{2})} \{b^* | \psi_i^\gamma(r; b^*) = 0 \text{ имеет решение на } r \in (-1, 0)\},$$

функции  $\psi_i^\gamma$ ,  $i = 1, 2$ , определены в утверждениях 1, 2. Тогда:

1. При  $1 < \gamma < \frac{4}{3}$  положение равновесия (3) устойчиво по Ляпунову для  $b^* \in (1 - b_2^*, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-1 + \frac{2}{2-\gamma}}) \cup (1 - b_1^*, 0) \cup (1, b_1^*) \cup (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-1 + \frac{2}{2-\gamma}}, b_2^*)$ .

2. При  $\gamma \geq \frac{4}{3}$  (3) устойчиво по Ляпунову для  $b^* \in (1 - b_1^*, 0) \cup (1, b_1^*)$ .

**Доказательство.** Предварительно заметим, что функция  $\psi_i(r)$ ,  $i = 1, 2$ , положительна на участке  $-1 < r < r^*$ ,  $r^*$  – корень уравнения  $\psi_i^\gamma(r; b^*) = 0$  при указанных  $b^*$ . В силу оценок (13), (16) это означает, что имеется ограниченная область разрешенного движения, соответствующая уравнению (11), которая отделена от точки  $r = 0$ . Это свидетельствует о существовании периодического решения уравнения (11), так как при  $r \rightarrow 0$   $u = Qx$  уходит на бесконечность (в самом деле, из условия замены (8) имеем  $\det F = \frac{1}{2}s^2r \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$  и  $Q = \dot{F}F^{-1}$ ). Покажем теперь, что (3) устойчива по Ляпунову. Возьмем малое возмущение начальных данных  $F_{ij}(0)$ ,  $\dot{F}_{ij}(0)$ ,  $i, j = 1, 2$ , в окрестности положения равновесия  $r^* = -1$ , тогда мы имеем малое возмущение коэффициентов  $K_1(r)$ ,  $K_2(r)$  (коэффициенты  $K_0(r)$ ,  $K_\gamma(r)$  при этом не меняются), которое приводит к малому изменению функций  $\psi_i^\gamma(r; b^*)$ ,  $i = 1, 2$ , из оценок (13), (16) и их графиков. Возмущенное движение происходит в области  $r_1 \leq r \leq r_2$ , где  $|r^* - r_1| < \varepsilon$ ,  $|r^* - r_2| < \varepsilon$ , откуда имеем  $|r^* - r(t)| < \varepsilon$  и по определению получаем устойчивость  $r^* = -1$ . При отдельных значениях параметра  $\gamma$  удается получить доказательство устойчивости особой точки на всем множестве  $b^* \in (\frac{1-\sqrt{2}}{2}, 0) \cup (1, \frac{1+\sqrt{2}}{2})$ .

**Теорема 2.** *Положение равновесия (3) устойчиво по Ляпунову при всех  $b^* \in (\frac{1-\sqrt{2}}{2}, 0) \cup (1, \frac{1+\sqrt{2}}{2})$  для  $\gamma = \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ .*

**Доказательство.** Предварительно рассмотрим случай  $\gamma = \frac{3}{2}$ . Для  $\gamma = \frac{3}{2} > \frac{4}{3}$  имеем  $K_1(r) > 0$ , и для доказательства мы можем использовать неравенство (13). Заметим, что в этом случае уравнение (14) на точку максимума  $S^*$  легко разрешить (оно сводится к квадратному), его точное решение имеет вид

$$S^*(r) = \left( \frac{-3K_{3/2} + \sqrt{9K_{3/2}^2 + 32K_1K_2}}{4K_1} \right)^2$$

Находя теперь вторую производную

$$\psi''_{rr}(S, r) = \frac{15K_{3/2}}{4S^{7/2}} - \frac{6K_2}{S^4} + \frac{2K_1}{S^3}$$

в положении равновесия  $r = -1$ ,  $S(r) = S^*(-1)$ , получим (вычисления опущены в силу громоздкости):

$$\psi''_{rr}(-1, S^*(-1)) = 2(b^*)^2 - 2b^* - \frac{1}{2} = 2(b^* - \frac{1+\sqrt{2}}{2})(b^* + \frac{1+\sqrt{2}}{2}) < 0$$

для  $b^* \in (\frac{1-\sqrt{2}}{2}, 0) \cup (1, \frac{1+\sqrt{2}}{2})$ . Значит, функция  $\psi(S, r)$  вогнута вниз в положении равновесия  $r = -1$  и также будет вогнута вниз при малых возмущениях первых интегралов  $A, B, E$  и коэффициентов  $K_i, i = 0, \dots, 2, K_{3/2}$ . Таким образом, в окрестности  $r = -1$  имеется ограниченный участок движения, отделенный от  $r = 0$ . Отсюда следует существование периодического решения. Доказательство устойчивости особой точки  $r = -1$  проводится совершенно аналогично доказательству, приведенному в теореме 1 для функции  $\psi_1^{\gamma}$ . Доказательство утверждения для  $\gamma = \frac{5}{3}$  проводится аналогично, получается сводящееся к кубическому уравнение (14) на точку максимума  $S^*$ , которое может быть разрешено.

Результат исследования устойчивости на основании теорем 1, 2 представлен на рис. 1.

**Замечание 1.** Отметим также, что значения  $\gamma = 2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}$ , для которых имеем доказательство устойчивости особой точки (3) на

всем множестве  $b^* \in (\frac{1-\sqrt{2}}{2}, 0) \cup (1, \frac{1+\sqrt{2}}{2})$ , соответствуют показателю адиабаты  $\gamma = 1 + \frac{2}{n+2}$  газов с  $n = 0, 1, 2$  дополнительными степенями свободы молекулы в двумерном случае.

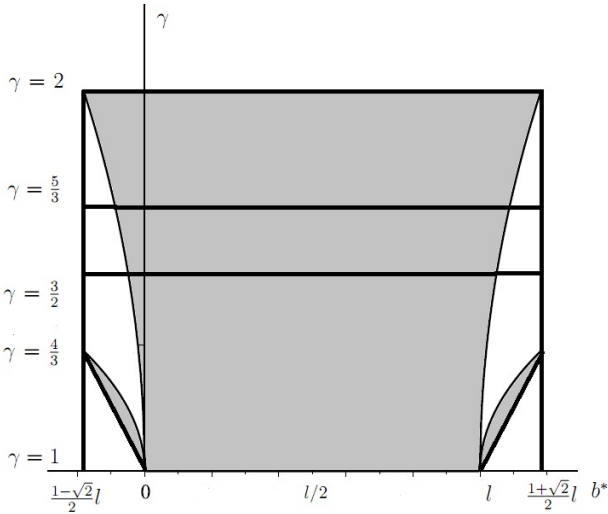


Рис. 1. Результат исследования устойчивости особой точки (3) на основании теорем 1,2. Серым отмечена область устойчивости

### 3. Устойчивость особой точки для $\gamma = 1$

Результаты этого раздела во многом базируются на идеях предыдущего. Здесь мы также получим оценку, которую будем использовать для нахождения интервалов устойчивости особой точки (3). Для дальнейшего изложения нам понадобятся две леммы, аналогичные леммам 2 и 3 (доказательства опущены).

**Лемма 4.** Замена (8) приводит систему первых интегралов (6)–(7) к дифференциальному уравнению

$$(19) \quad \dot{u} = \pm \sqrt{f(u, s)},$$

$$\text{где } f(u, s) = \frac{2E - \dot{s}^2 + Al}{s^2} - \frac{l^2}{4} - \frac{2U_0 \ln \frac{s^2 |\sin 2u|}{2}}{s^2} - \frac{A^2 + B^2 + 2AB \sin 2u}{s^4 \cos^2 2u},$$

$$\gamma = 1.$$

**Лемма 5.** Для  $\gamma = 1$  в положении равновесия (3) имеют место равенства (звездочками обозначены значения соответствующих функций в положении равновесия):

$$(20) \quad \det F^* = -\frac{U_0}{b^*(b^*-l)}, G^* = -2 \det F^*, \\ J^* = K^* = -b^* G^*, A^* = B^* = (2b^* - l) \det F^* \\ E^* = -(b^*)^2 \det F^* + U_0 \ln(-\det F^*).$$

Обобщая результат [8], имеем, что  $r = \sin 2u = -1$  соответствует положению равновесия (3) в данном случае.

Перейдем к получению оценки. Перепишем уравнение (19) в виде

$$\frac{\dot{r}^2}{4} = \frac{2E-s^2+Al}{s^2}(1-r^2) - \frac{l^2(1-r^2)}{4} - \\ \frac{2U_0 \ln(-\frac{s^2 r}{2})}{s^2}(1-r^2) - \frac{A^2+B^2+2ABr}{s^4}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{(\dot{r})^2}{4} \leq -\frac{K_2+K_3 S \ln S}{S^2} + \frac{K_1}{S} - K_0 \equiv \psi(r, S).$$

Здесь  $S = s^2$ ,  $K_3 = 2U_0(1-r^2) \geq 0$ ,  $K_2 = A^2 + B^2 + 2ABr \geq 0$ ,  $K_1 = (2E + Al - 2U_0 \ln \frac{-r}{2})(1-r^2)$ ,  $K_0 = \frac{l^2}{4}(1-r^2) \geq 0$ .

В доказательстве оценки, приведенном ниже, используется тот факт, что

$$(21) \quad \tilde{K}_2(r) = K_2(r) - \frac{K_3(r)}{e} > 0.$$

Оно получается непосредственной подстановкой равенств (20) в выражение для функции  $\tilde{K}_2(r)$  из (21). С учетом неравенства (21) получим нижеследующую оценку, которая используется для доказательства теоремы об интервалах гарантированной устойчивости.

**Утверждение 3.** Для  $\gamma = 1$  имеет место оценка

$$\frac{(\dot{r})^2}{4} \leq \frac{K_1^2(r)}{4(K_2(r)-e^{-1}K_3(r))} - K_0(r) \equiv \psi_3^\gamma(r; b^*).$$

**Доказательство.** Пусть  $\phi(S) = S \ln S$ . Заметим, что функция  $\phi(S)$  имеет точку минимума  $S^* = \frac{1}{e}$ , откуда  $\phi(S) \geq \phi(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$ . Значит, мы получим:

$$\psi(r, S) \leq -\frac{\tilde{K}_2}{S^2} + \frac{K_1}{S} - K_0 \equiv \tilde{\psi}(r, S) \leq \tilde{\psi}(r, S^{**}) = \frac{K_1^2}{4\tilde{K}_2} - K_0,$$

где  $\tilde{K}_2 > 0$ ,  $S^{**} = \frac{2\tilde{K}_2}{K_1}$  – точка максимума  $\tilde{\psi}(r, S)$ .

Доказательство нижеследующей теоремы полностью повторяет доказательство теоремы 1.

**Теорема 3.** Пусть

$$b_3^* = \sup_{b^* \in (1, \frac{1+\sqrt{2}}{2})} \{b^* | \psi_3^\gamma(r; b^*) = 0 \text{ имеет решение на } r \in (-1, 0)\},$$

функция  $\psi_3^\gamma$  определена в утверждении 3. Тогда для  $\gamma = 1$  положение равновесия (3) устойчиво по Ляпунову для  $b^* \in (1 - b_3^*, 0) \cup (1, b_3^*)$ .

**Замечание 2.** Несложно подсчитать, что значение  $b_3^* = 1,0271$  с точностью до 4 знаков после запятой.

#### 4. Заключение

В статье рассмотрена система уравнений в частных производных, задающая движение идеального политропного газа на вращающейся плоскости. Рассмотрен класс решений с линейным по пространственным переменным профилем скорости, в котором возможен переход от системы уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, рассмотрены особые точки этой системы и исследована устойчивость особой точки, отвечающей вихревому движению газа. Для отдельных значений параметра вопрос устойчивости разрешен полностью, для остальных – найдены интервалы, в которых гарантирована устойчивость. Для исследования использован метод оценок. Результаты работы применимы к задачам механики сплошных сред и динамики атмосферы.

### Литература

1. АНИСИМОВ С.И., ЛЫСИКОВ Ю.И. *О расширении газового облака в вакуум* // ДАН СССР. – 1970. – Т. 34, №5. – С. 926–929.
2. БОГОЯВЛЕНСКИЙ О.И. *Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике*. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
3. ДАЙСОН Ф. *Динамика вращающегося газового облака* // Матем. Мех. – 1968. – Т. 18, №1. – С. 91–101.
4. ЗЕЛЬДОВИЧ Я.Б. *Ньютоновское и Эйнштейновское движение однородной среды* // Астрономический журнал. – 1964. – Т. 41, №5. – С. 872–883.
5. ОБУХОВ А.М. *О геострофическом ветре* // Изв. Акад. Наук. – 1949. – Т. 13. – С. 281–306.
6. ОВСЯННИКОВ Л.В. *Новое решение уравнений гидродинамики* // ДАН СССР. – 1956. – Т. 111. – С. 47–49.
7. СТАРЖИНСКИЙ В.М. *Прикладные методы нелинейных колебаний*. – М.: Наука, 1980. – 260 с.
8. ТУРЦЫНСКИЙ М.К. *О свойствах решений уравнений газовой динамики на вращающейся плоскости, отвечающих движениям с однородной деформацией* // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2020. – №2. – С. 39–45.
9. DIRICHLET G.L. *Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik* // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. – 1857. – №14. – S. 203–207.
10. GAFFET B. *Two hidden symmetries of the Equations of Ideal Gas Dynamics, and the General Solution in a case of Nonuniform Entropy Distribution* // J. Fluid Mech. – 1983. – Vol. 134. – P. 179–194.
11. GAFFET B. *SU(3) Symmetry of the Equations of Unidimensional Gas Flow* // J. Math. Phys. – 1984. – Vol. 25, №2. – P. 245–255.

12. GAFFET B. *Expanding Gas Clouds of Ellipsoidal Shape: New Exact Solutions* // J. Fluid Mech. – 1996. – Vol. 325. – P. 113–144.
13. LYNDEN-BELL D. *On the gravitational collapse of a cold rotating gas cloud* // Proc. Camb. Phys. Soc. – 1962. – Vol. 58. – P. 709–711.
14. ROZANOVA O.S. *Classes of smooth solutions to multidimensional balance laws of gas dynamic type on Riemannian manifolds* // Trends in mathematical physics research. Nova Sci. Publ Hauppauge. – 2004. – P. 155–204.
15. ROZANOVA O.S. *Solutions with linear profile of velocity to the Euler equations in several dimensions* // Hyperbolic problems: theory, numerics, applications. – 2003. – P. 861–870.
16. ROZANOVA O.S., TURZYNSKI M.K. *On Systems of Nonlinear ODE Arising in Gas Dynamics: Application to Vortical Motion, Differential and Difference Equations with Applications* // Springer Proc. in Mathematics and Statistics. – 2018. – Vol. 230. – P. 387–398.
17. ROZANOVA O.S., TURZYNSKI M.K. *Nonlinear stability of localized and non-localized vortices in rotating compressible media, Theory, Numerics and Applications of Hyperbolic Problems* // Springer Proc. in Mathematics and Statistics. – 2018. – Vol. 236. – P. 567–580.
18. VALLIS G.K. *Atmospheric and oceanic fluids dynamics. Fundamentals and large-scale calculation.* – Cambridge University Press, 2006.



## ON STUDY OF STABILITY OF ONE CLASS OF STATIONARY SOLUTIONS FOR GAS DYNAMICS EQUATIONS ON A ROTATING PLANE

**Marko Turzynsky**, Moscow Institute of Railway Engineering, Moscow, assistant professor (M13041@yandex.ru).

*Abstract: We consider a two-dimensional system of equations of an ideal polytropic gas on a rotating plane, which arises in the dynamics of the atmosphere. The problem is very difficult in the general case, however, it admits solutions with a linear profile of velocity (corresponding to motion with uniform deformation), which can be found by solving a quadratically nonlinear system of ordinary differential equations. The system has two families of equilibria: the first family is one-parametric (corresponds to a vortex) and the second one is two-parametric (corresponds to a shift flow), the latter is always unstable. The stability of equilibria means the stability of stationary solutions of the original system in the class of perturbations with linear profile of velocity. The article considers a one-parametric family of equilibria, which corresponds to a stationary vortex motion, the parameter is responsible for the vortex intensity and changes over the real axis. Intervals of the parameter where equilibrium is unstable and where it is stable in the sense of Lyapunov were found earlier. However, they did not cover the entire real axis. For the remaining parameter values, the matrix of linearization has three pairs of purely imaginary complex conjugate eigenvalues, therefore the study of stability by conventional methods is difficult. We investigate the matter in Lagrangian coordinates. Estimates that provide intervals of guaranteed stability are constructed. The stability issue is completely resolved for a gas with one, two, and three degrees of freedom.*

Keywords: ideal polytropic gas, motion with uniform deformation, equilibria.

УДК 517.9

ББК 22.1

DOI: <https://doi.org/10.25728/ubs.2020.84.3>

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким.

Поступила в редакцию 05.02.2020.

Дата опубликования 31.03.2020.

## КОНЕЧНО-ЧАСТОТНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФАЗОВЫХ СДВИГОВ<sup>1</sup>

Ливаткин П. А.<sup>2</sup>  
(ООО "Триа Групп", Москва)

*Предлагается метод конечно-частотной идентификации с использованием фазовых сдвигов для устойчивых объектов с запаздыванием в присутствии неизвестного внешнего возмущения. Этот метод использует испытательные сигналы, представляющие собой гармоники. Возможна как последовательная подача каждой из них, так и любые их суммы. Подача каждой гармоники позволяет идентифицировать два параметра объекта. Под параметрами понимаются коэффициенты передаточной функции и величина запаздывания. Для улучшения результатов можно использовать дополнительные гармоники. Предлагаемый метод идентификации основан на двух идеях. Во-первых, влияние запаздывания при прохождении через объект на каждую из гармоник можно компенсировать при помощи сдвига фазы. Существует аналитически выражаемая взаимосвязь между частотой, запаздыванием и сдвигом по фазе. Во-вторых, передаточная функция объекта с запаздыванием будет одинакова на разных наборах гармоник со сдвинутыми фазами, компенсирующими влияние запаздывания. Для однозначного определения запаздывания предполагается, что известна верхняя оценка запаздывания. Рассматривается вопрос выбора частот идентификации с указанием оптимальных с теоретической точки зрения (позволяющих определить запаздывание не зная его оценки сверху). На основе этого подхода предлагаются три алгоритма идентификации, отличающиеся вычислительной сложностью и чувствительностью к внешним возмущениям.*

Ключевые слова: теория автоматического управления, идентификация динамических объектов, идентификация запаздывания, конечно-частотная идентификация запаздывания.

### 1. Введение

На сегодняшний день в теории автоматического управления разработаны две группы методов идентификации объектов, опи-

<sup>1</sup> Автор признателен д-ру физ.-мат. наук А.Г. Александрову за постановку задачи, а также коллективу лаборатории №7 Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, за активное обсуждение работы и полезные комментарии.

<sup>2</sup> Павел Анатольевич Ливаткин (pal2010@yandex.ru).

сываемых линейными дифференциальными уравнениями. Они различаются в зависимости от предположений о помехах измерения и внешних возмущениях, действующих на объект. Методы из первой группы рассматривают объекты, подверженные стохастическим воздействиям (например белый шум). Для их идентификации применяют методы стохастической аппроксимации и подходы, являющиеся различными модификациями метода наименьших квадратов [7]. Вторая группа методов рассматривает объекты с неизвестными ограниченными внешними возмущениями (при этом статистические характеристики полагают неизвестными). В этих случаях прибегают к конечно-частотной идентификации [9, 10] и рандомизированным алгоритмам [6].

Процесс идентификации может быть активным или пассивным. При активном подходе ко входу объекта прибавляется сигнал, называемый испытательным. В этом заключается ключевое отличие от пассивной идентификации, при которой сигнал на входе может иметь произвольную форму, в том числе такую, что процесс идентификации не будет давать необходимую точность или вообще не будет сходиться.

Метод конечно-частотной идентификации разработан для активной идентификации. Испытательный сигнал представляет собой гармонику или их сумму. Выбор амплитуд и частот влияет на точность идентификации. В работе [11] анализируется их влияние и предлагаются алгоритмы настройки. Испытательный сигнал, согласно этим алгоритмам, выбирается так, чтобы оказывать незначительное влияние на выход объекта по сравнению с внешним возмущением и помехами.

Преимущество метода конечно-частотной идентификации, по сравнению с существующими методами, в том, что он сходится несмотря на неизвестный тип и интенсивность внешнего возмущения, если оно не содержит составляющих с частотами испытательного сигнала [2]. В случае если внешнее возмущение или помехи измерения все же содержат компоненты с частотами испытательного сигнала, может быть применен алгоритм с последовательными парами [3], являющийся двумя одинаковыми по

длительности процессами идентификации на одной и той же положительной и отрицательной частоте.

Под рассмотрением попадают и задачи идентификации объектов с запаздыванием. Обзор методов идентификации таких объектов, в основном при случайных внешних возмущениях и помехах, приводится в [13], где также даются рекомендации по выбору подходящего метода идентификации. Адаптивный наблюдатель, способный оценивать коэффициенты объекта и величину запаздывания, предлагается в [14, 16]. В работе [8] предлагается двухстадийная идентификация.

В работе [1], на которой основана данная статья, метод конечно-частотной идентификации развивается для объектов с запаздыванием. В отличие от [12], в ней предложен подход для однозначного определения запаздывания, на основе которого построены соответствующие алгоритмы идентификации. В составе статьи приводится пример идентификации объекта с запаздыванием предложенным алгоритмом. Настройка частот и амплитуд не рассматривается.

В данной статье анализируется алгоритм конечно-частотной идентификации запаздывания из работы [1]. Далее будет показано, что он имеет ограниченные возможности для практического применения из-за особенностей используемого испытательного сигнала. Предлагается оригинальный алгоритм идентификации запаздывания на основе конечно-частотного подхода. Он основан на эквивалентности явления сдвига по фазе при прохождении гармоники через объект и её смещении в результате запаздывания. Это приводит к возможности модифицировать фильтры Фурье, введя отрицательный сдвиг по фазе в функцию свёртки. Результат расчета фильтров Фурье используется для восстановления коэффициентов передаточной функции объекта, которые сравниваются с результатом идентификации на другом наборе частот. Совпадение идентифицированных моделей говорит о том, что искусственно введённый сдвиг по фазе скомпенсировал запаздывание объекта, а значит равен ему. Рассматривается три разных способа оценки близости идентифицированных моделей.

Рассказано о недостатках этих способов. Даны рекомендации по выбору частот испытательного сигнала. В конце статьи приведен пример идентификации объекта с запаздыванием из [1], к которому применены разработанные алгоритмы. Произведено сравнение результатов идентификации между собой, а также сравнение с результатами, полученными в [1].

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим полностью управляемый, асимптотически устойчивый объект с запаздыванием, описываемым уравнением

$$(1) \quad d_n y^{(n)}(t) + \dots + d_1 \dot{y}(t) + y(t) = k_m u^{(m)}(t - \tau) + \dots + k_0 u(t - \tau) + f(t),$$

где  $y(t)$  – выход объекта;  $u(t)$  – вход (управление);  $\tau$  – запаздывание, ограниченное сверху известным значением  $\tau^*$  ( $\tau^* > \tau > 0$ ); кусочно-непрерывная функция  $f(t)$  – неизвестное ограниченное возмущение:

$$(2) \quad |f(t)| \leq f^*,$$

где  $f^*$  – некоторое неизвестное положительное число.

Необходимо решить задачу определения коэффициентов  $k_j, j = \overline{0, m}; d_i, i = \overline{1, n}$ , и запаздывания  $\tau$  объекта (1).

## 3. Анализ исходного алгоритма

В [1] решается задача определения коэффициентов  $k_j, j = \overline{0, m}; d_i, i = \overline{1, n}$ , и запаздывания  $\tau$  объекта (1).

Передаточная функция объекта (1) имеет вид

$$(3) \quad W_z(s) = W(s)e^{-\tau s},$$

где  $W(s) = k(s)/d(s), k(s) = \sum_{i=0}^m k_i s^{(i)}, d(s) = 1 + \sum_{i=1}^n d_i s^{(i)}$ ,

$s$  – символ преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях.

Для произвольной частоты  $w_i$  в [1] вводятся следующие обозначения частотных параметров:

$$(4) \quad \begin{aligned} \varphi_i &= \operatorname{Re}(W(jw_i)), & \psi_i &= \operatorname{Im}(W(jw_i)), \\ \alpha_i &= \operatorname{Re}(W_z(jw_i)), & \beta_i &= \operatorname{Im}(W_z(jw_i)), \end{aligned}$$

где  $j$  – мнимая единица.

Для нахождения  $\varphi_i$  и  $\psi_i$  потребуется вычислить коэффициенты  $W(s)$ . Для этого в [1] применяется следующий подход. По определению:

$$(5) \quad \frac{k(jw_i)}{d(jw_i)} e^{-\tau jw_i} = \alpha_i + j\beta_i,$$

где  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  вычисляются при помощи фильтров Фурье вида)

$$(6) \quad \alpha_i = \frac{2}{\rho_i t^i} \int_{t_F^i}^{t_F^i + t^i} y(t) \sin(w_i t) dt, \beta_i = \frac{2}{\rho_i t^i} \int_{t_F^i}^{t_F^i + t^i} y(t) \cos(w_i t) dt,$$

где  $t^i$  – длительность фильтрации, кратная целому числу периодов  $2\pi/w_i$ ;  $t_F^i$  – момент начала фильтрации;  $y(t)$  – выход объекта, к входному сигналу  $u(t)$  которого прибавили испытательный сигнал вида  $u_{ei}(t)$  согласно (7) (или сумму нескольких таких сигналов):

$$(7) \quad u_{ei}(t) = \rho_i \sin(w_i t).$$

Для объектов без запаздывания ( $W(jw_i) = W_z(jw_i)$ ), так как  $\tau = 0$ . Значит и  $\varphi_i = \alpha_i, \psi_i = \beta_i$  необходимо  $l = \lceil (n + m + 1)/2 \rceil$  уравнений конечно-частотной идентификации [1], позволяющих составить систему (8) и вычислить коэффициенты полиномов  $k(s)$  и  $d(s)$ :

$$(8) \quad \begin{cases} k(jw_1) = (\varphi_1 + j\psi_1)d(jw_1), \\ k(jw_2) = (\varphi_2 + j\psi_2)d(jw_2), \\ \dots, \\ k(jw_l) = (\varphi_l + j\psi_l)d(jw_l). \end{cases}$$

Для объектов с запаздыванием ( $\tau \neq 0$ ) система (8) примет вид

$$(9) \quad \begin{cases} k(jw_1) = (\varphi_1 + j\psi_1)e^{-\tau jw_1} d(jw_1), \\ k(jw_2) = (\varphi_2 + j\psi_2)e^{-\tau jw_2} d(jw_2), \\ \dots, \\ k(jw_l) = (\varphi_l + j\psi_l)e^{-\tau jw_l} d(jw_l). \end{cases}$$

К сожалению, неизвестен способ аналитически решить (9). В работе [1] для восстановления коэффициентов  $W(jw)$  левая и

правая части (9) домножаются на соответствующие комплексно-сопряженные выражения, вследствие чего пропадает сомножитель с запаздыванием, а уравнения принимают вид (10). Используя  $n + m + 1$  частот, можно записать систему, решение которой даст коэффициенты полиномов  $k(s)$  и  $d(s)$  из алгебраических уравнений вида

$$(10) \quad \frac{k(jw_i)k(-jw_i)}{d(jw_i)d(-jw_i)} e^{-\tau jw_i} e^{\tau jw_i} = \frac{k(jw_i)k(-jw_i)}{d(jw_i)d(-jw_i)} = \alpha_i^2 + \beta_i^2.$$

Следующим этапом производится идентификация запаздывания при помощи частотных параметров:

$$(11) \quad \begin{aligned} \varphi_\lambda &= \operatorname{Re}(W(\lambda + jw_\lambda)), \psi_\lambda = \operatorname{Im}(W(\lambda + jw_\lambda)), \\ \alpha_\lambda &= \operatorname{Re}(W_z(\lambda + jw_\lambda)), \beta_\lambda = \operatorname{Im}(W_z(\lambda + jw_\lambda)), \end{aligned}$$

где  $\varphi_\lambda, \psi_\lambda$  вычисляются с помощью идентифицированной по формулам (6), (7) и (10) передаточной функции  $W(s)$ ;  $\alpha_\lambda, \beta_\lambda$  ищутся экспериментально при помощи испытательного сигнала вида  $u_{e\lambda}(t)$  согласно (12) и (13):

$$(12) \quad u_{e\lambda}(t) = \rho_\lambda e^{\lambda t} \sin(\omega_\lambda t),$$

где  $\lambda$  – настраиваемый параметр, не равный нулю. При  $\lambda < 0$  оптимальная длительность фильтрации ограничена, поскольку амплитуда испытательного сигнала падает до слишком малых величин и внешнее возмущение начинает преобладать в фильтрах (13), что будет пояснено ниже. При  $\lambda > 0$  длительность подачи идентифицирующего сигнала физически ограничена допустимой амплитудой входного сигнала, что также не позволяет получить асимптотическую сходимость фильтрации при действии внешнего возмущения.

В дальнейшем используются фильтры специального вида, являющиеся модификацией (6) для испытательного сигнала (12):

$$(13) \quad \begin{aligned} \alpha_\lambda &= \frac{2}{\rho_\lambda t^\lambda} \int_{t_F^\lambda}^{t_F^\lambda + t^\lambda} e^{-\lambda t} y(t) \sin(\omega_\lambda t) dt, \\ \beta_\lambda &= \frac{2}{\rho_\lambda t^\lambda} \int_{t_F^\lambda}^{t_F^\lambda + t^\lambda} e^{-\lambda t} y(t) \cos(\omega_\lambda t) dt, \end{aligned}$$

где  $y(t)$  – выход объекта,  $x$  входному сигналу  $u(t)$  которого прибавили испытательный сигнал вида  $u_{e\lambda}(t)$  согласно (12) (или сумму нескольких таких сигналов);  $t^\lambda$  – длительность фильтрации

(целое число периодов  $\sin(w_\lambda t)$ );  $t_F^\lambda$  – момент начала фильтрации.

Тогда верно следующее соотношение:

$$(14) \quad \frac{k(\lambda + jw_\lambda)}{d(\lambda + jw_\lambda)} e^{-\tau(\lambda + jw_\lambda)} = \\ = (\varphi_\lambda + j\psi_\lambda) e^{-\tau\lambda} (\cos(w_\lambda\tau) - j \sin(w_\lambda\tau)) = \alpha_\lambda + j\beta_\lambda.$$

Из последнего равенства получим (14) получим  $\tau$ :

$$(15) \quad \tau = \frac{1}{2\lambda} \ln \left( \frac{\varphi_\lambda^2 + \psi_\lambda^2}{\alpha_\lambda^2 + \beta_\lambda^2} \right).$$

Достоинство такого подхода – возможность идентификации объекта во время работы, не нарушая его обычного функционирования, благодаря выбору малых амплитуд испытательных сигналов.

Недостатки подхода:

1) необходимость идентификации объекта по полиномам удвоенных степеней с помощью нахождения их корней, что для высоких порядков является вычислительно трудной задачей и иногда может приводить к большим погрешностям;

2) подход можно использовать только для минимально-фазовых объектов;

3) отсутствие асимптотической сходимости процесса фильтрации (13) при наличии внешних возмущений.

Последний пункт вызван особенностью фильтрации при наличии внешнего возмущения. Рассмотрим фильтры (13) в условиях действия внешнего возмущения:

$$(16) \quad \alpha_{f\lambda} = \frac{2}{\rho_\lambda t^\lambda} \int_{t_F^\lambda}^{t_F^\lambda + t^\lambda} e^{-\lambda t} y_f(t) \sin(w_\lambda t) dt, \\ \beta_{f\lambda} = \frac{2}{\rho_\lambda t^\lambda} \int_{t_F^\lambda}^{t_F^\lambda + t^\lambda} e^{-\lambda t} y_f(t) \cos(w_\lambda t) dt,$$

где  $y_f(t)$  – составляющая выхода объекта, порожденная внешним возмущением.

При  $\lambda < 0$  результат интегрирования растет быстрее чем  $\frac{2}{\rho_\lambda t^\lambda}$ , что приводит к всё более нарастающей ошибке. Данный



недостаток проиллюстрирован (см. рис. 1). На рисунке изображено изменение первого интеграла (16) при отсутствии испытательного сигнала при действии внешнего полигармонического возмущения (границы интегрирования  $t_F^\lambda = 0, t^\lambda = 600$ ). Явно видно, что ошибка нарастает. Минимум ошибки отмечен стрелкой.

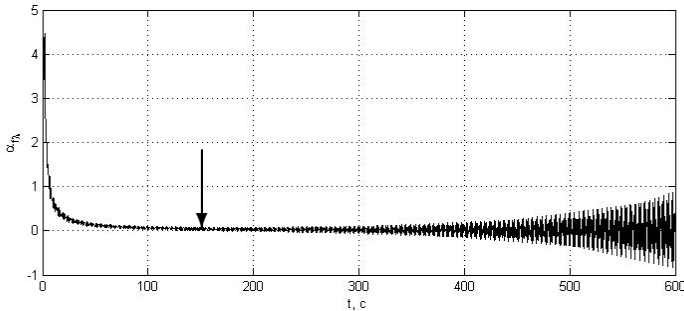


Рис. 1. График изменения фильтра Фурье  $\alpha_{F\lambda}$  согласно формуле (16)

Далее предлагается алгоритм идентификации запаздывания, также основанный на конечно-частотном подходе, который позволяют преодолеть указанный недостаток.

