

## МНОГОМЕРНЫЕ РЫНКИ ОПЦИОНОВ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПО CC-VAR

Агасандян Г. А.<sup>1</sup>

(Вычислительный центр им. А.А. Дородницына  
ФИЦ ИУ РАН)

*Рассматривается проблема распространения методологии применения континуального критерия VaR (CC-VaR) инвесторами однопериодных рынков опционов с одним базовым активом на задачи построения оптимального портфеля инвестора для аналогичных рынков с несколькими базовыми активами (многомерных рынков). Дается определение теоретического идеального многомерного  $\delta$ -рынка, формируется его инструментарий и алгоритм построения оптимального по CC-VaR портфеля  $\delta$ -инструментов с применением процедуры Неймана – Пирсона. Алгоритм во многом повторяет последовательность операций одномерного алгоритма, но примененных к многомерным объектам. На примере двумерного  $\delta$ -рынка иллюстрируется работа теоретического алгоритма, при этом поиск оптимального решения ведется аналитическими средствами. Находятся прогнозная и стоимостная функции, диссонанта, функция упорядочения и весовая функция оптимального портфеля, а также основные числовые показатели инвестиции. Некоторая наличествующая в примере особенность получает свое естественное и рациональное разрешение и демонстрирует возможности расширения канонической схемы. Изложение иллюстрируется графиками.*

Ключевые слова: многомерные рынки, базовые активы, континуальный критерий VaR (CC-VaR), прогнозная плотность, стоимостная плотность, процедура Неймана – Пирсона, прогнозная функция, стоимостная функция, диссонанта, инвестиционная сумма, средний доход, доходность.

### 1. Введение

Рассматривается проблема распространения методологии континуального критерия VaR (CC-VaR) [1–4, 6] на задачи построения оптимального портфеля инвестора для рынков с несколькими базовыми активами. Интерес к этой проблеме представляется естественным. В целом на финансовых рынках присутствуют многие активы, в разной степени связанные

---

<sup>1</sup> Геннадий Аршавинович Агасандян, д.ф.-м.н. (agasang17@yandex.ru).

между собой, но рассматриваемые по отдельности они не в состоянии сколько-нибудь полноценно отражать вероятностные свойства финансового рынка в целом. В то же время совместные вероятностные свойства базовых активов вполне могут представлять интерес для продвинутых игроков рынка. Поэтому организация их совместной торговли выглядит оправданной.

В прочих теориях этим вопросам также уделяется внимание. В ставшем уже классическим подходе Г. Марковица [8] совокупность активов характеризуется вероятностными свойствами цен активов не выше второго порядка – средними значениями и корреляционной матрицей. При этом результат выбора инвестором портфеля оценивается по математическому ожиданию и дисперсии дохода (доходности) инвестиции. Простота описания позволяет без труда получать и интерпретировать результаты, а корреляционная матрица – это, пожалуй, тот минимум, без которого вообще трудно говорить о содержательности модели.

Однако подобные ограничения существующих классических теорий не допускают более тщательного описания риска в многомерном случае, и ожидать в таких условиях информированности сколь-нибудь адекватного отражения требований  $CC-VaR$  не приходится. Механическое объединение нескольких рынков с разными базовыми активами даже вместе с развитыми линейками опционов на каждый из них по отдельности не решает проблемы. Информации об их ценах явно недостаточно, чтобы по ней можно было судить о «мнении» объединенного рынка относительно стохастической взаимосвязи активов.

Следует вводить инструменты более сложной конструкции, которые будут связывать разные активы, например, опционы на совокупности активов. Только при их наличии на рынках, причем в большом разнообразии, можно будет говорить о целесообразности применимости  $CC-VaR$  к многомерным рынкам.

Некоторые варианты таких инструментов (например, опционов) время от времени появляются в литературе (например, [7]), но они не в состоянии дать полного решения поставленной проблемы с  $CC-VaR$ .

Для наших целей идею подключения  $CC$ -VaR к многомерным рынкам подсказывает развиваемая в [1, 3] сама методология для одномерного случая. Следует сформировать многомерный теоретический  $\delta$ -рынок вместе с многомерными  $\delta$ -инструментами в качестве базисных, а затем на этой основе вводить и дискретные варианты многомерных рынков.

Разумеется, такая схема конструирования многомерного рынка является неизбежным следствием интереса к продвижению в инвестиционную среду инструментария, настроенного на требования именно  $CC$ -VaR. Появятся ли соответствующие такому критерию рынки или нет, покажет будущее. Тем не менее представляется, что даже если оно не находит реального воплощения на финансовых рынках в какой-либо форме в настоящее время и не найдет его в обозримом будущем, подобное исследование имеет смысл. Хотя бы для того, чтобы отказ от организации таких рынков звучал более обоснованно.

Как и в одномерном случае, для получения точных аналитических результатов рынок считается *идеальным* и *теоретическим*: цены продавца и покупателя предполагаются равными, комиссионные равны нулю, а параметры инструментов (страйки опционов) могут быть любыми (теперь) *векторами* с вещественными координатами. В применении к возможным реальным рынкам результаты могут рассматриваться как аппроксимация.

Как и при изучении многих иных теоретических проблем с  $CC$ -VaR для одномерного случая, здесь решается *задача СВ* [1, 3], в которой инвестиционная сумма  $S (> 0)$  не задается, но ищется свободный от сингулярной компоненты портфель (*регулярный портфель*), доставляющий минимум  $S$  при условии

$$(1) \quad P\{q \geq \phi(\varepsilon)\} \geq 1 - \varepsilon \quad \text{сразу для всех } \varepsilon \in [0, 1],$$

где  $\phi(\varepsilon)$  – *функция рискованных предпочтений* (ф.р.п.) инвестора, а  $q$  – скалярный доход от портфеля. Алгоритм оптимизации также, по сути, заимствуется из одномерного случая.

## 2. Теоретический многомерный $\delta$ -рынок

Пусть  $\mathbf{X} = \prod_{i \in N} X_i$ ,  $X_i \subset R$ ,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n$  – размерность рынка. Заданы две неотрицательные функции  $p(\mathbf{x})$  и  $c(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ , порождающие меры  $P\{M\}$  и  $C\{M\}$ ,  $M \subset \mathbf{X}$ . Первая них – *прогнозная мера* – служит *вероятностным* прогнозом инвестора на конец периода, а вторая – *стоимостная мера*, которую представляет рынок. Как и в одномерном случае, сравнительный анализ этих двух мер  $C\{\cdot\}$  и  $P\{\cdot\}$  должен служить основой для построения оптимального портфеля инвестора. Вводится *скалярная функция относительных доходов*  $\rho(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})/c(\mathbf{x})$  от переменного вектора  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  и применяется алгоритм, фактически полностью повторяющий (с очевидными изменениями) континуальный алгоритм [1, 3].

