

## ЭФФЕКТЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕТРАНЗИТИВНОСТИ В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Горбунова А. В.<sup>1</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Лебедев А. В.<sup>2</sup>

(Московский государственный университет  
им. М.В.Ломоносова, Москва)

*Работа продолжает цикл статей, посвященный нетранзитивности отношения стохастического предшествования для триплетов независимых случайных величин. Первоначально эта проблема была поставлена в связи с задачей из теории прочности. При парных сравнениях железных брусков с трех заводов может сложиться парадоксальная ситуация, когда бруски с первого завода «хуже» брусков со второго завода, бруски со второго «хуже» брусков с третьего, а бруски с третьего «хуже» брусков с первого. В дальнейшем тема нетранзитивности стала популярной на примере так называемых нетранзитивных (игральных) костей. В предшествующих работах цикла, с одной стороны, было доказано, что нетранзитивности не может быть для многих классических непрерывных распределений, с другой стороны, найдены примеры нетранзитивности для распределений с полиномиальной плотностью на единичном отрезке, а также для смесей нормальных и показательных распределений из не более чем двух компонент. В настоящей работе мы открываем тему возможного влияния нетранзитивности на поведение стохастических систем. А именно, исследуется вопрос, каким образом нетранзитивность в соотношении времен обслуживания в трех однолинейных системах массового обслуживания сказывается на временах пребывания заявок, а в бесконечнолинейных системах массового обслуживания — на максимальных остаточных временах обслуживания. В исследовании используется классический нетранзитивный триплет случайных величин с одинаковыми средними и дисперсиями. В первом случае применяется имитационное моделирование, во втором — аналитический подход.*

**Ключевые слова:** нетранзитивность, нетранзитивные кости, стохастическое предшествование, системы массового обслуживания, времена обслуживания.

---

<sup>1</sup> Анастасия Владимировна Горбунова, к.ф.-м.н., ведущий эксперт (avgorbunova@list.ru).

<sup>2</sup> Алексей Викторович Лебедев, д.ф.-м.н., доцент (avlebed@yandex.ru).

## 1. Введение

В теории и практике различные отношения превосходства между объектами часто обладают свойством транзитивности: если  $A$  превосходит  $B$  и  $B$  превосходит  $C$ , то  $A$  превосходит  $C$ . Это имеет место, например, если каждый объект можно характеризовать действительным числом и сравнение объектов сводится к сравнению этих чисел.

Однако бывает и по-другому. Например, в классической игре «камень, ножницы, бумага» «камень» побеждает «ножницы», «ножницы» побеждают «бумагу», но при этом «бумага» побеждает «камень», а не наоборот. Таким образом, отношение между стратегиями в этой игре нетранзитивно и не существует оптимальной чистой стратегии.

Различным аспектам и многочисленным примерам нетранзитивности отношений превосходства в природе, технике и обществе посвящен ряд научных и научно-популярных статей А.Н. Поддякова, в частности [9, 10, 11, 23]. Укажем также интересный зарубежный обзор [21]. Отмечается, что нетранзитивность часто имеет контринтуитивный характер и может затруднять принятие правильных решений.

В математике и ее приложениях проблема нетранзитивности возникает, например, в теории кооперативных игр [2], задачах векторной оптимизации [5], временной многоагентной логике [12] и др.

Далее будем иметь в виду нетранзитивность в вероятностно-статистическом аспекте. Рассмотрим три независимые случайные величины (триплет)  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ , такие что

$$(1) \quad p_{XY} = \mathbf{P}(X < Y) > \frac{1}{2}$$

и

$$(2) \quad p_{YZ} = \mathbf{P}(Y < Z) > \frac{1}{2}.$$

Можно было бы ожидать, что из (1) и (2) следует

$$\mathbf{P}(X < Z) > \frac{1}{2},$$

однако существуют примеры, когда это не так, а напротив,

$$(3) \quad p_{ZX} = \mathbf{P}(Z < X) > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, отношение (1) между случайными величинами нетранзитивно и может идти по кругу, как в игре «камень, ножницы, бумага». Это отношение также называют *стохастическим предшествованием* (stochastic precedence)<sup>1</sup>.

Далее для определенности под нетранзитивностью будем понимать ситуацию, когда

$$(4) \quad p_{XYZ} = \min\{p_{XY}, p_{YZ}, p_{ZX}\} > \frac{1}{2}.$$

Первой попыткой изучения этого явления стало исследование С. Трыбулы, начатое совместно с Г. Штейнгаузом [25, 26]. Было показано, что

$$\max_{X,Y,Z} p_{XYZ} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,618$$

и максимум достигается, например, на триplete

$$(5) \quad \begin{aligned} X &= \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p, \\ 4 & \text{с вероятностью } 1 - p, \end{cases} \\ Y &= 2, \\ Z &= \begin{cases} 0 & \text{с вероятностью } 1 - p, \\ 3 & \text{с вероятностью } p, \end{cases} \end{aligned}$$

где

$$p = \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

тогда

$$\mathbf{P}(X < Y) = \mathbf{P}(Y < Z) = \mathbf{P}(Z < X) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

В качестве приложения в [26] речь шла о прочности материалов. Пусть в лаборатории сравнивают попарно на прочность железные бруски одинакового размера и формы, помещая их в одну рамку (тиски) и прилагая к ним одинаковую силу путем закручивания винта, пока один из брусков не сломается. Предположим, что бруски производятся на трех разных заводах (которые дают

<sup>1</sup> С поправкой на то, что в ситуациях, когда случайные величины могут с положительной вероятностью принимать одинаковые значения, стохастическое предшествование задается более слабым условием  $\mathbf{E} \operatorname{sign}(Y - X) > 0$ .

разное распределение прочности) и сравниваются бруски с первого и второго, второго и третьего, первого и третьего заводов. Тогда теоретически может сложиться парадоксальная ситуация, что бруски с первого завода «хуже» (т.е. чаще ломаются раньше) брусков со второго завода, бруски со второго «хуже» брусков с третьего, а бруски с третьего «хуже» брусков с первого.

Тема нетранзитивности стохастического предшествования приобрела популярность на примере так называемых *нетранзитивных костей* (nontransitive, intransitive dice). Имеются в виду наборы игральных костей, на грани которых нанесены числа таким образом, чтобы создать нетранзитивные отношения соответствующих случайных величин. Предполагается, что два игрока выбирают кости из некоторого набора и бросают их. Тот, у кого выпало большее число, выигрывает. Нетранзитивные кости были популяризованы М. Гарднером [18, 19], им посвящена обширная зарубежная литература, например, [14, 15, 16, 17, 20, 24].

Содержательная игровая интерпретация вероятности  $p_{XYZ}$  в (4) следующая. Пусть сначала выбирает кость первый игрок. Второй игрок, зная выбор первого, выбирает из оставшихся такую, чтобы максимизировать вероятность своего выигрыша. Зная, что второй игрок поступит таким образом, первый игрок выбирает свою кость так, чтобы минимизировать вероятность выигрыша второго игрока в любом случае. Тогда  $p_{XYZ}$  оказывается вероятностью выигрыша второго игрока. Если  $p_{XYZ} < 1/2$ , то среди костей есть «лучшая», выбрав которую, первый игрок в среднем выигрывает. Если же  $p_{XYZ} > 1/2$ , то «лучшей» кости для первого игрока нет, и в среднем в любом случае выигрывает второй игрок.

Понятно, что в общем случае  $p_{XYZ}$  может использоваться как показатель «силы» нетранзитивности ситуации, в этом смысле мы и будем его применять.

С более полным обзором приложений, литературы и результатов можно ознакомиться в предшествующих работах цикла [7, 8].

В настоящей работе мы открываем тему влиянию нетранзи-

тивности на поведение стохастических систем. А именно, для начала исследуем вопрос, каким образом нетранзитивность в отношении времен обслуживания в системах  $M|G|1$  сказывается на временах пребывания заявок, а в системах  $M|G|\infty$  — на максимальных остаточных временах обслуживания. Системы  $M|G|1$  и  $M|G|\infty$  являются классическими объектами изучения в теории массового обслуживания [1, 3]. Максимальным остаточным временам обслуживания в системах  $M|G|\infty$  посвящены, например, работы авторов [4, 6]. В исследовании используется классический нетранзитивный триплет случайных величин с одинаковыми средними и дисперсиями из [26, с. 329]. В первом случае применяется имитационное моделирование, во втором — аналитический подход.