#### 4. Конечно-частотная идентификация объекта с запаздыванием с использованием фазовых сдвигов

##### 4.1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Вернёмся к уравнениям (6). Запись в них измеряемого сигнала как  $y(t)$  осложняет анализ запаздывания. Поэтому представим его как (17) для объекта без запаздывания и как (18) для объекта с запаздыванием в  $\tau$ :

$$(17) \quad y(t) = A(jw_i) \sin(w_i t + \delta(jw_i)),$$

$$(18) \quad y(t) = A(jw_i) \sin(w_i t - w_i \tau + \delta(jw_i)),$$

где  $A(jw_i) = \rho_i \cdot |W(jw_i)|$  – изменение амплитуды  $\rho_i$  входного сигнала  $u(t)$  на частоте  $w_i$  объектом  $W(s)$ ;  $\delta(jw_i) = \arg[W(jw_i)]$  – изменение объектом  $W(s)$  фазы входного сигнала  $u(t)$  на частоте  $w_i$ .

Хотелось бы ввести в уравнение (18) параметр  $\theta$  так, чтобы выполнялись следующие требования:

1) компенсировался вводимый запаздыванием член  $w_i\tau$ , вводя уравнение (18) к виду (17), для которого уже разработана теория конечно-частотной идентификации;

2) параметр имел математическую связь с запаздыванием, позволяя по  $\theta$  вычислить  $\tau$ ;

3) единственное значение параметра  $\theta$  обеспечивало компенсацию  $w_i\tau$ .

С учётом требований уравнения (6) дополняются (18) и искусственно введённым сдвигом по фазе  $w_i\theta$ :

$$(19) \quad \alpha_{i,\theta} = \frac{2}{\rho_i t^i} \int_{t_F^i}^{t_F^i + t^i} A(jw_i) \sin(w_i t - w_i \tau + w_i \theta + \delta(jw_i)) \sin(w_i t) dt,$$

$$\beta_{i,\theta} = \frac{2}{\rho_i t^i} \int_{t_F^i}^{t_F^i + t^i} A(jw_i) \sin(w_i t - w_i \tau + w_i \theta + \delta(jw_i)) \cos(w_i t) dt.$$

Уравнения (19) можно получить на практике несколькими путями. Например, вводя  $w_i\theta$  в испытательный сигнал (7), вычисляя  $\alpha_{i,\theta}$  и  $\beta_{i,\theta}$ , сдвигая  $\theta$  до тех пор пока запаздывание не будет скомпенсировано:

$$(20) \quad u_{ei}(t) = \rho_i \sin(w_i t + w_i \theta),$$

$$y(t) = A(jw_i) \sin(w_i t - w_i \tau + w_i \theta + \delta(jw_i)).$$

Уравнения (19) и (20) хорошо показывают, на чём основан предлагаемый метод идентификации объекта с запаздыванием, однако при использовании на практике такой подход будет занимать много времени, либо памяти, либо вычислительных ресурсов. Поэтому в тексте работы будут встречаться отсылки к (19), поясняющие алгоритм, хотя применимы на практике эквивалентные им уравнения (34), нуждающиеся в единственном экспериментальном вычислении параметров  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ .

При  $\theta = \tau$  результат вычисления фильтров Фурье (19) становится эквивалентен получению фильтров Фурье от объекта без

запаздывания  $W(s)$  (согласно (4)) на той же частоте:

$$(21) \quad \begin{aligned} \varphi_i &= \frac{2}{\rho_i t^i} \int_{t_F^i}^{t_F^i + t^i} A(jw_i) \sin(w_i t + \delta(jw_i)) \sin(w_i t) dt, \\ \psi_i &= \frac{2}{\rho_i t^i} \int_{t_F^i}^{t_F^i + t^i} A(jw_i) \sin(w_i t + \delta(jw_i)) \cos(w_i t) dt. \end{aligned}$$

Из уравнения (19) видно, что при изменении введённого фазового сдвига  $\theta$  величины  $(\alpha_{i,\theta}, \beta_{i,\theta})$  будут повторяться через период  $P_i = \frac{2\pi}{w_i}$ . Следовательно, не только  $\alpha_{i,\tau} = \varphi_i$  и  $\beta_{i,\tau} = \psi_i$ , но и

$$(22) \quad \begin{aligned} \alpha_{i,\theta} &= \varphi_i, \theta = \tau + P_i n, n \in N, \\ \beta_{i,\theta} &= \psi_i, \theta = \tau + P_i n, n \in N. \end{aligned}$$

Частотные параметры  $(\alpha_{i,\theta}, \beta_{i,\theta})$  используются для записи системы уравнений конечно-частотной идентификации. Решение системы (23), аналогичной (8), из  $l = \lceil (n + m + 1)/2 \rceil$  линейных уравнений относительно коэффициентов полиномов  $k(s)$  и  $d(s)$  соответствует *фиктивной* передаточной функции  $W_\theta(s)$ , для которой, очевидно, выполняется соотношение  $\alpha_{i,\theta} + j\beta_{i,\theta} = W_\theta(jw_i)$ :

$$(23) \quad \begin{cases} k(jw_1) = (\alpha_{1,\theta} + j\beta_{1,\theta})d(jw_1), \\ k(jw_2) = (\alpha_{2,\theta} + j\beta_{2,\theta})d(jw_2), \\ \dots, \\ k(jw_l) = (\alpha_{l,\theta} + j\beta_{l,\theta})d(jw_l). \end{cases}$$

Каждое из уравнений данной системы (23) будет обладать свойством (22), но при этом иметь свой уникальный период  $P_i$ .

Введём понятие наименьшего общего кратного (*lcm*) для рациональных чисел  $a, b, c, \dots$ :  $lcm(a, b, c, \dots)$  – это наименьшее рациональное число, которое при делении на любой из аргументов даёт целое число. Наименьшее общее кратное с иррациональным числом даёт  $\infty$ .

Тогда решение системы (23), являющееся коэффициентами передаточной функции  $W_\theta(s)$ , будет совпадать с решением (8) при

$$(24) \quad \theta = \tau + P(W_\theta),$$

где  $P(W_\theta)$  – период, с которым повторяется величина *всех* коэффициентов  $(\alpha_{i,\theta}, \beta_{i,\theta})$  системы уравнений (23) согласно (25):

$$(25) \quad P(W_\theta) = lcm(P_1, P_2, \dots, P_l),$$

где  $P_i, i = \overline{1, l}$ , – периоды на частотах  $w_i$  из системы (23).

Решение системы (8) неизвестно. Чтобы его отыскать, необходимо подать дополнительные дополнительные испытательные сигналы (хотя бы 1, что является преимуществом по сравнению с методом, предлагаемым в [1]) на частотах  $w_i$  ( $i = \overline{l+1, l+p}$ ). Точное количество выбирается исходя из неравенства (26). Таким образом могут быть получены ещё  $p \geq 1$  уравнений для построения систем вида (23) из  $l$  уравнений. Благодаря этому на разных наборах частот можно составить до  $M = \frac{(l+p)!}{p!l!}$  вариантов систем. Для обозначения передаточных функций, полученных решением таких систем, введём обозначение  $W_{q,\theta}(s), q = \overline{1, M}$ . Поскольку  $W_{1,\tau}(s) = W_{2,\tau}(s) = \dots = W_{q,\tau}(s) = W(s)$ , то равенство между собой идентифицированных  $W_{q,\theta}(s), q = \overline{1, M}$ , может служить критерием обнаружения истинного запаздывания:  $\theta = \tau$ .

Выберем частоты  $w_i, i = \overline{1, l+p}$ , так, чтобы период повтора всех систем частотных уравнений составил

$$(26) \quad P_\tau = lcm(P(W_{1,\theta}), P(W_{2,\theta}), \dots, P(W_{M,\theta})) > \tau^*.$$

Из этого следует, что идентифицированные на разных наборах частот передаточные функции  $W_{q,\theta}(s), q = \overline{1, M}$ , совпадут между собой *единственный раз* в допустимом диапазоне. Это условие позволит однозначно идентифицировать запаздывание, и, как следствие, рассчитать коэффициенты передаточной функции объекта без запаздывания:

$$(27) \quad 0 \leq \theta = \tau < \tau^*.$$

Передаточные функции  $W_{q,\theta}(s)$  могут оказаться *близки*, но не равны между собой, поскольку на объект действует неизвестное ограниченное возмущение  $f(t)$ . Тем не менее, значение  $\bar{\theta}$ , при котором  $W_{q,\bar{\theta}}(s)$  наиболее близки, принимается лучшей оценкой  $\tau$ .

Окончательно приходим к задаче минимизации функционала, характеризующего близость  $W_{q,\theta}$  между собой. Предлагается несколько критериев близости передаточных функций.

## 4.2. ВАРИАНТЫ ОЦЕНКИ БЛИЗОСТИ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

### 1. Близость корней полиномов.

Обозначим корни полиномов числителей  $k_{q,\theta}(s)$  передаточных функций  $W_{q,\theta}(s)$  как  $R_{q,\theta} = [r_{1,q,\theta}, r_{2,q,\theta}, \dots, r_{m,q,\theta}]$ , а корни знаменателей  $d_{q,\theta}(s)$  – как  $X_{q,\theta} = [x_{1,q,\theta}, x_{2,q,\theta}, \dots, x_{n,q,\theta}]$ .

При  $\theta = \tau$  будут выполняться равенства

$$(28) \quad R_{i,\theta} = R_{i+1,\theta}; X_{i,\theta} = X_{i+1,\theta}; i = \overline{1, M-1}.$$

Поскольку при экспериментальном определении  $(\alpha_i, \beta_i)$  присутствует некоторая ошибка, то следует искать  $\theta$ , минимизирующую функционал

$$(29) \quad E_1 = \min_{\theta} \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{i=j+1}^M (R_{j,\theta} - R_{i,\theta})(R_{j,\theta} - R_{i,\theta})^H + \\ + (X_{j,\theta} - X_{i,\theta})(X_{j,\theta} - X_{i,\theta})^H.$$

Минимизация этого функционала требует «правильной» упорядоченности корней в векторах  $R_{i,\theta}$  и  $X_{i,\theta}$ , что теоретически является вычислительно трудной задачей. Однако если корни полиномов передаточных функций близки друг к другу либо порядок полиномов объекта не превышает 2, то правильное упорядочивание является простым.

### 2. Близость коэффициентов полиномов.

Альтернативной, более простой с точки зрения вычислений, но менее точной по результатам, может служить минимизация суммарного «расстояния» между коэффициентами идентифицированных передаточных функций  $W_{q,\theta}(s)$ . При равенстве коэффициентов полиномов их корни также будут равны, что приведёт к выполнению (28), а значит, эквивалентно (29). При этом (30) не требует вычисления корней полиномов и правильной их упорядоченности, что представляло сложности в первом способе.

$$(30) \quad E_2 = \min_{\theta} \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{i=j+1}^M (K_{j,\theta} - K_{i,\theta})(K_{j,\theta} - K_{i,\theta})^T + \\ + (D_{j,\theta} - D_{i,\theta})(D_{j,\theta} - D_{i,\theta})^T,$$

где  $K_{j,\theta}, K_{i,\theta}$  – векторы коэффициенты полиномов  $k_{j,\theta}(s)$  и  $k_{i,\theta}(s)$  соответственно;  $D_{j,\theta}, D_{i,\theta}$  – векторы коэффициенты полиномов  $d_{j,\theta}(s)$  и  $d_{i,\theta}(s)$  соответственно.

К недостаткам следует отнести свойство некоторых полиномов при небольших изменениях коэффициентов иметь большие отклонения в корнях. В результате можно получить малые значения функционала при полиномах с существенно различными корнями. Потенциально можно изменить функционал, вводя веса коэффициентов.

### 3. Близость измеренных и расчётных частотных параметров.

Третьим вариантом является подстановка некоторой новой частоты  $w_x$  в передаточную функцию  $W_{q,\theta}(jw_i)$ , которая была получена без использования  $w_x$ . То есть сравнение расчётного значения  $W_{q,\theta}(jw_x)$  с измеренными значениями (19) по расстоянию на комплексной плоскости:

$$(31) \quad |\alpha_{x,\theta} + j\beta_{x,\theta} - W_{q,\theta}(jw_x)| = \sqrt{(\operatorname{Re}\{W_{q,\theta}(jw_x)\} - \alpha_{x,\theta})^2 + (\operatorname{Im}\{W_{q,\theta}(jw_x)\} - \beta_{x,\theta})^2}.$$

Выражение (31) должно равняться 0 при  $\theta = \tau$ , так как точка  $(\alpha_{x,\tau}, \beta_{x,\tau})$  принадлежит годографу  $W_\tau(s)$ .

Поскольку при экспериментальном определении  $(\alpha_{x,\theta}, \beta_{x,\theta})$  присутствует некоторая ошибка, то следует искать  $\theta$ , минимизирующую функционал

$$(32) \quad E_3 = \min_{\theta} \sum_{q=1}^M \sum_{x=1}^p |\alpha_{x,\theta} + j\beta_{x,\theta} - W_{q,\theta}(jw_x)|.$$

## 4.3. УПРОЩЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛОВ

Во всех трех случаях необходимо проверить большое количество значений  $\theta$ , что приводит к повторному вычислению интегралов (19). Для ускорения поиска  $\bar{\theta}$  получим формулы для вычисления  $\alpha_{i,\theta}$  и  $\beta_{i,\theta}$  с меньшей вычислительной сложностью. Идея заключается в том, что экспериментально получаемые параметры  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  идентифицируемого объекта могут быть преоб-

разованы к параметрам аналогичного объекта  $W_\theta(jw_i)$  с произвольным сдвигом по фазе  $\theta$  подобно введению запаздывания:

$$(33) \quad W_\theta(jw_i) = W_z(jw_i)e^{\theta jw_i} = (\alpha_i + j\beta_i)e^{\theta jw_i} = \alpha_{i,\theta} + j\beta_{i,\theta}.$$

Применяя формулу Эйлера к  $e^{\theta jw_i}$  в (33), получим следующие равенства, позволяющие быстро вычислить  $(\alpha_{i,\theta}, \beta_{i,\theta})$  по экспериментально получаемым по формулам (6) значениям  $(\alpha_i, \beta_i)$ :

$$(34) \quad \begin{aligned} \alpha_{i,\theta} &= \alpha_i \cos(w_i\theta) - \beta_i \sin(w_i\theta), \\ \beta_{i,\theta} &= \beta_i \cos(w_i\theta) + \alpha_i \sin(w_i\theta). \end{aligned}$$

#### 4.4. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫБОРУ ЧАСТОТ

Поскольку метод базируется на конечно-частотной идентификации и фильтрах Фурье, то все ограничения оригинального алгоритма сохраняются. При фазовых сдвигах частотных параметров появляется зависимость максимально возможного запаздывания, которое можно однозначно определить, от выбранных частот испытательного сигнала. В результате появляется ряд ограничений, приведённых ниже:

1. Не стоит выбирать их слишком близкими. На близких частотах будут получаться близкие значения  $(\alpha_i, \beta_i)$ , что может приводить к некорректным решениям системы (23) из-за близости к вырожденности самой системы.

2. Иррациональные числа кажутся хорошим выбором, поскольку могут обеспечить  $P_\tau = \infty$  при добавлении всего одной дополнительной испытательной частоты ( $p = 1$ ). Благодаря этому отпадает необходимость заранее знать верхнюю оценку запаздывания. К сожалению, их невозможно реализовать физически, тем не менее использование их приближений может существенно увеличить  $P_\tau$ .

##### **Алгоритм 1.**

1. Зададимся  $\theta = 0, \tau^*$  и шагом  $\Delta\theta$  (чем меньше, тем лучше, исходя из вычислительных мощностей).

2. Зададимся набором частот  $w_i, i = \overline{1, l+p}$ , удовлетворяющим критерию (26). Для каждой из них экспериментально найдем значения  $(\alpha_i, \beta_i)$  согласно (6).

3. По формуле (34) с учётом текущего значения  $\theta$  вычислим частотные параметры  $(\alpha_{i,\theta}, \beta_{i,\theta})$ .

4. Выберем до  $M = \frac{(l+p)!}{p!l!}$  наборов значений  $(\alpha_{i,\theta}, \beta_{i,\theta})$ , исключая  $p$  пар фазочастотных параметров. Для каждого набора составим систему из  $l$  уравнений вида (23). Решая её найдем коэффициенты  $W_{i,\theta}(s), i = \overline{1, M}$ .

5. Оценим близость  $E$  полученных передаточных функций  $W_{i,\theta}(s), i = \overline{1, M}$ , по одному из предложенных критериев (29), (30), (32) или их сумме.

6. Если  $E = 0$ , т.е. полученные  $W_{i,\theta}(s), i = \overline{1, M}$ , совпадают, то  $\theta = \tau$  согласно (24) и задача идентификации объекта с запаздыванием решена. Конец алгоритма 1.

7. Если  $\theta < \tau^*$ , то сохраним текущую пару  $(\theta, E)$ . Будем увеличивать  $\theta$  на величину  $\Delta\theta$  и возвращаться к пункту (3) после каждого изменения  $\theta$ .

8. Среди сохраненных пар  $(\theta, E)$  ближайшим к  $\tau$  значением  $\bar{\theta}$  будет то, у которого значение критерия  $E$  минимально. Конец алгоритма 1.

## 5. Примеры

### 5.1. РЕЗУЛЬТАТЫ ИСХОДНОГО АЛГОРИТМА

В [1] приведён объект с запаздыванием и ограниченным возмущением

$$(35) \quad 0,7\ddot{y}(t) + 0,8\dot{y}(t) + y(t) = 0,4\dot{u}(t - 3) + u(t - 3) + f(t),$$

где внешнее возмущение

$$(36) \quad f(t) = 2\text{sign}[\sin(5t)].$$

В тексте статьи предлагалась двухэтапная идентификация, где на первом этапе к входу объекта прибавляется испытательный сигнал вида (7) длительностью около 186 с (21 период наименьшей испытательной частоты) с интервалом дискретизации по времени  $h = 0,01$ :

$$(37) \quad u_{ei}(t) = 0,05 \sin(0,707t) + 0,075 \sin(1,41t) + \\ + 0,1 \sin(2,12t) + 0,15 \sin(2,83t).$$



После чего на втором этапе идентификации на 60 с к входу объекта прибавляется испытательный сигнал вида (12):

$$(38) \quad u_{e\lambda}(t) = 0,1e^{-0,01t} \sin(0,707t).$$

В результате идентификации был получен объект:

$$(39) \quad 0,65\ddot{y}(t) + 0,83\dot{y}(t) + y(t) = 0,32\dot{u}(t - 3,48) + \\ + 1,06u(t - 3,48) + f(t).$$

## 5.2. РЕЗУЛЬТАТЫ ФАЗО-ЧАСТОТНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ С АНАЛОГИЧНЫМ ИСПЫТАТЕЛЬНЫМ СИГНАЛОМ

Для сравнения эффективности алгоритмов ко входу объекта был прибавлен испытательный сигнал близкий к (37): с теми же частотами и амплитудами компонент, но *меньшим числом гармоник*. Согласно алгоритму 1:

1. Выбраны параметры  $\tau^* = 10$  и  $\Delta\theta = 0,001$ .

2. Выбраны две частоты  $w_1 = 0,707$  и  $w_2 = 1,41$  ( $l = 2$ ), а также одна дополнительная частота  $w_3 = 2,12$  ( $p = 1$ ). На них проведена идентификация длительностью в 21 период наименьшей испытательной частоты. Интервал дискретизации по времени  $h = 0,01$ . Испытательный сигнал принял вид

$$(40) \quad u_{ei}(t) = 0,05 \sin(0,707t) + 0,075 \sin(1,41t) + \\ + 0,1 \sin(2,12t).$$

Получены пары значений:  $(\alpha_1; \beta_1) = (-0,9723; -0,7862)$ ,  $(\alpha_2; \beta_2) = (0,7988; 0,6021)$  и  $(\alpha_3; \beta_3) = (-0,1392; -0,452)$ .

3. По формуле (34) с учётом текущего значения  $\theta$  они пересчитаны в частотные параметры  $(\alpha_{1,\theta}; \beta_{1,\theta})$ ,  $(\alpha_{2,\theta}; \beta_{2,\theta})$  и  $(\alpha_{3,\theta}; \beta_{3,\theta})$ .

4. Из полученных частотных параметров создаётся  $M = 3$  системы уравнений вида (23):

$$(41) \quad \begin{cases} k(jw_1) = (\alpha_{1,\theta} + j\beta_{1,\theta})d(jw_1), \\ k(jw_2) = (\alpha_{2,\theta} + j\beta_{2,\theta})d(jw_2); \\ k(jw_1) = (\alpha_{1,\theta} + j\beta_{1,\theta})d(jw_1), \\ k(jw_3) = (\alpha_{3,\theta} + j\beta_{3,\theta})d(jw_3); \\ k(jw_2) = (\alpha_{2,\theta} + j\beta_{2,\theta})d(jw_2), \\ k(jw_3) = (\alpha_{3,\theta} + j\beta_{3,\theta})d(jw_3). \end{cases}$$

5. Вычислены значения  $E_1, E_2$  и  $E_3$  полученных передаточных функций  $W_{1,\theta}(s), W_{2,\theta}(s), W_{3,\theta}(s)$  по критериям (29), (30), (32) соответственно.

6. Фаза сдвигалась на величину  $\Delta\theta$ :  $\theta = \theta + \Delta\theta$  и повторялись пункты с (3) по (5) до тех пор, пока  $\theta < \tau^* = 10$ . Получаемые на каждом цикле  $E$  сохранялись в соответствующие массивы. Полученные зависимости  $E(\theta)$  приведены в соответствии с графиком на рис. 2.

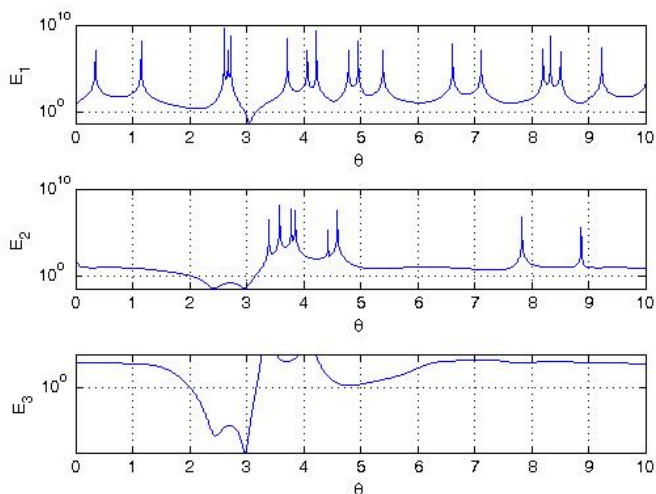


Рис. 2. График зависимости функционалов (29), (30) и (32) от  $\theta$  при испытательном сигнале из [1]

7. Выбраны значения  $\theta$ , соответствующие минимумам  $E(\theta)$ . Результаты идентификации с использованием каждого из предложенных критериев (29), (30) или (32):

а) по критерию близости корней полиномов ( $E_1$ ):

$$(42) \quad 0,788\ddot{y}(t) + 0,739\dot{y}(t) + y(t) = 0,5455\dot{u}(t - 3,054) + 0,8827u(t - 3,054) + f(t).$$

б) по критерию близости коэффициентов полиномов ( $E_2$ ):

$$(43) \quad 0,7184\ddot{y}(t) + 0,7036\dot{y}(t) + y(t) = 0,3981\dot{u}(t - 2,976) + \\ + 0,9509u(t - 2,976) + f(t).$$

в) по критерию близости измеренных и расчётных частотных параметров ( $E_3$ ):

$$(44) \quad 0,7184\ddot{y}(t) + 0,7036\dot{y}(t) + y(t) = 0,3981\dot{u}(t - 2,976) + \\ + 0,9509u(t - 2,976) + f(t).$$

### 5.3. РЕЗУЛЬТАТЫ ФАЗО-ЧАСТОТНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ С ПОДОБРАННЫМИ ЧАСТОТАМИ

Для демонстрации эффективности алгоритма произведено моделирование процесса идентификации объекта из [1] согласно алгоритму (1) с использованием каждого из предложенных критериев:

1. Выбраны параметры  $\tau^* = 10$  и  $\Delta\theta = 0,001$ .

2. Исходя из верхней оценки запаздывания  $\tau^*$  и (26), учитывая [11], были выбраны две частоты  $w_1 = 0,2\pi$  и  $w_2 = 0,8\pi$  ( $l = 2$ ), а также одна дополнительная частота  $w_3 = \pi$  ( $p = 1$ ). На них проведена идентификация длительностью в 80 с. Интервал дискретизации по времени  $h = 0,01$ .

$$(45) \quad u_{ei}(t) = 0,05 \sin(0,2\pi t) + 0,08 \sin(0,8\pi t) + 0,1 \sin(\pi t).$$

На выбранных частотах получены пары значений:  $(\alpha_1; \beta_1) = (-0,4828; -1,1647)$ ,  $(\alpha_2; \beta_2) = (-0,3747; -0,0207)$  и  $(\alpha_3; \beta_3) = (0,0662; 0,2493)$ .

3. По формуле (34) с учётом текущего значения  $\theta$  они пересчитаны в частотные параметры  $(\alpha_{1,\theta}; \beta_{1,\theta})$ ,  $(\alpha_{2,\theta}; \beta_{2,\theta})$  и  $(\alpha_{3,\theta}; \beta_{3,\theta})$ .

4. Из полученных частотных параметров создаётся  $M = 3$  системы уравнений, аналогично (41).

5. Вычислены значения  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$  полученных передаточных функций  $W_{1,\theta}(s)$ ,  $W_{2,\theta}(s)$ ,  $W_{3,\theta}(s)$  по критериям (29), (30), (32) соответственно.

6. Фаза сдвигалась на величину  $\Delta\theta$ :  $\theta = \theta + \Delta\theta$  и повторялись пункты с (3) по (5) до тех пор, пока  $\theta < \tau^*$ . Получаемые

на каждом цикле  $E(\theta)$  сохранялись в соответствующие массивы и приведены в соответствии с графиком на рис. 3.

7. Выбраны значения  $\theta$ , соответствующие минимумам  $E(\theta)$ . Результаты идентификации с использованием каждого из предложенных критериев (29), (30) или (32):

а) по критерию близости корней полиномов ( $E_1$ ):

$$(46) \quad 0,8303\ddot{y}(t) + 0,5313\dot{y}(t) + y(t) = 0,5516\dot{u}(t - 3,006) + \\ + 0,8694u(t - 3,006) + f(t).$$

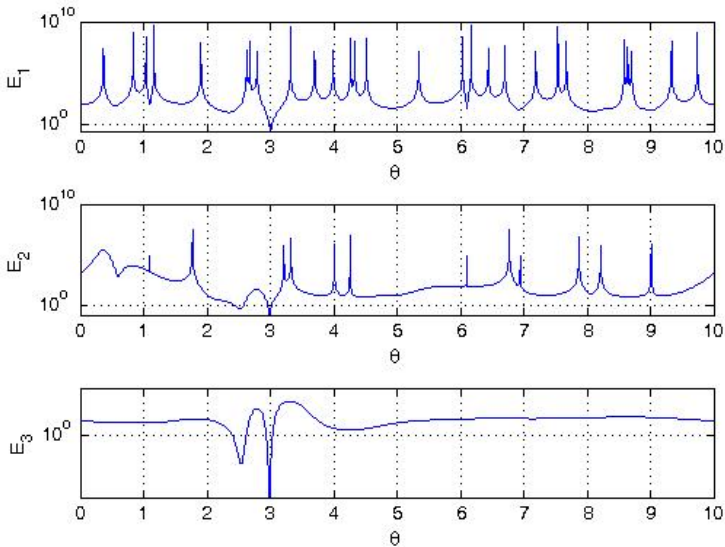


Рис. 3. График зависимости функционалов (29), (30) и (32) от  $\theta$

б) по критерию близости коэффициентов полиномов ( $E_2$ ):

$$(47) \quad 0,784\ddot{y}(t) + 0,505\dot{y}(t) + y(t) = 0,4985\dot{u}(t - 2,987) + \\ + 0,8966u(t - 2,987) + f(t).$$

в) по критерию близости измеренных и расчётных частот-

ных параметров ( $E_3$ ):

$$(48) \quad 0,7817\ddot{y}(t) + 0,5037\dot{y}(t) + y(t) = 0,4958\dot{u}(t - 2,986) + \\ + 0,8979u(t - 2,986) + f(t).$$

## 6. Результаты

Можно видеть существенное улучшение точности идентификации запаздывания. Погрешность в определении  $\tau$ , рассчитанная по формуле  $100(1 - \bar{\theta}/\tau)$ , снизилась с 16% в (39) до 0,2% для первого критерия и до 0,43% и 0,47% – для второго и третьего соответственно. Эти результаты получены при вдвое меньшей длительности идентификации и сократившемся количестве испытательных гармоник!

Для оценки поведения различных критериев оценки близости приведен график (см. рис. 3), полученный в ходе фазочастотной идентификации с оптимальными частотами. На нём видно, как все функционалы стремятся к нулю в окрестности  $\tau$ . При этом на некоторых кривых имеются локальные минимумы, которые при негативном стечении факторов (недостаточно долгая идентификация, внешнее возмущение большой мощности, близость испытательной частоты и частоты внешнего возмущения) могут быть приняты за истинное запаздывание.

Анализируя полученные кривые, можно прийти к выводу, что оценка с использованием первого критерия (чётко выраженный минимум) менее подвержена влиянию внешних возмущений. На графиках функционалов (30) и (32) видны локальные минимумы, близкие к глобальному. Сумма критериев на одинаковых  $\theta$ , по всей видимости, позволит отбросить большинство таких локальных минимумов. Погрешность в определении  $\tau$  ниже у первого способа.

Следует отметить, что точность в определении коэффициентов передаточной функции сравнима с результатами [1].

Приведённый алгоритм эффективен для определения запаздывания в объекта управления, что подтверждается результатами сравнения со статьёй [1]. Особо следует подчеркнуть отсутствие

необходимости подачи дополнительных испытательных сигналов, что позволяет использовать первую часть двухэтапной идентификации, а затем использовать полученные значения  $(\alpha_i, \beta_i)$  для дальнейшего вычисления  $\tau$  без приложения испытательных сигналов.

## **7. Выводы и перспективы**

В данной работе был предложен алгоритм одновременной идентификации запаздывания и коэффициентов объекта, основанный на конечно-частотной идентификации. К его достоинствам следует отнести точность в определении запаздывания, быстродействие и совместимость с результатами измерений конечно-частотных алгоритмов.

Приведённый в работе алгоритм был успешно применен на практике в системе автоматизированного управления вакуумной дуговой печью на АО «Металлургический завод “Электросталь”».

## **Литература**

1. АЛЕКСАНДРОВ А.Г., ОРЛОВ Ю.Ф., ПАЛЕНОВ М.В. *Конечно-частотная идентификация объектов с запаздыванием* // Автоматика и телемеханика. – 2014. – №2. – С. 5–15.
2. АЛЕКСАНДРОВ А.Г., ОРЛОВ Ю.Ф. *Сравнение двух методов идентификации при неизвестных ограниченных возмущениях* // Автоматика и телемеханика. – 2005. – Т. 66, №10. – С. 128–147.
3. АЛЕКСАНДРОВ А.Г. *Частотные регуляторы* // Автоматика и телемеханика. – 1991. – №1. – С. 22–33.
4. АЛЕКСАНДРОВ А.Г. *Конечно-частотная идентификация: границы частот испытательного сигнала* // Автоматика и телемеханика. – 2001. – №11. – С. 3–14.
5. АЛЕКСАНДРОВ А.Г. *Метод частотных параметров* // Автоматика и телемеханика. – 1991. – №12. – С. 3–15.

6. ГРАНИЧИН О.Н., ПОЛЯК Б.Т. *Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах.* – М.: Наука, 2003.
7. ЛЬЮНГ Л. *Идентификация систем.* – М.: Наука, 1991.
8. AHMED S., HUANG B., SHAH S. *Process identification from sinusoidal test data by estimating step response* // Preprints of the 15th IFAC Symposium on System Identification. – Saint-Malo, France, 2009. – P. 396–401.
9. ALEXANDROV A.G. *Finite-frequency method of identification* // Proc. of 10th IFAC Symposium on System Identification. Preprints. – Vol.2 – Copengagen, Denmark, 1994. – P. 523–527.
10. ALEXANDROV A.G. *Finite-frequency identification and model validation of stable plant* // Proc. of 14th World Congress of IFAC. Preprints. – Vol. H – Beijing, China, 1999. – P. 295–301.
11. ALEXANDROV A.G. *Finite-frequency identification and model validation of stable plant* // Proc. of 16th World Congress of IFAC. Preprints. – Prague, Czech Republic, 2005.
12. ALEXANDROV A., ORLOV YU., PALENOV M. *Finite-frequency identification of plant with time delay* // Preprints of the 16th IFAC Simposium on System Identification. – Brussels, Belgium, 2012. – P. 66–70.
13. BJORKLUND S., LJUNG L. *A review of time-delay estimation techniques* // Proc. of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control. – Hawaii, USA, 2013.
14. M'SAAD M., FARZA M. *Identification of continuous-time linear systems with time-delay* // Preprints of the 15th IFAC Symposium on System Identification. – Saint-Malo, France, 2009. – P. 898–903.
15. WONG K.Y., POLAK E. *Identification of linear discrete time systems using instrumental variable method* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1967. – Vol. AC-12. – P. 707–718.

