

О ЗАДАЧАХ УПАКОВОК НЕРАВНЫХ ШАРОВ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ¹

Казаков А. Л.², Лемперт А. А.³

(Институт динамики систем и теории управления
им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутский национальный
исследовательский технический университет, Иркутск)

Та Ч. Т.⁴

(Иркутский национальный исследовательский
технический университет, Иркутск)

Статья посвящена построению оптимальных упаковок набора шаров разных радиусов в трехмерное замкнутое множество: требуется найти такое расположение фиксированного числа шаров, чтобы их радиусы были максимальными. Данная проблема является NP-трудной. Для ее решения предложен вычислительный алгоритм, основанный на использовании оптико-геометрического подхода и метода бильярдного моделирования. Применение данного подхода позволяет решать задачи упаковки не только в евклидовом, но и в других метрических пространствах. Так, рассмотрена задача, в которой вместо расстояния между центрами шаров параметром оптимизации является минимальное время перемещения между ними. Подобные постановки нередко возникают при решении задач охраны периметра, когда время перемещения «нарушителя» до охраняемого объекта играет существенно более важную роль, чем пройденное при этом расстояние, а также в логистике, где время доставки имеет первостепенное значение. Алгоритм реализован в виде программного комплекса, с помощью которого проведены вычислительные эксперименты, причем в качестве множества-контейнера выбирались как выпуклые, так и невыпуклые множества. Результаты расчетов позволяют оценить работоспособность и эффективность предложенного алгоритма. Выполнена 3D-визуализация полученных результатов.

Ключевые слова: упаковка шаров разных типов, трехмерное пространство, оптико-геометрический подход, метод бильярдного моделирования, вычислительный алгоритм, неевклидова метрика.

¹ Исследование выполнено при поддержке РФФИ, проекты №18-07-00604, 20-010-00724.

² Александр Леонидович Казаков, д.ф.-м.н., профессор РАН (kazakov@icc.ru).

³ Анна Ананьевна Лемперт, к.ф.-м.н., доцент (lempert@icc.ru).

⁴ Чунг Тхань Та, аспирант (tatrungthanh@mail.ru).

1. Введение

Задача об упаковке шаров является классической проблемой вычислительной геометрии и относится к классу NP-трудных комбинаторных задач. Суть задачи заключается в размещении шаров в конечное число контейнеров предопределённой формы так, чтобы либо их количество, либо суммарный объём были максимальными [10]. В данной работе мы рассматриваем задачу с контейнером произвольной формы и заданным количеством шаров с разными, но связанными между собой определенными соотношениями радиусами. Цель оптимизации – максимизировать радиус элементов упаковки, и при этом все шары должны быть размещены.

Несмотря на то, что задача упаковки шаров имеет длинную историю, она до сих пор вызывает большой интерес из-за ее широкого применения в различных областях науки. Например, в медицине при планировании автоматизированного радиохирургического лечения [36], в материаловедении при изучении и моделировании структуры молекул вещества [21], в логистике [5], в информационных технологиях [1] и т.д. Получить аналитическое решение задачи упаковки удается только в наиболее простых случаях, поэтому обычно используются численные методы.

Отметим, что в большинстве работ рассматривается задача в двумерном пространстве с евклидовой метрикой, а в качестве контейнера выбираются множества, граница которых состоит из отрезков и дуг окружностей, в частности, круг [18, 19], квадрат [28, 29], треугольник [15, 27]. Актуальные результаты можно найти на сайте [31], где они периодически обновляются венгерскими математиками.

Для задач в трехмерном пространстве литература не так обширна, хотя ясно, что математические формулировки могут быть легко расширены с двумерного на трехмерное пространство. Это связано в первую очередь с тем, что с увеличением размерности пространства как аналитическая, так и вычислительная сложность существенно возрастает.

Известно [20], что задача упаковки равных шаров в бесконечное пространство решена: оптимальными являются упаковки на основе гранецентрированной кубической или гексагональной плотноупакованной решеток [9]. Для случая ограниченного множества задача упаковки остается, вообще говоря, открытой, имеются только локальные результаты для контейнеров простой формы. Так, контейнеры в форме куба рассматриваются в работах [3, 17, 35], в форме параллелепипеда – в [11, 32], сферы – в [22, 25], цилиндра – в [12, 33] и в других подобных формах – в [8, 14, 34]. Таким образом, в большинстве опубликованных работ рассматриваются задачи упаковки шаров в выпуклый контейнер и при евклидовом расстоянии. Однако в ряде практических задач контейнер не является выпуклым. Также в некоторых случаях необходимо использовать неевклидовы метрики, в частности, подобные постановки возникают при решении задач охраны периметра [2], когда время перемещения «нарушителя» до охраняемого объекта играет существенно более важную роль, чем пройденное при этом расстояние.