Платежная функция произвольного инструмента  $I$  обозначается  $\pi(\mathbf{x}; I)$ ,  $|I|$  – его рыночная стоимость, рассчитанная по плотности  $c(\mathbf{x})$ , а  $\|I\|$  – средний с точки зрения инвестора доход, рассчитанный по плотности  $p(\mathbf{x})$  и интерпретируемый также как его справедливая стоимость. Имеют место соотношения

$$(2) \quad |I| = \int_{\mathbf{X}} \pi(\mathbf{x}; I) c(\mathbf{x}) dx, \quad \|I\| = \int_{\mathbf{X}} \pi(\mathbf{x}; I) p(\mathbf{x}) dx.$$

Для каждого  $s \in \mathbf{X}$  вводится инструмент  $D(s)$ , называемый  $\delta$ -инструментом, как произведение  $n$  одномерных  $\delta$ -инструментов, при этом его *платежной функцией* (доходом) служит (обобщенная)  $n$ -мерная  $\delta$ -функция относительно  $s$ , т.е. произведение  $n$  одномерных  $\delta$ -функций:

$$(3) \quad D(s) = \prod_{i \in N} D_i(s_i),$$

$$(4) \quad \pi(\mathbf{x}; D(s)) = \delta(\mathbf{x} - s) = \prod_{i \in N} \delta(x_i - s_i).$$

При этом согласно (2) его стоимость и средний доход

$$(5) \quad |D(s)| = c(s), \quad \|D(s)\| = p(s).$$

Инструменты  $D(s)$ ,  $s \in \mathbf{X}$ , образуют инструментальный базис. Инструмент (портфель)  $G$  с произвольной измеримой платежной функцией  $g(\mathbf{x})$  и его стоимость представляются соответственно в виде.

$$(6) \quad G = \int_{\mathbf{X}} g(s) \mathbf{D}(s) ds, \quad |G| = \int_{\mathbf{X}} g(s) |\mathbf{D}(s)| ds = \int_{\mathbf{X}} g(s) c(s) ds.$$

В частности, инструмент  $\mathbf{H}\{M\}$ ,  $M \subset \mathbf{X}$ , называемый *индикатором множества*  $M$ , единичный безрисковый актив  $U = \mathbf{H}\{\mathbf{X}\}$  и их стоимости суть соответственно

$$\mathbf{H}\{M\} = \int_M \mathbf{D}(s) ds, \quad |\mathbf{H}\{M\}| = \int_M c(s) ds,$$

$$(7) \quad U = \mathbf{H}\{\mathbf{X}\} = \int_{\mathbf{X}} \mathbf{D}(s) ds, \quad |U| = C\{\mathbf{X}\} = \int_{\mathbf{X}} c(s) ds = 1/r,$$

где  $r$  имеет смысл безрискового дохода за период.

Без ущерба для общности принимается  $r \equiv 1$ . В таком предположении функция  $c(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ , приобретает свойства плотности вероятности. Она называется *стоимостной* плотностью, и ее можно интерпретировать как порождаемую рынком. При этом *прогнозную* плотность  $p(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ , можно считать *справедливой* с точки зрения инвестора ценой  $\delta$ -инструмента.

В связи с рассмотрением многомерных рынков стоит остановиться на некоторых принципиальных моментах.

*Замечание 1.* Упрощение  $r \equiv 1$  на *многомерном* рынке может быть оправдано лишь в силу неявного предположения о том, что на нем допустима *только* совместная торговля всех базовых активов. Даже если в описании конкретной сделки на рынке будет фигурировать лишь часть базовых активов, имеется в виду, что в ней участвуют одновременно и остальные базовые активы в форме безрисковых единичных инструментов. Поэтому на рассматриваемых многомерных рынках нельзя говорить о доходностях отдельных активов. В стоимостной плотности  $c(\mathbf{x})$  не содержится информации о сравнительной средней доходности для разных базовых активов, а лишь о коллективной доходности  $r$  всей их совокупности, что и позволяет прибегнуть к упрощению  $r \equiv 1$ .  $\square$

Отметим, что подобных реальных рынков, для которых рассматриваемая модель многомерного рынка могла бы служить теоретической абстракцией, на сегодня не существует. Если, пожалуй, не считать бирж, торгующих индексами, которых свойство коллективной доходности отдаленно роднит с введенными многомерными рынками.

*Замечание 2.* Следует обратить внимание на финансовую размерность вводимых инструментов. Представления (3) базисных инструментов и (4) их платежных функций в виде произведений одномерных агрегатов могут породить сомнение в осмысленности объекта изучения: ведь даже если цены всех базовых активов номинируются в единой валюте, например в рублях, то доходы от инструментов и их цены будут измеряться в  $n$ -й степени рубля. Тем более если базовые активы номинируются в разных валютах. Однако кажущаяся парадоксальность этого не должна смущать читателя.

Суть в том, что все базисные инструменты должны быть безразмерными, иначе их нужно нормировать. При этом размерности весовых коэффициентов при базисных инструментах и всех базовых активах должны совпадать. Итак: *доходы от многомерных инструментов и их цен измеряются в произвольной единой валюте, не обязательно связанной с валютами (возможно, разными) базовых активов.* □

Инструментарий  $\delta$ -рынка допускает возможность сравнивать по относительному доходу любую пару точек во множестве  $X$ . И потому алгоритм оптимизации при упорядочении элементов  $X$  по этому доходу должен рассматривать их всех равноправными, как если бы они были объединены в некоторое линейное множество (подобно одномерному случаю).

Как и в одномерном случае, алгоритм оптимизации основан на континуальном применении процедуры Неймана – Пирсона [5]. Он почти полностью повторяет (с очевидными изменениями) континуальный алгоритм для одномерного рынка. При этом упорядочение точек в пределах множества  $X$  по величине *относительного дохода* проводится сквозным образом.