16. YAMAGUCHI H., NAGUMO K., ABE N. *Iterative design using IMC for input time-delay systems with disturbance observer* // Preprints of the 18th IFAC World Congress. – Milano, Italy, 2011. – P. 2430–2435.

## **FINITE-FREQUENCY IDENTIFICATION OF A DELAY VIA SLIDING PHASE LAG**

**Pavel Livatkin**, TRIA GROUP, Moscow (pal2010@yandex.ru).

*Abstract: This article proposes a phase sliding improvement of finite-frequency identification algorithm for a linear stable plant with time-delay in presence of unknown-but-bounded external disturbances (with unknown stochastic characteristics). Finite-frequency identification algorithm feeds to the plant's input a testing signal, that consist of a single harmonic or a sum of them. Phase sliding improvement allows to identify two unknown values, such as coefficients of the plant's transfer function or time-delay value for the successful identification and more than one harmonic if it is needed to increase accuracy or identify a long time-delay value. There are two ideas in the article. Firstly, phase sliding for each harmonic may be opposite for phase deviation, caused by plant's time-delay. Time-delay, phase sliding and harmonic's frequency are analytically related. Secondly, plant's transfer function will be the same for different combinations of harmonics if they are opposite to plant's time-delay. For a definite solution of the delay identification problem the upper bound of the time-delay value is required. The article describes how to select theoretically optimal harmonics, providing time-delay identification without known upper bound. There are three algorithms for the detection equality of phase-slided and time-delayed values, which differ one from each other computational complexity and sensitivity to external disturbances.*

**Keywords:** control systems engineering, dynamical systems identification, delay identification, finite-frequency delay identification.

УДК 681.5

ББК 32.966

DOI: <https://doi.org/10.25728/ubs.2020.84.4>

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии П.С. Щербаковым.*

*Поступила в редакцию 15.10.2019.*

*Дата опубликования 31.03.2020.*



## ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ УСТОЙЧИВЫМ РАЗВИТИЕМ АКТИВНЫХ СИСТЕМ<sup>1</sup>

Угольницкий Г. А.<sup>2</sup>, Горбанёва О. И.<sup>3</sup>, Усов А. Б.<sup>4</sup>  
(Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону)

Агиева М. Т.<sup>5</sup>, Мальсагов М. Х.<sup>6</sup>  
(Ингушский государственный университет, Назрань)

*В качестве одного из направлений развития теории активных систем представлена теория управления устойчивым развитием активных систем. Статья даёт обзор по указанному направлению исследований. Предложено понятие расширенной активной системы как иерархически управляемой динамической системы, формализованы методы управления с учётом требований гомеостаза, разработаны методы и алгоритмы решения соответствующих дифференциально-игровых задач управления, описаны информационно-аналитические системы поддержки решений, дано динамическое обобщение механизмов стимулирования в организационных системах, построены и исследованы модели управления устойчивым развитием эколого-экономических, территориальных, образовательных систем, изучены статические модели согласования интересов при распределении ресурсов, реализован подход к моделированию коррупции в иерархических системах управления. Кратко описаны основные математические модели, лежащие в основе теории управления устойчивым развитием активных систем.*

Ключевые слова: активные системы, динамические игры, оптимальное управление, прикладные модели, устойчивое развитие.

### 1. Введение

Понятие активной системы предложено В.Н. Бурковым и развито им совместно с многочисленными учениками в виде теории активных систем (ТАС) [7, 8]. Новый импульс эти исследования получили в теории управления организационными

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект №17-19-01038.

<sup>2</sup> Геннадий Анатольевич Угольницкий, д.ф.-м.н., профессор (ougoln@mail.ru).

<sup>3</sup> Ольга Ивановна Горбанёва, д.т.наук, доцент (gorbaneva@mail.ru).

<sup>4</sup> Анатолий Борисович Усов, д.т.н., профессор (usov@math.rsu.ru).

<sup>5</sup> Мовлатхан Тугановна Агиева, к.т.н., доцент (agieva25@mail.ru).

<sup>6</sup> Мухарбек Хасанович Мальсагов, к.ф.-м.н., доцент (mmmm1956@bk.ru).

системами, развиваемой Д.А. Новиковым и его соавторами [20, 25]. Близкие подходы используются в российской научной литературе в информационной теории иерархических систем [11], а в зарубежной – в теории контрактов, дизайне механизмов и теории коллективного выбора [24, 70].

Концепция устойчивого развития (УР) первоначально возникла при анализе воздействия человека на окружающую природную среду [13, 29, 58, 63]. В основе этой концепции лежит понятие гомеостаза, т.е. выполнения определённых требований к состоянию эколого-экономических систем на протяжении длительного времени. Математическая формализация этого понятия нашла отражение в теории живучести Ж.-П. Обена [60, 62, 64].

Модели согласования общественных и частных интересов при распределении ресурсов изучаются в экономике общественных благ [71]. Системная методология управления организациями, допускающая близкую к предлагаемой математическую формализацию, представлена в менеджменте качества [14].

Предлагаемая *теория управления устойчивым развитием активных систем* (ТУРАС) развивает ТАС с учётом результатов теории управления организационными системами и других вышеуказанных направлений. Основная идея развития заключается в построении и исследовании динамических моделей согласования интересов активных агентов с учётом требований гомеостаза для управляемой ими системы.

Настоящая статья носит обзорный характер и представляет собой расширенную версию доклада [40] на конференции «Теория активных систем – 50» (ИПУ РАН, ноябрь 2019). Во втором разделе работы даётся общая характеристика основных положений ТУРАС. В третьем разделе представлены методы и алгоритмы решения дифференциальных игр как основных математических моделей ТУРАС. Четвёртый раздел посвящён концепции информационно-аналитических систем поддержки решений применительно к ТУРАС. В пятом–седьмом разделах описаны модели управления УР эколого-экономических, территориальных и образовательных систем. В восьмом разделе

изложена методология управления УР в иерархических системах в условиях коррупции. Девятый–одиннадцатый разделы излагают перспективные направления развития ТУРАС: сетевые модели управления в маркетинге, динамические модели стимулирования и согласования общественных и частных интересов при распределении ресурсов. Приведена обширная библиография (11 монографий и более 60 статей) по ТУРАС за период 1999–2019 гг.

## **2. Общая теория управления устойчивым развитием активных систем**

Первыми публикациями по ТУРАС, посвящёнными математической формализации методов иерархического управления, были статьи [32, 35, 75]. Эти результаты получили развитие в [36, 47] и были обобщены в монографиях [22, 33, 39, 73]. Дальнейшее развитие теории описано в [72, 76], её современное состояние представлено в [21, 34, 37].

*Активные агенты* действуют в соответствии с собственными интересами. Наряду с этим существуют цели и требования, важные для активной системы в целом, но совсем не обязательно совпадающие с интересами отдельных агентов (*гомеостаз* активной системы). Поэтому вводится *Центр* – выделенный активный элемент, выражающий интересы всей активной системы. Рассматривается модель *расширенной* активной системы, включающей Центр, агентов и управляемую агентами динамическую систему, для которой должен выполняться гомеостаз.

Следующие эмпирические принципы ТУРАС обобщают известные положения указанных выше теорий.

1. *Принцип экономической рациональности*: интересы каждого активного агента, в том числе Центра, целиком и полностью характеризуются стремлением к максимизации выигрыша с учётом имеющихся ограничений.

2. *Принцип ответственности Центра*: главная цель Центра заключается в обеспечении условий гомеостаза, при этом он может иметь дополнительные частные интересы.

3. *Принцип необходимости управления*: в общем случае интересы отдельных агентов не совпадают с требованиями гомеостаза.

4. *Принцип активности агента*: каждый агент стремится достичь своих целей наилучшим образом, исходя из наличных ресурсов, в том числе информации о ситуации.

5. *Принцип иерархического согласования интересов*: решение задачи управления активной системой ищется с позиции Центра, который максимизирует свой выигрыш на множестве наихудших для него ситуаций, порождаемых оптимальной реакцией агентов на выбранное Центром управляющее воздействие.

6. *Принцип невозможности системного выбора*: множество агентов в общем случае не способно прийти к коллективному решению, удовлетворяющему всем желательным свойствам.

7. *Принцип стратегического информирования*: передача агентом информации (возможно, искажённой) другим агентам – это его стратегия, направленная на достижение собственных целей.

Активные агенты далеко не всегда заинтересованы в выполнении условий гомеостаза, в силу чего формулирование этих требований в официальных документах остаётся простой декларацией. Поэтому понятие УР наряду с условиями гомеостаза обязательно должно включать учёт интересов обеспечивающих его активных агентов (системную согласованность, мотивированность). Совместное выполнение условий гомеостаза и системной согласованности и означает *устойчивое развитие* активной системы.

Идеальным способом достижения УР выступает *убеждение* – добровольное и осознанное принятие требований гомеостаза всеми агентами. На практике в силу понятных причин убеждение в основном пока остаётся делом будущего, поэтому Центру приходится использовать иерархическое управление, включающее два основных метода. *Принуждение* представляет собой административно-законодательные механизмы управления, явно ограничивающие множества возможных действий агентов так, чтобы они не могли нарушить гомеостаз. *Побуж-*

дение (стимулирование) состоит в использовании экономических механизмов, делающих желательные для Центра гомеостатические действия более выгодными для агентов, чем нежелательные.

Построены и исследованы дифференциально-игровые модели управления УР для различных информационных регламентов (программные/позиционные стратегии, наличие/отсутствие обратной связи по управлению, принуждение/побуждение) и способов организации (независимое, кооперативное и иерархически управляемое поведение агентов). Предложены индексы системной согласованности для количественной оценки эффективности управления УР активных систем.

Приведём для определённости следующую теоретико-игровую модель:

$$(1) \quad J = \int_0^T e^{-\rho t} g(y(t)) dt + e^{-\rho T} G(x(T)) \rightarrow \max;$$

$$(2) \quad p(t) \in P; q(t) \in Q;$$

$$(3) \quad J_i = \int_0^T e^{-\rho t} g_i(y(t)) dt + e^{-\rho T} G_i(x(T)) \rightarrow \max;$$

$$(4) \quad u_i(t) \in U_i(q_i(t)), i \in N;$$

$$(5) \quad \dot{x} = f(x(t), u(t)), x(0) = x_0;$$

$$(6) \quad x(t) \in X^*, 0 \leq t \leq T.$$

Здесь  $J$  и  $J_i$ ,  $g$  и  $g_i$  – интегральные и текущие функционалы выигрыша Центра и агентов соответственно;  $T$  – продолжительность игры (которая может быть бесконечной, тогда терминальный член не используется);  $\rho$  – коэффициент дисконтирования;  $y(t) = q(t), p(t), u(t), x(t)$ ;  $q(t)$  – вектор управляющих переменных принуждения;  $p(t)$  – вектор управляющих переменных побуждения;  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$  – вектор управлений агентов (той же размерности, что и  $q(t)$ );  $N = \{1, \dots, n\}$  – множество агентов;  $x(t)$  – вектор состояния управляемой динамической системы;  $X^*$  – множество состояний, удовлетворяющих требованиям гомеостаза; соотношения (5) описывают динамику управляемой системы; условия (6) формулируют требования гомеостаза.

Предполагается, что  $Q, P, U$  – компактные подмножества соответствующих метрических пространств;  $J$  и  $J_i$  непрерывны по своим аргументам; вектор-функция  $f$  из (5) удовлетворяет условиям Каратеодори. Таким образом, (1)–(6) – иерархическая дифференциальная игра с фазовыми ограничениями. Возможные информационные структуры игр вида (1)–(6) показаны в таблице 1.

Таблица 1. Базовые информационные структуры в иерархических дифференциальных играх

	Без обратной связи по управлениям ведомых (прямые игры Штакельберга)	С обратной связью по управлениям ведомых (обратные игры Штакельберга)
Без обратной связи по состоянию УДС (игры в программных стратегиях)	Прямая игра Штакельберга в программных стратегиях $\Gamma_{1t}$	Обратная игра Штакельберга в программных стратегиях $\Gamma_{2t}$
С обратной связью по состоянию УДС (игры в позиционных стратегиях)	Прямая игра Штакельберга в позиционных стратегиях $\Gamma_{1x}$	Обратная игра Штакельберга в позиционных стратегиях $\Gamma_{2x}$

### 3. Численные методы и компьютерная имитация

В общем случае для решения динамических задач ТУРАС нужны численные методы и имитационное моделирование. Первая авторская публикация на эту тему – статья [57]. В работах [40, 45, 51] обоснована дискретизация непрерывных моделей в соответствии с гипотезой о том, что субъекты управления не могут менять свои стратегии в любой момент времени в силу естественной инерции, поэтому управления остаются постоянными на некоторых периодах. Модифицирован метод А.Ф. Кононенко решения иерархических дифференциальных игр [11] для случая нескольких агентов с учётом указанной гипотезы.

В статье [78] описан метод качественно репрезентативных сценариев имитационного моделирования. Идея метода состоит в том, что для получения вполне приемлемой качественной картины прогноза достаточно использовать небольшое число значений каждой управляющей переменной, отражающих характерные принципиально различные варианты воздействия на управляемую динамическую систему. Предложены формальные условия проверки качественной репрезентативности сценариев, аналогичные требованиям внутренней и внешней устойчивости.

Именно, пусть  $\Omega = V_1 \times \dots \times V_n \times U_1 \times \dots \times U_n$  – множество исходов игры (1)–(5) в разностной форме. Метод исходит из предположения  $U_i = U_i^{QRS}$ ,  $V_i = V_i^{QRS}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , где множества  $U_i^{QRS}$  и  $V_i^{QRS}$  содержат качественно репрезентативные стратегии агента  $i$  и Центра по отношению к агенту  $i$ . Пусть также мощность множеств  $V_i^{QRS}$  и  $U_i^{QRS}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , достаточно мала, так что  $|U_i^{QRS}| = |V_i^{QRS}| = K$ . Тогда  $V_1^{QRS} \times \dots \times V_n^{QRS} \times U_1^{QRS} \times \dots \times U_n^{QRS} = QRS$  есть множество качественно репрезентативных сценариев данной игры, которое включает  $m = |QRS| = \prod_{i=1}^n |V_i^{QRS}| |U_i^{QRS}| = K^{2n}$  элементов. Репрезентативный

сценарий игры  $(v, u)^{(k)} \in QRS$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , имеет вид  $(v, u)^{(k)} = (v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \dots, v_n^{(k)}, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \dots, u_n^{(k)})$ ;  $v_i^{(k)} \in V_i^{QRS}$ ;  $u_i^{(k)} \in U_i^{QRS}$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Тогда множество  $QRS = \{(v, u)^{(1)}, (v, u)^{(2)}, \dots, (v, u)^{(m)}\}$  называется *множеством качественно репрезентативных сценариев иерархической разностной игры с точностью  $\Delta$* , если:

(а) для любых двух элементов  $(v, u)^{(i)}, (v, u)^{(j)} \in QRS$  справедливо  $|J_0^{(i)} - J_0^{(j)}| > \Delta$ ;

(б) для любого другого элемента  $(v, u)^{(l)} \in QRS$  найдется элемент  $(v, u)^{(j)} \in QRS$  такой, что  $|J_0^{(l)} - J_0^{(j)}| \leq \Delta$ .

Здесь  $J_0^{(i)}, J_0^{(j)}, J_0^{(l)}$  – соответствующие выигрыши Центра;  $J_0^{(s)} = J_0(v_1^{(s)}, v_2^{(s)}, \dots, v_n^{(s)}, u_1^{(s)}, u_2^{(s)}, \dots, u_n^{(s)})$ ,  $s = i, j, l$ ;  $\Delta > 0$  – константа, определяющая точность. Таким образом, качественно репрезентативные сценарии ведут к существенному разли-

чению в выигрышах Центра, а различие между одним из репрезентативных и любым другим сценарием в этом смысле несущественно.

В работах [5, 6, 61] изложено применение методов случайного поиска (генетические алгоритмы, алгоритм имитации отжига, бинарное деление) к решению дифференциальных иерархических игр, в том числе моделирующих механизмы стимулирования при распределении ресурсов. Генетический алгоритм и имитация отжига основаны на идее о том, что управление Центра во многих практических ситуациях обладает «липшицевым» свойством, т.е. не может меняться резко, а либо сохраняется, либо увеличивается или уменьшается на небольшую заданную величину. Тогда использовать стратегию альтернативы поощрения и сурового наказания (как в стандартных моделях стимулирования) не удаётся, и надо искать другие, адаптивные способы решения задачи. Бинарное деление лишено этого ограничения, а именно, управление Центра может быть кусочно-непрерывной функцией. Однако алгоритм бинарного деления накладывает дополнительные ограничения на функционал ведущего. Условие Липшица может сочетаться с использованием онлайн-подхода, когда Центр пошагово «обучается» на неизвестных ему заранее стратегиях оптимальных ответов агентов.

#### **4. Информационно-аналитические системы**

Концепция имитационных систем поддержки решений была предложена Н.Н. Моисеевым в ВЦ АН СССР [28]. Идея заключается в соединении возможностей математического моделирования, информационных технологий и экспертных оценок для решения сложных практических задач. Со временем стали говорить об информационно-аналитических системах поддержки решений. В работе [43] идея информационно-аналитической системы конкретизирована для эколого-экономических систем, в [44] – для систем управления качеством водных ресурсов. Отличительной особенностью описанной в [30] информационно-аналитической системы управления



водными ресурсами Ростовской области выступает реализация концепции ТУРАС применительно к водным ресурсам. С этой целью проведены конкретизация механизмов управления [25] для водопользования и разработка оригинальных моделей управления УР водохозяйственного комплекса.

Информационно-аналитические системы представляются наиболее адекватным (хотя довольно затратным) инструментом практической реализации задач управления УР активных систем.

## **5. Управление устойчивым развитием эколого-экономических систем**

Модели управления эколого-экономическими системами как историческая основа ТУРАС представлены в монографии [38]. Эколого-экономические системы представляют собой один из наиболее характерных классов расширенных активных систем, для которых было первоначально определено понятие УР. В роли Центра здесь выступает некоторый орган государственного управления, выполняющий природоохранные функции, в роли агентов – предприятия-природопользователи, в роли управляемой динамической системы – некоторая экологическая система. В качестве условий гомеостаза здесь естественно использовать предельно допустимые концентрации загрязняющих веществ в различных природных средах, критические численности биологических популяций и т.п.

В работах [54, 69, 79, 81] рассмотрены общие вопросы управления эколого-экономическими системами. В цикле статей [46, 48, 49, 53] построены и исследованы модели управления качеством водных ресурсов для различных конфигураций расширенных активных систем. Статья [23] демонстрирует применение ТУРАС к задаче борьбы с эвтрофикацией мелководных водоёмов. В статье [56] исследуются динамические теоретико-игровые модели двухуровневых систем управления с учётом условий УР. Приведены определения равновесий принуждения и побуждения и алгоритмы их построения на основе имитационного моделирования для различных информационных регла-

ментов. Проведён сравнительный анализ эффективности механизмов управления для модели экосистемы мелководного водоёма (Азовского моря).

## **6. Управление устойчивым развитием территориальных систем**

Концепция управления УР территориальных систем изложена в монографии [15]. Работы [4, 74, 77] демонстрируют применение системного подхода, математического моделирования и информационных технологий к задачам согласования интересов территориальных субъектов управления. Определяется понятие региональной активной системы. Гомеостаз региона означает, что хозяйственная деятельность должна обеспечивать достаточно высокие значения социально-экономических индикаторов, не нарушая в то же время требований экологического равновесия. Формально все показатели состояния региональной социо-эколого-экономической системы должны находиться в заданном диапазоне. В свою очередь, системная согласованность означает, что при достижении своих целей Центр должен максимально учитывать интересы активных агентов. Для количественной оценки системной согласованности используется соответствующий индекс. Описаны административные и экономические механизмы управления, обеспечивающие системную согласованность.

Исследуется задача распределения двумя соседними субъектами средств между развитием своей и общей (трансграничной) территории. Для координации деятельности вводится специальный орган управления (Центр). Экономический механизм управления исследуется в двух вариантах: выбор долей участия в доходе от развития общей территории и распределение ресурса. Приводится детальный анализ указанных механизмов, а также организационно-экономическая интерпретация для конкретных задач территориального управления.

## **7. Управление устойчивым развитием образовательных систем**

Задачи управления УР для ещё одного важного класса активных систем, а именно образовательных, рассматриваются в монографии [3]. Это направление исследований продолжено в статьях [17, 18]. Дан анализ университета как активной системы, предложены критерии её УР и их формализация на основе подхода комплексного оценивания. Описан ряд моделей управления УР на уровне кафедры, факультета и университета в целом: статическая модель распределения вознаграждения как кооперативная игра; динамическая модель стимулирования участников научного проекта; динамическая модель контроля распределения рабочего времени сотрудников кафедры как дифференциальная игра в нормальной форме и в форме характеристической функции на основе метода принуждения; двойственные задачи дискретного программирования с учётом требований УР для определения оптимальной кадровой структуры факультета, в том числе оценки эффективности объединения кафедр; динамические модели согласования общих и частных интересов сотрудников при продвижении инноваций; динамические модели борьбы с коррупцией.

Отдельный цикл работ [16, 26, 65] посвящён методологии моделирования социального партнёрства в системе дополнительного профессионального образования.

## **8. Управление устойчивым развитием в условиях коррупции**

Модели управления УР в условиях коррупции в рамках ТУРАС базируются на следующих основных принципах, раскрытых в монографиях [10, 68] и статьях [19, 42, 50, 55].

1. Базовой схемой моделирования служит иерархическая система «принципал – супервайзер – агент – объект» в различных модификациях и её теоретико-игровое исследование. Коррупции подвержен средний уровень управления (супервайзер);

верхний уровень управления (принципал) считается некоррумпированным и выполняет функции борьбы с коррупцией.

2. Предполагаются известными определённые требования УР управляемой системы. Если они выполняются, то задача принципала считается решённой даже при наличии коррупции.

3. Пары «принципал – супервайзер» и «супервайзер – агент» состоят в отношениях «ведущий – ведомый». Ведущий игрок для достижения своих целей использует принуждение и побуждение.

4. Коррупция угрожает УР объекта, поскольку взяточнику выгодно в обмен на взятку ослаблять требования УР. С другой стороны, коррупция есть специфическая форма обратной связи в иерархических системах управления, в силу которой управления становятся функциями взятки.

5. Различаются административная коррупция, при которой за взятку ослабляются административные требования, и экономическая коррупция, при которой взятка позволяет ослабить экономические требования верхнего уровня управления. При моделировании административная коррупция означает принуждение агента супервайзером с обратной связью по величине взятки, а экономическая коррупция – побуждение агента супервайзером с дополнительной обратной связью по величине взятки.

## **9. Сетевые модели влияния и управления в маркетинге**

Модели влияния и управления на сетях описаны в [12]. В рамках ТУРАС известные модели анализа и прогноза групповых мнений формулируются применительно к маркетингу, приводятся авторские алгоритмы исследования моделей. Основная идея состоит в том, что поскольку финальные мнения всех агентов зависят только от начальных мнений членов сильных подгрупп, то маркетинговые воздействия следует оказывать на них и только на них, что существенно снизит расходы на управление. Даются постановки задач оптимального и конфликтного управления мнениями целевой аудитории на сетях, намечаются пути их решения на основе метода качественно

репрезентативных сценариев имитационного моделирования [1, 2, 59].

Задачи оптимального и/или конфликтного управления могут быть дополнены условием гомеостаза, которое в общем случае противоречит непосредственным экономическим интересам субъектов управления, поэтому его включение в постановку задачи возможно либо при добровольном самоограничении субъектов (социальная ответственность), либо через введение Центра, обеспечивающего гомеостаз посредством принуждающего или побуждающего воздействия на остальных субъектов управления.

### 10. Динамические модели стимулирования в организационных системах

Как известно из статической теории стимулирования [25], в оптимальном механизме Центр компенсирует агентам их затраты с мотивирующей надбавкой в случае выполнения плана и ничего не платит в противном случае, при этом план определяется как решение задачи максимизации разности между доходом Центра и суммарными затратами агентов. Модель стимулирования как частный случай задачи управления УР имеет вид

$$J_0 = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \left[ H(x(t), u(t)) - \sum_{i \in N} p_i(x(t), u(t)) \right] dt \rightarrow \max_{p(\cdot)},$$

$$J_i = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} [p_i(x(t), u(t)) - h_i(x(t), u(t))] dt \rightarrow \max_{u_i(\cdot)}, i \in N,$$

в силу (5), где  $H(x, u)$  – функция дохода Центра, возрастающая и вогнутая по обоим аргументам,  $H(0, 0) = 0$ ;  $h_i(x, u)$  – функция затрат  $i$ -го агента, возрастающая и выпуклая по обоим аргументам,  $h_i(x, u) = 0$ ;  $p_i(x, u)$  – неотрицательная функция компенсации затрат агента Центром,  $J_0, J_i$  – функционалы выигрыша Центра и  $i$ -го агента соответственно.

Исходя из результата, полученного в [25] для статической модели стимулирования, естественно ожидать, что оптимальный механизм стимулирования должен иметь вид

$$p_i^*(x^*(t), u^*(t)) = \begin{cases} h_i(x^*(t), u_i^*(t), u_{-i}(t)) + \varepsilon_i(t), & u_i(t) = u_i^*(t), \\ 0, & \text{иначе } i \in N, \end{cases}$$

где  $u^*(t)$  – решение вспомогательной задачи оптимального управления

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} \left[ H(x(t), u(t)) - \sum_{i \in N} h_i(x(t), u(t)) \right] dt \rightarrow \max$$

в силу (5),  $\varepsilon_i(t)$  – неотрицательная мотивирующая надбавка  $i$ -му агенту как функция времени.

В рамках ТУРАС показано, что этот результат действительно сохраняет силу в дискретной стохастической постановке на бесконечном интервале времени [31]. Рассмотрены базовая модель «Центр-агент» и модель с несколькими агентами при частных и более общих предположениях относительно множеств стратегий. Исследовано стимулирование в динамической модели эксплуатации биоресурсов с неопределёнными параметрами, где Центр дальновидный, а агент близорукий [80].

### **11. Модели согласования интересов при распределении ресурсов**

Статические модели согласования общественных и частных интересов (СОЧИ-модели) построены и исследованы в [9, 66, 67]. В статической версии модели активные агенты распределяют имеющиеся у них ресурсы  $r_i > 0$  между инвестициями в производство некоторого общественного блага в размере  $0 \leq u_i \leq r_i$  и частной деятельностью в размере соответственно  $r_i - u_i$ . Частная деятельность приносит агенту доход в размере  $p_i(r_i - u_i)$ , а совокупные инвестиции всех агентов влекут производство общественного блага в объеме  $c(u_1, \dots, u_n)$ , из которого потом агент получает долю  $s_i c(u_1, \dots, u_n)$ ,  $0 \leq s_i \leq 1$ ,  $i \in N$ . Таким образом, функция выигрыша агента есть  $g_i(u) = p_i(r_i - u_i) + s_i c(u_1, \dots, u_n)$ ,  $u = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $i \in N$ .

Вводится функция общественного благосостояния, равная сумме функций выигрыша агентов. Тогда СОЧИ-модель системно согласована, если значение функции общественного благосостояния в наихудшем из равновесий Нэша в игре аген-

тов совпадает с глобально максимальным значением. Показано, что системная согласованность достигается только если все агенты относятся к одному из двух типов: индивидуалисты (тратят весь ресурс на поддержку частной деятельности) и коллективисты (тратят его на создание общественного продукта). Построены и исследованы механизмы управления системной согласованностью в СОЧИ-моделях.

Динамическая СОЧИ-модель управления УР имеет вид

$$J_0 = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} [s_0(t)x(t) - C(q(t))] dt \rightarrow \max$$

$$\sum_{i=0}^n s_i(t) = 1, s_i(t) \geq 0, 0 \leq q_i(t) \leq r_i, i \in N;$$

$$J_i = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} [p_i(r_i - u_i(t)) + s_i(t)x(t)] dt \rightarrow \max$$

$$q_i(t) \leq u_i(t) \leq r_i, i \in N;$$

$$\dot{x} = c(u(t)) - \mu x(t), x(0) = x_0$$

с учётом требования гомеостаза (6).

Здесь  $q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$ ;  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$ ;  $q_i(t)$  – управление принуждения Центра, ограничивающее снизу индивидуализм  $i$ -го агента;  $C(q)$  – возрастающая выпуклая функция затрат Центра на принуждение,  $C(0) = 0$ ;  $s_i(t)$  – управление побуждения Центра (доля соответствующего агента или самого Центра при  $i = 0$  в общественном благе);  $x$  – величина общественного блага (переменная состояния);  $\mu$  – коэффициент амортизации общественного блага. Более адекватна, но и более сложна версия приведённой СОЧИ-модели с динамическими ресурсами, когда  $r_i = r_i(t)$ ,

$$\dot{r}_i = k_i g_i(x(t), u(t)), r_i(0) = r_{i0},$$

$k_i \geq 0$  – заданная константа или  $k_i = k_i(t)$ ,  $0 \leq k_i \leq 1$ , – ещё одно управление агента,  $i \in N$ .

На основе имитационного моделирования начато исследование динамических СОЧИ-моделей управления качеством мелководных экосистем, рыболовства, продвижения инноваций в организациях [27, 52].

## **12. Заключение**

ТАС играет ключевую роль в формализации процессов управления с участием субъектов, имеющих собственные цели, интересы и средства их достижения и способных к стратегическому поведению в условиях конфликта, возможной кооперации и неопределённости. Важным направлением развития ТАС выступает теория управления организационными системами, которая уточняет область приложений ТАС и представляет новые результаты по построению и исследованию механизмов управления.

Описанная в настоящей работе ТУРАС представляет собой ещё одно направление развития ТАС, в котором основное внимание уделяется динамическим моделям управления. ТУРАС опирается на достижения ТАС, теории управления организационными системами и ряда других смежных направлений исследований. За двадцать лет развития ТУРАС в её рамках предложено понятие расширенной активной системы как иерархически управляемой динамической системы, формализованы методы управления с учётом требований гомеостаза, разработаны методы и алгоритмы решения соответствующих дифференциально-игровых задач управления, описана структура информационно-аналитических систем поддержки решений, дано динамическое обобщение механизмов стимулирования в организационных системах, построены и исследованы модели управления УР эколого-экономических, территориальных, образовательных систем, управления качеством водных ресурсов и оптимальной эксплуатации биологических ресурсов, описан и изучен класс статических моделей согласования интересов при распределении ресурсов, реализован подход к моделированию коррупции в иерархических системах управления.

К ближайшим направлениям развития ТУРАС относятся построение и исследование динамических моделей согласования интересов при распределении ресурсов, в том числе в условиях коррупции, дальнейшее изучение динамических моделей стимулирования, разработка и приложение сетевых моделей управления в маркетинге, развитие метода качественно репре-



зентативных сценариев имитационного моделирования и методов случайного поиска для решения сложных динамических задач управления, детальный анализ моделей управления УР учреждений высшего образования.

### **Литература**

1. АГИЕВА М.Т. *Модели управления на социальных сетях в маркетинге* // Инженерный вестник Дона. – 2018. – №1. – [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2018/4670](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2018/4670).
2. АГИЕВА М.Т., БАБИЧЕВА Ю.В., ОКУЛИСТ Н.М., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Задачи анализа и прогноза при управлении целевой аудиторией в маркетинге* // Управление большими системами. – 2019. – Вып.79. – С. 27–64.
3. АГИЕВА М.Т., МАЛЬСАГОВ М.Х., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Моделирование иерархической структуры управления образованием*. – Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2003. – 208 с.
4. АНОПЧЕНКО Т.Ю., МУРЗИН А.Д., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Моделирование согласования интересов в задачах управления устойчивым развитием территорий* // Экономика природопользования. – 2017. – №6. – С. 35–47.
5. БЕЛЯВСКИЙ Г.И., ДАНИЛОВА Н.В., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Эволюционное моделирование в задачах управления устойчивым развитием активных систем* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2016. №8(4). – С. 14–29.
6. БЕЛЯВСКИЙ Г.И., ДАНИЛОВА Н.В., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Эволюционные методы решения динамических задач распределения ресурсов* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2018. – №10(1). – С. 5–22.
7. БУРКОВ В.Н. *Основы математической теории активных систем*. – М.: Наука, 1977. – 255 с.
8. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А. *Теория активных систем: состояние и перспективы*. – М.: Синтег, 1999. – 128 с.
9. ГОРБАНЁВА О.И. *Статические модели распределения ресурсов с учётом согласования интересов активных агентов*. Дисс. на соискание учёной степени д.т.н. – М., 2019.