Отметим также, что сама по себе тематика исследований того, как различные отношения между случайными величинами «на входе» стохастических систем сказываются «на выходе», достаточно давняя. Ей посвящена, например, монография [13]. Однако нетранзитивное отношение стохастического предшествования в этом контексте, по-видимому, раньше не рассматривалось.

## 2. Системы $M|G|1$

Пусть имеются три независимые системы массового обслуживания  $M|G|1$  с одинаковой интенсивностью входного потока  $\lambda$ , где времена обслуживания связаны нетранзитивным отношением: в первой заявки чаще обслуживаются быстрее, чем во второй, во второй — чаще, чем в третьей, в третьей — чаще, чем в первой. Перейдет ли это отношение на времена пребывания заявок, т.е. будут ли заявки быстрее проходить первую систему, чем вторую и т.д. по кругу? Если да, то среди трех систем нельзя выбрать «лучшую» в данном смысле.

Следует отметить, что в теории массового обслуживания для сравнения эффективности работы систем традиционно используются другие подходы, на основе числовых характеристик, например, загрузки системы и среднего времени пребывания заявок. При известной интенсивности входного потока загрузка опреде-

ляется средним временем обслуживания, а среднее время пребывания — средним и дисперсией (или вторым моментом) [3, § 4.2].

Поэтому для чистоты исследования желательно использовать нетранзитивный триплет случайных величин с одинаковыми средними и дисперсиями, чтобы между системами нельзя было сделать очевидный выбор по указанным характеристикам.

Это представляет собой проблему. Нетранзитивные кости с одинаковыми средними давно известны. По-видимому, первый подобный пример был построен в [22], а именно, набор случайных величин, равновероятно принимающих следующие значения:

$$X : 3, 4, 8,$$

$$Y : 1, 5, 9,$$

$$Z : 2, 6, 7,$$

при этом средние равны 5, а  $p_{XYZ} = 5/9$ . К этой категории относятся также известные кости Miwin [27]. Более сложные примеры можно найти, например, в [14, 15, 17] и др. Однако примеры вдобавок еще и с одинаковыми дисперсиями, по-видимому, неизвестны.

С точки зрения реализма, было бы желательно использовать непрерывные распределения, например, гиперэкспоненциальные (смеси показательных). В работе [8, пример 2] было построено семейство нетранзитивных триплетов случайных величин с такими распределениями из не более чем двух компонент. При использовании их в качестве времен обслуживания удалось бы получить распределения времен пребывания в явном виде, используя формулу Хинчина для преобразования Лапласа времени ожидания [3, § 4.2]. Однако в примере из [8] средние и дисперсии различаются, и согласовать их не удастся. Проведенные численные поиски подходящих примеров в данном классе распределений пока не дали результатов и вопрос об их существовании остается открытым. Отметим, что в случае функций распределений, заданных многочленами на единичном отрезке [7], нетранзитивности не было при степени  $N = 3$ , но она появилась при  $N = 4$ . В этой связи и количество компонент смеси может иметь значение.

В результате мы остановились на использовании классического нетранзитивного триплета трех дискретных (но не целочисленных) случайных величин с одинаковыми средними и дисперсиями [26, с. 329]. А именно, рассмотрим три случайные величины  $X, Y$  и  $Z$ , распределения которых заданы следующим образом:

$$\mathbf{P}(X = -a) = \mathbf{P}(Y = a) = 1 - t, \quad \mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(Y = -1) = t,$$

$$\mathbf{P}(Z = ab) = \mathbf{P}(Z = -ab) = \varepsilon, \quad \mathbf{P}(Z = 0) = 1 - 2\varepsilon,$$

где

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1),$$

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} < t = \frac{2\varepsilon - 1 + \sqrt{4\varepsilon^2 - 8\varepsilon + 5}}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$a = \frac{t}{1 - t} > 1, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2a\varepsilon}} > 1,$$

тогда

$$\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = \mathbf{E}Z = 0, \quad \mathbf{D}X = \mathbf{D}Y = \mathbf{D}Z = a$$

и

$$p_{XYZ} = \mathbf{P}(X < Y) = \mathbf{P}(Y < Z) = \mathbf{P}(Z < X) = 1 - t^2 > \frac{1}{2}.$$

Графически данный триплет представлен на рис. 1.

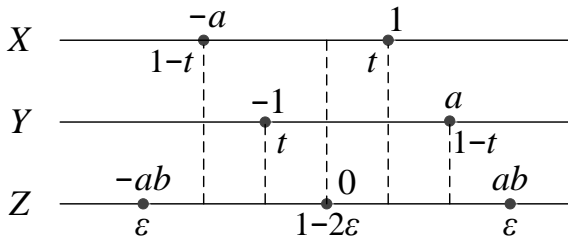


Рис. 1. Нетранзитивный триплет случайных величин  $X, Y$  и  $Z$  с одинаковыми средними и дисперсиями

Расчеты показали, что предложенное автором [26] ограничение на  $\varepsilon$  ( $(\sqrt{2} - 1)/2 \approx 0,207$ ) оказывается слишком сильным. На самом деле все условия выполняются уже при  $\varepsilon < 0,265$ .

Поскольку времена обслуживания должны быть неотрицательны, мы получим их из исходных величин прибавлением константы  $c > 0$ , которая таким образом становится средним временем обслуживания. Для неотрицательности должно выполняться  $c > ab$ . Сдвинутые величины обозначим через  $\tilde{X}$ ,  $\tilde{Y}$ ,  $\tilde{Z}$ . Понятно, что сдвиг не влияет на  $p_{XYZ}$ .

Что касается реализма, то можно отметить, что дискретные распределения приближаются распределениями фазового типа, используемыми в теории массового обслуживания [1, § 8.3], а значит, подобные ситуации должны иметь место и для таких распределений.

Далее мы берем значения параметров  $\varepsilon = 0,1; 0,15; 0,2; 0,25$  и  $c = 4$ . Соответствующие значения показателей  $t$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $p_{XYZ}$  и распределения времен обслуживания  $\tilde{X}$ ,  $\tilde{Y}$ ,  $\tilde{Z}$  представлены в таблицах 1–4.

Таблица 1. Значения показателей и распределения времен обслуживания для  $\varepsilon = 0,10$

$t$	$a$	$b$	$p_{XYZ}$
0,62956	1,69951	1,71523	0,60365

$\tilde{X}$	2,30049	5,00
<b>P</b>	0,37044	0,62956

$\tilde{Y}$	3,00	5,69951
<b>P</b>	0,62956	0,37044

$\tilde{Z}$	1,08494	4,00	6,91506
<b>P</b>	0,10	0,80	0,10

Поскольку в данном случае получить распределения времен пребывания в явном виде невозможно, было проведено имитационное моделирование.