Фактически, алгоритм имеет дело с двумя структурами данных: исходной многомерной, естественной при описании объекта исследования, подготовке данных, а также при прочтении результатов работы алгоритма в терминах реальной многомерной структуры, и одномерной (линейной), более уместной в самом алгоритме, работающем *на поточечной основе*.

Согласно процедуре *Неймана – Пирсона* строится однопараметрическое (с параметром  $\tau$ ) семейство  $\mathbf{Z} = \{Z(\tau)\}$   $n$ -мерных подмножеств по правилу

$$(8) \quad Z(\tau) = \{x \in \mathbf{X} \mid \rho(x) \leq \tau\}, \quad \tau \in [\tau', \tau''],$$

где  $\tau \in [\tau', \tau''] (\subset R_+)$  – скаляр,  $\tau' = \min_x \rho(x)$ ,  $\tau'' = \max_x \rho(x)$ . Через  $Q_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in [0, 1]$ , обозначаются множества из  $\mathbf{Z}$ , такие что  $Q_\varepsilon = Z(\tau)$  и  $\mathbf{P}\{Q_\varepsilon\} = \varepsilon$  (аналог одномерных множеств  $X_\varepsilon$  [1–3]).

Тем самым устанавливается связь  $\tau$  с  $\varepsilon$  и определяются две функции – прогнозная и стоимостная *скалярные* функции, обладающие свойствами *одномерных* функций распределения:

$$(9) \quad f_p(\tau) = \mathbf{P}\{Z(\tau)\} = \varepsilon, \quad f_c(\tau) = \mathbf{C}\{Z(\tau)\}.$$

Они неубывающие по  $\tau$ , равны нулю при  $\tau < \tau'$  и единице при  $\tau > \tau''$ . Из них строятся *диссонанта* (стоимость  $\mathbf{H}[Q_\varepsilon]$  [1–3])

$$(10) \quad \gamma(\varepsilon) = f_c(f_p^{-1}(\varepsilon)), \quad \varepsilon \in [0, 1],$$

и ее производная

$$(11) \quad \gamma'(\varepsilon) = v(f_p^{-1}(\varepsilon)), \quad \varepsilon \in [0, 1], \quad v(\tau) = f_c'(\tau)/f_p'(\tau), \quad \tau \in [\tau', \tau''].$$

Представление (11) получается применением правила дифференцирования суперпозиции функций и обратной функции:

$$\begin{aligned} \gamma'(\varepsilon) &= df_c(f_p^{-1}(\varepsilon))/d\varepsilon = f_c'(f_p^{-1}(\varepsilon)) \times df_p^{-1}(\varepsilon)/d\varepsilon = \\ &= f_c'(f_p^{-1}(\varepsilon))/f_p'(f_p^{-1}(\varepsilon)) = v(f_p^{-1}(\varepsilon)), \quad \varepsilon \in [0, 1]. \end{aligned}$$

В соответствии с теоретическим алгоритмом оптимизации *функция упорядочения*  $w(\cdot)$  и оптимальная *весовая функция*  $g(\cdot)$  определяются соответственно равенствами

$$(12) \quad w(x) = f_p(\rho(x)), \quad x \in \mathbf{X},$$

$$(13) \quad g(s) = \phi(w(s)) = \phi(f_p(\rho(s))), \quad s \in \mathbf{X}.$$

Оптимальный портфель задается формулой (6) с весовой функцией (13):

$$(14) \quad \mathbf{G} = \int_{\mathbf{X}} g(s) \mathbf{D}(s) ds.$$

В связи с формулой (12) следует заметить, что в случае многомерного рынка для регулярной пары  $(\mathbf{C}\{\cdot\}, \mathbf{P}\{\cdot\})$  уровнями постоянства функции  $\rho(x)$  будут, как правило,  $(n - 1)$ -мерные

множества нулевой вероятностной меры. Так, в одномерном регулярном случае функция относительного дохода принимает одно и то же значение в нескольких точках, в двумерном – на нескольких контурах. Тем не менее и в случае, когда конечное ненулевое значение постоянно на множестве положительной вероятностной меры, решение удастся регуляризовать естественным образом. И об этом речь пойдет далее в примере.

Основными традиционными числовыми показателями инвестиционного портфеля служат средний доход, инвестиционная сумма и средняя доходность соответственно:

$$(15) R = \int_0^1 \phi(\varepsilon) d\varepsilon,$$

$$(16) A = \int_0^1 \phi(\varepsilon) d\gamma(\varepsilon) = \int_{\tau'}^{\tau''} \phi(f_P(\tau)) df_C(\tau), \quad y = R/A - 1 > 0.$$

### 3. Пример оптимизации по CC-VaR на $\delta$ -рынке

Продемонстрируем работу теоретического алгоритма на примере двумерного рынка. Хотя алгоритм должен работать для любой пары *стоимостной* и *прогнозной* плотностей, тем не менее они в примере упрощенно подобраны кусочно-линейными. Это делается лишь с целью иллюстрации методики, а подобрать примеры, для которых можно получать аналитические решения, нелегко.

Пусть  $X, Y$  – множества будущих цен двух базовых активов, при этом  $X = Y = [-1, 1]$ . На  $X \times Y$  заданы две неотрицательные плотности – *стоимостная* и *прогнозная* соответственно:

$$(17) c(x, y) = \frac{3}{4}(1 - \max(|x|, |y|)), \quad x \in X, \quad y \in Y,$$

$$(18) p(x, y) = \max\left(\frac{1}{54}(51 - 59 \max(|x|, |y|)), \frac{1}{2}(1 - \max(|x|, |y|))\right).$$

Графики плотностей (17) и (18) приводятся на рис. 1.

Формула для стоимостной плотности описывает боковую поверхность правильной пирамиды высотой  $3/4$  и с квадратом в основании со стороной 2. Для вычисления объема под этой поверхностью можно обойтись без интегрирования: из геометрических соображений он равен трети произведения площади



основания на высоту. В примере искомый объем выбран единичным.

