

**Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

***Выпуск 88
Ноябрь 2020***

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл. №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2020

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

**УПРАВЛЕНИЕ
БОЛЬШИМИ
СИСТЕМАМИ**

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 88

Москва – 2020

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Кузнецов О.П., Кульба В.В., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: член-корр. РАН Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Калимулина Э.Ю. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИПМ РАН), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), Галаев А.А. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук: Зоркальцев В.И. (ИСЭМ СО РАН), проф. Калашников А.О. (ИПУ РАН), проф. Калянов Г.Н. (ГУ ВШЭ), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Клочков В.В. (ИПУ РАН), д-р техн. наук Коргин Н.А. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук: проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (МФТИ), д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р биол. наук проф. Михальский А.И., д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н. (ИПС РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Орлов А.И. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), проф. Райгородский А.М. (МГУ), проф. Савватеев А.В. (РЭШ), д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), Совлуков А.С. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ), проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Арзамас – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – академик РАН Бычков И.В., д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в интернете: ubs.mtas.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

Системный анализ

Агасандян Г.А.

Многомерные рынки опционов и оптимизация по CC-VaR..... 5

Зоркальцев В.И., Полковская М.Н.

Результаты анализа требований к методам выделения составляющих временных рядов..... 26

Математическая теория управления

Горелов М.А.

О количестве информации, необходимом для эффективного управления 41

Анализ и синтез систем управления

Есин А.А.

Анализ современных принципов построения систем управления на основе моделей многозначной логики... 69

Сорокин А.А.

Усовершенствование информационно-аналитических комплексов на основе иерархических систем нечёткого вывода..... 99

Управление в социально-экономических системах

Ткачев Д.С.

Влияние изменения пороговых значений индекса близости позиций партий на меру сбалансированности Рейхстага Веймарской республики 124

МНОГОМЕРНЫЕ РЫНКИ ОПЦИОНОВ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПО CC-VAR

Агасандян Г. А.¹

(Вычислительный центр им. А.А. Дородницына
ФИЦ ИУ РАН)

Рассматривается проблема распространения методологии применения континуального критерия VaR (CC-VaR) инвесторами однопериодных рынков опционов с одним базовым активом на задачи построения оптимального портфеля инвестора для аналогичных рынков с несколькими базовыми активами (многомерных рынков). Дается определение теоретического идеального многомерного δ -рынка, формируется его инструментарий и алгоритм построения оптимального по CC-VaR портфеля δ -инструментов с применением процедуры Неймана – Пирсона. Алгоритм во многом повторяет последовательность операций одномерного алгоритма, но примененных к многомерным объектам. На примере двумерного δ -рынка иллюстрируется работа теоретического алгоритма, при этом поиск оптимального решения ведется аналитическими средствами. Находятся прогнозная и стоимостная функции, диссонанта, функция упорядочения и весовая функция оптимального портфеля, а также основные числовые показатели инвестиции. Некоторая наличествующая в примере особенность получает свое естественное и рациональное разрешение и демонстрирует возможности расширения канонической схемы. Изложение иллюстрируется графиками.

Ключевые слова: многомерные рынки, базовые активы, континуальный критерий VaR (CC-VaR), прогнозная плотность, стоимостная плотность, процедура Неймана – Пирсона, прогнозная функция, стоимостная функция, диссонанта, инвестиционная сумма, средний доход, доходность.

1. Введение

Рассматривается проблема распространения методологии континуального критерия VaR (CC-VaR) [1–4, 6] на задачи построения оптимального портфеля инвестора для рынков с несколькими базовыми активами. Интерес к этой проблеме представляется естественным. В целом на финансовых рынках присутствуют многие активы, в разной степени связанные

¹ Геннадий Аршавинович Агасандян, д.ф.-м.н. (agasang17@yandex.ru).

между собой, но рассматриваемые по отдельности они не в состоянии сколько-нибудь полноценно отражать вероятностные свойства финансового рынка в целом. В то же время совместные вероятностные свойства базовых активов вполне могут представлять интерес для продвинутых игроков рынка. Поэтому организация их совместной торговли выглядит оправданной.

В прочих теориях этим вопросам также уделяется внимание. В ставшем уже классическим подходе Г. Марковица [8] совокупность активов характеризуется вероятностными свойствами цен активов не выше второго порядка – средними значениями и корреляционной матрицей. При этом результат выбора инвестором портфеля оценивается по математическому ожиданию и дисперсии дохода (доходности) инвестиции. Простота описания позволяет без труда получать и интерпретировать результаты, а корреляционная матрица – это, пожалуй, тот минимум, без которого вообще трудно говорить о содержательности модели.