Таблица 2. Значения показателей и распределения времен обслуживания для  $\varepsilon = 0,15$ 

$t$	$a$	$b$	$p_{XYZ}$
0,63615	1,74842	1,38076	0,59531

$\tilde{X}$	2,25158	5,00
<b>P</b>	0,36385	0,63615
$\tilde{Y}$	3,00	5,74842
<b>P</b>	0,63615	0,36385

$\tilde{Z}$	1,58586	4,00	6,41414
<b>P</b>	0,15	0,70	0,15

Таблица 3. Значения показателей и распределения времен обслуживания для  $\varepsilon = 0,20$ 

$t$	$a$	$b$	$p_{XYZ}$
0,64340	1,80425	1,17712	0,58604

$\tilde{X}$	2,19575	5,00
<b>P</b>	0,35660	0,64340
$\tilde{Y}$	3,00	5,80425
<b>P</b>	0,64340	0,35660

$\tilde{Z}$	1,87618	4,00	6,12382
<b>P</b>	0,20	0,60	0,20

Таблица 4. Значения показателей и распределения времен обслуживания для  $\varepsilon = 0,25$ 

$t$	$a$	$b$	$p_{XYZ}$
0,65139	1,86852	1,03459	0,57569

$\tilde{X}$	2,13148	5,00
<b>P</b>	0,34861	0,65139
$\tilde{Y}$	3,00	5,86852
<b>P</b>	0,65139	0,34861

$\tilde{Z}$	2,06686	4,00	5,93314
<b>P</b>	0,25	0,50	0,25

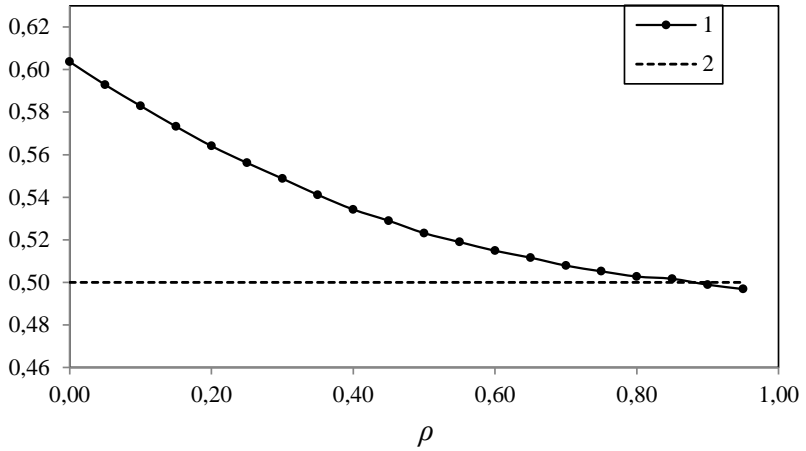
Была создана программа на языке Python по моделированию времен пребывания заявок в трех независимых системах, проведена оценка вероятностей  $p_{12}$ ,  $p_{23}$ ,  $p_{31}$  и  $p_{123}$  (в отношении стационарных времен пребывания в системах 1, 2, 3) в зависимости от загрузки системы  $\rho$ . При этом сначала  $n_0$  заявок пропускалось для установления стационарного режима, а данные по следующим  $n_1$  обрабатывались. Были взяты  $n_0 = 2 \cdot 10^5$  и  $n_1 = 10^7$  (дальнейшее увеличение  $n_1$  было сочтено затруднительным в связи со слишком большими потерями машинного времени). Результаты моделирования представлены в таблице 5 и на рис. 2, 3. При  $\rho = 0$  полагаем  $p_{123} = p_{XYZ}$ , поскольку имеет место соответствующий предел при  $\rho \rightarrow 0$  (когда время ожидания стремится к нулю).

Видно, что в каждом случае нетранзитивность постепенно убывает с ростом загрузки, и при каком-то достаточно большом критическом значении  $\rho$  разрушается.

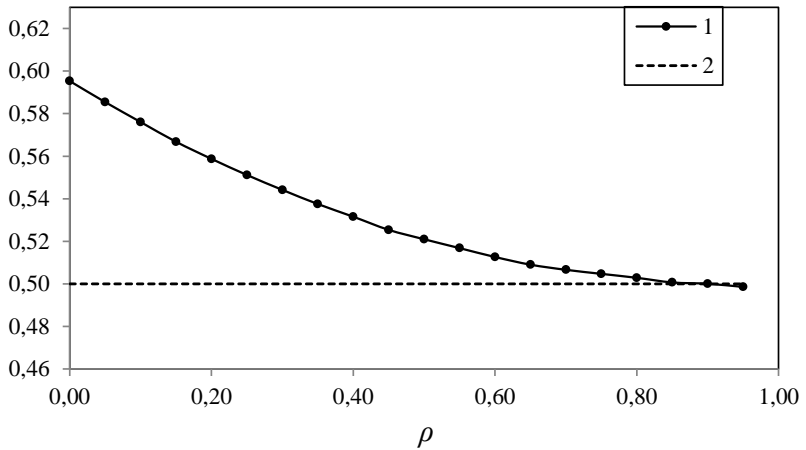
Следует отметить, что при компьютерных экспериментах наблюдалась некоторая неустойчивость и заметная погрешность оценок при больших  $\rho$ , поэтому в этих значениях у нас меньше уверенности. По-видимому, на самом деле должна наблюдаться монотонность (убывание)  $p_{123}$  по  $\varepsilon$ , а не только по  $\rho$ . Однако на качественном уровне эффект достаточно очевиден, и в дальнейшем заслуживает более подробного изучения, как численными, так и аналитическими методами.

Таблица 5. Эмпирические оценки вероятностей  $p_{123}$  в зависимости от загрузки  $\rho$  для различных значений  $\varepsilon$  (случай  $M|G|1$ )

№ п/п	$\rho$	$p_{123}$			
		$\varepsilon = 0,10$	$\varepsilon = 0,15$	$\varepsilon = 0,20$	$\varepsilon = 0,25$
1	0,00	0,60365	0,59531	0,58604	0,57569
2	0,05	0,59283	0,58543	0,57691	0,56784
3	0,10	0,58292	0,57606	0,56811	0,55986
4	0,15	0,57323	0,56678	0,56018	0,55275
5	0,20	0,56407	0,55874	0,55266	0,54611
6	0,25	0,55617	0,55118	0,54598	0,53999
7	0,30	0,54877	0,54417	0,53914	0,53412
8	0,35	0,54114	0,53752	0,53351	0,52859
9	0,40	0,53426	0,53157	0,52805	0,52350
10	0,45	0,52896	0,52538	0,52274	0,51965
11	0,50	0,52314	0,52097	0,51904	0,51607
12	0,55	0,51896	0,51680	0,51473	0,51250
13	0,60	0,51485	0,51263	0,51126	0,50900
14	0,65	0,51162	0,50902	0,50800	0,50712
15	0,70	0,50787	0,50661	0,50493	0,50486
16	0,75	0,50520	0,50471	0,50300	0,50300
17	0,80	0,50273	0,50285	0,50151	0,50196
18	0,85	0,50168	0,50068	0,49974	0,50058
19	0,90	0,49890	0,50005	0,49886	0,49922
20	0,95	0,49685	0,49858	0,49777	0,49870

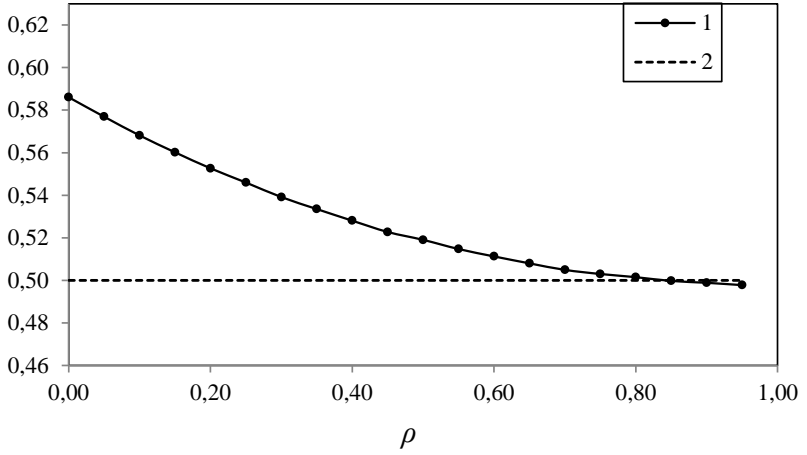


а)

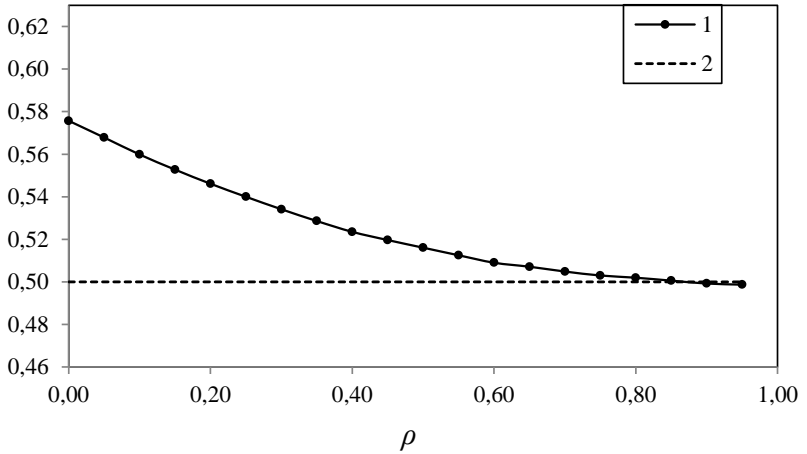


б)