Данная работа является продолжением предыдущих работ авторов [23, 24] и посвящена проблеме построения оптимальных упаковок шаров различных типов в замкнутое трехмерное множество. В отличие от известных работ, в настоящей статье рассматривается не только евклидова, но и специальная неевклидова метрика. Для отыскания решения предлагается численный метод, основанный на сочетании метода бильярдного моделирования и оптико-геометрического подхода, который позволяет заменить обычное расстояние между точками минимальным временем перемещения между ними. Данный подход был успешно применен для решения задач о покрытии и упаковке кругов в двумерном пространстве [4, 6, 7] и задачи размещения логистических центров [5, 26].

2. Постановка задачи

Пусть задано трехмерное метрическое пространство X , в котором расстояние между двумя точками a и b определяется следующей формулой:

$$(1) \quad \rho(a, b) = \min_{G \in G(a, b)} \int_G \frac{dG}{f(x, y, z)},$$

где $G(a, b)$ – множество непрерывных кривых, лежащих в X и соединяющих точки a и b ; $0 < \alpha \leq f(x, y, z) \leq \beta$ – непрерывная функция, определяющая мгновенную скорость движения в каждой точке пространства X . Отметим, что если $f(x, y, z) = 1$, то имеем обычное евклидово пространство.

Задано замкнутое ограниченное множество $P \subset X$ с произвольной границей ∂P . Необходимо найти расположение заданного числа шаров разных типов так, чтобы они полностью лежали в P , не пересекали друг друга и их радиусы были максимальными.

Перейдем к математической постановке. Пусть задано n шаров S_i с центрами $s_i(x_i, y_i, z_i)$ и радиусами $R_i, i = \overline{1, n}$, причем

$$R_j = \frac{R_{j-1}}{k}, \quad j = \overline{2, n}, \quad k \in \mathcal{Q}^+.$$

Необходимо найти такое расположение центров $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in P$, чтобы радиус первого шара R_1 (и, следовательно, все $R_j, j = \overline{2, n}$) достиг максимума. Шар с радиусом R_1 будем называть базовым. Тогда задачу можно записать как

$$(2) \quad R_1 \rightarrow \max,$$

$$(3) \quad R_i = \frac{1}{k^{i-1}} R_1, \quad k \in \mathcal{Q}^+, \quad \forall i = \overline{1, n},$$

$$(4) \quad \rho(s_i, s_j) \geq \left(\frac{1}{k^{i-1}} + \frac{1}{k^{j-1}} \right) R_1, \quad \forall i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j,$$

$$(5) \quad \rho(s_i, \partial P) \geq \frac{1}{k^{i-1}} R_1, \quad \forall i = \overline{1, n},$$

$$(6) \quad s_i \in P, \quad \forall i = \overline{1, n},$$

где $\rho(s_i, \partial P)$ – расстояние от точки s_i до границы множества P .

Выражение (2) максимизирует радиус упаковываемых шаров, (3) задает отношение радиусов шаров. Отметим, что при $k = 1$ получается задача упаковки равных шаров. Соотношения

(4)–(6) гарантируют, что все шары полностью находятся внутри множества P и друг с другом не пересекаются.

3. Алгоритмы решения

При рассмотрении задачи в трехмерном пространстве авторы использовали сеточную аппроксимацию, предложенную ранее в [23]. Разработан алгоритм, который является обобщением алгоритма упаковки равных шаров [24] и основан на оптико-геометрическом подходе [5] и методе бильярдного моделирования [18]. Его идея заключается в следующем: каждый шар рассматривается как жесткий бильярдный шарик, который имеет возможность двигаться свободно внутри заданного замкнутого множества, причём радиус шаров увеличивается после каждого шага сдвига. При этом, поскольку при использовании неевклидовой метрики нахождение расстояния между точками требует решения задачи вариационного исчисления (см. (1)), для получения граничных точек элементов упаковки (например, при упаковке кругов – ограничивающих их окружностей) используется оптико-геометрический подход.

Начальное положение

Первоначальное расположение центров шаров получаем с помощью случайной генерации. Каждый центр нумеруется, центр с номером i относится к шару с радиусом R_i . Радиус базового шара определяется по формуле

$$(7) \quad R_i = \min\{k^{i-1}\rho(s_i, \partial P), (k^{i-1} + k^{j-1})\rho(s_i, s_j)\},$$

где $\forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j$.

Осуществляется построение всех шаров S_i с центрами s_i и радиусами $R_i, i = \overline{1, n}$. Для каждого i -го шара определяется множество точек касания M_i . При этом используется оптико-геометрический подход.

$$(8) \quad M_i = \{p : p \in \partial S_i, p \in \partial P\} \cup \{p : p \in \partial S_i, p \in \partial S_j\},$$

где $\forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j$.

Нетрудно видеть, что всегда существует хотя бы один шар, который касается либо другого шара, либо границы

множества P . Значит, найдется хотя бы один шар S_i , для которого $M_i \neq \emptyset$.