10. ГОРБАНЁВА О.И., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Моделирование коррупции в иерархических системах управления*. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2014. – 412 с.
11. ГОРЕЛИК В.А., ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления*. – М.: Радио и связь, 1991. – 288 с.
12. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства*. – М.: Физматлит, 2010. – 228 с.
13. ДАНИЛОВ-ДАНИЛЬЯН В.И., ЛОСЕВ К.С. *Экологический вызов и устойчивое развитие*. – М.: Прогресс, 2000. – 416 с.
14. ДЕМИНГ Э. *Выход из кризиса. Новая парадигма управления людьми, системами и процессами*. – М.: Альпина, 2007. – 620 с.
15. ДРУЖИНИН А.Г., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Устойчивое развитие территориальных социально-экономических систем: теория и практика моделирования*. – М.: Вузовская книга, 2013. – 224 с.
16. ДЬЯЧЕНКО В.К., ТАРАСЕНКО Л.В., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Имитационное моделирование социального партнёрства в системе дополнительного профессионального образования* // Управление большими системами. – 2013. – Вып.46. – С. 179–196.
17. МАЛЬСАГОВ М.Х. *Модели комплексного оценивания и кадровой оптимизации работы факультета* // Инженерный вестник Дона. – 2019. – №1. – URL: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2019/5624>.
18. МАЛЬСАГОВ М.Х. *Учреждение высшего образования как активная система* // Инженерный вестник Дона. – 2018. – №3. – URL: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2018/5122>.
19. МАЛЬСАГОВ М.Х., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Борьба с экономической коррупцией при распределении ресурсов* // Компьютерные исследования и моделирование. – 2019. – №11(1). – С. 173–185.
20. *Механизмы управления* / Под ред. Д.А.Новикова. – М.: Ленанд, 2011. – 192 с.

21. *Модели управления устойчивым развитием активных систем и их приложения* / Под ред. Г.А. Угольницкого. – Ростов-на-Дону-Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2019. – 255 с.
22. *Мониторинг: от приложений к общей теории* / Под ред. Угольницкого Г.А. – Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2009. – 176 с.
23. НИКИТИНА А.В., СУХИНОВ А.И., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. и др. *Оптимальное управление устойчивым развитием при биологической реабилитации Азовского моря* // Математическое моделирование. – 2016. – №28(7). – С. 96–106.
24. НИКОЛЕНКО С.И. *Теория экономических механизмов*. – М.: «Бином», 2009. – 207 с.
25. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – М.: Физматлит, 2007. – 584 с.
26. НОР-АРЕВЯН О.А., ТАРАСЕНКО Л.В., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Математическое моделирование социального партнерства: методология междисциплинарного исследования (на примере системы дополнительного профессионального образования)* // Социологические исследования. – 2018. – №4. – С. 15–24.
27. ОНОПРИЕНКО А.Н., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Имитационное моделирование иерархических регламентов управления (на примере рыболовства)* // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2016. – №4. – С. 25–29.
28. ПАВЛОВСКИЙ Ю.Н. *Имитационные модели и системы*. – М.: «Фазис», 2000. – 134 с.
29. *Переход к устойчивому развитию: глобальный, региональный и локальный уровни. Зарубежный опыт и проблемы России* / Рук. авт. колл. Н.Ф. Глазовский. – М., 2002. – 444 с.
30. ПУЧКИН М.В., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Проект информационно-аналитической системы управления водными ресурсами Ростовской области* // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Техн. науки. – 2016. – №2. – С. 28–35.
31. РОХЛИН Д.Б., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Равновесие Штакельберга в динамической модели стимулирования с полной*

- информацией // Автоматика и телемеханика. – 2018. №4. – С. 152–166.
32. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Иерархическое управление устойчивым развитием социальных организаций* // *Общественные науки и современность*. – 2002. – №3. – С. 133–140.
  33. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Иерархическое управление устойчивым развитием*. – М.: Физматлит, 2010. – 336 с.
  34. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Методология и прикладные задачи управления устойчивым развитием активных систем* // *Проблемы управления*. – 2019. – №2. – С. 19–29.
  35. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Теоретико-игровое исследование некоторых способов иерархического управления* // *Известия РАН. Теория и системы управления*. – 2002. – №1. – С. 97–101.
  36. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Теоретико-игровые принципы оптимальности иерархического управления устойчивым развитием* // *Известия РАН. Теория и системы управления*. – 2005. – №4. – С. 72–78.
  37. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Управление устойчивым развитием активных систем*. – Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2016. – 940 с.
  38. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Управление эколого-экономическими системами*. – М.: Вузовская книга, 1999. – 132 с.
  39. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Устойчивое развитие организаций*. – М.: Физматлит, 2011. – 320 с.
  40. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., ГОРБАНЁВА О.И., УСОВ А.Б., АГИЕВА М.Т., МАЛЬСАГОВ М.Х. *Динамические модели управления устойчивым развитием активных систем* // *Материалы международной научно-практической конференции «Теория активных систем – 50 лет», 18–19 ноября 2019 г.* / Под ред. В.Н. Буркова. – М.: ИПУ РАН. – С. 177–196.
  41. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Алгоритмы решения дифференциальных моделей иерархических систем управления* // *Автоматика и телемеханика*. – 2016. – №5. – С. 148–158.
  42. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Динамические модели коррупции в иерархических системах управления при эксплуатации биоресурсов* // *Известия РАН. Теория и системы управления*. – 2014. – №6. – С. 168–176.

43. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Информационно-аналитическая система управления эколого-экономическими объектами* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2008. – №2. – С. 168–176.
44. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Информационно-аналитические системы управления качеством водных ресурсов* // Водные ресурсы. – 2008. – Т. 35, №5. – С. 625–631.
45. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Исследование дифференциальных моделей иерархических систем управления путем их дискретизации* // Автоматика и телемеханика. – 2013. – №2. – С. 109–122.
46. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Кооперативный подход на основе принуждения и побуждения при управлении качеством водных ресурсов* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2009. – №4. – С. 153–162.
47. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Математическая формализация методов иерархического управления эколого-экономическими системами* // Проблемы управления. – 2007. – №4. – С. 64–69.
48. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Методы иерархического управления качеством воды с учётом манипуляции центра и контригры предприятий* // Водные ресурсы. – 2004. – №3. – Т. 31. – С. 375–382.
49. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Многоуровневые модели в задачах управления качеством речной воды* // Водные ресурсы. – 2005. – Т. 32, №4. – С. 504–511.
50. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Модели борьбы с административной коррупцией в иерархических системах управления* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2014. – Т. 6, Вып. 1. – С. 73–90.
51. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Равновесия в моделях иерархически организованных динамических систем с учётом требований устойчивого развития* // Автоматика и телемеханика. – 2014. – №6. – С. 86–102.
52. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Теоретико-игровая модель согласования интересов при инновационном развитии*

- корпорации // Компьютерные исследования и моделирование. – 2016. – №8(4). – С. 673–684.
53. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Управление качеством воды в водотоках* // Водные ресурсы. – 2003. – №2. – С. 250–256.
54. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Управление сложными эколого-экономическими системами* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №5. – С. 169–179.
55. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Управление устойчивым развитием иерархических систем в условиях коррупции* // Проблемы управления. – 2010. – №6. – С. 19–26.
56. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б., ПУЧКИН М.В. и др. *Теоретико-игровые регламенты механизмов управления устойчивым развитием мелководных экосистем* // Автоматика и телемеханика. – 2017. – №6. – С. 122–137.
57. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., ЧЕРДЫНЦЕВА М.И. *Компьютерная имитация устойчивого развития эколого-экономических систем* // Компьютерное моделирование. Экология. Вып.2. / Под ред. Г.А. Угольницкого. – М.: Вузовская книга, 2004. – С. 126–135.
58. ADAMS W.M., JEANRENAUD S.J. *Transition to Sustainability: Towards a Humane and Diverse World*. Gland: International Union for Conservation of Nature and Natural Resources, 2008. – 107 p.
59. AGIEVA M.T., KOROLEV A.V., OUGOLNITSKY G.A. *Modeling and Simulation of Impact and Control in Social Networks* // Proc. of the First Int. EURO Mini Conference “Modelling and Simulation of Social-Behavioural Phenomena in Creative Societies” (MSBC–2019), Vilnius, Lithuania, September 18–20, 2019 / Eds.: N. Agarwal, L. Sakalauskas, G.-W. Weber. – Communications in Computer and Information Science 1079. – Springer, 2019. – P. 29–40.
60. AUBIN J.-P. *Viability Theory*. – Springer-Verlag, 1991. – 572 p.
61. BELYAVSKY G., DANILOVA N., OUGOLNITSKY G.A. *Markovian Mechanism of Proportional Resource Allocation in the Incentive Model as a Dynamic Stochastic Inverse Stackelberg Game* // Mathematics. – 2018. – Vol. 6(8). – P. 131.
62. CAIRNS R.D., MARTINET V. *An environmental-economic*

- measure of sustainable development* // European Economic Review. – 2014. – Vol. 69. – P. 4–17.
63. CLARK W.C. *Sustainability Science: A Room of its Own* // Proc. of the National Academy of Science. – 2007. – Vol. 114. – P. 1737–1738.
  64. DOYEN L., MARTINET V. *Maximin, viability and sustainability* // J. of Econ. Dynamics and Control. – 2012. – Vol. 36. – P. 1414–1430.
  65. DYACHENKO V.K., OUGOLNITSKY G.A., TARASENKO L.V. *Computer Investigation of a Game Theoretic Model of Social Partnership in the System of Continuing Professional Education* // Advances in Systems Science and Applications. – 2015. – Vol. 15(4). – P. 320–328.
  66. GORBANEVA O.I., OUGOLNITSKY G.A. *Static Models of Coordination of Social and Private Interests in Resource Allocation* // Automation and Remote Control. – 2018. – Vol. 79(7). – P. 1319–1341.
  67. GORBANEVA O.I., OUGOLNITSKY G.A. *System Compatibility, Price of Anarchy and Control Mechanisms in the Models of Concordance of Private and Public Interests* // Advances in Systems Science and Applications. – 2015. – Vol. 15(1). – P. 45–59.
  68. GORBANEVA O.I., OUGOLNITSKY G.A., USOV A.B. *Modeling of Corruption in Hierarchical Organizations*. – N.Y.: Nova Science Publishers, 2016. – 552 p.
  69. KORNIENKO S.A., OUGOLNITSKY G.A. *Dynamic Stackelberg Games with Requirements to the Controlled System as a Model of Sustainable Environmental Management* // Advances in Systems Science and Applications. – 2014. – Vol. 14(4). – P. 325–345.
  70. LAFFONT J.-J., MARTIMORT D. *The Theory of Incentives: The Principal-Agent Model*. – Princeton Univ. Press, 2002. – 421 p.
  71. LONG N.V. *A Survey of Dynamic Games in Economics*. – World Scientific, 2010. – 275 p.
  72. OUGOLNITSKY G. *Game theoretic formalization of the concept of sustainable development in the hierarchical control sys-*

- tems // Annals of Operations Research. – 2014. – Vol. 220(1). – P. 69–86.
73. OUGOLNITSKY G. *Sustainable Management*. – N.Y.: Nova Science Publishers, 2011. – 288 p.
74. OUGOLNITSKY G.A. *A System Approach to the Regional Sustainable Management* // Advances in Systems Science and Applications. – 2017. – Vol. 17(2). – P. 52–62.
75. OUGOLNITSKY G.A. *Game theoretic modeling of the hierarchical control of sustainable development* // Game Theory and Applications. – 2002. – Vol. 8. – N.Y., Nova Science Publ. – P. 82–91.
76. OUGOLNITSKY G.A. *Sustainable Management as a Key to Sustainable Development* // Sustainable Development: Processes, Challenges and Prospects. / Ed. D. Reyes. – N.Y.: Nova Science Publishers, 2015. – P. 87–128.
77. OUGOLNITSKY G.A., ANOPCHENKO T.YU., GORBANEVA O.I., LAZAREVA E.I., MURZIN A.D. *System Methodology and Model Tools for Territorial Sustainable Management* // Advances in Syst. Science and Applications. – 2018. – Vol. 18(4). – P. 136–150.
78. OUGOLNITSKY G.A., USOV A.B. *Computer Simulations as a Solution Method for Differential Games* // Computer Simulations: Advances in Research and Applications / Eds.: M.D. Pfeffer, E. Bachmaier. – N.Y.: Nova Science Publ., 2018. – P. 63–106.
79. OUGOLNITSKY G.A., USOV A.B. *Problems of the sustainable development of ecological-economic systems* // Global Climatology and Ecodynamics: Anthropogenic Changes to Planet Earth / Eds.: A.P. Cracknell, V.P. Krapivin, C.A. Varotsos. – Springer-Praxis, 2009. – P. 427–444.
80. ROKHLIN D.B., OUGOLNITSKY G.A., USOV A.B. *A two-level model of optimal harvesting under parameter uncertainty* // Far East Journal of Math. Sciences. – 2017. – Vol. 102(7). – P. 1365–1380.
81. UGOL'NITSKII G.A., USOV A.B. *Three-level control systems for ecological-economic objects with fan structure* // Automation and Remote Control. – 2011. – Vol. 72(8). – P. 1790–1798.



## **THEORY OF SUSTAINABLE MANAGEMENT IN ACTIVE SYSTEMS**

**Gennady Ougolnitsky**, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doct. Sc., professor (ougoln@mail.ru).

**Olga Gorbaneva**, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doct. Sc., associate professor (gorbaneva@mail.ru).

**Anatoly Usov**, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doct. Sc., professor (usov@math.rsu.ru).

**Movlatkhan Agieva**, Ingush State University, Nazran, Cand. Sc., associate professor (agieva 25@mail.ru).

**Mukharbeck Malsagov**, Ingush State University, Nazran, Cand. Sc., associate professor (mmm1956@bk.ru).

*Abstract: The theory of sustainable management in active systems is presented as one of the directions of development of the theory of active systems. The paper reviews this branch of research. A concept of extended active system as a hierarchically controlled dynamic system is proposed. The control methods with consideration of the requirements of homeostasis are formalized. The methods and algorithms of solution of the respective differential game theoretic control problems are developed. The information-analytical decision support systems are described. A dynamic generalization of the incentive control mechanisms in organizational systems is given. The models of sustainable management in environmental-economic, territorial, education systems are built and investigated. Static models of coordination of interests in resource allocation are studied. An approach to the modeling of corruption in hierarchical control systems is implemented. The principal mathematical models that form a base of the theory of sustainable management in active systems are described briefly.*

**Keywords:** active system, dynamic games, optimal control, applied models, sustainable development.

УДК 519.83 + 519.86

ББК 32.817

DOI: 10.25728/ubs.2020.84.5

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии М.В. Губко.*

*Поступила в редакцию 25.12.2019.*

*Опубликована 31.03.2020.*

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ЦИФРОВОЙ ЭКОНОМИКИ

Добронец Б. С.<sup>1</sup>, Попова О. А.<sup>2</sup>

(Сибирский федеральный университет, Красноярск)

*Обсуждаются основные вычислительные проблемы в задачах цифровой экономики, связанные в первую очередь с обработкой и анализом данных больших объемов, организацией вычислительных процессов и повышением точности численных процедур. Подход основан на применении новых методов агрегации данных на основе вычислительного вероятностного анализа, использовании вероятностных расширений и численных операций над кусочно-полиномиальными функциями. Одной из наиболее важных проблем численного моделирования больших данных является задача вычисления функциональных зависимостей. Для выявления зависимостей в больших данных предлагается использовать функциональную регрессию в пространстве эмпирических распределений. Рассматриваются новые методы моделирования функциональных зависимостей на основе кусочно-полиномиальных аппроксимаций. Для анализа и повышения точности вычислений используется подход, основанный на правиле Рунге и экстраполяции Ричардсона. Для организации вычислительного процесса применяется рекурсивно-параллельная схема, основанная на свойствах вероятностных расширений. Такой подход обеспечивает технику быстрых и надежных вычислений в условиях больших объемов данных для различных типов неопределенности. В качестве примера рассматривается задача оценки инвестиционных рисков. Рассчитываются функции плотности вероятности таких факторов, как чистая текущая стоимость (NPV) и внутренняя норма доходности (IRR).*

Ключевые слова: цифровая экономика, большие данные, вычислительный вероятностный анализ, функциональная регрессия, экстраполяция Ричардсона, оценки рисков.

### 1. Введение

Цифровая экономика, основанная на больших данных, является прогностической по своему типу: здесь прогноз, план и факт имеют тенденцию к равенству. Ее основным инструментом является прогностическая аналитика, где основной вид произ-

---

<sup>1</sup> Борис Станиславович Добронец, д.ф.-м.н., профессор (BDobronets@yandex.ru).

<sup>2</sup> Ольга Аркадьевна Попова, к.т.н., доцент (OlgaArc@yandex.ru).

водства персонализирован для нужд клиента, и конкуренция идет не столько за перераспределение существующих рынков, сколько с образованием новых, где больше не конкурируют товары и технологии, а предпочтительны цифровые системы управления на основе цифровых платформ [3, 4, 11, 17, 18]. В то же время данные становятся коммерческим продуктом.

Остановимся более подробно на вычислительных аспектах, характерных для задач цифровой экономики. Выделим из них три и рассмотрим новые методы и подходы, реализующие их. Первый вычислительный аспект связан с необходимостью обработки данных больших объемов. Для его реализации предлагается использовать процедуры агрегирования данных, основанные на применении математических моделей представления данных.

Второй аспект связан с организацией вычислительного процесса, обеспечивающего необходимую для решения соответствующей практической задачи оперативность получения необходимой информации. Для преодоления этой проблемы предлагается использовать рекурсивную схему организации вычислительного процесса.

Третий аспект отражает требование к надежности полученных результатов моделирования, обеспеченных надежными вычислительными процедурами, адекватными тем типам неопределенности, которые содержатся в сырых данных.

В первую очередь наш подход основан на технологиях Big Data, включая процедуры агрегации данных для входных параметров, и использовании вычислительного вероятностного анализа (ВВА) [1, 5–10]. Переход к более обобщенному представлению с помощью агрегирования необходим по нескольким причинам. Во-первых, агрегация существенным образом может снизить объем данных. Во-вторых, детализированные данные часто оказываются очень изменчивыми из-за воздействия различных случайных факторов, разброса значений и поэтому слабо отражают общие тенденции и свойства исследуемого множества. Агрегация в этом случае позволяет увидеть имеющиеся тенденции и закономерности.

Так, на рис. 1 представлен пример В. Хардли [2], где слева представлено точечное множество данных, а справа – результаты агрегирования этих данных с помощью «цветочного» графика.

Анализируя точечное множество данных, В. Хардли высказал желание иметь какой-либо метод, позволяющий увидеть места их скопления. В качестве иллюстрации такого метода он привел так называемый «цветочный график» [2]. Цветочный график строится посредством определения сети квадратов, покрывающих плоскость  $(X, Y)$ , и подсчета числа наблюдений, попадающих в отдельные квадратики. Число «лепестков цветка» соответствует числу наблюдений в квадрате этого «цветка».

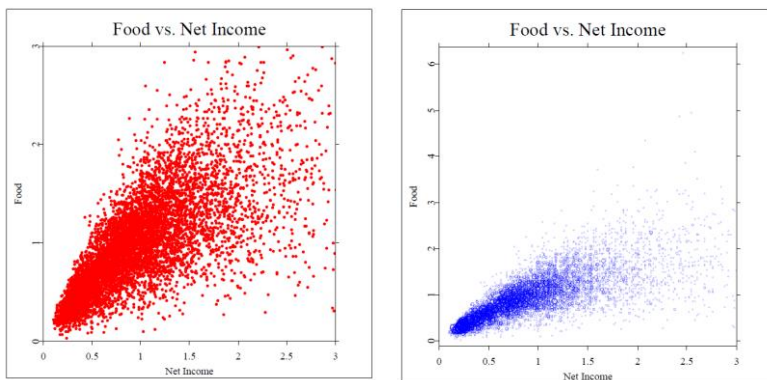


Рис. 1. Зависимость расходов на питание от чистого дохода [2]

Слева на рис. 1 – множество точек зависимости расходов на питание от чистого дохода. Справа на рис. 1 – «цветочный график». «Цветочный график» указывает на сосредоточение данных вокруг увеличивающейся группы плотно упакованных «цветков»; он не имеет явно выраженных скачков или быстрых локальных флуктуаций. Можно предположить гладкую зависимость кривой отклика.

В статье предлагается использовать кусочно-полиномиальные модели, в том числе сплайн-функции. Предла-

гаемый подход к агрегации данных можно интерпретировать как построение функций распределения. В работах [5–7] обсуждаются различные типы математических моделей агрегации данных.

Хотя существует множество способов агрегации данных, включая простое среднее, мы утверждаем, что использование кусочно-полиномиальных функций агрегации будет предлагать более информативное представление о поведении больших данных, чем другие формы агрегации. Разработанные методы уменьшают уровень неопределенности в информационном потоке, позволяют значительно сократить время обработки и использовать численные операции [5, 6, 13].

В настоящее время доминирующие парадигмы экономических теорий основаны на классической математике и представлены в терминах вероятностных и статистических методов. Следует подчеркнуть, что в практических приложениях вероятностные и статистические методы часто и успешно используются в синтезе с современными методами мягких вычислений. Заметим, что в приложениях мы часто имеем дело со случайной и эпистемической неопределенностью [9].

В последние десятилетия существует много современных методов моделирования неопределенности. Как правило, они не противоречат традиционному вероятностному подходу, поскольку касаются других (не вероятностных) типов неопределенности [8].

В этой статье обсуждается использование вычислительного вероятностного анализа (ВВА) для задач со случайной и эпистемической неопределенностью [9]. Основой ВВА являются численные операции над функциями плотности вероятности случайных значений. Это операции «+», «-», «·», «/», «↑», «max», «min», а также отношения порядка «≤», «≥» и некоторые другие. Численные операции над кусочно-полиномиальными представлениями функций плотности вероятности и вероятностные расширения составляют основной компонент ВВА.

Используя подход ВВА, построены численные методы, которые позволяют решать системы линейных и нелинейных алгебраических уравнений со случайными параметрами.

В случае эпистемической неопределенности, мы вводим понятие гистограмм второго порядка. Опираясь на конкретные практические примеры, в работе [9] показано, что использование гистограмм второго порядка может оказаться полезным при принятии решений. В частности, рассмотрена оценка рисков инвестиционных проектов, в которых рассчитываются функции плотности вероятности таких факторов, как чистая текущая стоимость (NPV) и внутренняя норма доходности (IRR).

## 2. Организация вычислительного процесса

Одной из наиболее важных проблем численного моделирования больших данных является задача вычисления функциональных зависимостей. Для организации вычислительного процесса предлагается использовать одно из основных понятий ВВА – вероятностное расширение. Данный подход может использоваться как в случае больших данных, так и для различных типов неопределенности.

Под вероятностным расширением  $f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  мы имеем в виду функцию плотности вероятности случайной величины  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – система непрерывных случайных величин с совместной функцией плотности вероятности  $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$  [10].

**Теорема 1** [10]. Пусть  $f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  вероятностное расширение функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и для всех вещественных  $t$  функция  $f(t, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  – вероятностное расширение функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Тогда

$$(1) \quad f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \int_{x_1}^{\bar{x}_1} x_1(t) f(t, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) dt.$$

**Замечание.** Из теоремы 1 вытекает возможность рекурсивного вычисления вероятностных расширений общего вида, сведением их к вычислению одномерных вероятностных расширений.

Рассмотрим вычисление интеграла (1). Для определенности представим (1) в виде квадратуры

$$\int_{x_1}^{\bar{x}_1} x_1(t) f(t, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) dt \approx \sum_{l=1}^m \gamma_l x_1(t_l) f(t_l, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$$

Для вычисления  $f(t_1, x_2, \dots, x_n)$  далее можно использовать численные квадратуры. Теорема позволяет организовать вычислительный процесс в виде рекурсии с использованием процедуры распараллеливания.

Отметим, что на нижнем уровне необходимо вычислить вероятностные расширения для функций только одной переменной. Все вычисления на каждом уровне независимы и могут вычисляться одновременно.

### **3. Функциональная регрессия на эмпирических распределениях больших данных**

Одним из новых направлений для изучения данных является функциональный анализ данных (ФАД) или Function Data Analysis (FDA), который занимается анализом и теорией данных, представленных в виде некоторых функций, изображений или более общих объектов.

Одним из основных понятий ФАД является понятие функциональных данных, которые представлены так, что для каждого субъекта в случайной выборке записывается одна или несколько функций.

Термин FDA был придуман Ramsay, Dalzell [14–16], история этой области намного старше.

Функциональные данные первого поколения обычно состоят из случайной выборки независимых вещественных функций,  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  на компактном интервале  $I = [0, T]$  на вещественной прямой. Эти вещественные функции можно рассматривать как реализации одномерного стохастического процесса, который часто предполагается в гильбертовом пространстве, например,  $L_2(I)$ .

Функциональные данные следующего поколения – это функциональные данные, которые являются частью сложных объектов данных, и они могут быть многомерными, коррелированными или включать изображения или формы.

В самом общем понимании можно рассматривать функциональные данные как реализации основного стохастического процесса.

Основной процесс в реальных задачах часто не может наблюдаться напрямую, так как данные могут быть собраны дискретно с течением времени либо на фиксированной или случайной сетке времени. В таких ситуациях основной процесс считается скрытым. Временная сетка, где проводятся наблюдения, может быть плотной, разреженной или пустой и она может отличаться от предмета к предмету.

Хотя формального определения функциональных данных не существует, имеется некоторое соглашение определять функциональные данные как функции или как всюду плотные (в отличие от разреженных) выборки. Разреженные функциональные данные возникают в исследованиях, для которых измеряются объекты в разные моменты времени, и количество измерений  $n_i$  для объекта  $i$  может быть ограничено некоторой константой, т.е.  $\sup_{1 \leq i \leq n} n_i < C < \infty$ .

Разреженные и нерегулярно выбранные функциональные данные (которые соответствуют общему типу продольных данных) обычно требуют больше усилий в теории и методологии, чем плотно выбранные функциональные данные, которые записываются непрерывно.

Функциональные данные, которые наблюдаются непрерывно без ошибки, являются самым простым типом функциональных данных. Их можно представить как реализации случайных процессов и применять к ним законы больших чисел и функциональные центральные предельные теоремы.

Цели функционального анализа данных в основном такие же, как и у любой другой ветви статистики. Они включают в себя:

- представление данные способами, помогающими дальнейшему анализу;
- отображение данных для выделения различных характеристик;
- изучение важных источников закономерностей и вариаций среди данных;
- объяснение изменений в результатах с помощью входной информации;



- сравнение двух или более наборов данных в отношении определенных типов вариации, где два набора данных могут содержать разные наборы дубликатов одних и тех же функций.

Функциональная регрессия – это версия регрессионного анализа, когда ответы или ковариаты включают функциональные данные. Модели функциональной регрессии могут быть классифицированы на четыре типа в зависимости от того, являются ли ответы или ковариаты функциональными или скалярными:

- скалярные ответы с функциональными ковариатами;
- функциональные ответы со скалярными ковариатами;
- функциональные ответы с функциональными ковариатами

и

- скалярные или функциональные ответы с функциональными и скалярными ковариатами.

Кроме того, модели функциональной регрессии могут быть линейными, частично линейными или нелинейными. В частности, функциональные полиномиальные модели, функциональные модели с одним и несколькими индексами и функциональные аддитивные модели являются тремя частными случаями функциональных нелинейных моделей.

В статье для описания случайной неопределенности во входных и выходных переменных на этапе преобразования данных предлагается использовать переменные, которые представляют собой математические модели функций плотности вероятности соответствующих переменных, построенные по эмпирическим данным в классе кусочно-полиномиальных моделей. Для вычисления неизвестных параметров модели предлагается использовать численный вероятностный анализ, в котором имеются соответствующие арифметики и процедуры [5, 6, 7].

В рамках применения данного подхода рассматриваются новые методы моделирования функциональных зависимостей на основе аппроксимаций кусочно-полиномиальными функциями [1]. Для исследования и повышения точности вычислений используются методы, основанные на правиле Рунге и экстраполяции Ричардсона [5, 6, 13].

Сформулируем функциональную регрессию как регрессию в пространстве распределений.

Пусть известны значения  $(y_i, x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Будем считать, что случайная величина  $y_i$  распределена по закону  $y(x_i)$ , семейство функций плотности вероятности  $y(x)$  зависят непрерывно от значений  $x$ . Необходимо по данным  $(y_i, x_i)$  оценить плотность вероятности  $y(x)$  и построить функциональную регрессию.

Для построения оценки  $y(x)$  в некоторой точке  $x_0$  зададимся параметром  $h > 0$  и построим на отрезке  $[x_0 - h, x_0 + h]$  по данным  $D_h = \{(y_i, x_i) \mid x_0 - h \leq x_i \leq x_0 + h\}$  регрессию  $r(x)$ . Далее построим выборку  $Z_h = \{z_i = y_i - r(x_i) \mid x_0 - h \leq x_i \leq x_0 + h\}$ . Используя ядерные оценки, построим по  $Z_h$  приближение  $y^h(\cdot, x_0) \approx y(\cdot, x_0)$ . Заметим, что в данном случае мы строим оценку  $y^h(\xi, x_0)$ :

$$y^h(\xi, x_0) = \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} y(\xi, x) dx.$$

Несложно видеть, что

$$y(\xi, x_0) = y^h(\xi, x_0) + Ch^2 + O(h^4),$$

где  $C$  – константа, не зависящая от  $h$ . В этом случае для повышения точности можно использовать экстраполяцию Ричардсона [13]. Для этого построим оценки для  $h$  и  $2h$ :  $y^h(\xi, x_0)$  и  $y^{2h}(\xi, x_0)$ . Далее

$$y(\xi, x_0) = \frac{4}{3} y^h(\xi, x_0) - \frac{1}{3} y^{2h}(\xi, x_0) + O(h^4).$$

В этом случае будет справедлива оценка

$$y(\xi, x_0) = \frac{4}{3} y^h(\xi, x_0) - \frac{1}{3} y^{2h}(\xi, x_0) + O(h^4).$$

Рассмотрим модельную задачу. На рис. 2 слева представлены данные (размерность выборки  $10^5$ ), выборка сгенерирована используя распределение Ирвина–Холла,  $n = 4$ . Справа на рис. 2 оттенками серого цвета представлена восстановленная плотность вероятности.

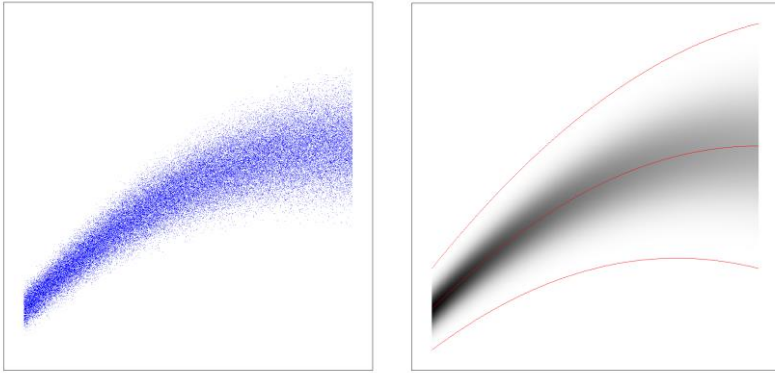


Рис. 2. Модельная задача. Слева – исходные данные, справа – функциональная регрессия

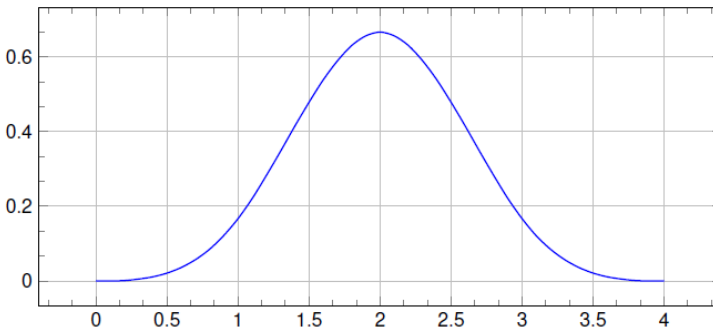


Рис. 3. Сплайновая аппроксимация функции плотности вероятности сечения в некоторой точке

Рассмотрим функциональную регрессию на данных о температуре в городе Красноярске за последние 70 лет. Для каждого дня с апреля по октябрь данные агрегировались в виде эрмитовых кубических сплайнов. В этом случае регрессионная модель была представлена в виде

$$Y = A\varphi_1(t) + B\varphi_2(t) + C\varphi_3(t),$$

где  $A, B, C$  – функции плотности вероятности,  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  – квадратичные функции. На рис. 4 показана функциональная регрессия на данных температуры в г. Красноярске за последние

70 лет. Красные линии – верхняя и нижняя граница области распределений, красная линия внутри области – регрессионная кривая. Оттенками серого показаны значения функции плотности распределения.

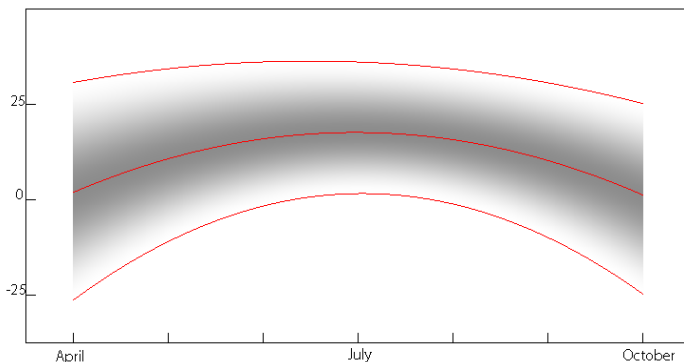


Рис. 4. Функциональная регрессия температуры в г. Красноярске с апреля по октябрь за 70 лет

#### 4. Оценка рисков инвестиционных проектов

Мы рассматриваем оценку рисков инвестиционных проектов, в которых рассчитываются функции плотности вероятности таких факторов, как чистая текущая стоимость (NPV) и внутренняя норма доходности (IRR).