Рис. 2. Графики зависимости оценок вероятности  $p_{123}$  от загрузки системы  $\rho$  для  $M|G|1$ : а) 1.  $\varepsilon = 0,10$ , 2.  $p_{123} = 0,5$ ;  
б) 1.  $\varepsilon = 0,15$ , 2.  $p_{123} = 0,5$



а)



б)

Рис. 3. Графики зависимости оценок вероятности  $p_{123}$  от загрузки системы  $\rho$  для  $M|G|1$ : а) 1.  $\varepsilon = 0,20$ , 2.  $p_{123} = 0,5$ ;  
 б) 1.  $\varepsilon = 0,25$ , 2.  $p_{123} = 0,5$

### 3. Системы $M|G|\infty$

Рассмотрим теперь три независимые системы  $M|G|\infty$  с одинаковой интенсивностью входного потока  $\lambda$  и с тем же набором распределений времен обслуживания, описываемых нетранзитивным триплетом [26, р. 329] с подходящим сдвигом  $c > ab$ .

Для оценки эффективности работы системы, как и в случае  $M|G|1$ , можно использовать такой показатель, как загрузка, и в силу равенства средних времен обслуживания, эти показатели для всех трех систем будут равны ( $\rho = \lambda c$ ). Что касается времен пребывания, то они просто равны временам обслуживания, поскольку каждая заявка, поступившая в систему, начинает обслуживаться немедленно. Вместо этого обратим внимание на другую важную характеристику системы — максимальное остаточное время обслуживания (максимум из остаточных времен обслуживания по всем занятым приборам) в стационарном режиме. С практической точки зрения, это время, необходимое для корректного завершения работы системы после отключения входящего потока заявок (например, при компьютерной обработке данных или передаче информации в телекоммуникациях).

К сожалению, при сделанных предположениях соблюсти равенство средних максимальных остаточных времен обслуживания во всех трех системах не получится, поскольку они зависят не от первых двух моментов, а от всей функции распределения времени обслуживания. При этом функция распределения максимального остаточного времени обслуживания в стационарном режиме  $G$  выражается через функцию распределения времени  $B$  следующей формулой<sup>1</sup> [6]:

$$(6) \quad G(x) = \exp \left\{ -\lambda \int_x^{\infty} [1 - B(y)] dy \right\}.$$

Однако это не будет нас останавливать от исследования максимальных остаточных времен обслуживания в трех системах (1, 2, 3) на нетранзитивные отношения.

---

<sup>1</sup> Для простоты мы опускаем здесь индекс в обозначении  $G_\infty$ , использованный в [6] для предела при  $T \rightarrow +\infty$

Заметим только, что по формуле (6) мы для всех трех систем получаем  $G_i(0) = e^{-\lambda c}$ , т.е. одинаковую положительную вероятность того, что максимальное остаточное время равно нулю, или иначе говоря, вероятность простоя системы. Возникает также положительная вероятность равенства максимальных остаточных времен обслуживания в двух системах, равная  $e^{-2\lambda c}$ . Поскольку нам удобнее работать с непрерывными распределениями, перейдем к сравнению условных максимальных остаточных времен обслуживания, при условии, что это время строго больше нуля. Функции распределения для них выражаются следующим образом (см. Приложение):

$$H_1(x) = \begin{cases} \frac{\exp\{-\lambda(c-x)\}-\exp\{-\lambda c\}}{1-\exp\{-\lambda c\}}, & 0 < x \leq c - a, \\ \frac{\exp\{-\lambda((c+1)t-tx)\}-\exp\{-\lambda c\}}{1-\exp\{-\lambda c\}}, & c - a < x \leq c + 1, \\ 1, & x > c + 1; \end{cases}$$

$$H_2(x) = \begin{cases} \frac{\exp\{-\lambda(c-x)\}-\exp\{-\lambda c\}}{1-\exp\{-\lambda c\}}, & 0 < x \leq c - 1, \\ \frac{\exp\{-\lambda((c+a)(1-t)-(1-t)x)\}-\exp\{-\lambda c\}}{1-\exp\{-\lambda c\}}, & c - 1 < x \leq c + a, \\ 1, & x > c + a; \end{cases}$$

$$H_3(x) = \begin{cases} \frac{\exp\{-\lambda(c-x)\}-\exp\{-\lambda c\}}{1-\exp\{-\lambda c\}}, & 0 < x \leq c - ab, \\ \frac{\exp\{-\lambda(c-(c-ab)\varepsilon-(1-\varepsilon)x)\}-\exp\{-\lambda c\}}{1-\exp\{-\lambda c\}}, & c - ab < x \leq c, \\ \frac{\exp\{-\lambda((c+ab)\varepsilon-\varepsilon x)\}-\exp\{-\lambda c\}}{1-\exp\{-\lambda c\}}, & c < x \leq c + ab, \\ 1, & x > c + ab. \end{cases}$$

В этом случае вероятность  $p_{ij}$  того, что в  $i$ -й системе условное максимальное остаточное время меньше, чем в  $j$ -й, можно вычислить через интеграл

$$(7) \quad p_{ij} = \int_0^\infty H_i(x) dH_j(x).$$

Для вероятностей  $p_{12}$ ,  $p_{23}$ ,  $p_{31}$  были получены следующие формулы (см. Приложение):

$$p_{12} = \frac{e^{-2\lambda a} - e^{-2\lambda c} + 2e^{-\lambda c}(e^{-\lambda c} - e^{-\lambda a})}{2[\lambda(1 - e^{-\lambda c})]^2} +$$

$$+ \frac{e^{-\lambda(2t+1)} - e^{-\lambda(a(t+1)+t)} + (1+t)e^{-\lambda c}(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda})}{(1+t)[\lambda(1 - e^{-\lambda c})]^2} +$$

$$+ \frac{(1-t)(e^{-\lambda(1-a)(t-1)} - e^{-\lambda t(1-a)+a+1}) - e^{-\lambda c}(e^{-\lambda(a-1)(1-t)} - e^{-\lambda(a+1)(1-t)})}{[\lambda(1-t)(1 - e^{-\lambda c})]^2} +$$

$$+ \frac{1 - e^{-\lambda(a-1)(1-t)}}{[\lambda(1-t)]^2(1 - e^{-\lambda c})},$$

$$\begin{aligned}
 p_{23} = & \frac{e^{-2\lambda ab} - e^{-2\lambda c} + 2e^{-\lambda c}(e^{-\lambda c} - e^{-\lambda ab})}{2[\lambda(1 - e^{-\lambda c})]^2} + \\
 & + \frac{1}{(1 - \varepsilon)[\lambda(1 - e^{-\lambda c})]^2} \left( \frac{e^{-\lambda \varepsilon(ab-1)} - e^{-\lambda 2ab}}{2 - \varepsilon} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{e^{-\lambda c}(e^{-\lambda \varepsilon(ab-1)} - e^{-\lambda ab})}{1 - \varepsilon} \right) + \\
 & + \frac{1}{(1 - \varepsilon)[\lambda(1 - e^{-\lambda c})]^2} \left( \frac{e^{-\lambda(a(1-t) + ab\varepsilon)} - e^{-\lambda(a(1-t) + ab\varepsilon - (2 - \varepsilon - t))}}{2 - \varepsilon - t} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{e^{-\lambda c}(e^{-\lambda ab\varepsilon} - e^{-\lambda(ab\varepsilon - (1 - \varepsilon))})}{1 - \varepsilon} \right) + \\
 & + \frac{1}{\varepsilon[\lambda(1 - e^{-\lambda c})]^2} \left( \frac{e^{-\lambda((ab+a)\varepsilon + 2c\varepsilon)} - e^{-\lambda(a(1-t) + 2c\varepsilon + ab\varepsilon)}}{1 - t - \varepsilon} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{e^{-\lambda c}(e^{-\lambda(ab-a)\varepsilon} - e^{-\lambda ab\varepsilon})}{1 - \varepsilon} \right) + \\
 & \quad + \frac{1 - e^{-\lambda \varepsilon(ab-a)}}{[\lambda \varepsilon(1 - e^{-\lambda c})]^2}, \\
 p_{31} = & \frac{e^{-2\lambda ab} - e^{-2\lambda c} - 2e^{-\lambda c}(e^{-\lambda ab} - e^{-\lambda c})}{2[\lambda(1 - e^{-\lambda c})]^2} + \\
 & + \frac{e^{-\lambda((ab-a)\varepsilon + 2a)} - e^{-\lambda 2ab} - (2 - \varepsilon)e^{-\lambda c}(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda ab})}{(2 - \varepsilon)[\lambda(1 - e^{-\lambda c})]^2} + \\
 & + \frac{1}{t[\lambda(1 - e^{-\lambda c})]^2} \left( \frac{e^{-\lambda \varepsilon(ab-1)} - e^{-\lambda(t + ab\varepsilon)}}{\varepsilon + t} - \frac{e^{-\lambda c}(1 - e^{-\lambda t})}{t} \right).
 \end{aligned}$$