Для нахождения направления сдвига шаров авторы предлагают два алгоритма. Один из них предполагает сдвиг по заданным направлениям, второй – по произвольным. Если используется только первый алгоритм сдвига, то может возникнуть ситуация, что суммарный вектор равен нулю, и дальше шары не могут двигаться, но результат далек от оптимального. Например, если центры шаров и их точки касания друг друга и границы лежат на одной прямой. Если же применять только второй алгоритм, то время работы существенно возрастает. Последовательное же их применение позволяет повысить эффективность работы основного алгоритма.

Алгоритм 1 сдвига шаров по определенному направлению.

Пусть задано n шаров S_i с центрами s_i и разными радиусами r_i , $i = \overline{1, n}$. Радиус базового шара вычисляется по формуле (7). Будем перемешать шары внутри контейнера так, чтобы они не касались друг друга и границы ∂P . Другими словами, необходимо отталкивать шары как можно дальше друг от друга и от границы множества. После каждой итерации сдвига осуществляются увеличение радиусов и построение шаров с новыми радиусами.

Для определения направления перемещения шаров выполняются следующие шаги:

1. Выделяется множество шаров S^* , имеющих непустое множество точек касания:

$$S^* = \{S_i \mid M_i \neq \emptyset, i = \overline{1, n}\}.$$

2. Осуществляется сортировка множества S^* по убыванию значения радиуса.

3. Из множества S^* выделяется первый (самый большой) шар S_1^* и строятся векторы с началом в точке s_1^* и концами в точках $q \in M_1^*$. Определяется суммарный вектор

$$\vec{c}_1^* = \sum_{q \in M_1^*} \vec{s}_1^* q.$$

4. Осуществляется сдвиг центра s_1^* на расстояние h , направление сдвига противоположно вектору $\overline{c_1^*}$. Полученная точка после сдвига полагается новым временным центром шара S_1^* .

5. Вычисляется радиус базового шара $\overline{R_1}$ по формуле (7). Если $\overline{R_1} < R_1$, то переходим к шагу 3 с множеством $\overline{S^*} = S^* \setminus S_1^*$; если $\overline{R_1} \geq R_1$, то находим множество $\overline{M_i}$ по формуле (8) и переходим к шагу 1.

Шаги 1–5 повторяются до тех пор, пока $\overline{S^*} \neq \emptyset$.

Алгоритм 2 случайного перебора.

Имеются n шаров с центрами s_i и разными радиусами R_i , $i = \overline{1, n}$. Значение радиуса базового шара R_1 вычисляется по формуле (7). На построенной равномерной сетке вокруг каждой точки, кроме точек на границе множества P , существуют 26 соседних. Шар может двигаться в любую точку из них:

1. Задается максимальное количество итераций, значение счетчика количества итераций полагается равным 1.

2. Определяется множество S^* из шаров, имеющих непустое множество точек касания:

$$S^* = \{S_i \mid M_i \neq \emptyset, i = \overline{1, n}\}.$$

Осуществляется сортировка множества S^* по убыванию значения радиуса.

3. Для первого (самого большого) шара S_1^* из множества S^* выделяется множество C из 26 соседних точек центра s_1^* . Осуществляется перемещение центра s_1^* в одну произвольную точку $c_i \in C$, выбранную случайным образом, и получается временный центр $\overline{s_1^*}$.

4. Определяется величина

$$d_{\min} = \min\{\rho(\overline{s_1^*}, \partial P), \rho(\overline{s_1^*}, s_j) - R_j\}, j = \overline{2, n}.$$

– если $d_{\min} \leq R_1^*$, то временный центр $\overline{s_1^*}$ сохраняется в качестве нового центра текущего шара S_1^* и переходим к шагу 3 с множеством $\overline{S^*} = S^* \setminus S_1^*$;

– если $d_{\min} < R_1^*$, то осуществляется переход к шагу 3 с множеством $\bar{C} = C \setminus c_i$. Если $\bar{C} = \emptyset$, т.е. все 26 соседних точек были рассмотрены, то переходим к шагу 3 с множеством $\bar{S}^* = S^* \setminus S_1^*$. Исходный центр сохраняется.

Шаги 3–4 повторяются пока $\bar{S}^* \neq \emptyset$.

5. Вычисляется радиус базового шара \bar{R}_1 по формуле (7)

– если $\bar{R}_1 \geq R_1$, то значение \bar{R}_1 и координаты всех шаров сохраняются в качестве приближения решения задачи. Осуществляется переход к шагу 2.

– если $\bar{R}_1 < R_1$, то значение счётчика количества итерации увеличивается на единицу. Если это значение счётчика превосходит наперед заданной величины, то работа алгоритма завершается, иначе переходим к шагу 2.

Главный алгоритм.

Численный алгоритм решения задачи упаковки разных шаров в трехмерном пространстве имеет следующий вид:

1. Задается максимальное количество генерации случайных начальных точек, значение счетчика генерации *Iter* равно единице.