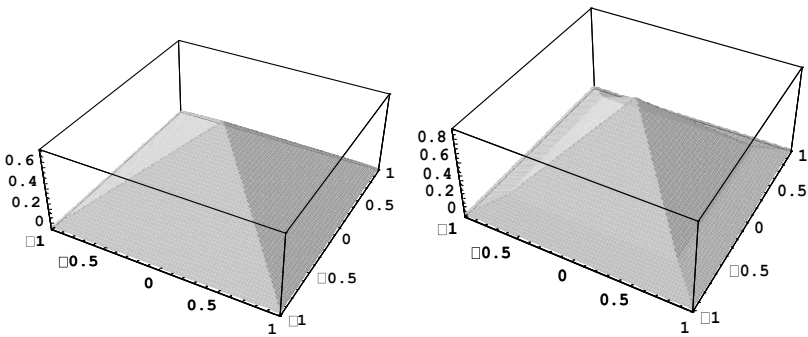


Рис. 1. Графики функций  $c(x, y)$  (слева) и  $p(x, y)$  (справа)

Формула для прогнозной плотности описывает боковую поверхность пирамидальной конструкции, являющейся объединением двух правильных пирамид, соответствующих двум аргументам функции  $\max$ . Удобно считать ее состоящей из нижней усеченной пирамиды, целиком лежащей строго внутри стоимостной пирамиды и с тем же основанием, и надстроенной на таком «постаменте» второй цельной пирамиды. Общая поверхность прогнозной конструкции получается непрерывной, но с изломом. Высота всей этой конструкции превышает высоту стоимостной.

По сравнению со стоимостной картиной рынка инвестор в своей прогнозной плотности намерен больший вес придавать центральной зоне основания и меньший – его краям. В таком случае сравнение двух плотностей говорит о намерении инвестора «продавать волатильность» (на языке финансового рынка), о чем в одномерном случае уже шла речь, например, в [3].

Функция в качестве второго аргумента внешней функции  $\max$  в (18) задается произвольно. Она описывает боковую поверхность правильной пирамиды, все ее значения в  $3/2$  меньше соответствующих значений стоимостной плотности, как и объем. Но второй аргумент превалирует над первым лишь до

ребер излома, координаты которых задаются произвольно как  $x_f = y_f = 3/4$ , а по ним находится и аппликата  $z_f = 2/3 c(x_f, y_f) = 1/8$ .

Функция в качестве первого аргумента функции  $\max$  в (18) строится с сохранением непрерывности в ребрах излома и с такой высотой  $z_0$  всей конструкции, чтобы ее объем был единичным. У нее тот же квадрат в основании и тот же единичный объем, но ее высота будет превышать  $3/4$ . Обе плотности симметричны относительно поворотов вокруг оси аппликат на  $90^\circ$ .

Ребра излома прогнозной конструкции образуют квадрат со стороной  $3/2$ , расположенный на высоте с аппликатой  $z = z_f = 1/8$  и с проекцией на координатную плоскость  $(x, y)$ , описываемой уравнением  $\max(|x|, |y|) = x_f = y_f = 3/4$ . При этом выполняется нужное ограничение  $z_f < c(3/4, 3/4) = 3/16$ . Подсчет объема всей конструкции показывает, что  $z_0 = 17/18$ .

Очевидно, многие характеристики вводимых конструкций в силу симметрий определяются лишь своими сечениями при  $y = 0$ , т.е. функциями  $c(x, 0)$  и  $p(x, 0)$ ,  $x \geq 0$ :

$$(19) c_0(x) = c(x, 0) = 3(1 - x)/4, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$(20) p_0(x) = p(x, 0) = \{17/18 - 59x/54, x < 3/4; (1 - x)/2, x \geq 3/4\}.$$

Эти функции удобны для анализа и графического изображения, но носят вспомогательный характер. Они вообще не являются одномерными плотностями вероятности и даже после нормирования не становятся маргинальными. При желании получить из них выражения для функций  $c(x, y)$  и  $p(x, y)$  достаточно поменять в (19) и (20)  $x$  на  $\max(|x|, |y|)$ .

Графики функций (19) и (20) приводятся на рис. 2 (слева) – штриховая и сплошная линии соответственно. Они фактически содержат в упрощенной оговоренной выше форме всю информацию, представленную на обоих графиках рис. 1.

Алгоритм основан на анализе функции относительных доходов

$$(21) \rho(x, y) = p(x, y)/c(x, y).$$

Ее график приводится на рис. 3 (слева). И ее также можно записать упрощенно с учетом соотношения  $\rho_0(\cdot) = p_0(\cdot)/c_0(\cdot)$ :

$$(22) \rho_0(x) = \{2(51 - 59x)/(81(1 - x)), x < 3/4; 2/3, 3/4 \leq x \leq 1\}.$$

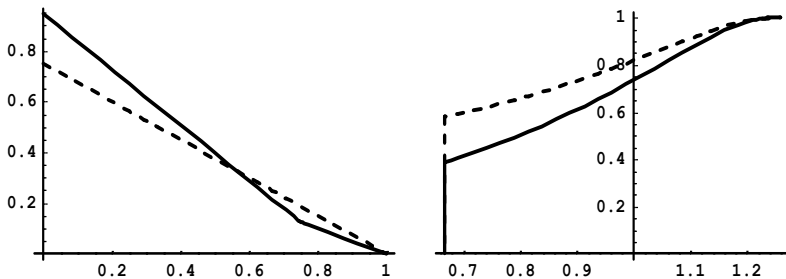


Рис. 2. Графики функций  $\rho_0(x)$  и  $c_0(x)$  (слева),  $f_c(\tau)$  и  $f_p(\tau)$  (справа)

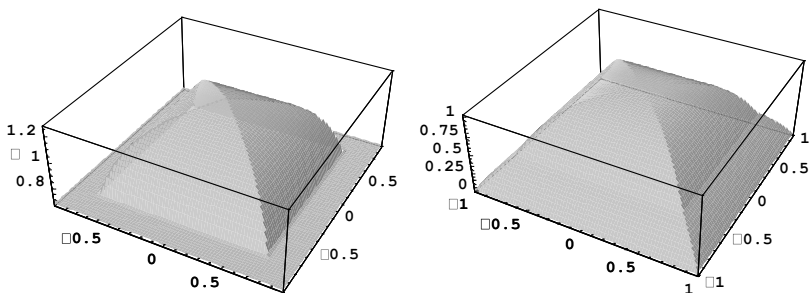


Рис. 3. Функции  $\rho(x, y)$  (слева) и  $w^i(x, y)$  (справа)

Возможные значения  $\tau = \rho_0(x)$  образуют отрезок  $[\tau', \tau'']$ ,  $\tau' = 2/3$ ,  $\tau'' = 34/27$ . Относительный доход принимает наименьшее значение  $\tau' = 2/3$ , единое при *всех* значениях  $x \in [3/4, 1]$ . При *возрастании* относительного дохода  $\tau$  от уровня  $\tau'$  до уровня  $\tau''$  его аргумент  $x_\tau$  *убывает* от  $3/4$  до нуля.