Итоговая вероятность, отражающая силу нетранзитивности, как и ранее, определяется через их минимум:

$$p_{123} = \min\{p_{12}, p_{23}, p_{31}\}.$$

Соответствующие значения и графики зависимости указанных вероятностей от загрузки  $\rho$  (которая здесь, в отличие от случая  $M|G|1$ , не ограничена сверху единицей) представлены в таблице 6 и на рисунках 4–7 для тех же значений  $\varepsilon$  и  $c$ , что и ранее (см. таблицы 1–4).

На рис. 4, 5 видно, что при  $\varepsilon = 0,1$  нетранзитивности не наблюдается вообще, а в других примерах она проявляется довольно слабо. Однако очень интересным и неожиданным феноменом представляется немонотонный характер зависимости  $p_{123}$  от  $\rho$ : сначала возрастания, а затем убывания, и наличия пика (максимума в точке излома). При  $\varepsilon = 0,15; 0,2; 0,25$  этот пик поднимается выше уровня  $p_{123} = 1/2$ , и таким образом, возникает промежуток нетранзитивности, ограниченный двумя критическими

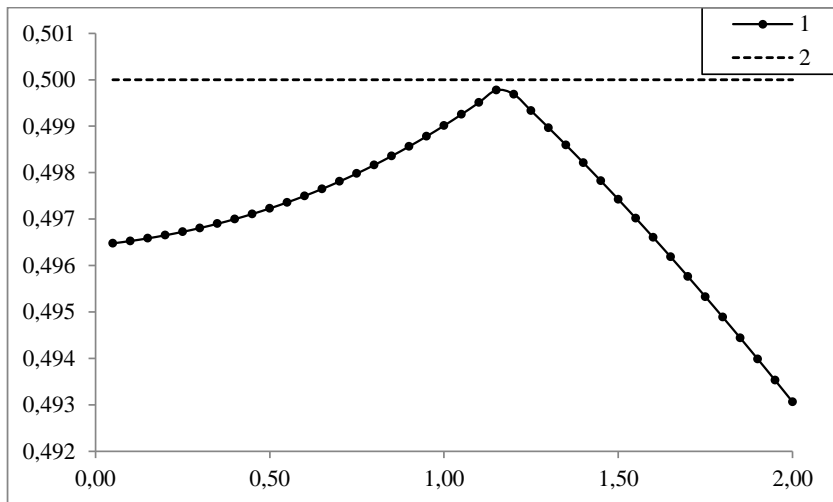


значениями  $\rho$ : при первом нетранзитивность возникает, при втором разрушается.

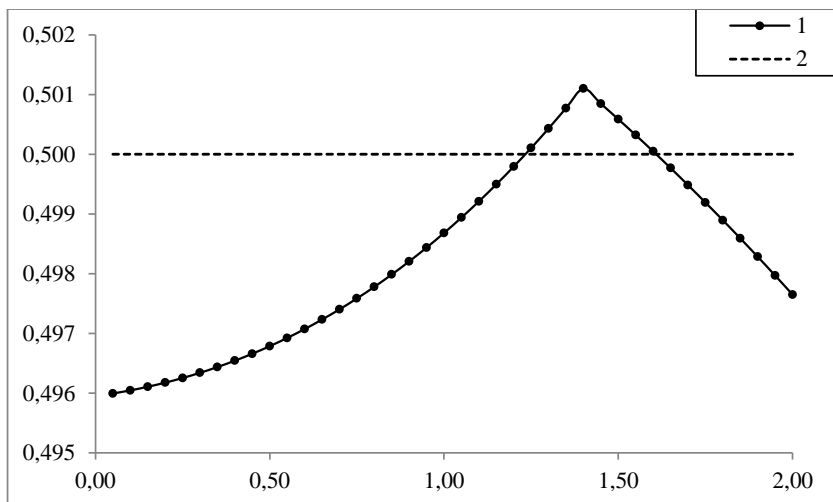
Более подробный анализ, с учетом вероятностей  $p_{12}$ ,  $p_{23}$ ,  $p_{31}$  показывает, что первоначальный рост  $p_{123}$  по  $\rho$  определяется вероятностью  $p_{12}$ , а убывание после пика — вероятностью  $p_{23}$  (в точке максимума их графики пересекаются). Сначала условные максимальные остаточные времена обслуживания находятся в отношении стохастического предшествования (по номерам систем)  $2 \prec 3 \prec 1$ , затем (после промежутка нетранзитивности либо без него) оно меняется на  $3 \prec 1 \prec 2$ .

Таблица 6. Эмпирические оценки вероятностей  $p_{123}$  в зависимости от загрузки  $\rho$  для различных значений  $\varepsilon$  (случай  $M|G|\infty$ ).

№ п/п	$\rho$	$p_{123}$			
		$\varepsilon = 0,10$	$\varepsilon = 0,15$	$\varepsilon = 0,20$	$\varepsilon = 0,25$
1	0,1	0,49653	0,49604	0,49546	0,49475
2	0,2	0,49665	0,49617	0,49560	0,49490
3	0,3	0,49681	0,49634	0,49577	0,49508
4	0,4	0,49700	0,49654	0,49599	0,49531
5	0,5	0,49723	0,49679	0,49625	0,49559
6	0,6	0,49750	0,49707	0,49655	0,49592
7	0,7	0,49781	0,49740	0,49691	0,49630
8	0,8	0,49816	0,49778	0,49731	0,49673
9	0,9	0,49856	0,49820	0,49777	0,49722
10	1,0	0,49901	0,49868	0,49828	0,49777
11	1,1	0,49951	0,49921	0,49884	0,49838
12	1,2	0,49969	0,49979	0,49947	0,49905
13	1,3	0,49897	0,50043	0,50015	0,49979
14	1,4	0,49821	0,50110	0,50089	0,50059
15	1,5	0,49742	0,50059	0,50170	0,50145
16	1,6	0,49661	0,50005	0,50143	0,50148
17	1,7	0,49576	0,49948	0,50099	0,50107
18	1,8	0,49489	0,49889	0,50053	0,50063
19	1,9	0,49399	0,49828	0,50005	0,50016
20	2,0	0,49306	0,49765	0,49955	0,49967



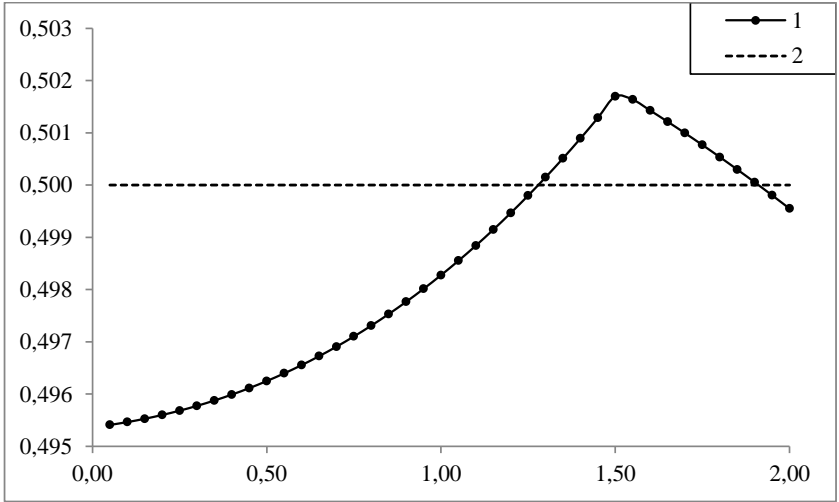
а)