2. Методом случайной генерации задаем первоначальные координаты центров шаров. Центры нумеруются последовательными натуральными числами.

3. Вычисляется значение радиуса базового шара по формуле (7) и определяется множество точек касания каждого шара с другими шарами и с границами контейнера по формуле (8).

4. Осуществляется сдвиг центров шаров по определенному направлению (алгоритм 1).

5. Осуществляется сдвиг центров шаров направленным перебором соседних точек (алгоритм 2).

Шаги 4–5 повторяются до тех пор, пока радиус базового шара возрастает (или хотя бы не уменьшается). Если значение радиуса базового шара текущей итерации меньше, чем значение предыдущей, то в качестве приближения решения сохраняются

значения радиусов и положения центров, полученные на предыдущей итерации.

6. Число счетчика количества итерации *Iter* увеличивается на единицу. Если значение *Iter* достигло наперед заданной величины, то переходим к шагу 7, в противном случае осуществляется переход к шагу 2

7. Сравниваются все полученные приближенные решения и выбирается наилучшее из них.

4. Вычислительные эксперименты

Вычислительные эксперименты проведены с использованием ПК следующей конфигурации: Intel(R) Core(TM) i5-3570K (частота 3.4 ГГц, 8 Гб ОЗУ) и операционная система Windows 7. Алгоритм реализован на языке программирования C# с помощью пакета Visual Studio 2012.

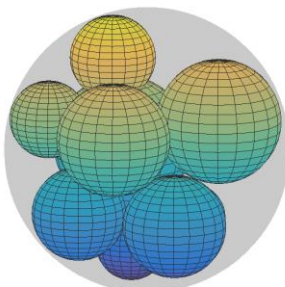
В таблицах n – число упаковываемых шаров; $D(\%)$ – плотность упаковки в процентах; $t_{executed}$ – время вычислений в секундах. При расчетах использована прямоугольная сетка с шагом $h = 0,001$.

Пример 1. В данном примере представлены результаты решения задачи упаковки разных шаров в единичный шар при евклидовом расстоянии, т.е. $f(x, y, z) = 1$. Коэффициент отношения радиусов шаров $k = 1,1$. В таблице 1 представлены наилучшие результаты для заданного числа шаров. На рис. 1 представлена визуализация некоторых результатов расчетов.

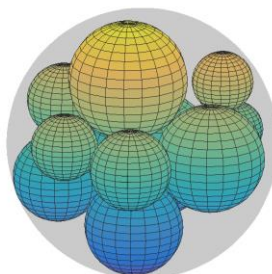
Для $k = 1$ имеем задачу упаковки равных шаров, результаты решения которой были опубликованы в работе [30]. Таблица 1 показывает, что плотность упаковки разных шаров, как правило, меньше, чем плотность упаковки равных шаров (кроме случая $n = 2$). С увеличением количества шаров значение радиуса базового шара уменьшается, а при количестве шаров $n > 9$ радиус базового шара почти не изменяется, однако растет плотность упаковки. Наилучшие решения задачи при $n = 9, 10, 15, 20$ показаны на рис. 1.

Таблица 1. Наилучшие результаты решения задачи упаковки шаров разных типов в единичный шар

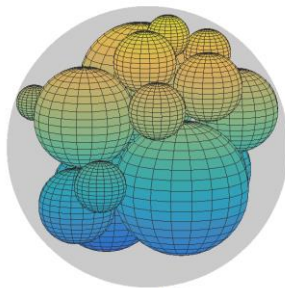
n	$k = 1$		$k = 1,1$		
	R_1	$D(\%)$	R_1	$D(\%)$	$t_{executed}$
2	0,5000	25,000	0,5227	25,01333	538
3	0,4641	29,989	0,5043	29,70559	715
4	0,4495	36,329	0,4951	33,25795	1147
5	0,4142	35,530	0,4904	35,62727	1573
6	0,4142	42,637	0,4896	38,70345	2047
7	0,3859	40,227	0,4889	40,65334	2574
8	0,3780	43,208	0,4852	41,27625	2778
9	0,3660	44,125	0,4826	41,75524	3276
10	0,3530	43,987	0,4826	42,61274	4118
15	0,3183	48,373	0,4815	44,27991	6795
20	0,2879	47,726	0,4815	44,31488	8977



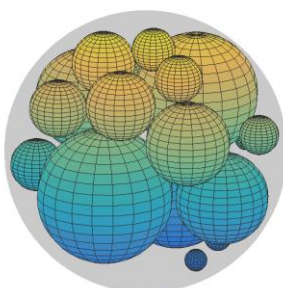
$n = 9$



$n = 10$



$n = 15$



$n = 20$

Рис. 1. Решения задачи упаковки разных шаров в единичный шар

Пример 2. Рассмотрим кубический контейнер и при евклидовой метрике. Результаты вычисления представлены в таблице 2 при изменении коэффициентов отношения радиусов от $k = 1$ до $k = 1,5$.