Параметризация  $\rho(x, y) = \tau$  в двумерном случае порождает *оптимальное* семейство  $\mathbf{Z}$  множеств

$$(23) Z(\tau) = \{(x, y) \mid \rho(|x|, |y|) \leq \tau\}, \quad \tau \in [\tau', \tau''].$$

Линии уровня двумерной поверхности  $\rho(x, y)$  образуют контуры квадратов на высоте аппликат  $\tau$ . Имеем

$$(24) Z(\tau) = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} \frac{3}{4} \leq \max(|x|, |y|) \leq 1, \\ \frac{102-81\tau}{118-81\tau} \leq \max(|x|, |y|) < \frac{3}{4}, \end{array} \right. \right. \quad \tau = \frac{2}{3}; \\ \left. \left. \frac{2}{3} < \tau \leq \frac{34}{27} \right. \right.$$

По формулам (9) и этим множествам находятся *прогнозная* и *стоимостная функции*. Для этого требуется, вообще говоря, осуществлять кратное интегрирование (в рассматриваемом примере – двукратное). Но удобнее воспользоваться готовыми формулами для объема пирамид.

Достаточно вычислять объемы пирамид с разными высотами и основаниями. Это очевидно для стоимостной пирамиды и для верхней части прогнозной пирамиды, но также может относиться и к ее нижней части прогнозной, если учесть, что она является разностью двух пирамид, связанных со вторым аргументом в (18) внешней функции  $\max$ .

Хотя для нижней части можно проводить вычисления и по-другому, разделяя усеченную пирамиду на сумму простых призм и стыковые треугольные пирамиды (уже неправильные). Арифметические подробности этих геометрических вычислений мы опускаем.

Вычисление меры  $P\{\cdot\}$  множеств (24) дает *прогнозную функцию* и связь параметра  $\tau$  с уровнем вероятности  $\varepsilon$ :

$$(25) \varepsilon = f_p(\tau) = P\{Z(\tau)\} = \begin{cases} 0, & \tau < \frac{2}{3}; \\ 1 - \frac{118(102-81\tau)^3}{81(118-81\tau)^3}, & \frac{2}{3} \leq \tau \leq \frac{34}{27}. \end{cases}$$

Первая строка в правой части формулы, свидетельствующая о том, что при  $\tau < \tau'$  множество  $Z(\tau)$  пусто, дается лишь с целью подчеркнуть наличие скачка при  $\tau = 2/3$  величиной  $37/96$ , получаемой из второй строки.

При  $\tau \geq \tau'$  во множество  $Z(\tau)$  включается вся нижняя усеченная часть пирамидальной конструкции, а также примыкающий к ней слой ее верхней части. Оба этих слагаемых определяются упрощенной функциональной зависимостью (20).

Таким образом, при крайнем снизу значении  $\tau = \tau' = 2/3$  функция  $f_p(\tau)$  претерпевает скачок величиной  $37/96$ , равной атомарной вероятности минимального относительного дохода

$2/3$  – постоянного для  $x \in [3/4, 1]$  (появление первой строки в формуле (25) подчеркивает этот факт). С этого уровня функция  $f_P(\tau)$  монотонно возрастает и при  $\tau = \tau'' = 34/27$  достигает единицы. Ее график изображен на рис. 2 справа (сплошная линия).

*Стоимостная функция* (относительных доходов) находится, как и *прогнозная*, только теперь у множеств  $Z(\tau)$ ,  $\tau \in [\tau', \tau'']$ , вычисляется мера  $C\{\cdot\}$ , что даже проще. Имеем

$$(26) f_C(\tau) = C\{Q_\varepsilon\} = \begin{cases} 0, & \tau < \frac{2}{3}; \\ 1 - \frac{(102-81\tau)^3}{(118-81\tau)^3}, & \frac{2}{3} \leq \tau \leq \frac{34}{27}. \end{cases}$$

Структура решения аналогична прогнозной функции. При  $\tau = 2/3$  функции  $f_C(\tau)$  претерпевает скачок величиной  $37/64$ , равной атомарной вероятности минимального относительного дохода  $2/3$  – постоянного для  $x \in [3/4, 1]$ , что в полтора раза превышает скачок функции  $f_P(\tau)$ . При  $\tau = 34/27$  функция  $f_C(\tau)$  после монотонного возрастания от уровня  $37/96$  также достигает единицы. График функции  $f_C(\tau)$  изображен на том же рис. 2 справа (штриховая линия).

Итак, на отрезке  $[\tau', \tau'']$  относительных доходов особо выделяется начальная точка  $\tau = \tau' = 2/3$ . Такой доход возникает на всем дополнительном к квадрату  $[0, 3/4] \times [0, 3/4] \subset X \times Y$  множестве, и ему отвечают атомарные (сосредоточенные) вероятности  $p_1 = f_P(\tau') = 37/96$  и  $c_1 = f_C(\tau') = 37/64$ .

Знание функций  $f_P(\tau')$  и  $f_C(\tau')$  позволяет, вообще говоря, по формулам (10)–(13) находить *диссонанту*  $\gamma(\cdot)$  с производной, *функцию упорядочения*  $w(\cdot)$  и оптимальную *весовую функцию*  $g(\cdot)$ . Однако наличие скачков у функций  $f_C(\tau)$  и  $f_P(\tau)$  при  $\tau = \tau'$ , обусловленных постоянством относительного дохода при  $\max(|x|, |y|) \geq x_f = 3/4$ , вносит особенность в результат применения процедуры Неймана – Пирсона на этом участке и требует специального рассмотрения.

Если действовать строго по принятым правилам построения диссонанты, то интервалу  $[0, p_1)$  по  $\varepsilon$  следует сопоставить начальный линейный участок диссонанты  $\gamma(\varepsilon)$ , соединяющий на графике точки  $(0, 0)$  и  $(p_1, c_1)$ . При этом  $\gamma(p_1) = c_1$ ,

$\gamma'(\varepsilon) \equiv c_1/p_1 = 3/2$ ,  $\varepsilon \in [0, p_1]$ ). Строго говоря, к этому участку следует относиться на графике условно, так как вероятности  $p_1$  и  $c_1$  являются атомарными, а ими определяются лишь начало и конец отрезка.