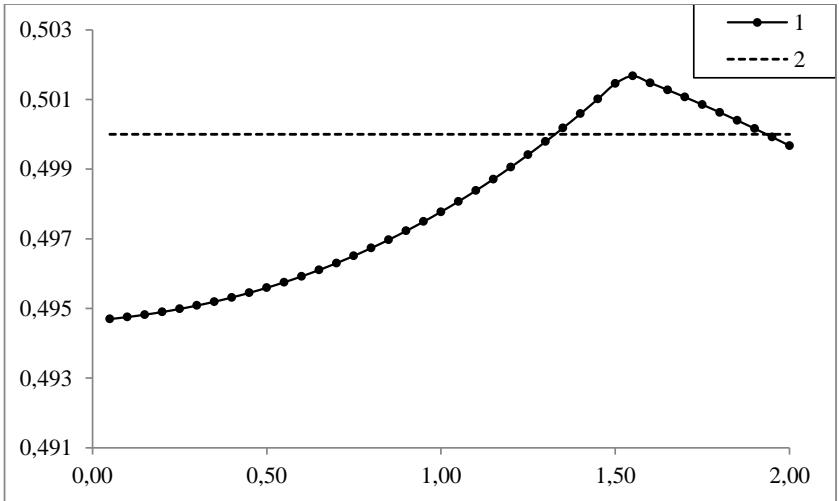
б)

Рис. 4. Графики зависимости оценок вероятности  $p_{123}$  от загрузки системы  $\rho$  для  $M|G|\infty$ : а) 1.  $\varepsilon = 0,10$ , 2.  $p_{123} = 0,5$ ;

б) 1.  $\varepsilon = 0,15$ , 2.  $p_{123} = 0,5$

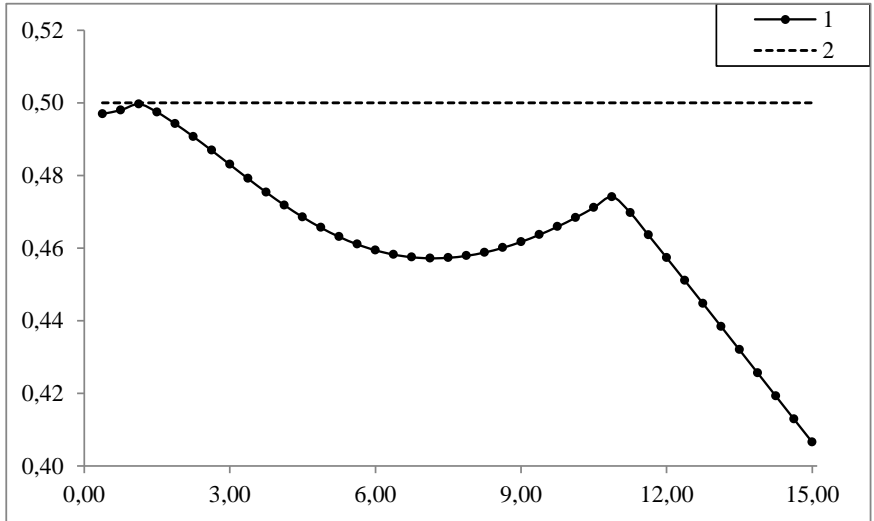


а)

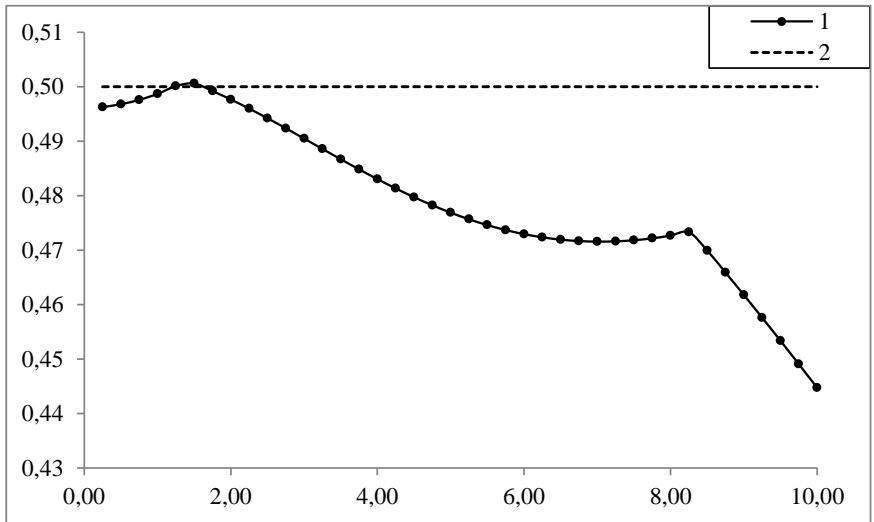


б)

Рис. 5. Графики зависимости оценок вероятности  $p_{123}$  от загрузки системы  $\rho$  для  $M|G|\infty$ : а) 1.  $\varepsilon = 0,20$ , 2.  $p_{123} = 0,5$ ;  
 б) 1.  $\varepsilon = 0,25$ , 2.  $p_{123} = 0,5$

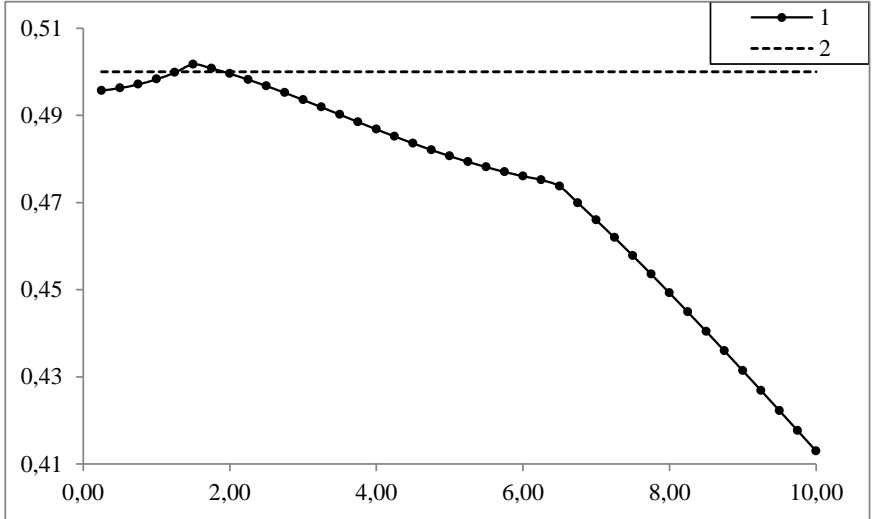


а)

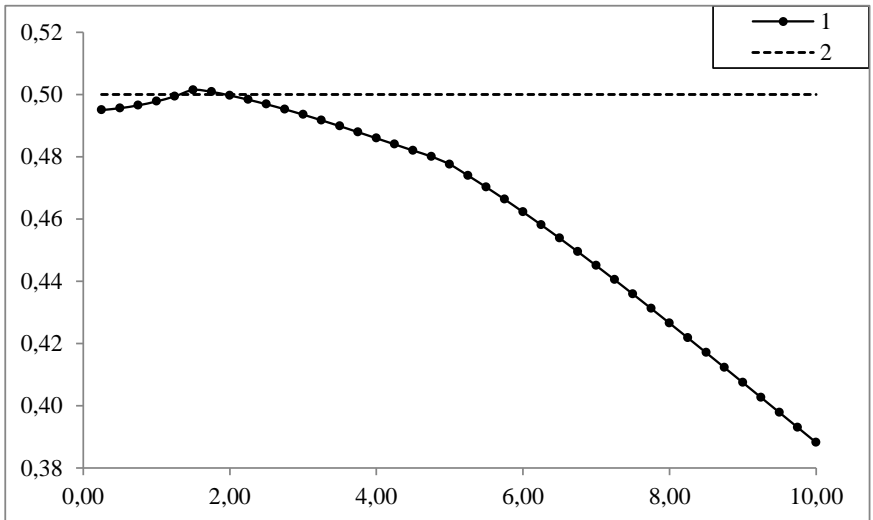


б)