Таблица 2. Наилучшие результаты решения задачи упаковки шаров разных типов в единичный куб

n	$k = 1$	$k = 1,02$	$k = 1,05$	$k = 1,1$	$k = 1,2$	$k = 1,5$
	$D(\%)$	$D(\%)$	$D(\%)$	$D(\%)$	$D(\%)$	$D(\%)$
2	26,684	26,781	26,801	27,334	27,582	29,795
3	31,575	31,061	29,815	27,592	30,135	31,813
4	42,099	38,344	37,172	34,523	33,187	32,411
5	38,507	38,392	38,137	37,423	34,954	32,588
10	41,216	42,542	41,559	46,394	37,222	32,662
15	44,686	44,991	42,718	48,539	37,369	32,663
20	47,572	45,313	42,818	45,329	37,378	–
25	49,481	46,304	45,899	45,442	–	–

Из таблицы 2 можно сделать следующие выводы:

- в случае $n = 2$ плотность упаковки увеличивается с увеличением значения коэффициента отношения радиусов;
- если $n \geq 3$, то при одинаковом количестве шаров плотность упаковки уменьшается с увеличением значения коэффициента отношения радиусов;
- при заданном коэффициенте плотность увеличивается с увеличением количества упаковываемых шаров.

Некоторые наилучшие решения представлены на рис. 2.

Пример 3. В данном примере рассматривается задача упаковки шаров в невыпуклый контейнер при евклидовой метрике. Пусть множество P задано формулой $P = D \setminus B$, где

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

$$B = \{(x, y, z) \in R^3 : 0 < x, y, z \leq 1\}.$$

Результаты решения при коэффициенте $k = 1,1$ представлены в таблице 3.

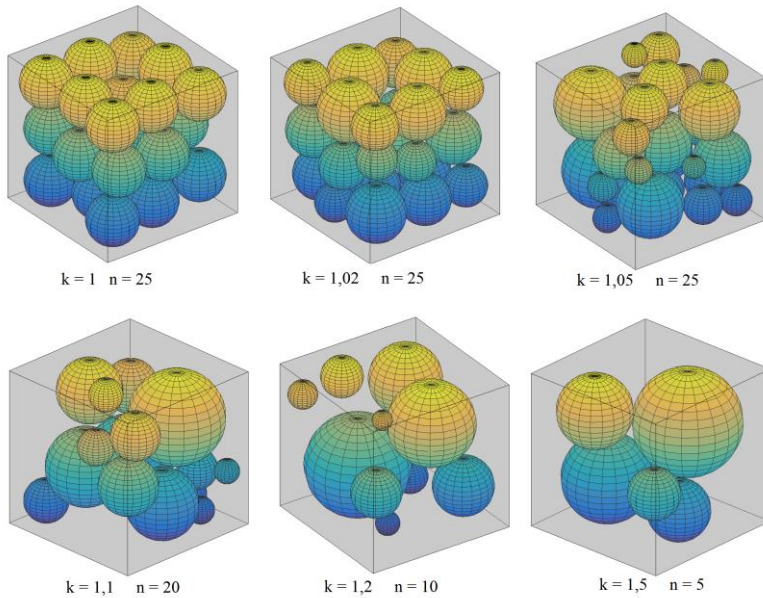


Рис. 2. Решения задачи упаковки шаров в единичный куб при евклидовой метрике

Таблица 3. Результаты решения задачи упаковки шаров в невыпуклое множество при евклидовой метрике

n	$k = 1$		$k = 1,1$		
	R_1	$D(\%)$	R_1	$D(\%)$	$t_{executed}$
2	0,47778	24,93	0,4906	23,63	180
3	0,41526	24,55	0,48028	30,34	376
4	0,41428	32,50	0,46881	32,27	588
5	0,41209	39,99	0,46486	35,11	1228
6	0,37776	36,97	0,46454	37,78	1449
7	0,35556	35,96	0,46000	38,69	1938
8	0,35157	39,73	0,45519	38,94	2863
9	0,33778	39,64	0,45403	39,73	3122
10	0,32064	37,67	0,45403	40,55	3779
15	0,27857	37,06	0,45403	42,42	4315

Результаты при $k = 1$ получены в работе [24]. Таблица 3 показывает, что, в отличие от задачи упаковки шаров в выпуклое множество, плотность упаковки шаров разных типов в невыпуклое множество во многих случаях значительно больше, чем плотность упаковки равных шаров. С увеличением количества шаров плотность упаковки разных шаров увеличивается, радиус базового шара уменьшается и достигает минимума при количестве шаров $n = 9$. Наилучшие решения представлены на рис. 3.