Чистая приведенная стоимость (NPV) – это формула, используемая для определения текущей стоимости инвестиций по дисконтированной сумме всех денежных потоков, полученных от проекта. Формула для дисконтированной суммы всех денежных потоков может быть переписана как

$$(2) \quad NPV(r) = C_0 z_1 s_1 \sum_{i=1}^T \frac{C_i}{(1+r)^i} - C_0,$$

где  $-C_0$  – начальные инвестиции;  $C_i$  – денежные потоки;  $T$  – время;  $r$  – ставка дисконтирования.

IRR определяет максимально допустимую ставку дисконтирования, при которой вы можете инвестировать без каких-либо потерь владельцу: IRR, в котором

$$(3) \quad NPV(r) = 0.$$

В качестве примера, рассмотрим компанию, которая начинает новый проект. Компании необходимо определить инвестиции на развитие своего нового продукта. По оценкам компании, денежный поток будет иметь вид  $C_i = c_i x_i$ , где  $c_i$  – цена и  $x_i$  – объем продаж. Заметим, что будущие объемы продаж  $x_i$  – неизвестные случайные величины, цена определяется менеджерами и является функцией от объема продаж. Таким образом, для оценки выражения (2) необходимо построить совместную функцию плотности вероятности  $p(x_1, x_2, \dots, x_T)$ . Используя Big Data, мы можем построить приведенные объемы продаж фирм-аналогов [3, 17, 18]. На рис. 5 показаны приведенные объемы продаж фирм-аналогов. Далее, используя процедуры агрегации [6, 7], построена аппроксимация совместной плотности вероятности  $p(x_1, x_2, \dots, x_T)$ .

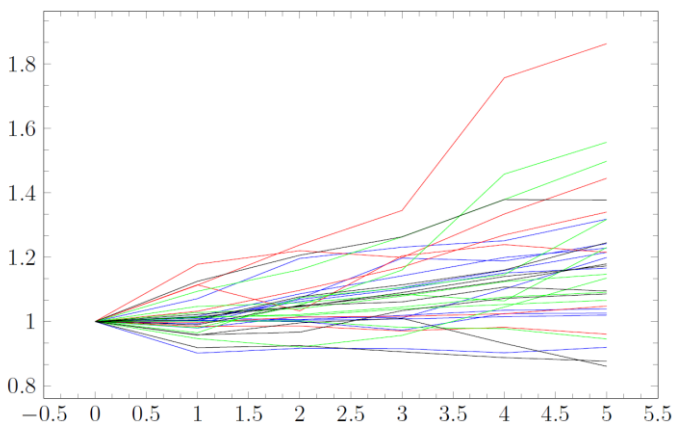


Рис. 5. Приведенные объемы продаж фирм-аналогов

Далее, на основе вычислительного вероятностного анализа, строим плотности вероятности NPV и IRR. На рис. 6 приведены оценки плотности вероятности NPV и IRR.

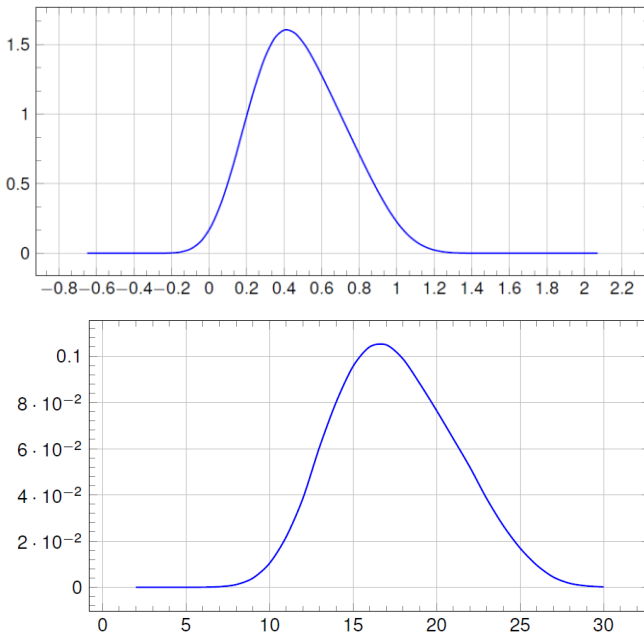


Рис. 6. Функции плотности вероятности NPV и IRR

Используя оценки плотности вероятности NPV и IRR в форме кубических сплайнов, мы можем оценить риск того, что инвестиционный проект приносит убытки. Итак, если  $P_{NPV}$  – функция плотности вероятности NPV, то вероятность того, что инвестиционный проект является убыточным, можно рассчитать по формуле

$$P = \int_{-\infty}^0 P_{NPV}(\xi) d\xi.$$

## 5. Заключение

В статье рассмотрены новые методы к обработке и анализу данных больших объемов на основе процедур агрегирования и рекурсивно-параллельной организации вычислительного процесса. Такой подход представляет собой технику быстрых вычислений и позволяет решать актуальную проблему надежности результатов численного моделирования, обеспеченных

надежными вычислительными процедурами, адекватными типам неопределенности, которые содержатся в сырых данных.

Сравнение методов ВВА и Монте-Карло показало хорошее согласие результатов. В то же время численные эксперименты показывают, что ВВА значительно быстрее метода Монте-Карло. В результате подход, основанный на ВВА, может быть успешно применен для решения ряда экономических проблем.

### Литература

1. ПОПОВА О.А. *Применение численного вероятностного анализа в задачах интерполяции* // Вычислительные технологии. – 2017. – Т. 22, №2. – С. 99–114.
2. ХАРДЛЕ В. *Прикладная непараметрическая регрессия*: Пер. с англ. – М.: Мир, 1993. – 349 с.
3. *Computational economics: a perspective from computational intelligence* / Eds.: Shu-Heng Chen, Lakhmi Jain. – London: Idea Group Inc. 2006. – 339 p.
4. *Digital Economy: Impacts, Influences and Challenges* / Eds.: Harbhajan Kehal, Varinder P. Singh. – London: Idea Group Publishing. 2005. – 425 p.
5. DOBRONETS B.S., POPOVA O.A. *Improving the accuracy of the probability density function estimation* // J. of Siberian Federal University – Mathematics and Physics. – 2017. – No. 1. – P. 16–21.
6. DOBRONETS B.S., POPOVA O.A. *Improving reliability of aggregation, numerical simulation and analysis of complex system by empirical data* // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2018. – Vol. 354. – 012006. – DOI: 10.1088/1757-899X/354/1/012006.
7. DOBRONETS B.S., POPOVA O.A. *Piecewise Polynomial Aggregation as Preprocessing for Data Numerical Modeling* // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. – 2018. – Vol. 1015. – 032028. – DOI: 10.1088/1742-6596/1015/3/032028.

8. DOBRONETS B.S., POPOVA O.A. *Numerical Probabilistic Approach for Optimization Problems* // Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics. Lecture Notes in Computer Science. – 2016. – Vol. 9553. – P. 43–53.
9. DOBRONETS B.S., POPOVA O.A. *Numerical Probabilistic Analysis Under Aleatory and Epistemic Uncertainty* // Reliable Computing. – 2014. – Vol. 19, No. 3. – P. 274–289.
10. DOBRONETS B.S., POPOVA O.A. *Computational Aspects of Probabilistic Extensions* // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2019. – №47. – С. 41–48.
11. KIM HUA TAN, GUOJUN JI, CHEE PENG LIM, MING-LANG TSENG *Using big data to make better decisions in the digital economy* // Int. J. of Production Research. – 2017. – Vol. 55, No. 17. – P. 4998–5000. – DOI: 10.1080/00207543.2017.1331051
12. MAYER-SCHONBERGER V., CUKIER K. *Big Data: A Revolution That Will Transform How We Live, Work, and Think.* – New York, NY: Houghton Mifflin Harcourt, 2013. – 242 p.
13. POPOVA O.A. *Using Richardson Extrapolation to Improve the Accuracy of Processing and Analyzing Empirical Data* // Measurement Techniques. – May, 2019. – Vol. 62, No. 2. – DOI: 10.1007/s11018-019-01594-1.
14. RAMSAY J.O. *When the data are functions* // Psychometrika. – 1982. – Vol. 47, No. 4. – P. 379–396.
15. RAMSAY J.O., DALZELL C. *Some tools for functional data analysis* // J. R. Stat. Soc. Ser. B. – 1991. – Vol. 53. – P. 539–572.
16. RAMSAY J.O., SILVERMAN B.W. *Functional Data Analysis.* – New York: Springer, 2005.
17. SHU-HENG CHEN *Computational intelligence in economics and finance: Carrying on the legacy of Herbert Simon* // Information Sciences. – 2005. – Vol. 170. – P. 121–131.
18. VALERIU I. *Economic Intelligence* // Journal of Knowledge Management, Economics and Information Technology. Special Issue. – December, 2013. – P. 182–198.



## COMPUTATIONAL ASPECTS OF DIGITAL ECONOMY

**Boris Dobronets**, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Doct. of Sc., professor (BDobronets@yandex.ru).

**Olga Popova**, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Cand.Sc. (OlgaArc@yandex.ru)

*Abstract: The article discusses the main computational problems in the digital economy, primarily related to the processing and analysis of big data, the organization of computational processes and improving the accuracy of numerical procedures. The approach is based on the application of new methods of data aggregation based on computational probabilistic analysis, the use of probabilistic extensions and numerical operations on piecewise polynomial functions. One of the most important tasks of numerical modeling of big data is the calculation of functional dependencies. It is proposed to use functional regression on empirical distributions to identify dependencies in big data. New methods for modeling functional dependencies based on spline approximations are considered. To study and improve the accuracy of calculations, an approach based on the Runge rule and Richardson extrapolation is used. To organize the computing process, a recursive-parallel scheme is used, based on the properties of probabilistic extensions. This approach provides a technique for fast and reliable calculations in the conditions of large volumes of data for various types of uncertainty. As an example, the problem of assessing investment risks is considered. The probability density functions of factors such as net present value (NPV) and internal rate of return (IRR) are calculated.*

**Keywords:** digital economy, big data, computational probabilistic analysis, functional regression, Richardson extrapolation, risk assessment.

УДК 519.24

ББК 22.193

DOI: 10.25728/ubs.2020.84.6

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии В.Н. Бурковым.*

*Поступила в редакцию 24.12.2019.*

*Опубликована 31.03.2020.*

**РАЗРАБОТКА И РЕАЛИЗАЦИЯ ПОДХОДА  
К КОРРЕКТНОМУ ОПИСАНИЮ ЭКСПЕРТНОГО  
КРЕАТИВНОГО МЕТОДА.  
Ч. 2. РЕАЛИЗАЦИЯ ПОДХОДА  
НА ПРИМЕРЕ МОЗГОВОЙ АТАКИ**

**Сидельников Ю. В.<sup>1</sup>**

*(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, МАИ, Москва)*

*Актуальность подхода к корректному описанию произвольного экспертного креативного метода обоснована необходимостью повышения эффективности реализации этих методов. В данной статье, на основе предложенного ранее подхода к корректному описанию произвольной разновидности экспертного метода, разработана информационная вербальная нормативная модель такого креативного метода как мозговая атака. Предложены основания для использования моделей потенциально возможных вариантов креативных методов. Разработанная модель мозговой атаки, позволяет анализировать, сравнивать и улучшать имеющихся разновидности мозговых атак, а также подбирать такую ее разновидность, которая будет более чем другие эффективно функционировать за счёт адаптации параметров мозговой атаки к условиям и ограничениям поставленной задачи. В рамках этого подхода, в частности, предложен постулат характеризующий возможность сопоставления однотипных объектов, в том числе и экспертных методов. Найдены, кратко описаны, и проанализированы двадцать две разновидности мозговых атак, удовлетворяющих необходимым требованиям по их принадлежности к совокупности. Выявлены характеристики и показатели, которые характеризуют возможные разновидности этих мозговых атак. Предложена трактовка нормативной информационной модели креативного экспертного метода как кортежа, включающего упорядоченную совокупность параметров и показателей, характеризующих этот метод. Обоснована необходимость одновременного решения шести задач, при общей задаче моделирования произвольной разновидности МА, таким образом, мы рассмотрели синкретичную модель, состоящую из шести моделей, как ее составных частей. Предложены возможные направления дальнейших разработок подхода к корректному описанию произвольного экспертного метода.*

Ключевые слова: мозговая атака, креативные методы, модель мозговой атаки.

---

<sup>1</sup> Юрий Валентинович Сидельников, д.т.н., проф. (sidelnikovy@mail.ru).

## 1. Введение

В первой части данной статьи [7] был предложен подход к корректному описанию произвольного экспертного креативного метода, предложены постулаты, базовые гипотезы исследования и утверждения, а также разработан понятийный аппарат исследования по рассматриваемой теме.

Цель настоящего исследования состоит в реализации ранее рассмотренного подхода к корректному описанию любого потенциально возможного экспертного креативного метода на примере мозговой атаки (МА).

Из цели исследования вытекают следующие задачи:

1. Найти и кратко описать ряд существующих разновидностей МА, удовлетворяющих необходимым требованиям по принадлежности к их совокупности, и проанализировать их.

2. Выявить характеристики и показатели, которые характеризуют возможные разновидности МА.

3. Базируясь на этих показателях, построить модель произвольной разновидности потенциально возможного варианта МА, которая удовлетворяет необходимым требованиям по принадлежности к их совокупности.

4. Перечислить основания для использования моделей потенциально возможных вариантов креативных методов.

5. Предложить возможные направления дальнейших разработок.

## 2. Перечень оснований для использования моделей потенциально возможных вариантов креативных методов

На наш взгляд, построенные модели, в том числе и МА, могут быть полезны исследователю для:

1. Систематического анализа, сравнения, поиска новых и улучшения имеющихся экспертных методов и процедур. При этом мы исходим из предлагаемого *Постулата №9*<sup>1</sup>: «Проще

---

<sup>1</sup> Исходя из нумерации постулатов в первой части статьи.

сопоставлять модели однотипных объектов, нежели сами эти объекты». Рассмотрим конкретизацию этого постулата для такого объекта как экспертные методы или процедуры. *Реализация №1 Постулата №9*: «Проще сопоставлять адекватные модели экспертных методов (процедур), нежели сами эти методы (процедуры)».

2. Подбора наиболее подходящего метода при решении экспертных задач.

3. Снятия неясности в описании существующих экспертных методов.

4. Указание на некорректное описание имеющегося метода и (или) не достаточно полного его описание.

При этом такие модели легко поддаются пониманию и изменению.

### ***3. Краткое описание ряда существующих разновидностей МА, удовлетворяющих необходимым требованиям по их принадлежности к совокупности***

В данном исследовании мы перечислим двадцать две разновидности МА с указанием первоисточников в порядке возрастания года их публикации. Это необходимо для их дальнейшего анализа. При этом все они удовлетворяют требованиям по принадлежности к совокупности МА, рассмотренным в первой части статьи [7].

В российской литературе существуют упоминания и краткие описания более 40 разновидностей МА, но при этом чрезвычайно редко ссылаются на первоисточники. Некоторые из разновидностей практически не различимы. При их анализе необходимо иметь в виду, что существует странная традиция присваивать новые названия одной и той же разновидности МА. Так, например, дидактический мозговой штурм (Didactic Brainstorming) предложенный Уильямом Дж.Дж. Гордоном (USA) имеет в литературе и другие названия, например: метод Гордона (Gordon's method), техника последовательного раскрытия (Technology of the sequential disclosure); разновидность Гордона – Литтл (Gordon – Little Variation). Следует отметить, что

ряд методов или методик, которые, особенно в российской литературе, называют разновидностью МА, таковыми не являются, так как не удовлетворяют четырем необходимым и достаточным условием идентификации этой совокупности [7]. Например, любой из креативных методов, в рамках которого на этапе генерации допускается критика, пусть даже благожелательная, нельзя отнести к совокупности МА, так как не будет функционировать такой реальный механизм получения новой информации от участников на этапе генерации идей, как дискурсивная хаотизация перебора. К таким методам относятся, например, синектика или конференция идей, которые не являются разновидностями МА, хотя часто в литературе позиционируются как МА. Представим для анализа следующие разновидности МА:

1. Мозговая атака (Brainstorming). Предложена в 1942 г. Автор Алекс Ф. Осборн (Alex Faickney Osborn, USA) [16].

2. Генерация вопросов (Question Brainstorming, or Questorming). Джон Роланд (Jon Roland) указывает, что автором является некая команда Массачусетского технологического института, разработавшая данную разновидность МА в 50-х годах XX века [20].

3. Теневой (групповой) мозговой штурм (Shady (Group) Brainstorming). Предложен в 1948 г. Автор проф. Дж. Дональд Филипс (J. Donald Philips, USA) [17].

4. Массовый мозговой штурм (Mass Brainstorm, or Buzz Session). Предложен в 1948 г. Автор проф. Дж. Дональд Филипс (J. Donald Philips, USA) [17].

5. Метод Филлипса 66 (Phillips 66, or The Discussion 66 Method). Предложен в 1948 г. Автор проф. Дж. Дональд Филипс (J. Donald Philips, USA) [17].

6. Дидактический мозговой штурм (Didactic Brainstorming). Известны его другие названия: Метод Гордона (Gordon's method); техника последовательного раскрытия (Technology of the Sequential Disclosure); разновидность Гордона – Литтл (Gordon–Little Variation). Автор Уильям Дж.Дж. Гордон (William J.J. Gordon, USA). Метод разработан в 1950-е годы. Описан в книге А. Ван Ганди [23].

7. «Брейнрайтинг» (Brainwriting), или «Письменный мозговой штурм» (Written Brainstorming). По-видимому, данный метод был впервые предложен Майклом Микалко (Michael Michalko). Метод подробно описан в книге [15]. Ряд разновидностей этого метода, как и сам термин «Брейнрайтинг», был предложен Хэрстом Гэшка (Horst Geschka) и его коллегами из Института им. Баттелля во Франкфурте, Германия, (Battelle Institute in Frankfurt, Germany). Не исключено, что эта разновидность была разработана не позднее 1969 года, так как ее разновидность – метод «6-3-5» – была опубликована в 1969 г.

8. Метод «6-3-5 Брейнрайтинг» (6-3-5 Brainwriting). Известно другое его название: «Метод 6-3-5». Предложен в 1969 г. Автор фон Бернд Рорбах (von Bernd Rohrbach) [10].

9. Триггер-метод (Trigger Method). Предложен в 1969 г. Автор Джон И. Бьяке (J. E. Bujake) [11].

10. Мозговой штурм Роулинсона (Rawlinson Brainstorming) был предложен в 1970 г. Автор Г. Джефффри Роулинсон (J. Geoffrey Rawlinson) [18].

11. Метод «Баттелле – Билдмэппин – Брейнрайтинг» (BBB, Battelle-Buildmappen-Brainwriting) был разработан в 1975 г. исследователями из Института им. Баттелля во Франкфурте, Германия. Авторы: Дж. Уорфилд, Хэрст Гэшка и Р. Гамильтон (J. N Warfield, H. Geschka, R. Hamilton) [25].

12. Обратный штурм (Reverse brainstorming), разработан в 1981 г. Автор Г. Джефффри Роулинсон (J. Geoffrey Rawlinson) [19].

13. Деструктивно-конструктивный мозговой штурм (Destructive-Constructive Brainstorming), предложен в 1985 г. Автор Рик Е. Григгс. (R. E. Griggs) [13].

14. Ролевой мозговой штурм (Rolestorming Technique) предложен в 1985 г. Автор Рик Е. Григгс. (R.E. Griggs) [13, 24] 15.<sup>1</sup>

16. Метод «I-G-I» разработан в 1987 г. Авторы Джон Р. Роситер и Ларри Перси (John R. Rossiter, Larry Percy) [21].

---

<sup>1</sup> Нам не удалось обнаружить опубликованный первоисточник по данной разновидности Рика Григгса, но информация о его тренинге с использованием ролевого мозгового штурма была опубликована д-ром Артуром Ван Ганди в 1988 году [13, 24].

17.Разновидность мозгового штурма Дейла и Штребе предложена в 1987 г. Майклом Дейл и Вольфгангом Штребе (Diehl Michael, Stroebe Wolfgang) [14].

18.Индивидуальный штурм (Individual Brainstorming) разработан в 1995 г. Авторы Андриан Фернхэм и Татьяна Язданпанахи (Adrian Furnham and T. Yazdanpanahi) [12].

19.Мозговой штурм «Делюкс» (Brainstorming Deluxe), разработан в 2000 г. Автор Грег Бахман (Greg Bachman) [8].

20.Поэтапный штурм, разработан в 2006 г. Автор Оливер Тубиа (Olivier Toubia) [22].

21.Мозговой штурм со звездным импульсом, или Звездный мозговой штурм, предложен в 2011 г. Авторы Сара Миллер Бебе и Рэндольф Фэрсон (Sarah Miller Beebe, Randolph H. Pherson) [9].

22. Мозговой штурм на основе изображений. («Image Brainstorming»). Автор Ола Мёллер (Ola Möller), предложен в 2012 г. [26]

23.Четырехэтапная мозговая атака (Four-Stage Brainstorming), разработана в 2014 г. Юрием В. Сидельниковым [6].

#### **4. Подход к разработке модели произвольной разновидности потенциально возможного варианта МА**

Под моделью креативного экспертного метода в данном исследовании мы будем понимать кортеж как упорядоченную совокупность параметров и показателей, характеризующих этот метод. При этом:

1. Эта совокупность взаимосвязана и определяется через основные задачи исследователя.

2. Сами параметры выражены через их знаки (символы) имеющие смысл и вербальное описание.

3. При этом сама модель будет нормативной.

Цель автора научной статьи – рассмотрев вышеуказанные разновидности МА, создать новацию на основе уже существующих разновидностей и опубликовать в научном журнале. Таким образом, на основе результатов первой части статьи [7] необходимо одновременно решать шесть задач, а общую задачу моделирования произвольной разновидности МА мы должны

рассмотреть как синкретичную модель, состоящую из шести моделей как ее составных частей.

С тем чтобы в дальнейшем отобразить и описать их параметры и показатели, которые характеризуют потенциально возможные разновидности МА, перечислим эти модели:

I. Краткого описания (аннотации) статьи МА на русском языке (АнР) в традиционном для русскоязычных авторов понимании.

II. Краткого описания (аннотации) МА на английском языке (АнА). Этот элемент описания также нужно рассматривать как отдельную вербальную модель. По своему содержанию и структуре этот материал должен быть ближе к реферату, а согласно ГОСТ 7.9-95 реферат – это краткая характеристика документа с точки зрения его назначения, содержания, вида, формы и других особенностей. И все эти характеристики и параметры этой модели нужно очень кратко описывать.

III. Полного описания варианта МА, разработанной ее автором (ОА).

IV. Полного описания варианта МА, разработанной не автором (ОнеА).

V. Процедурной составляющей разновидности МА (П).

VI. Дополнительные параметры разновидности метода МА (ДП).

## **5. Выявление и описание показателей, которые характеризуют возможные разновидности мозговых атак**

Последовательно рассмотрим элементы этих моделей, а также приведем сокращенные названия элементов модели (знаки параметров) и их краткие расшифровки.

I. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ (АННОТАЦИЯ) МА НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ – АнР.

- 1) Знак «АнРвфс» означает наличие такого параметра модели краткого описания (аннотации) МА на русском языке, как вид и форма статьи.



- 2) АнРнс означает наличие такого параметра модели краткого описания (аннотации) МА на русском языке, как назначение статьи.
- 3) Знак «АнРсс» означает наличие такого параметра модели краткого описания (аннотации) МА на русском языке, как содержание статьи.

## II. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ (АННОТАЦИЯ) МА НА АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКЕ – АнА.

- 1) Знак «АнАв» означает наличие такого параметра модели краткого описания (аннотации) МА на английском языке, как введение.
- 2) Знак «АнАци» означает наличие такого параметра модели краткого описания (аннотации) МА на английском языке, как цели и задачи исследования.
- 3) Знак «АнАм» означает наличие такого параметра модели краткого описания (аннотации) МА на английском языке, как используемые методы.
- 4) Знак «АнАр» означает наличие такого параметра модели краткого описания (аннотации) МА на английском языке, как полученные результаты.
- 5) Знак «АнАз» означает наличие такого параметра модели краткого описания (аннотации) МА на английском языке, как заключение.

Поясняя последующие элементы моделей описания ОА и ОнеА, отметим, что по сути это так называемые «издательские параметры» статей. В ряде случаев эти элементы будут совпадать.

## III. ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ ВАРИАНТА МА, РАЗРАБОТАННОЙ ЕЕ АВТОРОМ, – ОА.

- 1) Знак «ОАинд» означает наличие такого параметра модели описания статьи, как индекс. Например, УДК. При чем обозначение может быть одинаково как для новой разновидности МА, предложенной ее автором, так и для описания статьи о некой разновидности МА, разработанной не её автором. Таким образом, этот же параметр принадлежит также модели ОнеА.

В дальнейшем наличие в статье любого из параметров модели будет обозначать знаком «1» после его обозначения, а его

отсутствие в реальной статье – знаком «0». Например, ОАинд1 означает, что в данной статье указан индекс, а ОАинд0 означает, что в данной статье индекс не указан.

- 2) Знак «ОАкс» означает наличие такого параметра модели описании статьи, как ключевые слова. (Этот же параметр принадлежит модели ОнеА).
- 3) Знак «ОАназ» означает наличие такого параметра модели описании статьи, как одно или несколько названий рассматриваемой разновидности МА (на русском и английском языках). Например: мозговая атака, или классическая мозговая атака (Brainstorms, or Classical brainstorming), или метод «отнесенной оценки». Обычно более чем одно название разновидности МА присуще в описании не ее автором. Таким образом, этот же параметр принадлежит также модели ОнеА.
- 4) Знак «ОАф.и.» означает наличие такого параметра модели описании статьи как «фамилий и имена авторов (автора)» рассматриваемой разновидности МА. (Написание их фамилий и имен на русском и английском языках). Например, автором классической мозговой атаки является Алекс Ф. Осборн.
- 5) Знак «ОАца» означает наличие такого параметра модели описании статьи, как постановка цели исследования автором. Например, по мнению А. Осборна, его целью при разработке МА было улучшение интенсификации познавательного процесса. Более общие варианты ответа: академическая; корпоративно-конвенциональное; рыночная и т.д. (Этот же параметр принадлежит модели ОнеА).
- 6) Знак «ОАци» означает наличие такого параметра модели описании статьи, как цели исследователей, которые могут использовать данную разновидность МА. Например, целью исследователей для классической мозговой атаки, а также для преобладающего числа ее разновидностей, являются, по мнению Дж. К. Джонса, «стимулировать группу лиц к быстрому генерированию большого количества идей» [Стр. 242, 1]. (Этот же параметр принадлежит модели ОнеА). (Цели исследователей, которые мо-

гут использовать данную разновидность МА могут отличаться от целей автора этой разновидности).

- 7) Знак «ОАз» означает наличие такого параметра модели описании статьи, как задача (задачи) автора статьи. В случае возможности декомпозиции цели исследования. Например, для классической мозговой атаки: изложить описание МА; вычленив существенные элементы разновидности МА, ее характеристики и представить это описание процедурно. (По возможности приближаясь к алгоритмической записи).
- 8) Знак «ОАв» означает наличие такого параметра модели описании статьи, как выводы или заключение. (Этот же параметр принадлежит модели ОнеА).
- 9) Знак «ОАсл» означает наличие такого параметра модели описании статьи, как список литературы или используемых источников (книг, статей, сайтов). (Этот же параметр принадлежит модели ОнеА, но с обязательным добавлением первоисточника).

#### IV. ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ ВАРИАНТА МА, РАЗРАБОТАННОЙ НЕ ЕЕ АВТОРОМ, – ОнеА.

- 1) Знак «ОнеАгод» означает наличие такого параметра модели описании статьи как, год первой публикации в журнале описываемой разновидности или когда она была предложена в другом источнике. Например: статья опубликована в научном журнале или в виде монографии или брошюры, или в популярном издании, или опубликована на сайте в ... году; озвучена на тренинге или в рамках «case study» в... году, что было подтверждено в нижеследующем источнике. Дополнительно можно указать информацию о первой публикации на русском языке. Например. Первая известная нам открытая публикация по мозговой атаке была издана в виде брошюры в 1942 году [16].
- 2) Знак «ОнеАнди» означает наличие дополнительной информации для читателей о некоторых значимых предложениях по улучшению описываемой МА со стороны российских или иностранных авторов.

- 3) Знак «ОнеАон» означает наличие описания недостатков, которые удастся исправить или смягчить их уровень автору (авторам) исследуемой разновидности МА.
- 4) Знак «ОнеАнн» означает наличие нового, что предлагает автор (авторы) в своей разновидности, по сравнению с другими разновидностями МА. Например, для такой разновидности МА, как «Дидактический мозговой штурм», в течение всего подготовительного периода ведущий не фиксирует тему обсуждения [23]. Или: для такой разновидности МА, как «Четырехэтапная мозговая атака», предложено расширить число ролевых функций для участников процедуры [6].

Сначала дадим такие элементы модели описания процедуры МА, которые характеризуют ее в целом, и, соответственно, общие характеристики, а в дальнейшем – поэтапно.

#### V. ПРОЦЕДУРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ РАЗНОВИДНОСТИ МА, КОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИЗУЮТ ЕЕ КАК ЦЕЛОЕ, – П.

- 1) Знак «Пнрп» означает наличие разделения процесса генерации идей от процесса критического анализа по времени и по группам участников.
- 2) Знак – Пнуд, означает наличие управляемой дискуссии в группах с непосредственным контактом участников (этап генерации) и экспертов (этап анализа).
- 3) Знак «Пфпз» означает наличие такого процедурного параметра модели, как формализация постановки задачи или проблемы ЛПР в рамках данной процедуры и ее описание, если она наличествует. Нам неизвестно, как нетривиально можно задать отношение хотя бы частичного порядка на множестве механизмов формализации постановки задачи или проблемы и обосновать эффективность такого предпочтения. Исходя из этого, полагаем, что значение параметра равно нулю, если информация по этому вопросу автором не рассматривается, и единицей, если им предпринята какая либо успешная попытка. Последний вариант рассмотрен в дидактическом мозговом штурме [23]. Таким образом, при представлении модели дидактического мозгового штурма этот параметр можно обозначить как Пфпз1.

- 4) Знак «Пфкпз» означает наличие такого процедурного параметра модели, как формализация корректировки постановки задачи или проблемы ЛПП в рамках данной процедуры по мере появления новой информации на том или ином этапе ее решения и ее описание, если она наличествует. Например, для классической мозговой атаки Осборна этот вопрос не рассматривается, но в рамках такой разновидности МА, как четырех этапная мозговая атака, уровень формализация корректировки постановки задачи не нулевой [6].
- 5) Знак «Пов» означает наличие такого процедурного параметра модели, как общее время, необходимое для реализации разновидности МА. Включая время, отведенное на обучение ведущих (модераторов), генераторов и аналитиков и их работу. Например, при описании классической мозговой атаки не указан период времени, который должен быть отведен суммарно на все этапы.
- 6) Знак «Пту» означает типы участников и их ролевые функции для всей процедуры. Например, для классической мозговой атаки: руководитель; ведущий; генератор идей; аналитик, участник вспомогательного персонала.
- 7) Знак «Птр» означает наличие и содержание общих требований к руководителю (заказчику) МА.
- 8) Знак «Пко» – наличие критериев к отбору других типов участников. Например, для классической мозговой атаки. А. Осборн предлагает выбирать ведущих среди лиц, обладающих высокой творческой активностью в сочетании с доброжелательностью по отношению к идеям, высказанным другими людьми. Кроме того, ведущий должен органично сочетать в себе качества генератора и аналитика идей. Важнейшими его качествами являются скорость реакции, богатство ассоциативных связей, легкость генерирования идей в сочетании с хорошими аналитическими способностями, чувством юмора. Кроме того, для достижения успеха важно, чтобы ведущий хотя бы в общих чертах знал процедуру мозговой атаки. Лучше всего выбирать ведущего того же должностного уровня, что и все собравшиеся генераторы идей, по-

скольку высокий пост может значительно ограничить полет мысли всех остальных. Не все смогут высказать смелую мысль при вышестоящем сотруднике.

- 9) Знак «Пксэ» означает количество максимально выраженных структурных элементов процедуры (этапов) данной разновидности МА, если они выделены ее автором, и их перечень. Например, для классической мозговой атаки количество таких структурных элементов процедуры (этапов) – три: подготовительный; генерация идей; творческий анализ высказанных идей.

#### VI. ПРОЦЕДУРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ РАЗНОВИДНОСТИ МА, КОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИЗУЮТ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП, – ППП.

- 1) Знак «ПППтс» означает типы субъектов, участвующих в реализации подготовительного этапа, их ролевые функции и общее число.
- 2) Знак «ПППзр» означает наличие информации о задачах, которые должен решать на этом этапе руководитель и заказчик.
- 3) Знак «ПППзв» означает задачи, которые должен решать ведущий на подготовительном этапе и, при необходимости специально выделенную задачу. Например, при описании классической мозговой атаки ведущий должен определиться с числом генераторов в группе.
- 4) Знак «ПППтв» означает общие требования к ведущему на подготовительном этапе МА.
- 5) Знак «ПППоо» означает наличие и вид специального хозяйственно-организационного обеспечения проведения подготовительного этапа процедуры МА. Например, при описании классической мозговой атаки указано необходимость помещения и специального оборудования.
- 6) Знак «ПППо» означает наличие информации об обучении или ознакомлении, или самообучении модераторов, ведущих и аналитиков.
- 7) Знак «ПППоа» означает продолжительность обучения (самообучения) процедуре анализа участников из группы аналитиков.