Действуя формально, при  $x \geq 3/4$  в соответствии с (12) из функций  $f_p(\tau)$  (25) и  $\rho_0(x)$  (22) получаем также вырожденные участки функции упорядочения и весовой функции:

$$(27) w_0(x) = 2/3, \quad g_0(x) = \phi(p_1), \quad x \geq 3/4.$$

При обнаруженной вырожденности процедуры Неймана – Пирсона, связанной в данном примере с положительностью прогнозной меры постоянства функции  $\rho_0(x)$  для минимально возможного дохода  $\tau'$ , характер упорядочения не определяется. Однако в подобных случаях было бы разумным придавать ей смысл и доопределять, и здесь это можно сделать.

#### 4. Исследование особенности при $\rho(x, y) = const$

Неоднозначность устанавливаемого порядка порождает неустойчивость решения – малое изменение прогнозной плотности в зоне  $x \geq 3/4$  (если оно исключает постоянство относительного дохода) может значительно изменить в ней функцию упорядочения  $w_0(x)$ , вплоть до изменения порядка на обратный. Но эту плотность выбирает сам инвестор, и потому в таких случаях имеет смысл ему самому назначать характер упорядочения, например, из соображений удобства (если характер плотности его, в принципе, устраивает).

Понятно, что в примере удобнее всего использовать складывающееся на интервале  $[0, 3/4]$  упорядочение по  $\varepsilon$  от больших значений к меньшим и продолжить ее на отрезок  $[3/4, 1]$ . Это можно делать уже без участия функции  $f_c(\tau)$ , поскольку прогнозные вероятности  $\varepsilon$  связываются с переменными  $x$  непосредственно – ведь от них в зоне  $3/4 \leq x \leq 1$  относительные доходы не зависят. Притом эта связь подбирается так, чтобы сохранилось основное свойство функции  $w(x)$  – равномерность ее распределения. Результатом должна стать обратная трансформация атомарных вероятностей  $p_1$  и  $c_1$  в плотности вероятности.

Итак, в зоне  $x < 3/4$  функция  $w_0(x)$  остается прежней, а в зоне  $x \geq 3/4$  она находится опять же из (12), но с учетом установленного порядка ее роста от больших значений  $x$  к меньшим и с сохранением равномерности распределения. Для этого следует чисто номинально связать переменное значение  $x \geq 3/4$  с уровнем вероятности  $\varepsilon \leq p_1 = 37/96$ .

Вспомним, что усеченная нижняя часть ( $L$ ) пирамидальной конструкции для прогнозной плотности определяется координатами  $x_f = y_f = 3/4$  и горизонтальным сечением с аппликатой  $z_f = (1 - x_f)/2 = 1/8$ ; ей отвечает вероятность  $\varepsilon_f = p_1 = 37/96$  (равная ее объему). Теперь нам нужно найти для каждого  $\varepsilon \leq \varepsilon_f$  такое значение  $x_\varepsilon (= y_\varepsilon) \geq x_f$ , что объем подмножества  $L_\varepsilon$  множества  $L$ , образованного горизонтальным сечением с аппликатой  $z_\varepsilon = (1 - x_\varepsilon)/2 \leq z_f$ , равен  $\varepsilon$ . Подобные объемы (а заодно и вероятности) находятся по аналогии с  $p_1$ .

Легче всего это сделать, если учесть, что у всех введенных усеченных пирамид общий «прародитель» – цельная пирамида объемом  $2/3$ , описываемая вторым аргументом внешней операции  $\max$  в (18), т.е. функцией  $(1 - \max(|x|, |y|))/2$ .

Зададимся параметром  $x_\varepsilon (= y_\varepsilon) \geq 3/4$  нижней усеченной пирамиды, для нее  $z_\varepsilon = (1 - x_\varepsilon)/2$ . Горизонтальное сечение с аппликатой  $z_\varepsilon$  делит всю пирамиду на нижнюю усеченную и верхнюю полную части. Объем верхней части определяется проще. Поскольку площадь ее основания равна  $(2x_\varepsilon)^2$ , а высота –  $1/2 - z_\varepsilon = x_\varepsilon/2$ , то объем равен  $(2x_\varepsilon)^2(x_\varepsilon/2)/3 = 2x_\varepsilon^3/3$ .

Для получения объема нижней части пирамиды, и потому искомой вероятности, остается из объема исходной пирамиды  $2/3$  вычесть объем верхней части  $2x_\varepsilon^3/3$ . В результате искомая вероятность равна  $2(1 - x_\varepsilon^3)/3 = \varepsilon \leq p_1$ , где  $x_\varepsilon = y_\varepsilon \geq x_f = 3/4$ . Итак,  $P\{\max(|x|, |y|) \geq x_\varepsilon\} = \varepsilon$  для всех  $\varepsilon \leq p_1$ , что говорит о равномерности распределения на рассмотренном отрезке.

Дополнительно можно проверить, что при  $\varepsilon = p_1 = 37/96$  (и  $x_\varepsilon = 3/4$ ) объем  $2(1 - x_\varepsilon^3)/3$  действительно равен  $37/96 = p_1$ .

При такой регуляризации вместо функций  $w_0(x)$  и  $g_0(x)$  в формуле (27) получаем регуляризованные функции (28)  $w_0^r(x) = 2(1 - x^3)/3$ ,  $g_0^r(x) = \phi(w_0^r)$ ,  $x \geq 3/4$ .

## 5. Построение диссонанты и прочих характеристик инвестиций

По-другому, почти стандартно (лишь с некоторым нетипичным упрощением) образуется диссонанта  $\gamma(\cdot)$  на интервале по  $\varepsilon \in (p_1, 1]$ . Он соответствует полуинтервалу  $(\tau', \tau'']$  с суммарной прогнозной вероятностью  $1 - p_1 = 59/96$  и суммарной стоимостной вероятностью  $1 - c_1 = 27/64$ . К тому же  $x < 3/4$ .