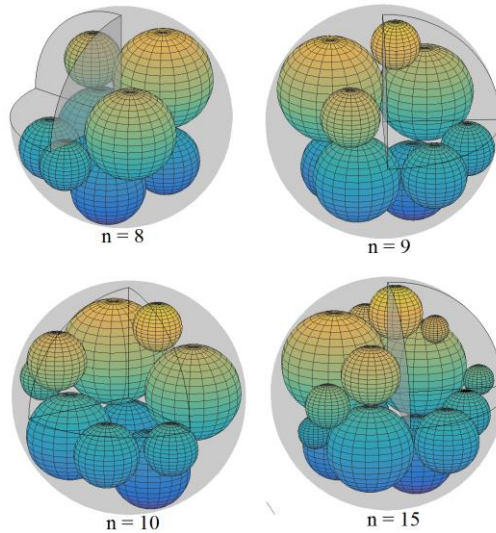


Рис. 3. Наилучшие решения задачи упаковки разных шаров в невыпуклое множество

Пример 4. Рассмотрим решения задачи упаковки при неевклидовой метрике, функция $f(x, y, z)$ задается формулой

$$f(x, y, z) = 0,1 + \frac{(x-0,2)^2 + (y-0,2)^2}{(x-0,2)^2 + (y-0,2)^2 + 1}.$$

Контейнер является сферическим цилиндром и описывается неравенством

$$P = \{(x, y, z) \in R^3 : (x-0,5)^2 + (y-0,5)^2 \leq 0,5^2; 0 \leq x, y, z \leq 1\}.$$

График функции $f(x, y, z)$ изображен на рис. 4. Отметим, что в данном примере рассматривается неевклидова метрика и форма волнового фронта в трехмерном пространстве заранее неизвестна.

В таблице 4 представлены результаты вычислений при коэффициенте $k = 1,1$.

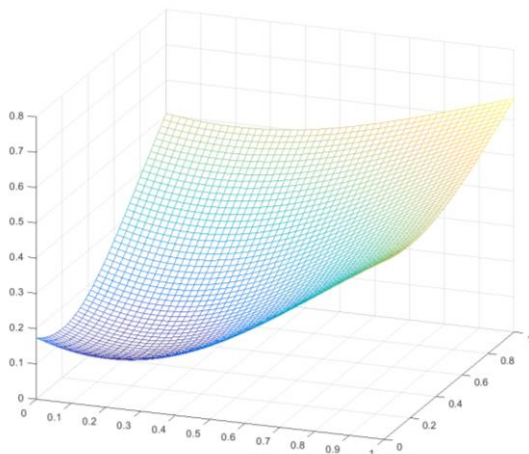


Рис. 4. Функция $f(x, y, z)$

Таблица 4. Результаты решения задачи упаковки шаров в цилиндр при неевклидовой метрике

n	R_1	$D(\%)$	$t_{executed}$
2	2,0615	24,96	195
3	1,6717	48,11	348
4	1,5998	35,41	567
5	1,5486	38,36	986
6	1,5249	31,23	1276
7	1,5080	27,93	1848
8	1,4963	37,38	2562
9	1,4824	34,85	2758
10	1,4732	33,73	3153
15	1,4619	39,98	4379

Из таблицы 4 видно, что плотность упаковки достигает максимальной величины при $n = 3$. Некоторые наилучшие решения представлены на рис. 5.

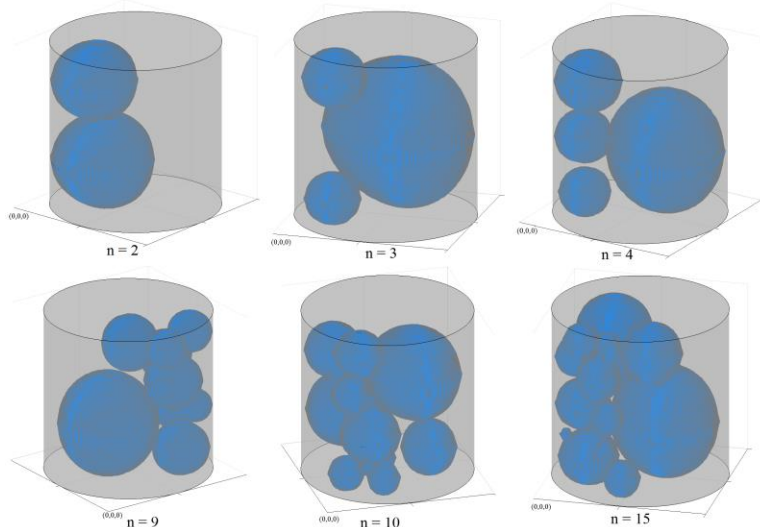


Рис. 5. Результаты решения задачи упаковки шаров в цилиндр при неевклидовой метрике

5. Заключение

В настоящей работе рассматривается проблема упаковки шаров разных типов в замкнутое множество произвольной формы в трехмерном пространстве со специальной неевклидовой метрикой. Для решения предложен новый метод, который основан на совместном применении бильярдного моделирования и оптико-геометрического подхода. Разработаны численные алгоритмы, которые реализованы в виде программного комплекса. Проведены вычислительные эксперименты, показывающие работоспособность предложенного метода и позволяющие установить некоторые свойства рассмотренных упаковок.