- 8) Знак «ПППпом» означает продолжительность обучения (самообучения) модераторов или ведущих.
- 9) Знак «ПППв» означает наличие информации о времени, отведенном на проведение подготовительного этапа МА, включая обучение. Например, при описании классической мозговой атаки не указан точный период времени, который должен быть отведен на подготовительный этап.

#### VII. ПРОЦЕДУРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ РАЗНОВИДНОСТИ МА, КОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИЗУЮТ ЭТАП ГЕНЕРАЦИИ ИДЕЙ, – ППГ.

- 1) Знак «ППГмпн» означает наличие такого реального механизма получения новой информации (МПНИ) от участников на этапе генерации идей, как дискурсивная хаотизация перебора<sup>1</sup>.
- 2) Знак «ППГом» означает наличие отличий в механизме получения нового на этапе генерации между МА и методом фокальных объектов. [См. пояснение в Части 1, 7].
- 3) Знак «ППГкг» означает количество участников в группе генераторов. Пояснение: в научной литературе при описании разновидностей МА нет строгих требований к числу участников этой группы. Обычно информация представлена следующим образом: «отбирается группа 4–10 человек» [4].
- 4) Знак «ППГтс» означает типы субъектов, участвующих в реализации этапа генерации идей. Например: ведущий и генератор идей.
- 5) Знак «ППГцуг» означает цели и задачи участников группы генерации идей.
- 6) Знак «ППГзв» означает задачи, которые должен решать ведущий (ведущие) на данном этапе.
- 7) Знак «ППГтв» означает требования к ведущему на этапе генерации идей, его функции и права.

---

<sup>1</sup> О дискурсивности хаотизации перебора говорится с целью подчеркнуть, что хаотизируется познавательный процесс, протекающий в рамках уже имеющихся представлений и смыслов, означенных, оформленных, опредмеченных полностью или частично.

- 8) Знак «ППГту» означает требования к участникам из группы генераторов, их функции и права.
- 9) Знак «ППГпп» означает правила проведения МА для участников группы генераторов идей.
- 10) Знак «ППГво» означает виды оценок, в которых генераторы дают свою информацию. Обсуждение этого параметра рассмотрено в монографии [5].
- 11) Знак «ППГбп» означает базовые принципы реализации этого этапа для генераторов.
- 12) Знак «ППГов» означает наличие обучения методу ведущих на данном этапе.
- 13) Знак «ППГоу» означает наличие обучения методу участников группы генераторов.
- 14) Знак «ППГпог» означает продолжительность обучения (самообучения) процедуре генерации участников из группы генераторов<sup>1</sup>.
- 15) Знак «ППГпов» означает продолжительность обучения (самообучения) процедуре генерации ведущих на данном этапе.
- 16) Знак «ППГкг» означает количество генераций в МА. Обоснование возможности этой процедуры рассмотрено, например, в книге [3].
- 17) Знак «ППГвг» означает время, отведенное на генерацию идей<sup>2</sup>.

#### VIII. ПРОЦЕДУРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ РАЗНОВИДНОСТЕЙ МА, КОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИЗУЮТ ЭТАП АНАЛИЗА ИДЕЙ, – ППА.

- 1) Знак «ППАка» означает количество аналитиков в группе.
- 2) Знак «ППАтс» означает типы субъектов, участвующих в реализации этапа анализа идей. Например: ведущий или аналитик.

---

<sup>1</sup> Во многих разновидностях МА не требуется предварительное обучение участников группы генераторов [5].

<sup>2</sup> Время работы группы генераторов больше времени на генерацию идей за счет, например: времени формирования группы, разминки и перерыва между последовательными частями этапа генерации.



- 3) Знак «ППАцу» означает цели участников на этапе анализа идей.
- 4) Знак «ППАзв» означает задачи, которые должен решать ведущий (ведущие) на данном этапе.
- 5) Знак «ППАза» означает задачи, которые должны решать аналитики.
- 6) Знак «ППАтв» означает требования к ведущему на этапе анализа.
- 7) Знак «ППАта» означает требования к аналитикам.
- 8) Знак «ППАпв» означает правила организации работы ведущего на этапе анализа идей.
- 9) Знак «ППАпа» означает правила проведения МА для аналитиков.
- 10) Знак «ППАво» означает виды оценок, в которых аналитики дают свою информацию. Обсуждение этого параметра рассмотрено в [5].
- 11) Знак «ППАбпа» означает базовые принципы, на которых строится работа аналитика.
- 12) Знак «ППАов» означает наличие обучения методу ведущих на данном этапе.
- 13) Знак «ППАооа» означает наличие обучения методу аналитиков на данном этапе.
- 14) Знак «ППАпов» означает продолжительность обучения (самообучения) ведущих на данном этапе.
- 15) Знак «ППАпоа» означает продолжительность обучения (самообучения) аналитиков.
- 16) Знак «ППАва» означает время, отведенное на деятельность группы аналитиков<sup>1</sup>.

**IX. ПРОЦЕДУРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ РАЗНОВИДНОСТЕЙ МА, КОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИЗУЮТ ЭТАП КОРРЕКТИРОВКИ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ ИЛИ ПРОБЛЕМЫ ЛПР, – ППК.**

- 1) Знак «ППКвк» означает время, отведенное на четвертый этап для корректировки постановки задачи или проблемы ЛПР.

---

<sup>1</sup> *Время, отведенное на работу группы аналитиков, состоит из нескольких периодов [6].*

- 2) Знак «ППКтс» означает типы субъектов, участвующих в реализации четвертого этапа. Например: ЛПР ведущий.
- 3) Знак «ППКзв» означает задачи, которые должен решать ведущий (ведущие) на данном этапе.
- 4) Знак «ППКтв» означает требования к ведущему на данном этапе.
- 5) Знак «ППКов» означает наличие обучения методу ведущего (ведущих) на данном этапе.
- 6) Знак «ППКпов» означает продолжительность обучения методу ведущего (ведущих) на данном этапе.
- 7) Знак «ППКпв» означает правила организации работы ведущего на данном этапе.
- 8) Знак «ППКцз» означает цели других участников на четвертом этапе.

Теперь рассмотрим дополнительные параметры, которые не являются элементами процедуры или описания автором МА или описания не автором разновидности МА или аннотации (русской или английской).

#### Х. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ РАЗНОВИДНОСТИ МА – ДП.

Поясним понятие дополнительных параметров разновидности МА. Это показатели, которые характеризуют экспертные методы с точки зрения удобства их использования пользователями, экономичности, временных и материальных затрат и т.д. этих пользователей, которые конечно также влияют на уровень качества экспертного заключения. Среди них:

- 1) Знак «ДПсп» означает наличие такого дополнительного параметра модели, как общая стоимость проведения МА и структура затрат на ее реализацию. Включая стоимость проведения подготовительного этапа; генерации идей и ее анализа.
- 2) Знак «ДПсб» означает наличие информации о стоимости обучения ведущих (модераторов), генераторов и аналитиков методу.
- 3) Знак «ДПро» означает наличие такого дополнительного параметра модели, как рекомендуемые области использования метода, для решения задач, которых могут использоваться данная разновидность МА. Например,

«мозговой штурм продолжает активно применяться в самых разнообразных формах при принятии бизнес решений, в менеджменте, образовании и государственном управлении» [2].

- 4) Знак «ДПЭр» означает наличие информации об эффективности проведения данной разновидности МА.

## **6. Возможные направления дальнейших разработок**

1. Необходимо показать, что приведенный подход обладает такой мерой универсальности, которая позволила бы использовать его для многих других совокупностей экспертных методов.

2. Необходимо реализовать синкретические модели научной статьи, состоящей из совокупности вербальных нормативных (прескриптивных) моделей, для других виртуальных объектов и совокупностей экспертных креативных методов. Например, для совокупностей разновидностей методов фокальных объектов.

3. Отдельно необходимо отметить перспективу создания синкретической модели научной монографии об экспертных креативных методах, состоящей из совокупности вербальных и нормативных (прескриптивных) моделей.

4. Преодолеть трудности, связанные с трактовкой понятия адекватной модели произвольной разновидности потенциально возможного варианта креативного метода и уровня адекватности такой модели. Трудность заключается в том, что мы рассматриваем модель не реально существующего процесса или объекта, а такого идеального объекта, как экспертный метод. Таким образом, мы не можем, как это обычно делают, при оценке уровня адекватности модели реального процесса или объекта сравнивать фактические значения результатов, полученные при измерении показателей этого процесса или объекта, с результатами, полученными путем вычисления этих же показателей, используя модель и определяя отклонения.

## 7. Заключение

В работе обоснована эффективность использования впервые рассматриваемого подхода к корректному описанию МА. Для этой цели:

1. Предложено новое направление – разработка информационных вербальных нормативных моделей четко определенных совокупностей экспертных методов, базирующаяся на нормативном подходе. На этой основе предложен подход к корректному описанию произвольной разновидности экспертного метода и реализован для такой разновидности, как мозговая атака.

2. Предложена и обоснована следующая общая гипотеза: в случае если для определенной совокупности экспертных методов (методик или процедур) будет создана достаточно адекватная модель, базирующаяся на нормативном подходе, то для любого экспертного метода из этой совокупности возможно его корректное описание.

3. Обоснована гипотеза о том, что вербальная нормативная модель экспертного креативного метода (либо их совокупность) может быть адекватным образом такого метода, и предложена вербальная модель мозговой атаки. Разработанная модель мозговой атаки позволяет подбирать такую ее разновидность, которая будет более чем другие эффективно функционировать за счёт адаптации параметров мозговой атаки к условиям и ограничениям поставленной задачи.

4. Предложены возможные направления дальнейших разработок подхода к корректному описанию произвольного экспертного метода.

## Литература

1. ДЖОНС ДЖ.К. *Методы проектирования*. – М.: Мир, 1986. – 326 с.
2. МАРКОВ С.Л. *Мозковий штурм і його різновиди як ефективні інструменти вирішення управлінських проблем // Актуальні проблеми психології*. – Том 1: Організаційна психологія. Економічна психологія. Соціальна психологія: зб.

- наук. праць / За ред. С.Д. Максименка, Л.М. Карамушки. – К.: Вид-во «А.С.К.», 2010. – Ч. 27. – С. 207–215.
3. ПАНФИЛОВА А.П. *Мозговые штурмы в коллективном принятии решений: учебное пособие.* – М.: Флинта: МПСИ, 2007. – 320 с.
  4. *Санкт-Петербургский Клуб консультантов и тренеров, 2004 г.* – URL: <http://vikent.ru/sokolov/>.
  5. СИДЕЛЬНИКОВ Ю.В. *Системный анализ технологии экспертного прогнозирования.* – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ «МАИ», 2007. — 348 с.
  6. СИДЕЛЬНИКОВ Ю.В. *Четырехэтапная мозговая атака // Проблемы управления.* – 2014. – №1. – С. 36–44.
  7. СИДЕЛЬНИКОВ Ю.В. *Разработка и реализация подхода к корректному описанию экспертного креативного метода. Ч. 1. Разработка подхода // Управление большими системами.* – 2020. – Вып. 83. – С. 29–52. – DOI: <https://doi.org/10.25728/ubs.2020.83.2>.
  8. BACHMAN G. *Brainstorming Deluxe // Training & Development.* – January 2000. – Vol. 54, No. 1. – P. 15–18.
  9. ВЕЕБЕ S.M., ПЕРСОН R.H. *Cases in Intelligence Analysis: Structured Analytic Techniques in Action.* – Washington, DC: CQ Press College, 2011. – 241 p.
  10. BERND R. *Kreativ nach Regeln – Methode 635, eine neue Technik zum Lösen von Problemen // Absatzwirtschaft.* Oktober 1969. – 12, Heft 19, 1. – S. 73–76.
  11. BUJAKE J.E. *Programmed innovation in new product development // Research Management.* – 1969. – Vol. XII, No. 4. P. 279–287.
  12. FURNHAM A., YAZDANPANAHI T. *Personality differences and group versus individual brainstorming // Personality and Individual Differences.* – 1995. – Vol. 19, Iss. 1. – P. 73–80.
  13. GRIGGS R.E. *A Storm of Ideas // Training Magazine.* – 1985. – Vol. 22, Iss. 66. – P. 56–61.
  14. DIEHL M., STROEBE W. *Productivity Loss in Brainstorming Groups: Toward the Solution of a Riddle // Journal of Personality and Social Psychology.* – 1987. – Vol. 53(3). – P. 497–509.
  15. МИЧАЛКО M. *Thinkertoys. A Handbook of Business Creativity for the '90s.* – Berkeley, 1991.

16. OSBORN A.F. *How to think up*. – McGraw-Hill, 1942. – 38 p.
17. PHILLIPS D.J. *Report on Discussion 66 // Adult Education Journal*. – 1948. – Vol. 7. – P. 181–182.
18. RAWLINSON J.G. *Creative thinking and brainstorming*. – London: British Institute of Management, 1970. – 15 p.
19. RAWLINSON J.G. *Creative Thinking and Brainstorming*. – Gower, UK: «Willey», 1981. – 129 p.
20. ROLAND J. *Questorming: An Outline of the Method*. 1985. – URL: <http://pynthan.com/vri/questorm.htm> (дата обращения: 18.01.2019).
21. ROSSITER J.R., PERCY L. *Advertising and Promotion Management*. – McGraw-Hill Companies, March 1<sup>st</sup>, 1987. – 647 p.
22. TOUBIA O. *Idea Generation, Creativity, and Incentives // Marketing Science*. – September–October 2006. – Vol. 25, No. 5. – P. 411–425.
23. VAN GUNDY A.B. *Techniques of structured problem solving*. – New York, Van Nostrand–Reinhold, 1981. – 307 p.
24. VAN GUNDY JR. A.B. *Product improvement check list*. – New Product Development Newsletter, New Jersey, 1988.
25. WARFIELD J.N., GESCHKA H., HAMILTON R. *Methods of Idea Management*. – Battelle Institute and the Academy for Contemporary Problems, Columbus, Ohio, 1975.
26. <https://projectofhow.com/methods/image-brainstorming/> (дата обращения: 18.01.2019).

**DEVELOPMENT AND THE REALIZATION OF APPROACH TO THE CORRECT DESCRIPTION OF THE EXPERT. CREATIVE METHOD. P. 2. REALIZATION OF APPROACH BASED ON EXAMPLE OF THE BRAINSTORM**

**Yury Sidelnikov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, professor in Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Doctor of Engineering Sciences, professor (sidelnikov@mail.ru).

*Abstract: An informational verbal model of such a creative method as a brain attack was developed in this article. The implementation of this model is based on the previously proposed approach to the correct description of an arbitrary variety of expert method. The paper suggests the grounds for using models of potential options*

*for creative methods. The developed model of brain attack allows you to analyze, compare and improve existing types of brain attacks. The model allows you to select such a variety that will function more effectively than others by adapting the parameters of the brain attack to the conditions and limitations of the task. In the framework of this approach, in particular, a postulate was proposed characterizing the possibility of comparing objects of the same type, including expert methods. Twenty-two types of brain attacks were found, briefly described, and analyzed that satisfy the necessary requirements for their membership in the aggregate. The article identifies the characteristics and indicators that characterize the possible varieties of these brain attacks. The paper proposes the interpretation of the normative information model of the creative expert method as a tuple, including an ordered set of parameters and indicators characterizing this method. The article substantiates the need for the simultaneous solution of six problems, with the general task of modeling an arbitrary variety of brain attack. Thus, a syncretic model consisting of six models is considered. The article suggests possible directions for further development of the approach to the correct description of an arbitrary expert method.*

**Keywords:** creative methods; model of description and procedure of the brainstorm.

УДК 519.816

ББК: 22.18

DOI: 10.25728/ubs.2020.84.7

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.*

*Поступила в редакцию 09.01.2020.*

*Опубликована 31.03.2020.*

## ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ СИСТЕМНОГО ПОДХОДА ПРИ ОЦЕНКЕ СТЕПЕНИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ В СФЕРЕ ЗДРАВООХРАНЕНИЯ

Кожевников А. А.<sup>1</sup>

(Новокузнецкий государственный институт усовершенствования врачей – филиал ФГБОУ ДПО РМАНПО Минздрава России)

*Представлены особенности применения системного подхода при оценке степени эффективности процесса управления в сфере здравоохранения. В его основу положены математический экспресс-анализ, который можно использовать при обработке как статистических данных, так и социологической информации, а также индексы наличия проблем, характеризующие рассматриваемый объект исследования. Установлено, что изложенная в статье процедура и методика расчёта индексов наличия проблем позволяет ранжировать полученные данные по степени влияния факторов риска на процесс управления, а также на основе системного подхода формировать мероприятия прикладного характера по решению органами власти и управления выявленных проблем. Изложенный материал способствует достижению требуемого результата без усложнения процедуры обработки и анализа информации. Формирование выводов и рекомендаций основывается на положениях теории системного анализа, теории управления организационными системами, методах статистического анализа данных. Приведен пример применения указанной методики в процессе сравнительного анализа деятельности частного медицинского учреждения и муниципального. Получена оценка состояния системы здравоохранения г. Новокузнецка.*

Ключевые слова: индекс наличия проблемы, система здравоохранения, математический экспресс-анализ, системный анализ, управление организационными системами.

### 1. Введение

В настоящее время наличие проблем в системе здравоохранения обусловлено тем, что наряду с пациентами, выступающими в качестве объектов медицинских услуг, в процессе их реализации участвуют разнообразные субъекты – это фонды ОМС,

---

<sup>1</sup> Андрей Александрович Кожевников, к.с.н., преподаватель (nvkz2004@rambler.ru).



медицинские учреждения с различной формой собственности, органы самоуправления и государственной власти и т.д., которые постоянно взаимодействуют друг с другом. В совокупности это существенно влияет на функциональную устойчивость деятельности органов здравоохранения, которые помимо указанного фактора с одной стороны активно вовлечены в процесс децентрализации полномочий, связанный с частичной передачей их частным медицинским организациям, в том числе путём внедрения государственно-частного партнерства, а с другой стороны они подпадают под меры по централизации финансового обеспечения, предпринимаемые в рамках системы ОМС на разных её иерархических уровнях.

Данный процесс протекает на фоне того, что органы власти через средства массовой информации демонстрируют заинтересованность в развитии и совершенствовании институциональных свойств и качеств системы здравоохранения в интересах населения, как основного потребителя медицинских услуг. В связи с этим особую актуальность приобретает поиск путей решения проблем, обусловленных качеством управления деятельностью участников данных отношений.

Предлагаемая методика оценки и анализа результатов исследований наряду с другими процедурами призвана содействовать решению вышеуказанной задачи, обеспечивая получение достоверных данных об изучаемом явлении, в том числе за счёт использования системного подхода. Это обусловлено тем, что он позволяет, основываясь на концептуально-методологических положениях, эффективно применять формализованные и неформализованные методы не только для разработки теории, но и на практике. Так, академик АН СССР Д.М. Гвишиани, говоря о сущности системного подхода отмечал, что он позволяет формулировать цели и выяснять их иерархию до начала какой-либо деятельности, в том числе исследовательской, получать максимальный эффект в смысле достижения намеченной цели, при минимальных затратах путём сравнительного анализа и поиска альтернативных путей, а также методов их достижения и осуществления соответствующего выбора. При этом возможно проводить количественную оценку (квантификацию) целей, методов и средств их достижения, основанную не на частных кри-

териях, а на широкой оценке всех возможных и планируемых результатов деятельности [4].

**Цель** исследования – разработать методику оценки степени эффективности процесса управления путём применения математического экспресс-анализа, системного подхода и индексов наличия проблем, позволяющих определить зоны риска и мероприятия по решению выявленных проблем.

## **2. Материалы и методы**

В основу предлагаемой методики положен подход, основанный на взвешенных суммах, который позволяет учитывать большое число факторов и динамику их показателей, а также производить их ранжирование с выявлением и классификацией зон риска с помощью индекса наличия проблем (ИНП). Данный индекс рассчитывается как взвешенная сумма *индексов наличия проблемы для отдельных факторов риска* ( $I_{\phi}$ ) с учетом суммарного влияния *факторных групп* ( $I_{гр}$ ). Определение ИНП обеспечивает учёт всех доступных факторов риска при расчете индекса ( $I_{общ}$ ), а также их приведение к *единой размерности*, что позволяет оценивать полученные результаты с нормативными показателями, если они есть, а также выявлять через анализ тенденций перспективы развития ситуации. Он представляет собой число от 0 до 1, где 1 – проблема отсутствует, 0 – проблема явно выражена.

Методика расчёта ИНП формировалась, в части касающейся экспертных оценок за счёт применения отдельных положений математико-статистических методов экспертных оценок, разработанных С.Д. Бешелевым и Ф.Г. Гурвичем [1], а также методики Е.А. Елтаренко и Е.К. Крупиновой [6]. Дополнительно учитывалась методика В.А. Медика и В.С. Токмачева, позволяющая определить *интегральный показатель здоровья*, основанный на взвешенной сумме факторов [7]. Наряду с этим уделялось внимание вероятностному подходу, примененного А.В. Решетниковым, В.А. Решетниковым, В.В. Козловым и В.В. Роюком к регрессионной модели прогнозирования удовлетворенности качеством медицинской помощи [13].

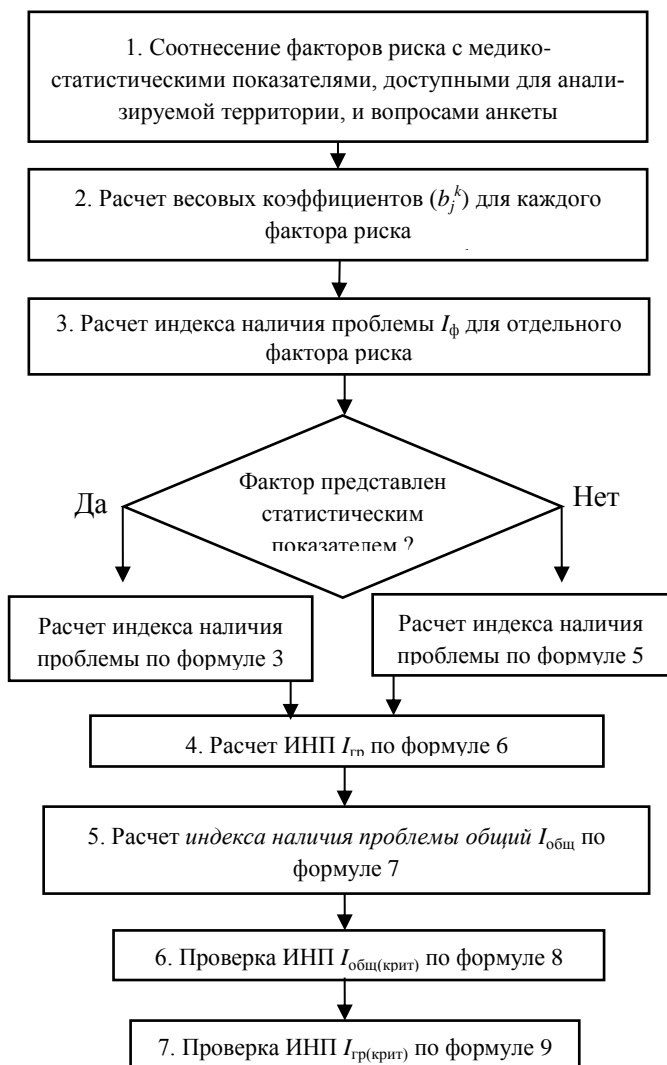


Рис.1. Процедура расчета индексов наличия проблемы

Особенностью ИНП является то, что по его значению можно определить не только сам факт наличия проблемы, но и то,

в чём именно эта проблема заключается, например, установить несоответствие нормативам или выявить неблагоприятную тенденцию. Дополнительно за счёт ИНП значения из статистико-цифровой формы можно перевести в смысловые понятия. В основе вышеуказанного положена процедура обработки и анализа информации (рис. 1).

Исследования по рассматриваемому вопросу позволили сделать вывод о том, что перед определением ИНП необходимо осуществлять экспертную оценку выявленных проблем. Во-первых, это в значительной степени способствует определению «проблемного поля» и целей исследований. Во-вторых, оптимизирует работу по формированию анкет, используемых при социологическом опросе населения. В-третьих, результаты экспертной оценки используются в дальнейшем для расчета коэффициентов, необходимых для соответствующих шкал и таблиц, а также для определения интегральных показателей.

На первом этапе экспертной оценки проблем определяется *интегральный коэффициент* наличия проблемы в сфере общественного здоровья, включивший медико-статистическую и социологическую компоненты, основанные на результатах экспертного опроса. Эксперты оценивают степень влияния на общественное здоровье как непосредственно самих факторов в рамках каждой группы, так и суммарное влияние всей факторной группы. Степень влияния распределяется по шкале от 1 до 10, где 1 – фактор совсем не влияет, а 10 – фактор оказывает непосредственное влияние. При анализе полученных результатов на первом шаге определяются групповые оценки степени влияния на здоровье населения отдельных групп факторов риска. На втором шаге оценивается влияние непосредственно самих факторов в пределах этих обобщенных групп. При этом результаты опроса экспертов, в ответах которых содержатся пропуски, исключаются из рассмотрения.

Перед расчетом *групповых экспертных оценок* необходимо путём определения коэффициентов согласованности и непротиворечивости убедиться, что *индивидуальные экспертные оценки* согласованы и непротиворечивы, так как при невыполнении этого условия групповые оценки не отражали бы реальное положение дел [2].

*Коэффициент непротиворечивости*, обозначаемый как  $\beta$ , определяется для минимальной ( $\beta_1$ ) и максимальной ( $\beta_2$ ) оценки экспертов по каждой рассматриваемой группе факторов. При этом если найденный коэффициент непротиворечивости ниже некоторого заранее заданного порогового значения, то оценка считается непротиворечивой с вероятностью, не превышающей 0,05. Пороговые значения зависят от числа экспертов.

Таким образом, если *индивидуальные экспертные оценки*, характеризующие влияние групп факторов риска на общественное здоровье, согласованы и непротиворечивы, то в дальнейшем проводится расчет групповых оценок *итерационным путём*. На каждой итерации рассчитывались *коэффициенты компетентности*, обозначаемые  $K$  и основанные на мере близости индивидуальных оценок конкретного эксперта и групповых оценок.

С учётом полученных *коэффициентов компетентности* рассчитываются новые групповые оценки, которые сравниваются с оценками на предыдущем шаге. Расчеты прекращаются, если разность между оценками на текущем и предыдущем шаге не превышает 0,01. На основе полученных групповых оценок соответствующие группы факторов риска ранжируются по степени их влияния на общественное здоровье. При этом факторной группе, влияние которой наиболее значимо и имеющей высокую групповую оценку экспертов, присваивается первый ранг, а группе с самой низкой групповой оценкой – последний.

В дальнейшем проводится ранжирование не только по групповым, но и по отдельным факторам. Они позволяют учесть влияние каждого анализируемого фактора на общественное здоровье при расчете интегрального индекса наличия проблем. Для этого на основе полученных групповых оценок осуществляется расчёт *весовых коэффициентов* для каждого отдельного фактора риска и групп факторов, который можно представить в виде следующего алгоритма:

1. Для  $i$ -го фактора в  $k$ -й группе факторов с *групповой экспертной оценкой*  $W_i^k$  определяется возможность его измерения одним из доступных статистических показателей. При выполнении этого условия у этого фактора остаётся его *групповая оценка*  $W_i^k$ .

2. В случае невозможности оценки данного фактора с помощью официальных статистических показателей рассматривается допустимость измерения этого фактора путем субъективной оценки населения, проживающей на анализируемой территории, с помощью включения соответствующего вопроса в анкету. В этом случае у этого фактора остаётся его *групповая оценка*  $W_i^k$ .

3. Невозможность измерения фактора ни с помощью статистических показателей, ни путем социологического опроса, **исключает** его из рассмотрения.

4. Таким образом, если число факторов в группе обозначить как  $M$ , а число соответствующих им статистических показателей и вопросов анкеты – как  $N$ , то всегда будет выполняться неравенство  $N \leq M$ . В  $k$ -й группе факторов производится ранжирование факторов по величине оценки  $W_i^k$ , где первое ранговое место присваивается фактору с максимальной экспертной оценкой ( $r_j^k = 1$ , где  $j = 1, 2, \dots, N$ ), а последнее – с минимальной ( $r_j^k = n$ , где  $j = 1, 2, \dots, N$ ).

5. Для каждого фактора в  $k$ -й факторной группе на основе его рангового места рассчитывается *весовой коэффициент* по формуле

$$(1) \quad b_j^k = \frac{1/r_j^k}{\sum_{s=1}^n (1/r_s^k)},$$

где  $b_j^k$  – весовой коэффициент;  $r_j^k$  – ранг  $j$ -го фактора в  $k$ -й факторной группе;  $r_s^k$  – ранг  $s$ -го фактора в  $k$ -й факторной группе;  $j, s = 1, 2, \dots, N$ .

После того как рассчитываются веса для всех факторов, по формуле (2) рассчитываются веса для самих факторных групп ( $b^k$ ), ранговое место для которых определяются по групповой экспертной оценки факторных групп ( $W^k$ ):

$$(2) \quad b^k = \frac{1/r^k}{\sum_{k=1}^m (1/r^k)},$$

где  $b^k$  – весовой коэффициент для  $k$ -й факторной группы;  $r^k$  – ранг  $k$ -й факторной группы;  $k, m = 1, 2, \dots, M$ , где  $M$  – общее число групп.

Значение *индекса наличия проблемы для отдельного фактора риска* ( $I_\Phi$ ), рассчитывается в зависимости от того, как именно измерялся анализируемый фактор – официальным ста-

статистическим показателем или вопросом в социологическом опросе. В случае использования статистического показателя  $I_{\phi}$  рассчитывается по формулам (3) и (4):

$$(3) \quad I_{\phi} = 0,3 + 0,4 \times \text{НП} + 0,1 \times \text{НПР} + 0,2 \times \text{ТП},$$

$$(4) \quad \text{НПР} = \begin{cases} \frac{\text{П}-\text{Н}}{\text{Н}} & \text{для показателей} \rightarrow \text{max}, \\ \frac{\text{Н}-\text{П}}{\text{Н}} & \text{для показателей} \rightarrow \text{min}, \end{cases}$$

где П – значение показателя за анализируемый период; Н – значение норматива (местного, регионального либо федерального); НПР – разница между нормой и показателем по отношению к норме: если показатель превышает норматив в 2 и более раз, то НПР равен –1 для показателей, стремящихся к минимуму, а также НПР равен 1 для показателей, стремящихся к максимуму. В остальных случаях НПР рассчитывается по формуле (2);  $I_{\phi}$  – индекс наличия проблемы для отдельного фактора риска; НП – соответствие показателя норме: если показатель в пределах нормы, то он равен 1, а также 0, если он норме не соответствует; ТП – оценка тенденции показателя за последние 3 года: равна –1, если на протяжении всего периода тенденция неблагоприятная, либо равна 1, если благополучная, а также 0, если явной тенденции не выявлено.

В случае если фактор представлен вопросом анкеты, полученной путём социологического опроса, расчет  $I_{\phi}$  осуществляется по формуле

$$(5) \quad I_{\phi} = 0,2 \times \text{О} + 0,2 \times \text{О}(\text{отр}) + 0,5 \times \text{О}(\text{нейтр}) + 0,8 \times \text{О}(\text{пол}),$$

где  $I_{\phi}$  – индекс наличия проблемы для отдельного фактора риска; О – преобладающие ответы: равно 1, если большинство респондентов ответили на вопрос положительно, 0 – нейтрально и –1 – отрицательно;  $\text{О}(\text{отр})$  – доля респондентов, ответивших на данный вопрос отрицательно;  $\text{О}(\text{нейтр})$  – доля респондентов, ответивших на данный вопрос нейтрально;  $\text{О}(\text{пол})$  – доля респондентов, ответивших на данный вопрос положительно.

Следует отметить, что в формулах (3) и (5) коэффициенты рассчитаны с помощью регрессионного анализа с разбивкой на интервалы, в зависимости от его желаемой интерпретации [2, 3].

На основании расчётов составлена таблица 1 различных комбинаций составляющих *индекса наличия проблемы для отдельного фактора риска* ( $I_{\phi}$ ) в ключевых точках.

Таблица 1. Различные комбинации составляющих  $I_{\phi}$  в ключевых точках

НП	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
НПР	1	0	1	0	1	0	0	-1	0	-1	0	-1
ТП	1	1	0	0	-1	-1	1	1	0	0	-1	-1
$I_{\phi}$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Далее представлен порядок расчета *интегрального индекса наличия проблемы для группы факторов риска и ИНП общих* – формулы (6)–(7):

$$(6) \quad I_{гр}^k = \sum_{j=1}^N b_j^k \cdot I_{\phi_j}^k,$$

$$(7) \quad I_{общ} = \sum_{k=1}^L b^k \cdot I_{гр}^k,$$

где  $I_{общ}$  – интегральный индекс наличия проблемы общих;  $I_{гр}$  – интегральный индекс наличия проблемы для группы факторов;  $I_{\phi}$  – индекс наличия проблемы для отдельного фактора риска;  $b^k$  – весовые коэффициенты факторных групп, рассчитанные на основе экспертных оценок и характеризующие степень влияния показателя на общественное здоровье;  $b_j^k$  – весовые коэффициенты факторов риска;  $L$  – число рассматриваемых факторных групп;  $N$  – число факторов в группе, которые могут быть измерены.