Рис. 6. Графики зависимости оценок вероятности  $p_{123}$  от загрузки системы  $\rho$  для  $M|G|\infty$ : а) 1.  $\varepsilon = 0,10$ , 2.  $p_{123} = 0,5$ ;  
б) 1.  $\varepsilon = 0,15$ , 2.  $p_{123} = 0,5$



а)



б)

Рис. 7. Графики зависимости оценок вероятности  $p_{123}$  от загрузки системы  $\rho$  для  $M|G|\infty$ : а) 1.  $\epsilon = 0,20$ , 2.  $p_{123} = 0,5$ ;

б) 1.  $\epsilon = 0,25$ , 2.  $p_{123} = 0,5$

При больших  $\rho$  (см. рис. 6, 7) наблюдается еще один пик либо излом (заведомо ниже уровня  $p_{123} = 1/2$ ), когда наименьшей среди трех становится вероятность  $p_{31}$ . До этого момента, когда  $p_{31}$ , убывая, пересекает уровень  $1/2$ , происходит переход к отношению  $1 \prec 3 \prec 2$ , а после этого, когда  $p_{23}$ , возрастая, пересекает уровень  $1/2$ , происходит переход к отношению  $1 \prec 2 \prec 3$ . Итоговое отношение  $1 \prec 2 \prec 3$  объясняется тем, что при  $\rho \rightarrow \infty$  максимальные остаточные времена обслуживания сходятся по вероятности к своим верхним границам, которые находятся как раз в таком отношении ( $1 + c < a + c < ab + c$ ).

#### 4. Заключение

Работа продолжает цикл статей, посвященный нетранзитивности отношения стохастического предшествования для триплетов независимых случайных величин, и открывает тему возможного влияния нетранзитивности на поведение стохастических систем. А именно, исследовался вопрос, каким образом нетранзитивность в соотношении времен обслуживания в трех системах  $M|G|1$  сказывается на временах пребывания заявок, а в системах  $M|G|\infty$  — на максимальных остаточных временах обслуживания. В исследовании использовался классический нетранзитивный триплет случайных величин с одинаковыми средними и дисперсиями. В первом случае применялось имитационное моделирование, во втором — аналитический подход.

Показано, что в первой модели нетранзитивность постепенно убывает с ростом загрузки, и при каком-то достаточно большом критическом значении разрушается. Во второй модели, в зависимости от параметра  $\varepsilon$ , нетранзитивности может не быть вообще либо она имеет место на некотором промежутке значений загрузки, при этом характер зависимости уже не монотонный, а имеет пик (максимум).

Безусловно, в будущем хотелось бы установить общие закономерности влияния нетранзитивности на различные стохастические системы, а не ограничиваться изучением частных случаев и примеров.

## 5. Приложение

Выпишем функции распределения  $\tilde{X}$ ,  $\tilde{Y}$  и  $\tilde{Z}$ :

$$B_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c - a, \\ 1 - t, & c - a < x \leq c + 1, \\ 1, & x > c + 1; \end{cases}$$

$$B_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c - 1, \\ t, & c - 1 < x \leq c + a, \\ 1, & x > c + a; \end{cases}$$

$$B_3(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c - ab, \\ \varepsilon, & c - ab < x \leq c, \\ 1 - \varepsilon, & c < x \leq c + ab, \\ 1, & x > c + ab. \end{cases}$$

Функция распределения максимального остаточного времени обслуживания в стационарном режиме в первой системе выражается формулой

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \exp \left\{ -\lambda \int_x^\infty [1 - B_1(y)] dy \right\} = \\ &= \begin{cases} \exp\{-\lambda(c - x)\}, & 0 \leq x \leq c - a, \\ \exp\{-\lambda((c + 1)t - tx)\}, & c - a < x \leq c + 1, \\ 1, & x > c + 1, \end{cases} \end{aligned}$$

которая получается из рассмотрения трех случаев:

1)  $0 \leq x \leq c - a$ :

$$\begin{aligned} \int_x^{c-a} [1 - 0] dy + \int_{c-a}^{c+1} [1 - (1 - t)] dy + \int_{c+1}^{+\infty} [1 - 1] dy = \\ = c - x + t(1 + a) - a = c - x; \end{aligned}$$

2)  $c - a < x \leq c + 1$ :

$$\int_x^{c+1} [1 - (1 - t)] dy + \int_{c+1}^{+\infty} [1 - 1] dy = (c + 1)t - tx;$$

3)  $x > c + 1$ :

$$\int_x^{+\infty} [1 - 1]dy = 0.$$

Аналогично

$$G_2(x) = \exp \left\{ -\lambda \int_x^{\infty} [1 - B_2(y)]dy \right\} =$$

$$= \begin{cases} \exp\{-\lambda(c - x)\}, & 0 \leq x \leq c - 1, \\ \exp\{-\lambda((c + a)(1 - t) - (1 - t)x)\}, & c - 1 < x \leq c + a, \\ 1, & x > c + a; \end{cases}$$

$$G_3(x) = \exp \left\{ -\lambda \int_x^{\infty} [1 - B_3(y)]dy \right\} =$$

$$= \begin{cases} \exp\{-\lambda(c - x)\}, & 0 \leq x \leq c - ab, \\ \exp\{-\lambda(c - (c - ab)\varepsilon - (1 - \varepsilon)x)\}, & c - ab < x \leq c, \\ \exp\{-\lambda((c + ab)\varepsilon - \varepsilon x)\}, & c < x \leq c + ab, \\ 1, & x > c + ab. \end{cases}$$

Далее перейдем к условным функциям распределения максимальных остаточных времен обслуживания, при условии, что время обслуживания больше нуля, по формулам

$$H_i(x) = \mathbf{P}(W_i \leq x | W_i > 0) = \frac{\mathbf{P}(0 < W_i \leq x)}{1 - \mathbf{P}(W_i = 0)} = \frac{G_i(x) - G_i(0)}{1 - G_i(0)}.$$

С учетом различных выражений, определяющих каждую из условных функций распределения  $H_i(x)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , на различных промежутках, формула (7) для соответствующих вероятностей примет вид

$$p_{12} = \frac{\lambda}{(1 - e^{-\lambda c})^2} \left( \int_0^{c-a} (e^{-\lambda(c-x)} - e^{-\lambda c})e^{-\lambda(c-x)} dx + \right.$$

$$+ \int_{c-a}^{c-1} (e^{-\lambda((c+1)t-tx)} - e^{-\lambda c})e^{-\lambda(c-x)} dx +$$

$$+ \int_{c-1}^{c+1} (1 - t)(e^{-\lambda((c+1)t-tx)} - e^{-\lambda c})e^{-\lambda((c+a)(1-t)-(1-t)x)} dx +$$

$$\left. + \int_{c+1}^{c+a} (1 - t)(1 - e^{-\lambda c})e^{-\lambda((c+a)(1-t)-(1-t)x)} dx \right),$$