Дальнейшее развитие исследований в данном направлении могут заключаться в следующем: во-первых, целесообразно

усовершенствовать программно-алгоритмический аппарат, чтобы решать задачи упаковки при большем количестве шаров и их типов за короткое время; во-вторых, интерес представляет изучение более сложных постановок задачи и рассмотрение различных неевклидовых метрик и типов контейнеров, включая неодносвязные.

Литература

1. АКОПЯН А.В., КАБАТЯНСКИЙ Г.А., МУСИН О.Р. *Контактные числа, коды и сферические многочлены* // Математическое просвещение. – 2012. – Сер. 3, 16. – С. 57–74.
2. БАШУРОВ В.В. *Применение методов геометрической оптики к решению задач безопасности объекта* // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11, №4. – С. 23–28.
3. БЕРЕЗОВСКИЙ О.А. *О задаче упаковки шаров в куб* // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – Т. 50, №4. – С. 170–179.
4. КАЗАКОВ А.Л., ЛЕБЕДЕВ П.Д. *Алгоритмы построения оптимальных упаковок для компактных множеств на плоскости* // Вычислительные методы и программирование. – 2015. – Т. 16, №2. – С. 307–317.
5. КАЗАКОВ А.Л., ЛЕМПЕРТ А.А. *Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – Т. 72, №7. – С. 50–57.
6. КАЗАКОВ А.Л., ЛЕМПЕРТ А.А., ЛЕ К.М. *О задачах построения многократных покрытий и упаковок в двумерном неевклидовом пространстве* // Управление большими системами. – 2019. – №81. – С. 6–25.
7. КАЗАКОВ А.Л., ЛЕМПЕРТ А.А., НГУЕН Г.Л. *Об одном алгоритме построения упаковки конгруэнтных кругов в неодносвязное множество с неевклидовой метрикой* // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2016. – Т. 17, №2. – С. 177–188.

8. ЛЕБЕДЕВ П.Д., ЛАВРОВ Н.Г. *Алгоритмы построения оптимальных упаковок шаров в эллипсоиды* // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2018. – Т. 52. – С. 59–74.
9. СЛОЭН Н.Дж.А. *Упаковка шаров* // В мире науки. – 1984. – № 3. – С. 72–82.
10. ТОТ Л.Ф. *Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве*. – М.: Физматлит, 1958. – 364 с.
11. ХЛУД О.М., СУББОТА И.А., РОМАНОВА Т.Е. *Математическая модель и метод решения задачи упаковки гомотетических одинаково ориентированных эллипсоидов* // Радиоэлектроника и информатика. – 2015. – №3. – С. 26–32.
12. ЯСЬКОВ Г.Н. *Упаковка большого числа конгруэнтных шаров в цилиндре* // Докл. НАН Украины. – 2009. – №12. – С. 45–48.
13. АКЕВ Н. *A Two-Stage Look-Ahead Heuristic for Packing Spheres into a Three-Dimensional Bin of Minimum Length* // Recent Advances in Computational Optimization: Results of the Workshop on Computational Optimization WCO 2014. – 2016. – P. 127–144.
14. ALKHANDARI A. *3D packing of balls in different containers by VNS* // Brunel University, School of Information Systems, Computing and Mathematics. – 2013. [Электронный ресурс]. – URL: <https://bura.brunel.ac.uk/handle/2438/8052>.
15. BIRGIN E.G., CSENDES T. *New and improved results for packing identical unitary radius circles within triangles, rectangles and strips* // Computers and Operations Research. – 2010. – Vol. 37, No. 7. – P. 1318–1327.
16. CHERNOV N., STOYAN YU., ROMANOVA T. *Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem* // Computational Geometry. – 2010. – Vol. 43, No. 5. – P. 535–553.
17. GENSANE T. *Dense packing of equal spheres in a cube* // The Electronic Journal of Combinatorics. – 2004. – Vol. 11. – P. 1–17.
18. GRAHAM R.L., LUBACHEVSKY B.D., NURMELA K.J., OSTERGARD P.R.J. *Dense packings of congruent circles in a circle* // Discrete Mathematics. – 1998. – Vol. 181. – P. 139–154.