На нем использованием (22) для относительного дохода устанавливается взаимосвязь  $x_\tau$  с  $\tau$ . Поскольку при  $x < 3/4$  имеет место

$$\rho_0(x) = 2(51 - 59x)/81/(1 - x) = \tau,$$

то

$$x_\tau = (102 - 81\tau)/(118 - 81\tau).$$

Без труда проверяется, что эта связь обеспечивает непрерывность  $x_\tau$  в точке  $\tau = \tau'$  ( $x_\tau = 3/4$  при  $\tau = 2/3$ ).

Вводя вспомогательные агрегаты

$$U(\tau) = (102 - 81\tau)^3/(118 - 81\tau)^3, \quad \tau \geq \tau', \quad b = 81/118,$$

имеем в соответствии с (25) и (26)

$$f_P(\tau) = 1 - U(\tau), \quad f_C(\tau) = 1 - bU(\tau).$$

Исключая  $U(\tau)$ , получаем взаимосвязь

$$f_C(\tau) = 1 - b(1 - f_P(\tau)),$$

а делая замену  $\tau \rightarrow f_P^{-1}(\varepsilon)$ , получаем диссонанту

$$(29) \gamma(\varepsilon) = 1 - b(1 - \varepsilon) = (37 + 81\varepsilon)/118.$$

Тем самым устанавливается *линейная* зависимость диссонанты от уровня вероятности  $\varepsilon$  и на полуинтервале  $(p_1, 1]$ , соответствующем  $(\tau', \tau'']$ . Кроме того,  $\gamma(p_1) = 37/64 = c_1$  (предельное значение стоимости для полуинтервала  $(\tau', \tau'']$  при  $\tau \rightarrow \tau'$ ), что подтверждает непрерывность диссонанты при  $\tau = \tau'$ . Поэтому на полуинтервале  $(p_1, 1)$  имеем также

$$\gamma'(\varepsilon) \equiv (1 - c_1)/(1 - p_1) = 81/118.$$

Эти вычисления подтверждаются использованием теоретического соотношения (11). Вычисление производных от функций  $f_P(\tau)$  (25) и  $f_C(\tau)$  (26) с учетом непрерывности диссонанты последовательно из (11) дает (дополнительный способ проверки расчетов)



$$f_p'(\tau) = 50976 \frac{(34-27\tau)^2}{(118-81\tau)^4}, \quad f_c'(\tau) = 34992 \frac{(34-27\tau)^2}{(118-81\tau)^4}, \quad \tau \in (\tau', \tau''],$$

$$\gamma'(\varepsilon) = f_c'(f_p^{\leftarrow}(\varepsilon)) / f_p'(f_p^{\leftarrow}(\varepsilon)) = 81/118. \quad \varepsilon \in (p_1, 1].$$

Таким образом,

$$\gamma'(\varepsilon) = \begin{cases} 3/2, & \varepsilon \in [0, 37/96); \\ 81/118, & \varepsilon \in (37/96, 1]. \end{cases}$$

График диссонанты приводится (в сравнении с графиком самого аргумента  $\varepsilon$ ) на рис. 4 (справа).

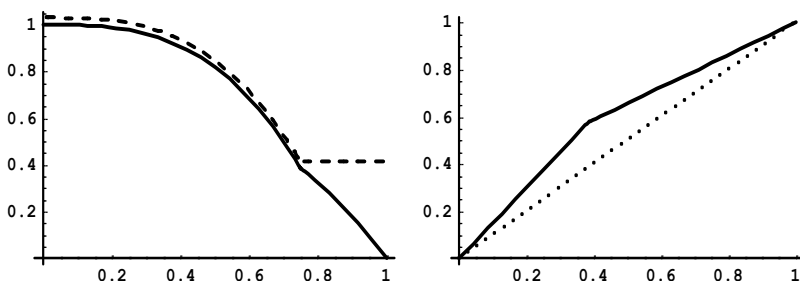


Рис. 4. Графики  $w_0(x)$  и  $w_0'(x)$  (слева),  $\gamma(\varepsilon)$  (справа)

Отметим, что линейность диссонанты на интервале  $(p_1, 1]$  вовсе не является типичным свойством, а обусловлена линейностью прогнозной и стоимостной плотностей. Более того, на этом интервале относительный доход непостоянен, что в корне отличает этот интервал от начального и делает (частично) регулярную задачу редким примером линейности диссонанты.

Таким образом, в рассмотренном примере диссонанта состоит из двух линейных участков разного происхождения.

В случаях затруднений с получением аналитического представления диссонанты (типа (29)) можно было бы воспользоваться, например, интерполяцией.

Поскольку функция  $\rho_0(x)$  на полуинтервале  $[0, 3/4)$  строго монотонно убывает от  $\tau''$  до  $\tau'$ , функция упорядочения  $w_0(x)$  на нем (в отличие от полуинтервала  $(3/4, 1]$ ) является устойчивой.

И проблем с установлением порядка не возникает. В результате *регуляризованная* функция упорядочения (с учетом и (28))

$$w_0^r(x) = \{2(51 - 59x)/(81(1 - x)), x < 3/4; 2(1 - x^3)/3, x \geq 3/4\}.$$

Графики обеих функций  $w_0(x)$  в (27) и  $w_0^r(x)$  в (28) изображены на рис. 4 (слева, штриховая и сплошная линии соответственно). Для различения функций  $w_0(x)$  и  $w_0^r(x)$  на этом интервале первая смещена вверх на 0,03. График полной регуляризованной функции  $w^r(x, y)$  приводится на рис. 3 (справа).

*Регуляризованная* функция  $g_0^r(x)$  получается в соответствии с ф.р.п. по правилу (13). Применение этого правила для полной функции  $g^r(x, y)$  иллюстрируется посредством ф.р.п.  $\phi(\varepsilon) = \varepsilon^\lambda$  с тремя значениями  $\lambda = 1/3, 1, 3$ . Для  $\lambda = 1$  имеем  $g^r(x, y) \equiv w^r(x, y)$ , и ее график уже представлен на рис. 3 (справа), а для  $\lambda = 1/3, 3$  – графики приводятся на рис. 5.