Диапазон значений ИНП расположен в пределах от 0 до 1. При этом чем ближе значение индекса к 1, тем лучше на анализируемой территории ситуация в сфере общественного здоровья. Однако если он находится между 0,7 и критическим значением, то необходимо проверить, существуют либо отсутствуют проблемы по значению показателей интегрального индекса наличия проблем для групп факторов –  $I_{общ(крит)}$ , рассчитываемый по формуле

$$(8) \quad I_{общ(крит)} = 1 - 0,7 \cdot b^{k(min)},$$



где  $I_{\text{общ(крит)}}$  – критическое значение интегрального индекса наличия проблем;  $b_{(min)}^k$  – минимальный весовой коэффициент среди всех рассматриваемых факторных групп;  $k$  – номер группы.

В том случае, если  $I_{\text{общ(крит)}}$  указывает на наличие проблемы в сфере общественного здоровья, то необходимо выяснить, с чем она связана. Это делается путём анализа индекса наличия проблемы в отдельных областях человеческой жизнедеятельности ( $I_{\text{гр}}$ ). Интерпретация значений индекса аналогична интерпретации значений вышеуказанного интегрального индекса. Так, если он ниже 0,7, то выявлена проблема, а если выше критического значения – проблемы нет. При нахождении индекса между 0,7 и критическим значением требуется уточнить по значению индекса  $I_{\text{гр}}^k$  (крит). Критическое значение интегрального индекса наличия проблем для группы факторов рассчитывается по формуле

$$(9) \quad I_{\text{гр}}^k (\text{крит}) = 1 - 0,7 \cdot b_j^k (\text{min}),$$

где  $I_{\text{гр}}^k$  (крит) – критическое значение индекса наличия проблемы для  $k$ -й группы факторов;  $b_j^k$  (min) – минимальный весовой коэффициент среди всех факторов риска в  $k$ -й факторной группе;  $j$  – номер фактора.

ИНП, определяемый в процессе анализа статданных, включает в себя как оценку соответствия показателя нормативам, тем самым позволяя дать текущую оценку ситуации, так и обеспечивает через оценку динамики показателя прогнозирование развития ситуации. Он представляет собой число от 0 до 1, где 1 – проблема отсутствует, 0 – проблема явно выражена.

Для этого разработана градация индекса, связанная с зонами риска, указанными в таблице 2.

База данных создана в лицензионном статистическом пакете *IBM SPSS Statistics-22*. Статистическое сравнение порядковых и качественных признаков в независимых группах проведено с помощью критерия хи-квадрат ( $\chi^2$ ) и Z-критерия. Различия статистически значимы при уровне различия  $p < 0,05$ .

Таблица 2. Классификация зон риска

Градации индекса наличия проблемы (ИНП)	Соответствие норме	Тенденция показателя	Классификация зон риска
<b>1</b>	Соответствует	Благоприятная	Зона отсутствия риска
<b>0,9</b>			
<b>0,8</b>			
<b>0,7</b>			
<b>0,6</b>	Соответствует	Неблагоприятная	Зона возможного риска
<b>0,5</b>			
<b>0,4</b>	Не соответствует	Благоприятная	Зона высокого, но контролируемого риска
<b>0,3</b>			
<b>0,2</b>	Не соответствует	Неблагоприятная	Зона высокого риска
<b>0,1</b>			
<b>0</b>			

### 3. Результаты и их обсуждение

В качестве примера практического применения вышеуказанной методики можно привести процедуру анализа результатов социологического опроса, который был проведен с января по март 2019 года в частной медицинской организации «Гранд-Медика», находящейся в г. Новокузнецке Кемеровской области, среди граждан, которые обратились в данное учреждение за медицинской помощью. Цель анкетирования заключалась в получении информации об оценке пациентами деятельности частного медицинского учреждения в сравнении с муниципальным (государственным) медицинским учреждением. Наряду с этим проводился сбор сведений о проблемах, которые, по мнению

опрашиваемых граждан, оказывают существенное влияние на их здоровье и качество медицинских услуг.

В процентном отношении от общего числа в 219 человек, принявших участие в опросе, 62,5% были женщины и 37,5% – мужчины.

По социальным группам пациенты распределены следующим образом (рис. 2.):

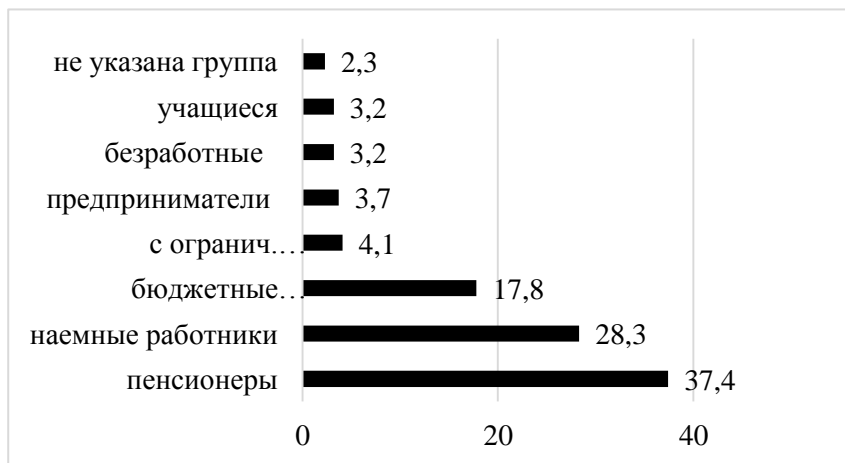


Рис. 2. Распределение (в процентах) социальных групп пациентов

Отвечая на вопрос, связанный с уровнем жизни, 56,6% опрошенных из числа пациентов, которые могут себе позволить обратиться в частное медицинское учреждение, сообщили, что средств хватает только на покупку товаров первой необходимости, а 27,4% отнесли свой уровень жизни к хорошему, без роскоши. При этом 11,4% отметили, что средств им хватает только на питание. Отказались отвечать на данный вопрос 3,2%. Число граждан, по их мнению, имеющих высокий уровень жизни, оказалось минимальным – 1,4%. В ходе опроса дополнительно было установлено, что наиболее частыми пациентами частной медицинской клиники являются женщины возраста 50–69 лет, имеющие средне-специальное или высшее образование, состоящие

в браке или вдовы, с большим стажем работы, с доходом от 10 до 30 тыс. руб., обратившиеся по причине болезни.

Среди факторов, в большей степени влияющих на здоровье, пациентами указан *возраст* (27%), *стресс* (26,5%) и *плохая экология* (23,3%). Доля *генетических показателей* составила 16,4%. *Курение* в качестве фактора риска здоровью отметили только 4,1%. В оценке своего здоровья преобладает «удовлетворительное состояние» (66,2%). Хорошее состояние (28,2%) отмечено людьми, пришедшими на профессиональные осмотры.

Особенность проведенного исследования заключалась в том, что в ходе опроса сравнительная оценка давалась пациентами в отношении конкретной частной медицинской организации, в которую они обратились за помощью, а муниципальное медицинское учреждение выступало в качестве абстрактного собирательного «образа», что могло сказаться на объективности полученной информации. Тем не менее были установлены определенные закономерности, которые подтверждались другими источниками информации.

В процессе сравнительной оценки деятельности медицинских организаций, отличных друг от друга по форме собственности, пациенты, принявшие участие в опросе, дали более высокую оценку частному медицинскому учреждению по следующим показателям: *организация работы, качество назначенного лечения, отношение персонала к пациентам, время ожидания приема, санитарное состояние учреждения, удовлетворенность качеством услуг*. Различия статистически значимы. О том, что *стоимость лечения высокая*, в отношении муниципального здравоохранения сказали 14,2% пациентов, в отношении частного медицинского учреждения – 16,0%. Различие в оценках незначимо:  $z = 0,4$ ;  $p = 0,673$ .

Далее был определен индекс наличия проблем с помощью формулы (5) путём анализа сведений, которые были получены в ходе опроса граждан. Это позволило в обобщенной форме отразить ИНП с указанием зон риска, которые им соответствуют, тем самым визуализируя численные показатели в смысловые понятия, которые изложены в таблице 3.

Таблица 3. Показатели проблем и зоны риска

№ п/п	Наименование проблем, которые оценивали пациенты частного медицинского учреждения	Показатель индекса наличия проблемы (I)	Наименование зоны риска
1.	Уровень жизни	0,55	Зона возможного риска
2.	Материальное положение	0,47	Зона высокого, но контролируемого риска
3.	Оценка здоровья	0,53	Зона возможного риска
4.	Состояние здравоохранения в г. Новокузнецк	0,34	Зона высокого, но контролируемого риска
5.	Организация работы в муниципальном медицинском учреждении	0,35	Зона высокого, но контролируемого риска
6.	Организация работы в частном медицинском учреждении	0,8	Зона отсутствия риска
7.	Оценка стоимости лечения в муниципальном медицинском учреждении	0,42	Зона высокого, но контролируемого риска
8.	Оценка стоимости лечения в частном медицинском учреждении	0,36	Зона высокого, но контролируемого риска
9.	Оценка качества лечения в муниципальном медицинском учреждении	0,35	Зона высокого, но контролируемого риска
10.	Оценка качества лечения в частном медицинском учреждении	0,75	Зона отсутствия риска
11.	Отношение персонала к пациентам муниципального медицинского учреждения	0,39	Зона высокого, но контролируемого риска
12.	Отношение персонала к пациентам частного медицинского учреждения	0,71	Зона отсутствия риска
13.	Оценка состояния системы здравоохранения г. Новокузнецка	0,34	Зона высокого, но контролируемого риска

В результате было установлено, что риски, связанные с деятельностью частной медицинской организации, отсутствуют, за исключением тех которые связаны со стоимостью услуг. В зоне возможного риска находятся ИМП *уровня жизни и оценки здоровья*, тем самым свидетельствуя о наличии возможности пере-

хода проблемы из позитивного состояния в неблагоприятное за счёт изменения тенденции протекающего процесса. Особого внимания заслуживают проблемы, которые пока контролируются, но имеют высокую вероятность перерастания в хаотический процесс с потерей функциональной устойчивости рассматриваемой системы – это деятельность муниципального (государственного) медицинского учреждения, а также состояние в целом системы здравоохранения (на примере г. Новокузнецка).

Исследование показало, что индикаторы, которые характеризуют деятельность медицинского учреждения по количественным показателям (количество пролеченных, число выполненных операций, стоимость услуг и т.д.), необходимо оценивать с учётом региональной специфики, демографической ситуации и сложившихся на территории социально-экономических условий [5].

Вышеуказанная методика была успешно применена при сравнительном анализе заболеваемости населения Российской Федерации, Сибирского федерального округа и Кемеровской области. Для анализа информации по заболеваемости с 2015 по 2017 годы использовались сведения о заболеваемости на 1000 человек населения у пациентов с диагнозом, который установлен впервые в жизни из ежегодного статистического сборника «Регионы России. Социально-экономические показатели. 2018».

Следует отметить, что актуальность проведенного исследования обусловлена тем, что большие массивы информации и множество частных показателей, которые рассчитываются на её основе для оценки здоровья населения и деятельности системы здравоохранения, диктуют необходимость разработки и использования интегральных показателей, которые аккумулировали бы в себе большое количество разнообразных исходных данных [4]. Анализ заболеваемости, сгруппированной по классам в соответствии с МКБ-10 [9], проводился с помощью метода, основанного на взвешенных суммах. Он позволяет учитывать большое число факторов и динамику их показателей, а также провести их ранжирование с выявлением и классификацией зон риска с помощью индекса наличия проблем (ИНП). Метод взвешенной суммы критериев (далее – МВСК), на английском языке –

Weighted Sum Method (WSM) – давно известный и активно применяемый метод [10].

Кемеровская область не случайно была выбрана в качестве объекта исследования, так как в данном регионе в течение длительного времени показатели заболеваемости населения превышают общероссийские показатели. При этом формируемая показателями тенденция имела негативную направленность. Так, в 2014 году Т.Н. Страшниковой был проведен сравнительный анализ общей и первичной заболеваемости у лиц трудоспособного возраста в Российской Федерации и на её административных территориях. Она установила, что в Кемеровской области уровень заболеваемости выше, чем в Сибирском федеральном округе и в РФ по таким классам болезней: психические расстройства, болезни уха и сосцевидного отростка, болезни системы кровообращения, болезни костно-мышечной системы и соединительной ткани, травмы и отравления [11].

В рамках сравнительного анализа статистических данных были рассмотрены показатели заболеваемости на 1000 человек населения по основным классам болезней, зарегистрированных у пациентов с диагнозом, который был установлен впервые в их жизни. Общие количественные показатели динамики заболеваемости на 1000 человек населения приведены в диаграмме №1 [12, с. 373–374].

В сформированных авторами таблицах наряду с показателями заболеваемости, которые сравнивались по отношению друг другу в зависимости от территории и количественных характеристик, указаны индексы наличия проблем. Применительно к Кемеровской области они рассчитаны на 2017 г., т.е. на крайний год по наличию статистической информации в вышеуказанном сборнике. За «относительную норму» были приняты показатели заболеваемости по Российской Федерации [12, с. 375–404].

Таким образом, было установлено, что в 2017 г. в *зоне высокого риска* находились показатели: болезни костно-мышечной системы и соединительной ткани, некоторые инфекционные и паразитарные болезни, новообразования, болезни нервной системы (таблица 4).

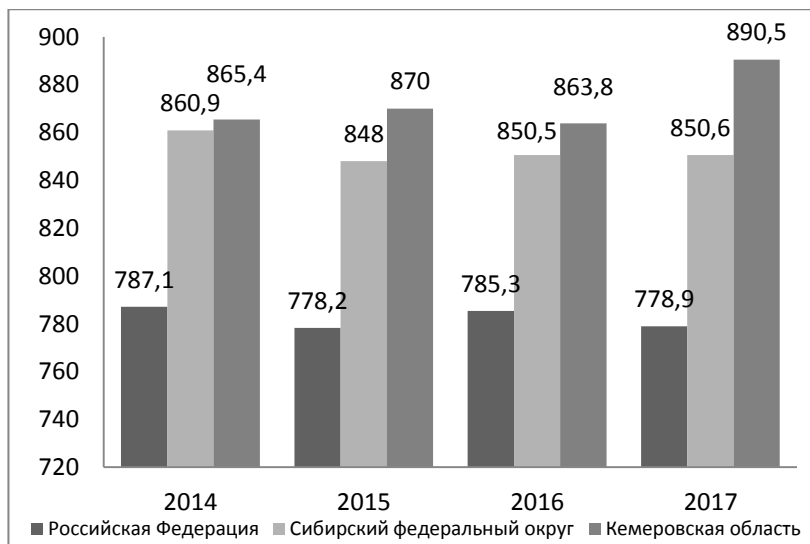


Рис. 3. Динамика заболеваемости на 1000 человек населения в Российской Федерации, Сибирском Федеральном округе и в Кемеровской области

Таблица 4. Болезни, отнесенные к зоне высокого риска

Заболеваемость	Российская Федерация			Сибирский федеральный округ			Кемеровская область			Ранг	ИНП (I)
	2015	2016	2017	2015	2016	2017	2015	2016	2017		
Болезни костно-мышечной системы и соединительной ткани	30,1	29,5	29,5	39,2	40,1	40,3	48,4	52,8	53,1	1	0,02
Некоторые инфекционные и паразитарные болезни	28,1	27,9	27,3	31,1	30,8	31,2	31,6	32,1	36,3	2	0,07
Болезни нервной системы	15,4	15,2	15	17,4	17,6	18,1	24,6	25,7	27,3	3	0,02
Новообразования	11,4	11,4	11,4	13,6	13,4	13,6	12,4	14,3	15	4	0,02



Это свидетельствовало о следующем: достижении критического уровня количественных показателей заболеваемости, если сравнивать их с общероссийскими показателями заболеваемости; о том, что существует негативная тенденция количественного роста числа поставленных диагнозов. По ранговому месту, которое определялось по количеству диагнозов, из числа приведенных показателей, более высокую позицию занимали болезни костно-мышечной системы и соединительной ткани. Вероятно, это могло стать результатом недостаточного контроля со стороны органов государственного и муниципального управления за происходящими демографическими процессами, либо неспособностью территориальной системы здравоохранения самостоятельно справиться с данной проблемой. В практическом плане при наличии такой информации, в первую очередь, органы управления федеральными округами (а также регионами и муниципальными учреждениями) обязаны приступить к экстренной разработке и реализации комплексных мероприятий по преодолению кризисной ситуации.

Такие мероприятия могут включать следующее: осуществление постоянного мониторинга, формирование соответствующих организационных структур, оснащение медицинских учреждений оборудованием и усиление их кадрового аппарата, обращение за помощью к областному или федеральному руководству; максимальное использование резервов.

*К зоне высокого, но контролируемого риска* были отнесены травмы, отравления и некоторые другие последствия внешних причин; болезни мочеполовой системы, болезни системы кровообращения; болезни глаза и его придаточного аппарата, болезни органов пищеварения; болезни эндокринной системы, расстройства питания и нарушения обмена веществ; болезни крови, кровеносных органов и отдельные нарушения, вовлекающий иммунный механизм (таблица 5).

Это обуславливает необходимость проведения мероприятий, связанных с усилением контроля за динамикой показателей, для того чтобы, отслеживая их направленность, не допустить появления негативной тенденции. В этом случае с целью достижения планируемых результатов целесообразно назначить ответственных за проведение на местах конкретных медицин-

ских мероприятий; уменьшить интервал отчетности; усилить взаимодействие между профильными учреждениями, находящимися как в регионе, так и за его пределами, и т.д. В случае изменения тенденции показателей на неблагоприятную, целесообразно перейти к мерам, описанным ранее для зоны высокого риска.

Таблица 5. Болезни зоны высокого, но контролируемого риска

Заболееваемость	Российская Федерация			Сибирский федеральный округ			Кемеровская область			Ранг	ИНП (0)
	2015	2016	2017	2015	2016	2017	2015	2016	2017		
Травмы, отравления и некоторые другие последствия внешних причин	90,4	89,1	88,2	100,2	93,2	93,2	132,4	117,9	118,2	1	0,27
Болезни мочеполовой системы	46,4	45,6	44,8	56,8	56,1	54,6	59,2	59,9	59,5	2	0,33
Болезни системы кровообращения	31,2	31,7	32,1	35,4	36,4	36,8	43,8	47,3	47	3	0,25
Болезни глаза и его придаточного аппарата	33,3	32,6	31,6	38,4	38,3	37,5	39,3	42,8	41,9	4	0,3
Болезни органов пищеварения	35,3	35,6	34	56,6	54,2	46,8	37,3	39,2	38,7	5	0,29
Болезни эндокринной системы, расстройства питания и нарушения обмена веществ	13,3	13,9	14	17	19,1	18,8	14,4	16,7	15,4	6	0,3
Болезни крови, кровеносных органов и отдельные нарушения, вовлекающие иммунный механизм	4,7	4,7	4,5	5,1	5,2	5,1	4,8	4,9	4,9	7	0,3

Относительно позитивные показатели зафиксированы по таким позициям, как болезни органов дыхания; болезни уха и сосцевидного отростка, которые находятся в зоне *возможного риска* (таблица 6).

Таблица 6. Болезни зоны возможного риска

Заболеваемость	Российская Федерация			Сибирский федеральный округ			Кемеровская область			Ранг	ИНП (I)
	2015	2016	2017	2015	2016	2017	2015	2016	2017		
Болезни органов дыхания	337,9	351,6	353,3	331,8	347,4	358,4	318	310,4	337	1	0,51
Болезни уха и сосцевидного отростка	26,6	26,3	25,9	27,3	27,1	27,1	32	30,3	29,6	2	0,51

Однако если оценивать ситуацию по количеству больных, у которых диагноз был поставлен впервые, то болезни органов дыхания занимают лидирующую позицию. Так, в 2017 г. на 1000 человек такой диагноз был поставлен у 337 человек. Несмотря на это, данные показатели можно отнести к позитивным, так как они в целом близки к «норме», т.е. к показателям, характеризующим ситуацию в Российской Федерации в целом, и имеют тенденцию к снижению. В организационном плане это означает, что, несмотря на вероятность появления негативных факторов, имеющиеся на территории обслуживания населения, медицинские учреждения способны адекватно реагировать на указанные заболевания, в том числе путём проведения профилактических мероприятий.

В Кемеровской области только показатели болезни кожи и подкожной клетчатки находятся в *зоне отсутствия рисков* (таблица 7). Соответственно, по данному направлению медицинские учреждения при наличии ограничений на общие объемы ресурсов могут перераспределить их на решение других, более проблемных задач.

В процессе сравнительного анализа установлено, что из вышеперечисленного перечня заболеваний в Кемеровской области в пределах нормы, которая близка к общероссийским показателям, находятся болезни органов дыхания, уха и сосцевидного отростка, кожи и подкожной клетчатки.

Таблица 7. Болезни зоны отсутствия риска

Заболее- мость	Российская Федерация			Сибирский феде- ральный округ			Кемеровская область			Ранг	ИНП (I)
	2015	2016	2017	2015	2016	2017	2015	2016	2017		
Болезни кожи и подкожной клетчатки	44	42,5	41,5	40,3	37,6	37,2	40,5	37,7	38,1	1	0,7

Данная информация по своему целевому назначению, будучи статистической, может использоваться субъектами управления в ходе планирования и организации своей деятельности. Поэтому предложенный метод позволил выделить проблемные аспекты в контексте информационного обеспечения организации системы здравоохранения. При этом объем и содержание мероприятий, которые могли быть инициированы сведениями вышеуказанного характера, во многом зависят от самого субъекта управления, либо от объекта – если он становится таковым в результате управляющего воздействия на него. Например, органы государственного управления страны разрабатывают такие программы, как программа «Развитие здравоохранения» [8]. Одновременно органы управления федеральными округами и органы государственного управления регионами, включая профильные в отношении здравоохранения министерства и финансовые органы, разрабатывают и реализуют свои региональные программы. Для органов муниципального управления, руководства бюджетных медицинских учреждений, страховых компаний и иных юридических лиц результаты анализа, аналогично тому, который проведен в рамках данного исследования, носят информационный характер, а степень прикладного применения полученных сведений зависит от полномочий, которые им делегированы вышестоящим управленческим уровнем по использованию имеющихся сил и средств с целью решения выявленных проблем.

#### **4. Выводы и рекомендации**

Для принятия управленческих решений к каждой зоне предлагается соотнести конкретные *организационные мероприятия*, осуществление которых обеспечит устранение выявленных проблем. Например, нахождение ИНП в зоне отсутствия риска предполагает реализацию плановых мероприятий, создание резервов сил и средств, а в зоне высокого, но контролируемого риска – предписывает проведение мер по усилению контроля за изменением показателей. На практике эти меры должны привести к назначению ответственных лиц, уменьшению интервала отчетности, разбивке по отдельным территориальным единицам и так далее.

В случае изменения тенденции показателей на неблагоприятную осуществляется режим перехода на меры, предусмотренные для зоны высокого риска – экстренная разработка и реализация новых управленческих мероприятий, постоянный мониторинг, обращение за помощью к областному или федеральному руководству, максимальное использование резервов.

Практическая значимость предложенной методики оценки заключается в том, что она универсальна, отличается простотой вычисления и может применяться для экспресс-анализа статистических и социологических данных, в том числе в процессе системного подходе при независимой оценке качества условий оказания услуг медицинскими организациями. При этом получаемые результаты не только характеризуют сложившуюся ситуацию, а предлагают первичный алгоритм действий, который представителями органов власти и управления может быть адаптирован к местным условиям с учётом специфики региона, направленности решаемых задач и необходимости поддержания межведомственного взаимодействия.

#### **Литература**

1. БЕШЕЛЕВ С.Д., ГУРВИЧ Ф.Г. *Математико-статистические методы экспертных оценок.* – М.: Статистика, 1980. – 260 с.

2. ВЛАСЕНКО А.Н., ЖИЛИНА Н.М., ЧЕЧЕНИН Г.И., КОЖЕВНИКОВ А.А. *Информационное обеспечение стратегии развития промышленного региона (на примере Новокузнецкого района)* // ИНОУ: Информационные технологии в науке, образовании и управлении, Издательство ООО «Институт новых информационных технологий» (Москва). – 2018. – №5(9). – С. 20–25.
3. ВЛАСЕНКО А.Н., ЖИЛИНА Н.М., ЧЕЧЕНИН Г.И., КОЖЕВНИКОВ А.А. *Система мониторинга показателей общественного здоровья на основе индекса наличия проблемы* // Системы автоматизации в образовании, науке и производстве: Труды XI Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Автоматизированные системы в образовании, науке и производстве» AS-2017 / Под общ. ред. С.М. Кулакова, Л.П. Мышляева. – Новокузнецк, 14–16 декабря, 2017. – С. 139–143.
4. ГВИШИАНЕ Д.М. *Организация и управление*. – М.: Наука, 1972 – 612 с.
5. ДАНЦИГЕР Д.Г., КОЖЕВНИКОВ А.А., АНДРИЕВСКИЙ Б.П., ЧАСОВНИКОВ К.В. *Независимая оценка качества оказания услуг медицинскими организациями (организационно-правовые аспекты совершенствования)* // Общественное здоровье и здравоохранение. – 2018. – №4. – С. 62–67.
6. ЕЛТАРЕНКО Е.А., КРУПИНОВА Е.К. *Обработка экспертных оценок. Учебное пособие*. – М.: Изд. МИФИ, 1982. – 96 с.
7. МЕДИК В.А., ТОКМАЧЕВ М.С. *Руководство по статистике здоровья и здравоохранения*. – М.: ОАО «Издательство «Медицина», 2006. – 528 с.
8. *Постановление Правительства РФ от 26.12.2017 № 1640 (ред. от 29.03.2019) «Об утверждении государственной программы Российской Федерации «Развитие здравоохранения»* // «Собрание законодательства РФ», 01.01.2018, №1 (Часть II), ст. 373.
9. *Приказ Минздрава РФ от 27.05.1997 № 170 (ред. от 12.01.1998) «О переходе органов и учреждений здравоохранения Российской Федерации на международную статистику»*

*стическую классификацию болезней и проблем, связанных со здоровьем, X пересмотра» (вместе с «Планом основных мероприятий по переходу органов и учреждений здравоохранения Российской Федерации на МКБ-Х на 1997 - 1998 годы», «Программой обучающего центра по внедрению международной статистической классификации болезней и проблем, связанных со здоровьем, X пересмотра») // Здравоохранение. – 1997. – №7.*

10. ПОДИНОВСКИЙ В.В., ПОТАПОВ М.А. *Метод взвешенной суммы критериев в анализе многокритериальных решений: PRO ET CONTRA* // Бизнес-информатика. – 2013. – №3(25). – С. 41–48.
11. СТРАШНИКОВА Т.Н. *Сравнительный анализ общей и первичной заболеваемости у лиц трудоспособного возраста в Российской Федерации и на её административных территориях* // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – №2. – Режим доступа: <https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=12717> (дата обращения: 20.05.2019).
12. *Регионы России. Социально-экономические показатели. 2018: Стат. сб. / Росстат.* – М., 2018. – 1162 с.
13. РЕШЕТНИКОВ А.В. *Социальный портрет больного с артериальной гипертензией* // Социология медицины. – 2016. – №2(15). – С. 80–86.

## **FEATURES OF APPLICATION OF SYSTEM APPROACH AT ASSESSMENT OF DEGREE OF EFFICIENCY OF MANAGEMENT PROCESS IN HEALTH SECTOR**

**Andrei Kozhevnikov**, Novokuznetsk State Institute of Improvement of Doctors – Branch of the FSBEI DPO RMANPO of the Ministry of Health of Russia, Cand. Sc., Lecturer at the Department of Health Organization and Public Health (nvkz2004@rambler.ru).

*Abstract: The features of system approach application for efficiency assessment of management process in a health sector are presented in the article. The indexes of problems existence describing the research object and the mathematical express analysis used for processing of statistical data and also for sociological information are the basis of this approach. The procedure presented in this article and indexes*

*calculation method of problems existence allows to range the obtained data by risk factors influence on management process. It also allows authorities to form plans and decisions about management of the revealed problems. The stated material promotes achievement of the required result without complication of the procedure of processing and the analysis of information. Formation of conclusions and recommendations is based on provisions of the theory of system analysis, the theory of management of organizational systems, methods of statistical data analysis. The example of application of the specified technique in the course of the comparative analysis of activity of private medical institutions and municipalities is given. Assessment of a condition of a health care system of Novokuznetsk is received.*

**Keywords:** index of existence of a problem, health care system, mathematical express analysis, system analysis, management of organizational systems.

УДК: 659.3;614.2; 005.6

ББК: 60.83

DOI: 10.25728/ubs.2020.84.8

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А.И. Михальским.*

*Поступила в редакцию 17.04.2019.*

*Опубликована 31.03.2020.*



## **ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА ПРИ МАЛОМ ОБЪЕМЕ ВЫБОРКИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ПЛАНИРОВАНИЯ РЕМОНТНЫХ РАБОТ НА ИНЖЕНЕРНЫХ СЕТЯХ**

**Крыгин А. А.<sup>1</sup>**

*(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

*В сконструированной ранее экономико-статистической методике оценки состояния участка инженерной сети и информационной поддержки при принятии решения о продлении его срока службы предъявляются серьезные требования к исходным данным. Одним из условий правильной работы методики является наличие полной статистики повреждений и проведенных ремонтов, начиная с момента ввода участка в эксплуатацию. Однако для многих участков такая статистика имеется только за последние несколько лет. Чтобы расширить область применения на случаи неполной статистики повреждений, было выполнено отдельное исследование по оценке параметров распределения Вейбулла при малом объеме выборки на примере участков сетей теплоснабжения. Данная работа посвящена результатам проведенного исследования. Были определены три класса участков: с достаточно полной статистикой повреждений, с малым объемом статистики и без статистики. Для каждого класса был предложен алгоритм оценки необходимых параметров распределения Вейбулла, далее использующихся в методике оценки состояния участка и определен критерий, по которому участок можно отнести к тому или иному классу. Для участков с достаточно полной статистикой повреждений использовался алгоритм, предложенный в исходной экономико-статистической методике. Для участков с малым объемом статистики к данным по повреждениям добавлялись данные из других, специальным образом отобранных участков. Для участков без статистики получены усредненные значения параметров.*

Ключевые слова: оценка параметров распределения Вейбулла при малом объеме выборки, оценка усредненных значений параметров, оптимизация ремонтов участков тепловых сетей.

### **1. Введение**

Анализ этапов жизненного цикла участка инженерной сети в [5] показал, что необходимые при информационной поддерж-

---

<sup>1</sup> Андрей Александрович Крыгин, к.т.н., с.н.с. (andreyakr@yandex.ru).

ке управленческих решений методики должны содержать алгоритмы определения комплексного технико-экономического показателя состояния участка и оптимального времени его замены. Одно из требований методики к исходным данным заключается в наличии полной статистики повреждений и ремонтов на участке, начиная с момента его ввода в эксплуатацию. Целью данной работы является расширение области применения методики, предложенной в [5] на участки с неполной статистикой повреждений.

Основная идея методики, заключается в поиске момента времени  $T_0$ , в который функция  $S_y(t)$  – зависимость удельных суммарных затрат на эксплуатацию участка – достигает своего минимума.

Было установлено, что для определения  $S_y(t)$  необходимо спрогнозировать зависимости от времени для следующих величин: общее количество повреждений, общее количество локально-вставочных ремонтов (ЛВР), общая длина ЛВР. Не нарушая общности, в дальнейшем будем рассматривать только задачу определения функции  $N(t)$  – зависимости общего количества повреждений от времени эксплуатации участка.

Идея алгоритма определения  $N(t)$  в [5] базируется на известном методе регрессии медиан рангов [2]. Время до возникновения повреждения на участке можно рассматривать как случайную величину, описываемую с помощью распределения

Вейбулла:  $F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{b}\right)^c}$  с двумя параметрами  $b$  и  $c$ . Тогда функцию  $N(t)$  можно определить как

$$(1) \quad N(t) = -\ln(1 - F(t)) = \left(\frac{t}{b}\right)^c.$$

Оценки параметров можно получить следующим образом: методом наименьших квадратов определяются коэффициенты прямой линии  $y = m \times x + n$  по точкам  $(x, y)$ , где  $x$  соответствует логарифму числа прошедших лет с момента эксплуатации участка, а  $y$  – логарифму общего числа повреждений. Тогда параметры  $b$  и  $c$  распределения Вейбулла определяются по следующим формулам:

$$(2) \begin{cases} b = e^{-\frac{n}{m}}, \\ c = m. \end{cases}$$

При этом было установлено, что лучшие результаты дает предварительная фильтрация точек перед применением метода наименьших квадратов.

В этой предметной области можно выделить четыре основных особенности, отличающих ее от других исследований, посвященных оценкам параметров вероятностного распределения:

– малое количество точек (обусловленное тем, что статистика велась достаточно непродолжительное для этого процесса время);

– нежесткие требования к точности полученных оценок;

– наличие статистики по достаточно большому количеству участков;

– сам факт того, что оценки параметров необходимы для определения комплексного технико-экономического показателя состояния участка и оптимального времени его замены.

Анализ и использование этих особенностей рассмотрено ниже.

Данное исследование методов оценки параметров распределения Вейбулла для участка с неполной статистикой состоит из трех частей: во втором разделе проводится обзор и оценка точности некоторых алгоритмов. В третьем разделе обосновывается необходимость дополнительной классификации участков по объему имеющейся статистики и предлагается ряд алгоритмов по каждому подмножеству. В четвертом разделе строится общий алгоритм оценки параметров.