19. GROSSO A., JAMALI A.R., LOCATELLI M., SCHOEN F. *Solving the problem of packing equal and unequal circles in a circular container* // Journal of Global Optimization. – 2010. – Vol. 47, No. 1. – P. 63–81.
20. HALES T.C. *Cannonballs and honeycombs* // Notices of the American Mathematical Society. – 2000. – Vol. 47. – P. 440–449.
21. HARRARY F., RANDOLPH W., MEZEY P.G. *A study of maximum unit-circle caterpillars—tools for the study of the shape of adsorption patterns* // Discrete Applied Mathematics. – 1996. – Vol. 67, No. 1–3. – P. 127–135.
22. HUANG W., YU L. *Serial symmetrical relocation algorithm for the equal sphere packing problem* // CoRR. – 2012. – Vol. abs/1202.4149.
23. KAZAKOV A.L., LEMPERT A.A., TA T.T. *The sphere packing problem into bounded containers in threedimension non-Euclidean space* // IFAC-PapersOnLine. – 2018. – Vol. 51, No. 32. – P. 782–787.
24. KAZAKOV A.L., LEMPERT A.A., TA T.T. *On the algorithm for equal balls packing into a multi-connected set* // Advances in Intelligent Systems Research. – 2019. – Vol. 169. – P. 216–222.
25. KHLUD O.M., YASKOV G.N. *Packing homothetic spheroids into a larger spheroid with the jump algorithm* // Control, navigation and communication systems. – 2017. – Vol. 6, No. 46. – P. 131–135.
26. LEMPERT A.A., KAZAKOV A.L. *On Mathematical Models for Optimization Problem of Logistics Infrastructure* // Int. J. Artificial Intelligence. – 2015. – Vol. 13, No. 1. – P. 200–210.
27. LOPEZ C.O., BEASLEY J.E. *A Heuristic for the Circle Packing Problem with a Variety of Containers* // European Journal of Operation Research. – 2001. – Vol. 214, No. 3. – P. 512–525.
28. MARKOT M.C., CSENDES T.A. *A new verified optimization technique for the «packing circles in a unit square» problems* // SIAM Journal on Optimization. – 2005. – Vol. 16. – P. 193–219.
29. NURMELA K.J., OSTERGARD P.R.J. *Packing up to 50 equal circles in a square* // Discrete and Computational Geometry. – 1997. – Vol. 18. – P. 111–120.

30. PFOERTNER H. *Densest packings of n equal spheres in a sphere of radius 1.* – 2008. [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.randomwalk.de/sphere/insphr/spisbest.txt> (дата обращения: 03.12.2019).
31. СПЕЧТ Е. *Packomania.* [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.packomania.com> (дата обращения: 13.03.2020).
32. STOYAN Y.G., YASKOV G. *Packing identical spheres into a rectangular parallelepiped* // In: Bortfeldt A., Homberger J., Kopfer H., Pankratz G., Strangmeier R. (eds) *Intelligent Decision Support.* Gabler. – 2008. – P. 47–67.
33. STOYAN Y.G., YASKOV G. *Packing identical spheres into a cylinder* // *International Transactions in Operational Research.* – 2009. – Vol. 17. – P. 51–70.
34. SUTOU A., DAI Y. *Global Optimization Approach to Unequal Sphere Packing Problems in 3D* // *Journal of Optimization Theory and Applications.* – 2002. – Vol. 114, No. 3. – P. 671–694.
35. TATAREVIC M. *On Limits of Dense Packing of Equal Spheres in a Cube* // *The Electronic Journal of Combinatorics.* – 2015. – Vol. 22(1). – P. 35.
36. WANG J. *Packing of unequal spheres and automated radiosurgical treatment planning* // *Journal of Combinatorial Optimization.* – 1999. – Vol. 3. – P. 453–463.

ON UNEQUAL BALLS PACKING PROBLEM IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

Alexander Kazakov, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, Doctor of Science, Professor (kazakov@icc.ru).

Anna Lempert, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, Cand. Sc., Assistant Professor (lempert@icc.ru).

Trung Thanh Ta, Irkutsk National Research Technical University (Baikal School of BRICS), Irkutsk, PhD student (tatrunghanh@mail.ru).

Abstract: The article is devoted to the construction of optimal packings of unequal balls in a three-dimensional closed set. It is required to find such an arrangement of a fixed number of balls that their radii are maximal. This problem is NP-hard. To solve it, we propose a computational algorithm based on the optical-geometric approach and billiard modeling. Using this approach allows us to solve packing problems not only in Euclidean, but also in other metric spaces. We consider a problem in which, instead of the distance between the centers of the balls, the optimization parameter is the minimum traveling time between them. Such statements often arise if we consider problems of protecting the perimeter, in which the time of movement of the "intruder" to the protected object plays a much more significant role than the distance traveled, as well as in logistics, where the delivery time is paramount important. The algorithm was implemented, and computational experiments were performed. Both convex and non-convex sets were selected as container sets. The results of calculations allow us to positively assess the efficiency and effectiveness of the proposed algorithm. We performed a 3-D visualization of the results.

Keywords: unequal balls packing, three dimensional space, optical-geometric approach, billiard simulation method, computational algorithm, non-Euclidean metric.

УДК 514.174.2

ББК 22.19

DOI: 10.25728/ubs.2020.87.3

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.*

Поступила в редакцию 04.09.2020.

Опубликована 30.09.2020.