$$\begin{aligned}
 p_{23} = & \frac{\lambda}{(1 - e^{-\lambda c})^2} \left( \int_0^{c-ab} (e^{-\lambda(c-x)} - e^{-\lambda c}) e^{-\lambda(c-x)} dx + \right. \\
 & + \int_{c-ab}^{c-1} (1 - \varepsilon) (e^{-\lambda(c-x)} - e^{-\lambda c}) e^{-\lambda(c-(c-ab)\varepsilon-(1-\varepsilon)x)} dx + \\
 & + \int_{c-1}^c (1 - \varepsilon) (e^{-\lambda((c+a)(1-t)-(1-t)x)} - e^{-\lambda c}) e^{-\lambda(c-(c-ab)\varepsilon-(1-\varepsilon)x)} dx + \\
 & + \int_c^{c+a} \varepsilon (e^{-\lambda((c+a)(1-t)-(1-t)x)} - e^{-\lambda c}) e^{-\lambda((c+ab)\varepsilon-\varepsilon x)} dx + \\
 & \left. + \int_{c+a}^{c+ab} \varepsilon (1 - e^{-\lambda c}) e^{-\lambda((c+ab)\varepsilon-\varepsilon x)} dx \right), \\
 p_{31} = & \frac{\lambda}{(1 - e^{-\lambda c})^2} \left( \int_0^{c-ab} (e^{-\lambda(c-x)} - e^{-\lambda c}) e^{-\lambda(c-x)} dx + \right. \\
 & + \int_{c-ab}^{c-a} (e^{-\lambda(c-(c-ab)\varepsilon-(1-\varepsilon)x)} - e^{-\lambda c}) e^{-\lambda(c-x)} dx + \\
 & + \int_{c-a}^c t (e^{-\lambda(c-(c-ab)\varepsilon-(1-\varepsilon)x)} - e^{-\lambda c}) e^{-\lambda((c+1)t-tx)} dx + \\
 & \left. + \int_c^{c+1} t (e^{-\lambda((c+ab)\varepsilon-\varepsilon x)} - e^{-\lambda c}) e^{-\lambda((c+1)t-tx)} dx \right).
 \end{aligned}$$

Вычисляя соответствующие интегралы, приходим к ранее представленным результатам.

### Литература

1. БОЧАРОВ П.П., ПЕЧИНКИН А.В. *Теория массового обслуживания*. — М.: РУДН, 1995. — 529 с.
2. ВАСИЛЬЕВ В.А. *О k-достижимости ядер TU-кооперативных игр // Матем. теория игр и ее приложения*. — 2016. — Т. 8, №2. — С. 3–27.
3. ГНЕДЕНКО Б.В., КОВАЛЕНКО И.Н. *Введение в теорию массового обслуживания*. — М. Наука, 1987. — 336 с.
4. ГОРБУНОВА А.В., ЛЕБЕДЕВ А.В. *Двумерные распределения максимальных остаточных времен обслуживания в бесконечнолинейных системах с разделением заявок // Проблемы передачи информации*. — 2020. — Т. 56, №1. — С. 80–98.

5. ГОРОХОВИК В.В., ТРОФИМОВИЧ М.А. *Условия оптимальности первого и второго порядка в задачах векторной оптимизации с нетранзитивным отношением предпочтения* // Тр. ИММ УрО РАН. – 2014. – Т. 20, № 4. – С. 81–96.
6. ЛЕБЕДЕВ А.В. *Максимальное остаточное время обслуживания в бесконечнолинейных системах* // Проблемы передачи информации. – 2018. – Т. 54, №2. – С. 86–102.
7. ЛЕБЕДЕВ А.В. *Проблема нетранзитивности для трех непрерывных случайных величин* // Автоматика и телемеханика. – 2019. – №6. – С. 91–103.
8. ЛЕБЕДЕВ А.В. *Нетранзитивные триплеты непрерывных случайных величин и их приложения* // Информатика и ее применения. – 2019. – Т. 13, №3. – С. 20–26.
9. ПОДДЪЯКОВ А.Н. *Нетранзитивность превосходства при взаимодействиях: междисциплинарный анализ* // Управление большими системами. – 2007. – Вып. 10. – С. 171–182.
10. ПОДДЪЯКОВ А.Н. *Нетранзитивность — кладезь для изобретателей* // Троицкий вариант. – 2017. – №242.
11. ПОДДЪЯКОВ А.Н. *Принцип нетранзитивности превосходства в разных парадигмах* // Вопросы психологии. – 2019. – №2. – С. 3–16.
12. РЫБАКОВ В.В. *Интранзитивные временные многоагентные логики, информация и знание, разрешимость* // Сиб. матем. журн. – 2017. – Т. 58, №5. – С. 1128–1143.
13. ШТОЙЯН Д. *Качественные свойства и оценки стохастических моделей.* – М.: Мир, 1979. – 268 с.
14. AKIN E. *Generalized intransitive dice: mimicking an arbitrary tournament* // <https://arxiv.org/abs/1901.09477>.
15. BOZOKI S. *Nontransitive dice sets releasing the Paley tournament for solving Shütte's tournament problem* // Miskolc Math. Notes. – 2014. – Vol. 15, No. 1. – P. 39–50.
16. BUHLER I., GRAHAM R., HALES A. *Maximally nontransitive dice* // Amer. Math. Montly. – 2018. – Vol. 125, No. 5. – P. 387–399.

17. CONREY B., GABBARD J., GRANT K., LIU A., MORRISON K.E. *Intransitive dice* // Math. Mag. – 2016. – Vol. 89. – P. 133–143.
18. GARDNER M. *The paradox of the nontransitive dice and the elusive principle of indifference* // Sci. Amer. – 1970. – Vol. 223, No. 6. – P. 110–114.
19. GARDNER M. *On the paradoxical situations that arise from nontransitive relations* // Sci. Amer. – 1974. – Vol. 231, No. 6. – P. 120–125.
20. HAZLA J., MOSSEL E., ROSS N., ZHENG G. *The probability in dice and close elections* // <https://arxiv.org/abs/1804.00394>.
21. KLIMENKO A.Y. *Intransitivity in Theory and in the Real World* // Entropy. – 2015. – Vol. 17, No. 6. – P. 4364–4412.
22. MOON J.W., MOSER M.L. *Generating oriented graphs by means of team comparisons* // Pac. J. Math. – 1967. – Vol. 21, No. 3. – P. 531–535.
23. PODDIAKOV A. *Intransitive machines* // <https://arxiv.org/abs/1809.03869>.
24. SAVAGE R. *The paradox of nontransitive dice* // Amer. Math. Montly. – 1994. – Vol. 101, No. 5. – P. 429–436.
25. STEINHAUS H., TRYBULA S. *On a paradox in applied probabilities* // Bull. de l'Acad. Polon. des Sci. – 1959. – Vol. 7. – P. 67–69.
26. TRYBULA S. *On the paradox of three random variables* // Zastos. Matem. – 1961. – Vol. 5, No. 4. – P. 321–332.
27. WINKELMANN M. *Göttliche Spiele*. – Arqus-Verl. Pahllich, 1994. – 160 p.

## STOCHASTIC NONTRANSITIVITY EFFECTS IN QUEUEING SYSTEMS

**Anastasia Gorbunova**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., leading expert (avgorbunova@list.ru).

**Alexey Lebedev**, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Doctor of Sciences, associate professor (avlebed@yandex.ru).

*Abstract: The paper continues a series of articles devoted to the nontransitivity of the stochastic precedence relation for triplets of independent random variables. Initially, this problem was posed in connection with the application in strength theory. With paired comparisons of iron bars from three factories, a paradoxical situation may arise that the bars from the first factory are "worse" than the bars from the second factory, the bars from the second factory are "worse" than the bars from the third factory, and the bars from the third factory are "worse" than the bars from the first factory. Further, the nontransitivity topic gained popularity for the example of the so-called nontransitive dice. In previous works of the cycle, on the one hand, it was proved that there can be no nontransitivity for many classical continuous distributions, on the other hand, examples of nontransitivity for distributions with polynomial density on a unit interval, as well as for mixtures of normal and exponential distributions of at most than two components. In this paper, we open the topic of the possible influence of nontransitivity on the behavior of stochastic systems. Namely, we study how the nontransitivity of service times relation in the three single-server queueing systems affects the sojourn times, and how in the infinite-server queueing systems it affects the maximum residual service times. The study uses the classic nontransitive triplet of random variables with the same means and variances. In the first case, simulation modeling is used; in the second case, the analytical approach is used.*

**Keywords:** nontransitivity, nontransitive dice, stochastic precedence, queueing systems, service times.

УДК 519.2, 519.872

ББК 22.171

DOI: 10.25728/ubs.2019.85.2

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Э.Ю. Калимулиной.*

*Поступила в редакцию 02.03.2020.*

*Дата опубликования 31.05.2020.*