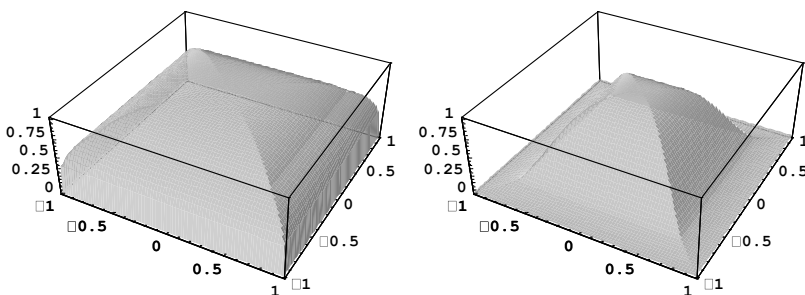


Рис. 5. Функции  $g^r(x, y)$  при  $\phi(\varepsilon) = \varepsilon^{1/3}$  (слева) и  $\phi(\varepsilon) = \varepsilon^3$  (справа)

Оптимальный портфель двумерных  $\delta$ -инструментов определяется подобно одномерному случаю представлением

$$G = \int_{X \times Y} g(x, y) D(x, y) dx dy,$$

где платежная функция портфеля  $g(x, y)$  дается формулой (13). Она при  $\phi(\varepsilon) \equiv \varepsilon, \varepsilon \in [0, 1]$ , совпадает с  $w(x, y)$ .

Средний доход  $R$  инвестиции вычисляется по формуле (15). Для  $\phi(\varepsilon) = \varepsilon^\lambda, \lambda > 0$ , имеем

$$R = \int_0^1 \phi(\varepsilon) d\varepsilon = (1 + \lambda)^{-1}.$$

Инвестиционная сумма  $A$  и средняя доходность  $y$  оптимального портфеля находятся по формулам (16). Простота производной от диссонанты (она – ступенчатая функция) позволяет получить эти показатели в виде формулы:

$$A = (\gamma_2' + (\gamma_1' - \gamma_2') p_1^{1+\lambda}) (1 + \lambda)^{-1},$$

где  $\gamma_1' = 3/2$  и  $\gamma_2' = 81/118$  – константные производные диссонанты на интервалах  $[0, p_1]$  и  $(p_1, 1]$  соответственно.

Результаты расчетов для некоторых значений параметра  $\lambda$  в ф.р.п. приведены в таблице 1.

*Таблица 1.*

$\lambda$	1/3	0,5	1	2	3
$R$	3/4	2/3	1/2	1/3	1/4
$A$	0,6860	0,5874	0,4036	0,2443	0,1761
$y$	0,0933	0,1349	0,2387	0,3642	0,4197

## **6. Заключение**

В работе рассмотрена проблема распространения методологии применения инвесторами критерия  $CC-VaR$  на финансовых рынках на многомерные теоретические рынки – рынки с несколькими базовыми активами. Изложение ограничивается введением однопериодного идеального теоретического рынка с многомерной  $\delta$ -функцией в качестве платежной, его инструментария, базисных индикаторов и формул, определяющих основные характеристики инвестиции.

В качестве теоретического алгоритма оптимизации используется результат проецирования одномерного алгоритма, основанного на континуальном применении процедуры Неймана – Пирсона, на многомерный рынок.

Для демонстрации работы многомерного теоретического алгоритма предлагается упрощенный пример двумерного ранка с плотностями, составленными из боковых поверхностей правильных четырехгранных пирамид. Решение задачи оптимизации удастся получить аналитически. Но подобный исход представляет собой скорее исключение, чем правило. И потому

возникает потребность в разработке численных методов решения задач оптимизации для многомерных рынков, как и рассмотрение их сценарных вариантов.

### Литература

1. АГАСАНДЯН Г.А. *Применение континуального критерия VaR на финансовых рынках*. – М.: ВЦ РАН, 2011. – 299 с.
2. АГАСАНДЯН Г.А. *Континуальный критерий VaR на многомерных рынках опционов*. – М.: ВЦ РАН, 2015. – 298 с.
3. АГАСАНДЯН Г.А. *Континуальный критерий VaR и оптимальный портфель инвестора // Управление большими системами*. – 2018. – Вып. 73. – С. 6–26.
4. АГАСАНДЯН Г.А. *Континуальный критерий VaR на сценарных рынках // Информатика и ее применения*. – 2018. – Т. 12, вып. 1. – С. 32–40.
5. КРАМЕР Г. *Математические методы статистики*. – М.: Наука, 1975. – 750 с. (Перевод с англ.: Cramer H. *Mathematical methods of statistics*. – Princeton University Press, 1946.)
6. AGASANDYAN G.A. *Optimal Behavior of an Investor in Option Market // Int. Joint Conf. on Neural Networks. The 2002 IEEE World Congress on Computational Intelligence (Honolulu, Hawaii, Mai 12–17, 2002)*. – P. 1859–1864.
7. ALEXANDER C., VENKATRAMANAN A. *Analytic approximations for multi-asset option pricing // Mathematical Finance*. – 2012. – Vol. 22(4). – P. 667–689.
8. MARKOWITZ H. *Portfolio Selection // Journal of Finance*. – 1952. – No. 7. – P. 77–91.

### CONTINUOUS VAR-CRITERION AND INVESTOR'S OPTIMAL PORTFOLIO

**Gennady Agasandyan**, Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, Doctor of Science, leading fellow (agasand17@yandex.ru).

*Abstract. The work investigates the problem of extending the methodology of applying continuous VaR-criterion (CC-VaR) by investors of one-period option markets with one underlier on tasks of constructing the optimal investor's portfolio*

*for analogical markets with several underliers, i.e., multidimensional markets. The one-period ideal theoretical multidimensional  $\delta$ -market is defined, and its tools and the algorithm of constructing optimal-on-CC-VaR portfolio of multidimensional  $\delta$ -instruments by using the Newman – Pearson procedure are formed. In many ways, the algorithm repeats the sequence of operations from the algorithm of the one-dimensional market, but applied to multidimensional objects. The processing of the theoretical algorithm is illustrated by an example of the two-dimensional  $\delta$ -market, and the optimal solution is searched by analytical methods. The forecast and cost functions, the dissonant, the ordering and weighted functions, and also basic investment performances are calculated. Some singularity presented in the example is eliminated by a natural and rational way and demonstrates possibilities of extending the canonical model. The exposition is illustrated by graphics.*

**Keywords:** multidimensional markets, underliers, continuous VaR-criterion (CC-VaR), forecast and cost densities, Newman – Pearson procedure, forecast and cost functions, dissonant, investment amount, average income, yield.

УДК 519.685  
ББК 22.18

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии*

*Поступила в редакцию  
Опубликована*