## **2. Обзор алгоритмов оценки параметров распределения Вейбулла и оценка их точности**

В ГОСТ [2] рассматриваются следующие классы методов оценки: графический, аналитический и анализ Вейбулла – Байеса. Анализ Вейбулла – Байеса не применим к данной задаче, так как этот метод предполагает, что параметр  $c$  подбирается

каким-либо образом (используя данные предыдущих экспериментов, данные о физике процесса), а параметр  $b$  находится методом максимального правдоподобия. Диапазон изменений этого параметра в рассматриваемой области достаточно широк (1,5 – 4,5) и возможности подобрать его нет. Метод оценки, предложенный в [5], относится к аналитическим методам, его можно определить как метод регрессии медиан рангов с добавлением блока фильтрации. Из аналитических методов в ГОСТ также рассмотрен метод максимального правдоподобия и метод доверительных интервалов.

Актуальность задачи оценки параметров распределения Вейбулла подтверждается многочисленными современными работами в различных областях. Помимо методов, рассмотренных в [2], можно отметить методы, предложенные в [4] и [6–20]. В [10] авторы предлагают метод «кросс-энтропии» для оценки максимума функции правдоподобия. Вместо алгоритма наименьших квадратов для метода регрессии медиан рангов в [13] предлагается использовать алгоритм, в котором находится минимум взвешенной суммы квадратов. В [17] на примере определения скорости ветра сравниваются 4 метода оценки параметров: метод максимального правдоподобия, метод регрессии медиан рангов, метод, использующий значения среднего и стандартного отклонения и метод, использующий фактор энергетического рисунка (Energy Pattern Factor Method). Сравнение показало, что нельзя отдать однозначное предпочтение тому или иному методу, при этом метод регрессии медиан рангов был признан одним из лучших.

Во всех работах в качестве примеров рассматривались выборки из 50–500 точек. В данной задаче статистика имеется только за 15 лет, соответственно, в редких случаях количество точек превышает 10. Поэтому логично проверить эти методы для поставленной задачи и найти для них допустимую область применения.

Дальнейшие выкладки для наглядности будут приводиться на примере одного участка; те же операции были проведены на всех участках, по которым имеется достаточно полная статисти-

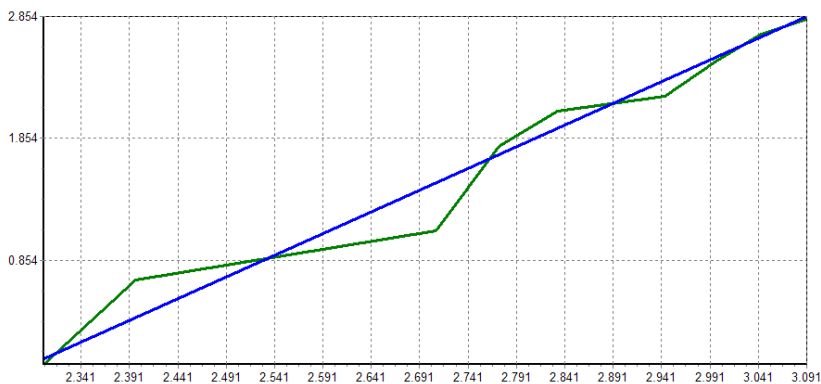
ка. Выводы и результаты этого раздела совпадают с примером практически во всех случаях.

Итак, имеется участок, исходные данные по повреждениям у которого следующие: год ввода в эксплуатацию – 1983, полная статистика повреждений представлена в таблице 1.

*Таблица 1. Полная статистика повреждений на участке*

Год	Количество повреждений
1995	1
1996	1
2000	1
2001	3
2002	2
2004	1
2005	3
2006	3
2007	2

С помощью предложенных в [5] алгоритмов для этого участка были получены следующие значения параметров распределения Вейбулла:  $b = 11,82$ ,  $c = 4,05$ . На рис. 1 в логарифмических шкалах представлен график всех повреждений и его аппроксимация прямой линией.



*Рис. 1. График повреждений и его аппроксимация*

Необходимо отметить, что вначале выполняется фильтрация точек и только после этого по оставшимся точкам определяются коэффициенты прямой, за счет этого достигается более высокая точность прогнозирования. Это непосредственно видно из рисунка: ближе к его концу прямая линия почти совпадает с графиком повреждений. Существенные отклонения графика от прямой линии (на отметках около 2,391 и 2,691) вызваны протяженными локально-вставочными ремонтами (ЛВР) в 1995–96 и 2001 годах, в результате которых была проведена замена примерно 11% наиболее поврежденной части участка. Подобная ситуация встречается практически всегда в случаях существенных отклонений графика от прямой линии. Очевидно, что спрогнозировать такие протяженные ЛВР не представляется возможным, однако долгосрочный прогноз (т.е. усредненное поведение графика) оказывается вполне убедительным.

В данном исследовании рассматриваются три алгоритма, для краткости обозначим их *A*, *B* и *B*. Также были опробованы и другие алгоритмы, в частности, несколько вариаций метода, предложенного в [10], которые, к сожалению, не дали ощутимых результатов.

#### АЛГОРИТМ *A*.

Так как неполная статистика по участку является цензурированной выборкой, то логично применить уже разработанные методы максимального правдоподобия для оценки параметров по цензурированным выборкам [1]. Система уравнений для нахождения параметров распределения Вейбулла в этом случае выглядит следующим образом:

$$(3) \quad \begin{cases} \left( r / c + \sum_{i=1}^r \ln t_i \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^r t_i^c + (K - r) \cdot T^c \right) = \\ = r \cdot \left( \sum_{i=1}^r t_i^c \ln t_i + (K - r) \cdot T^c \cdot \ln T \right), \\ b = \left[ \sum_{i=1}^r t_i^c + (K - r) \cdot T^c \right]^{1/c}. \end{cases}$$

Здесь  $r$  – количество повреждений;  $t_i$  – время возникновения повреждений;  $T$  – период времени от начала эксплуатации

участка до окончания периода наблюдения;  $K$  – в литературе описывается как общее количество объектов, применительно к участку инженерной сети эту величину можно рассматривать как отношение общей длины участка к длине повреждения. В данном случае участок расположен в непроходном канале и при возникновении повреждения выполняется шурф, диаметр которого обычно составляет 1 метр, поэтому логично принять величину  $K$  равной длине участка в метрах.

*АЛГОРИТМ Б.*

Второй алгоритм, предложенный в [4], работает по следующему принципу: пусть интервал  $[t_{begin}; t_{end}]$  соответствует периоду наблюдения за участком. Зададим на этом интервале параметр  $\tau$  и будем рассматривать два интервала  $[t_{begin}; \tau]$  и  $[\tau; t_{end}]$ . Пусть количество повреждений, произошедших на этих интервалах равно соответственно  $n_1$  и  $n_2$ . Тогда, оценку параметров  $b$  и  $c$  можно получить из следующей системы уравнений:

$$(4) \quad \begin{cases} \left(\frac{\tau}{b}\right)^c - \left(\frac{t_{begin}}{b}\right)^c = n_1, \\ \left(\frac{t_{end}}{b}\right)^c - \left(\frac{\tau}{b}\right)^c = n_2. \end{cases}$$

Параметр  $\tau$  обычно выбирается так, чтобы два интервала были примерно одинаковы. Это обусловлено тем, что если интервалы будут перекрываться, то теряется независимость уравнений, а если один из интервалов будет существенно больше другого, то теряется «значимость» одного из уравнений.

*АЛГОРИТМ В.*

В качестве третьего алгоритма будет использоваться исходный алгоритм оценки параметров по полной статистике, описанный в [5], для краткости в дальнейшем будем называть его «исходный алгоритм».

Допустимую область применения алгоритмов оценки параметров будем определять следующим образом:

– параметры распределения Вейбулла, полученные по имеющейся статистике рассматривать в качестве эталонных;

– определить критерий, по которому сравниваются оценки параметров, и допустимое отклонение значения критерия от эталонного;

– создать из имеющейся статистики несколько статистик повреждений, последовательно исключая из нее точки;

– определять допустимую область применения алгоритмов как область (т.е. количество точек), в которой значения критерия, полученного по ограниченной статистике, имеют допустимое отклонение от эталонного значения.

В качестве критерия выберем величину оптимального времени замены участка  $T_0$ . Для этой величины точность в 2 года является допустимой, так как при замене участка в большинстве случаев время между принятием решения о замене и вводом в эксплуатацию замененного участка не превышает трех-четырёх лет. По методике, предложенной в [5], функция  $S_y(t)$  для рассматриваемого примера после приведения слагаемых имеет следующий вид:

$$(5) S_y(t) = \frac{77484070 + 32625 \cdot t + 73.86 \cdot t^{4,05} + 11704 \cdot t^{2,24} - 14 \cdot t^{3,08} - 13.11 \cdot t^{3,75}}{t}.$$

С точностью до года минимум  $S_y(t)$  достигается при  $T_0 = 35$ .

Оказалось, что уже при сравнении параметров  $b$  и  $c$  по ограниченным статистикам с эталонными ( $b = 11,82$ ,  $c = 4,05$ ), можно сделать ряд выводов. Рассмотрим и проанализируем полученные значения параметров (таблица 2) для общего числа повреждений по каждому алгоритму.

Таблица 2. Значения параметров  $b$  и  $c$  для общего числа повреждений по ограниченным статистикам

Количество точек	Алгоритм А		Алгоритм Б		Алгоритм В	
	$b$	$c$	$b$	$c$	$b$	$c$
8	74,6	5,25	9,65	3,06	11,6	3,87
7	73,1	5,15	14,3	5,30	11,5	3,81
6	78,3	4,7	14,1	5,05	11,5	3,77
5	44,9	7,2	7,99	3,01	11,6	3,88
4	40,6	7,6	7,42	2,76	11,4	3,52
3	60,9	4,85	3,25	1,11	11,1	2,73
2	24,2	9,96	3,15	1,51	11,9	8,65



Алгоритм *A*, использующий систему уравнений по цензурированным выборкам (4), показал наихудшие результаты: параметр *b* очень сильно (в 4–7 раз) отличается от эталонного; параметр *c* также недопустимо сильно отличается от эталонного, учитывая, что в выражении  $S_y(t)$  он присутствует в виде  $t^c$ . Было сделано предположение, что значение коэффициента *K* (в качестве которого использовалась длина участка) было выбрано неверно. Это предположение не подтвердилось; были проведены аналогичные расчеты с другими значениями коэффициента *K*, которые дали такие же неудовлетворительные результаты. Такое большое расхождение с эталоном вызвано слишком малым для этого метода количеством точек, в [7] отмечается, что при количестве точек меньше 20 относительное отклонение оценок от истинных значений может достигать 100 %.

Алгоритм *B* показал гораздо лучшие, но все равно недостаточно точные результаты: относительное отклонение параметра *b* составляет 9–45%, параметра *c* 14–49%.

Алгоритм *B* показал наилучшие результаты: относительное отклонение параметра *b* не превышает 6%, а параметра *c* – 13% и 7%, если не рассматривать количество точек меньше 5. Также, в отличие от алгоритмов *A* и *B*, в этом алгоритме прослеживается интуитивно ожидаемая закономерность: при уменьшении количества точек происходит увеличение относительного отклонения.

Поэтому уже на этом этапе можно сделать вывод, что при оценке параметров распределения Вейбулла для нахождения зависимости общего количества повреждений на участке наиболее точные результаты дает алгоритм *B*.

Определим допустимую область применения алгоритма *B*: это минимальное количество точек, для которых вычисленное с использованием алгоритма *B* значение величины  $T_0$  отличается от эталонного не более чем на 2 года. В таблице 2 показаны результаты, когда статистика ограничивалась сверху, т.е. исключались данные за 2007-й, 2006-й и т.д. годы. В таблице 3 представлены результаты работы алгоритма *B* при ограничении статистики сверху (от 8 до 2 точек) и снизу (когда исключались

данные за 1995-й, 1996-й и т.д. годы) и величина  $T_0$  в обоих случаях.

Таблица 3. Значения параметров  $b$  и  $c$  и оптимального времени замены по ограниченному сверху и снизу статистикам

Количество точек	Ограничение сверху			Ограничение снизу		
	$b$	$c$	$T_0$	$b$	$c$	$T_0$
8	11,6	3,87	35	11,8	4,04	35
7	11,5	3,81	36	12,7	4,46	33
6	11,5	3,77	39	12,9	4,4	44
5	11,6	3,88	41	14,8	5,52	44
4	11,4	3,52	43	16,9	6,98	23
3	11,1	2,73	43	18,8	9,34	23
2	11,9	8,65	35	19,8	11,3	21

Сравнивая полученные значения (а также результаты аналогичных расчетов по другим участкам) с эталонным значением оптимального времени замены (35 лет) и учитывая, что в подавляющем большинстве случаев статистика ограничена снизу, будем считать, что для достаточно точной оценки необходимо 7 точек. Количество точек соответствует суммарному числу лет, в которые были зафиксированы повреждения; например, в рассматриваемом примере наблюдение велось 13 лет, количество точек равно 9.

Таким образом, алгоритм, предложенный в [5], дает (с необходимой точностью) решение задачи оценки параметров распределения Вейбулла, если в имеющейся по участку статистике повреждений больше семи точек, и является наиболее точным по сравнению с другими алгоритмами. В следующем разделе рассматривается решение этой задачи при меньшем количестве точек.

### **3. Определение параметров распределения Вейбулла при малом количестве статистики**

В качестве примера рассмотрим участок, который наблюдался с 15-го по 17-й год его срока службы и за это время на нем зафиксировано одно повреждение. Очевидно, что можно найти

два участка с достаточно полной статистикой, удовлетворяющих описанному условию, оптимальное время замены у которых различается на десятки лет. Поэтому логично разбить все участки с малым объемом статистики еще на 2 подмножества: к первому отнести те участки, для которых объем имеющейся статистики повреждений настолько мал, что не дает никакой дополнительной информации для определения технико-экономического показателя состояния участка; будем называть это подмножество «участки без статистики повреждений». Ко второму подмножеству отнести все остальные рассматриваемые участки, назовем его «участки с малым объемом статистики».

### ***3.1. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА ДЛЯ УЧАСТКОВ БЕЗ СТАТИСТИКИ ПОВРЕЖДЕНИЙ***

Единственным методом оценки для таких участков является использование усредненных по другим участкам (с достаточно полной статистикой) параметров. Расчет усредненных параметров для общего количества повреждений выполнялся следующим образом:

1. Множество участков с достаточно полной статистикой разбивалось на 44 группы: 11 по диаметру (100, 200, ..., 1000, 1200, 1400) и 4 по типу канала (непроходной, полупроходной, проходной канал и наземная прокладка) и дальнейшие операции выполнялись по каждой из групп.

2. Было введено понятие «аномального участка»: участок, у которого по тем или иным причинам (включая ошибки при вводе данных по ремонтам) слишком много повреждений и локально-вставочных ремонтов. Такие участки встречаются редко, но сильно искажают значения усредненных параметров. Поэтому логично при определении параметров «аномальные участки» не учитывать.

3. В качестве критерия, по которому участок считался аномальным, было выбрано значение удельной (по длине участка) суммарной (за один год) длины локально-вставочных ремонтов. Была составлена матрица (30\*20), в которой по горизонтали откладывалось количество лет эксплуатации (30), а по вертикали с шагом 0,1 – значение удельной суммарной длины ЛВР (от 0

до 2). Значение в ячейке  $[i, j]$  равнялось количеству участков, у которых на  $j$ -м году эксплуатации значение суммарной удельной длины ЛВР за этот год находится в интервале  $((i*0,1); ((i + 1)*0,1))$ .

Таблица 4. Фрагмент матрицы суммарных удельных ЛВР

$i \setminus j$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0,1	17	16	13	10	8	7	6	3	2	2
...										
0,4	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1
0,5	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
0,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
...										
1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
...										

Из приведенной таблицы видно, что для подавляющего большинства участков величина удельной суммарной длины ЛВР находится в диапазоне  $[0; 0,1]$ , в диапазоне  $[0,1; 0,5]$  в зависимости от срока службы находятся 1–2 участка, а в диапазоне  $[0,6; 1]$  нет ни одного участка. Далее, в диапазоне  $[1; 2]$  появляется один участок, именно его логично считать аномальным. Тогда можно определить величину порога для аномальных участков как значение удельной суммарной длины ЛВР в первой сверху строке, состоящей из одних нулей. Для приведенного примера она соответствует 0,6.

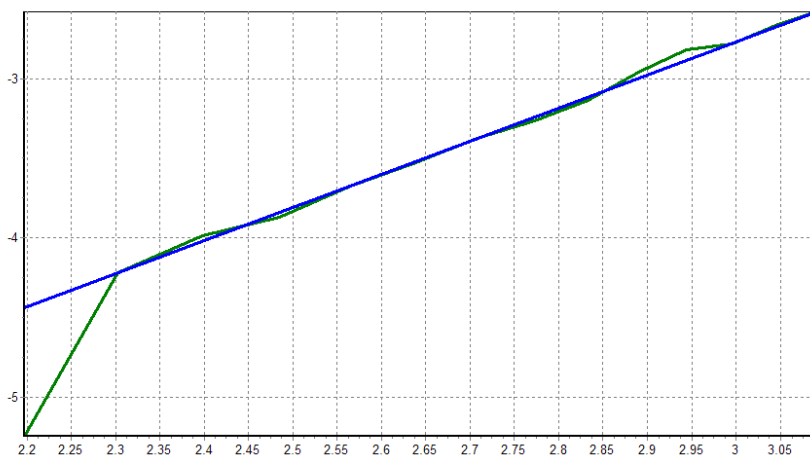
По этому принципу для каждой группы было установлено значение порога для аномальных участков. Если за какой-либо год эксплуатации участка наблюдалось превышение удельной суммарной длины ЛВР величины установленного порога, то такой участок считался аномальным и в дальнейших расчетах не учитывался.

4. Для каждой группы с исключенными аномальными участками заполнялся массив из 35 элементов, элемент состоял из двух ячеек. Номер элемента соответствовал году эксплуатации и содержал в одной ячейке суммарное (по всем участкам из груп-

пы) количество повреждений за этот год, а в другой – суммарную длину участков по которым в этот год велось наблюдение. Тогда отношение суммарного количества повреждений к суммарной длине в  $i$ -м элементе массива равняется усредненному числу повреждений для участка длиной 1 метр.

5. Далее по алгоритму аппроксимации общего числа повреждений из [5] определялись параметры распределения Вейбулла. На рис. 2 приведен пример графика зависимости (в логарифмических шкалах) общего числа повреждений от времени для участков  $d = 500$  мм в проходных каналах и его аппроксимация.

Для краткости будем называть предложенный метод «метод усредненных параметров».



*Рис. 2. Пример графика зависимости общего числа повреждений от времени и его аппроксимация прямой линией*

### **3.2. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА ДЛЯ УЧАСТКОВ С МАЛЫМ ОБЪЕМОМ СТАТИСТИКИ**

Ход рассуждений при построении алгоритма для участков с малым объемом статистики был следующим. Как и в случае с участками без статистики повреждений, имеющийся небольшой объем данных для этого подмножества участков не позво-

ляет использовать алгоритм  $B$  из-за невысокой точности конечных результатов. Следовательно, если существует более точный алгоритм оценки параметров, то в нем должны использоваться данные по некоторому множеству других участков, чтобы компенсировать недостаток информации. Очевидно, что это множество должно состоять из участков той же группы (по диаметру и способу прокладки), что и рассматриваемый участок. Но, как будет видно ниже, значения параметров для участков с достаточно полной статистикой из одной группы могут сильно различаться. Поэтому логично поступить так:

– выбрать из этой группы участки, «похожие» на рассматриваемый участок;

– добавить к множеству «похожих» участков рассматриваемый участок и по получившемуся множеству найти усредненные параметры распределения Вейбулла, алгоритмом, описанным в 3.1.

Определим критерий, по которому участок той же группы считается «похожим» на рассматриваемый участок. Пусть рассматриваемый участок наблюдался с  $m$ -го по  $n$ -й год эксплуатации, при этом за этот период на нем произошло  $r$  повреждений на единицу его длины. Будем считать, что участок «похож» на рассматриваемый участок, если с  $m$ -го по  $n$ -й год эксплуатации количество повреждений на единицу длины лежит в интервале  $[r^*(1 - \Delta); r^*(1 + \Delta)]$ , где  $\Delta$  – параметр в интервале (0; 1).

Вышеизложенное рассуждение хорошо иллюстрируется следующим рисунком (рис. 3): рассмотрим плоскость  $b - c$ , соответствующую удельным (для 1-го метра) параметрам распределения Вейбулла для различных участков. Определим численными методами такую область (она показана черным цветом), что любая ее точка с координатами  $(b, c)$  удовлетворяет сформулированному критерию, т.е. участок с такими параметрами «похож» на рассматриваемый. Также на этом графике поставим точки, координаты которых  $(b, c)$  соответствуют параметрам участков с достаточно полной статистикой из той же группы (они показаны серым цветом).

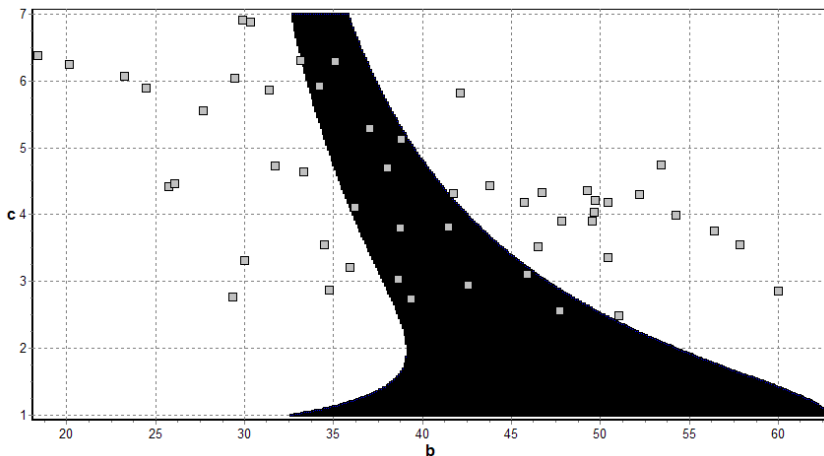


Рис. 3. Пример области «похожих» участков и параметров ( $b$ ,  $c$ ) участков с достаточно полной статистикой

Из рисунка сразу видно множество «похожих» участков – участки, координаты которых попали в черную область.

Значение параметра  $\Delta$  было выбрано равным 0,4. При этом значении у наибольшего количества участков с достаточно полной статистикой наблюдалось минимальное отклонение  $T_0$ , вычисленного указанным способом при ограничении статистики.

В результате был построен следующий алгоритм, будем называть его «метод похожих участков».

1. Среди всех участков, по которым имеется статистика, выбираются те, для которых выполняются все нижеперечисленные условия:

- диаметр и способ прокладки совпадают с рассматриваемым участком;
- статистика повреждений содержит больше семи точек;
- участок «похож» на рассматриваемый.

2. Аналогично пунктам 4 и 5 алгоритма из раздела 3.1 создается массив из 35 элементов, который заполняется, как показано на рис. 4.

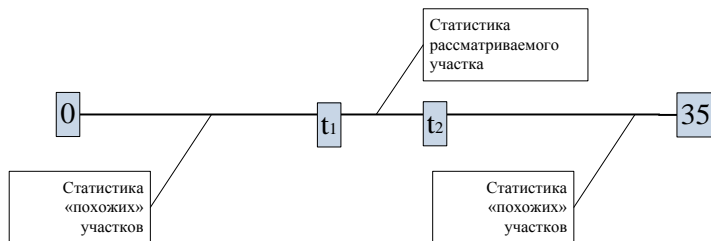


Рис. 4. Алгоритм заполнения массива.

На этом рисунке  $t_1$ ,  $t_2$  – срок наблюдения за рассматриваемым участком. И далее по этому массиву определяются параметры распределения Вейбулла.

#### 4. Общий алгоритм оценки параметров распределения Вейбулла

В предыдущих разделах рассматривались 3 алгоритма оценки параметров распределения: исходный алгоритм, работающий по достаточно полной статистике, алгоритм для участков без статистики повреждений (метод усредненных параметров) и алгоритм для участков с малым объемом статистики (метод похожих участков). Также было показано, что исходный алгоритм дает оценки параметров с достаточной точностью, если количество точек больше семи.

Чтобы построить общий алгоритм, определим границу между методом усредненных параметров и методом похожих участков. Найдем некоторое число  $U$ , такое, что если количество имеющихся точек ( $n$ ) в статистике повреждений рассматриваемого участка меньше  $U$ , то для оценки параметров метод усредненных параметров дает более точные результаты, а если  $n > U$ , то более точные результаты даст метод похожих участков. Построим для этого таблицу значений  $T_0$ , полученных разными алгоритмами, в скобках указано, на сколько значения  $T_0$  отличаются от эталонного (таблица 5).



Таблица 5. Оценки оптимального времени замены участка ( $T_0$ ), полученные разными алгоритмами.

Количество точек	Исходный алгоритм	Метод похожих участков	Метод усредненных параметров
8	35	–	–
7	33 (2)	–	–
6	44 (9)	41 (6)	47 (12)
5	44 (9)	28 (7)	47 (12)
4	23 (12)	24 (11)	47 (12)
3	23 (12)	89 (54)	47 (12)
2	21 (14)	89 (54)	47 (12)
1	–	89 (54)	47 (12)
0	–	–	47 (12)

Из таблицы видно, что метод похожих участков дает лучшие результаты при количестве точек  $> 3$ ; при количестве точек  $\leq 3$  этот метод не применим. Для других участков в некоторых случаях метод усредненных параметров давал лучшие значения при количестве точек  $\leq 4$ , поэтому определим границу  $U = 4$ .

Суммируя полученные результаты, можно определить общий алгоритм оценки параметров распределения Вейбулла так:

– если количество точек  $n \geq 7$ , то следует использовать исходный алгоритм, при этом в большинстве случаев будет достигнута необходимая точность полученных оценок;

– если  $4 \leq n \leq 6$ , то следует использовать метод похожих участков, при этом необходимая точность полученных оценок не достигается, отклонение может составлять до 30%;

– если  $n < 4$ , то следует использовать метод усредненных параметров, при этом необходимая точность полученных оценок не достигается.

## 5. Выводы

При конструировании методов оптимизации планирования ремонтных работ на инженерных сетях возникла необходимость в решении известной задачи оценки параметров распределения Вейбулла при малом объеме выборки применительно к участку

сети. В данной работе решение этой задачи опирается на использование специфики предметной области и анализ статистики повреждений на совокупности участков сети. Основные результаты следующие:

– сформулирован критерий сравнения алгоритмов оценки параметров, с помощью которого также можно определить допустимую область применения алгоритма;

– по этому критерию было установлено, что алгоритмы оценки параметров, не использующие информации о предметной области, дают неудовлетворительные результаты при количестве точек меньше семи;

– дальнейшее исследование проводилось для множества участков, по которым имеющаяся в наличии статистика повреждений насчитывает меньше семи точек; было показано, что это множество логично разделить на два; для каждого из подмножеств был сконструирован свой алгоритм: метод усредненных параметров и метод похожих участков;

– был предложен общий алгоритм оценки параметров и определены границы применения для каждого из трех предложенных алгоритмов, в пределах которых алгоритм дает наилучшие результаты.

### **Литература**

1. *ГОСТ Р 50779.27-2007 Статистические методы. Критерий согласия и доверительные интервалы для распределения Вейбулла.*
2. *ГОСТ 50779.27-2017 Статистические методы распределения Вейбулла. Анализ данных.*
3. КРЫГИН А.А. *Оптимизация графиков плановых ремонтов совокупности участков инженерных сетей // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №9. – С. 83–102.*
4. КРЫГИН А.А. *Оптимизация графиков плановых ремонтов совместно расположенных участков теплосети с учетом практических особенностей // Автоматизация в промышленности. – 2016. – № 5. – С. 53–56.*

5. КРЫГИН А.А. *Расчетно-статистические методы управления обслуживанием протяженных инженерных сетей // Управление большими системами. – 2019. – Вып. 78. – 2019. – С. 235–249. – DOI: <https://doi.org/10.25728/ubs.2019.78.10/>*
6. МЭК 60605-4:2001 *Испытания аппаратуры на надежность. Часть 4. Статистические методы для экспоненциального распределения. Точечные оценки, доверительные, предикционные и толерантные интервалы (IEC 60605-4:2001 Equipment reliability testing – Part 4: Statistical procedures for exponential distribution – Point estimates, confidence intervals, prediction intervals and tolerance intervals).*
7. РУСИН А.Ю., АБДУЛХАМЕД М. *Обработка информации в системе испытаний промышленного оборудования на надежность // Интернет-журнал «Технологии техносферной безопасности». – 2014. – №4(56). – С. 4–7. – URL: <http://ipb.mos.ru/ttb>.*
8. ТИХОВ М.С., АГЕЕВ В.В., БОРОДИНА Т.С. *Оценивание параметров распределения Вейбулла по случайно цензурированным выборкам // Математическое моделирование. Оптимальное управление. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2010. – №4(1). – С. 141–145.*
9. ALIZADEH M., REZAEI S., BAGHERI S.F. *On the Estimation for the Weibull // Distribution Annals of Data Science. – 2015. – Vol. 2. – P. 373–390.*
10. MOEINIA A., JENABB K., MOHAMMADIC M., FOU-MANID M. *Fitting the three-parameter Weibull distribution with Cross Entropy // Applied Mathematical Modelling. – May, 2013. – Vol. 37, Iss. 9.1. – P. 6354–6363.*
11. ASMUSSEN S., KORTSCHAK D. *Error Rates and Improved Algorithms for Rare Event Simulation with Heavy Weibull Tails // Methodology and Computing in Applied Probability. – 2015. – Vol. 17. – P. 441–461.*

12. COUSINEAU D. *Fitting the three-parameter weibull distribution: review and evaluation of existing and new methods* // IEEE Trans. Diel. Elect. Insul. – 2009. – Vol. 16, No. 1. – P. 281–288.
13. MARKOVIĆ D., JUKIĆ D. *On nonlinear weighted total least squares parameter estimation problem for the three-parameter Weibull density* // Applied Mathematical Modelling. – July, 2010. – Vol. 34, Iss. 7. – P. 1839–1848.
14. HAGEY T.J., PUTHOFF J.B., CRANDELL K.E., AUTUMN K., HARMON L.J. *Modeling observed animal performance using the Weibull distribution* // J. of Experimental Biology. – 2016. – Vol. 219. – P. 1603–1607.
15. NAGATSUKA H., BALAKRISHNAN N. *An Efficient Method of Parameter and Quantile Estimation for the Three-Parameter Weibull Distribution Based on Statistics Invariant to Unknown Location Parameter* // Communications in Statistics – Simulation and Computation. – 2015. – Vol. 44, Iss. 2. – P. 295–318.
16. ÖRKCÜ H.H., ÖZSOY V.S., AKSOY E. *Estimating the parameters of 3-p Weibull distribution using particle swarm optimization: A comprehensive experimental comparison* // Appl. Math. Computation. – 2015. – Vol. 268. – P. 201–226.
17. SALAHADDIN A.A. *Comparative study of four methods for estimating Weibull parameters for Halabja, Iraq* // Int. J. of Physical Sciences. – February, 2013. – Vol. 8(5). – P. 186–192.
18. SHAHANI A.R., BABAEI M. *Helicopter blade reliability: Statistical data analysis and modeling* // Aerospace Sci. Technol. – 2016. – Vol. 55, No. 1. – P. 43–48.
19. ZHANG XIANGPO *Estimation of Three-Parameter Weibull Distribution Based on Artificial Fish-Swarm Algorithm* // ICoMS. – 2018. – P. 34–40
20. ZHAO J., PENG G., ZHANG H. *Schedule and cost integrated estimation for complex product modeling based on Weibull distribution* // Proc. IEEE 19th Int. Conf. Computer Supported Cooperative Work in Design. – 2015. – Article number 7230971. – P. 276–280.

**EVALUATION OF THE WEIBULL DISTRIBUTION  
PARAMETERS FOR SMALL VOLUME OF THE SAMPLE  
IN THE PROBLEMS OF OPTIMIZATION OF PLANNING  
REPAIR WORKS ON ENGINEERING NETWORKS**

**Andrey Krygin**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Cand.Sc. (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, andreyakr@yandex.ru).

*Abstract: In the previously developed economic and statistical methodology for assessing the state of the engineering network section and information support when deciding to extend its service life, there are serious requirements for the initial data. One of the conditions for the correct operation of the methodology is the presence of complete statistics of damage and repairs carried out, starting from the moment the site is commissioned. However, for many sites such statistics are available only for the last few years. In order to expand the scope for cases of incomplete damage statistics, a separate study was carried out to estimate the Weibull distribution parameters with a small sample size using the example of heat supply network sections. This work is devoted to the results of the study. Three classes of sites were identified: with fairly complete damage statistics, with a small amount of statistics, and without statistics. For each class, an algorithm was proposed for estimating the necessary parameters for the Weibull distribution, which were further used in the methodology for estimating the state of a site, and a criterion was determined by which a site could be assigned to a particular class.*

**Keywords:** estimation of Weibull distribution parameters with a small sample size, estimation of averaged values of parameters, optimization of repairs of heating network sections.

УДК 338.49

ББК 31.38

DOI: 10.25728/ubs.2020.84.9

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии В.Г. Лебедевым.*

*Поступила в редакцию 17.04.2019.*

*Опубликована 31.03.2020.*