Однако подобные ограничения существующих классических теорий не допускают более тщательного описания риска в многомерном случае, и ожидать в таких условиях информированности сколь-нибудь адекватного отражения требований $CC-VaR$ не приходится. Механическое объединение нескольких рынков с разными базовыми активами даже вместе с развитыми линейками опционов на каждый из них по отдельности не решает проблемы. Информации об их ценах явно недостаточно, чтобы по ней можно было судить о «мнении» объединенного рынка относительно стохастической взаимосвязи активов.

Следует вводить инструменты более сложной конструкции, которые будут связывать разные активы, например, опционы на совокупности активов. Только при их наличии на рынках, причем в большом разнообразии, можно будет говорить о целесообразности применимости $CC-VaR$ к многомерным рынкам.

Некоторые варианты таких инструментов (например, опционов) время от времени появляются в литературе (например, [7]), но они не в состоянии дать полного решения поставленной проблемы с $CC-VaR$.

Для наших целей идею подключения CC -VaR к многомерным рынкам подсказывает развиваемая в [1, 3] сама методология для одномерного случая. Следует сформировать многомерный теоретический δ -рынок вместе с многомерными δ -инструментами в качестве базисных, а затем на этой основе вводить и дискретные варианты многомерных рынков.

Разумеется, такая схема конструирования многомерного рынка является неизбежным следствием интереса к продвижению в инвестиционную среду инструментария, настроенного на требования именно CC -VaR. Появятся ли соответствующие такому критерию рынки или нет, покажет будущее. Тем не менее представляется, что даже если оно не находит реального воплощения на финансовых рынках в какой-либо форме в настоящее время и не найдет его в обозримом будущем, подобное исследование имеет смысл. Хотя бы для того, чтобы отказ от организации таких рынков звучал более обоснованно.

Как и в одномерном случае, для получения точных аналитических результатов рынок считается *идеальным* и *теоретическим*: цены продавца и покупателя предполагаются равными, комиссионные равны нулю, а параметры инструментов (страйки опционов) могут быть любыми (теперь) *векторами* с вещественными координатами. В применении к возможным реальным рынкам результаты могут рассматриваться как аппроксимация.

Как и при изучении многих иных теоретических проблем с CC -VaR для одномерного случая, здесь решается *задача СВ* [1, 3], в которой инвестиционная сумма $S (> 0)$ не задается, но ищется свободный от сингулярной компоненты портфель (*регулярный портфель*), доставляющий минимум S при условии

$$(1) \quad P\{q \geq \phi(\varepsilon)\} \geq 1 - \varepsilon \quad \text{сразу для всех } \varepsilon \in [0, 1],$$

где $\phi(\varepsilon)$ – *функция рискованных предпочтений* (ф.р.п.) инвестора, а q – скалярный доход от портфеля. Алгоритм оптимизации также, по сути, заимствуется из одномерного случая.

2. Теоретический многомерный δ -рынок

Пусть $\mathbf{X} = \prod_{i \in N} X_i$, $X_i \subset R$, $N = \{1, 2, \dots, n\}$, n – размерность рынка. Заданы две неотрицательные функции $p(\mathbf{x})$ и $c(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, порождающие меры $P\{M\}$ и $C\{M\}$, $M \subset \mathbf{X}$. Первая них – *прогнозная мера* – служит *вероятностным* прогнозом инвестора на конец периода, а вторая – *стоимостная мера*, которую представляет рынок. Как и в одномерном случае, сравнительный анализ этих двух мер $C\{\cdot\}$ и $P\{\cdot\}$ должен служить основой для построения оптимального портфеля инвестора. Вводится *скалярная функция относительных доходов* $\rho(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})/c(\mathbf{x})$ от переменного вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ и применяется алгоритм, фактически полностью повторяющий (с очевидными изменениями) континуальный алгоритм [1, 3].

Платежная функция произвольного инструмента I обозначается $\pi(\mathbf{x}; I)$, $|I|$ – его рыночная стоимость, рассчитанная по плотности $c(\mathbf{x})$, а $\|I\|$ – средний с точки зрения инвестора доход, рассчитанный по плотности $p(\mathbf{x})$ и интерпретируемый также как его справедливая стоимость. Имеют место соотношения

$$(2) \quad |I| = \int_{\mathbf{X}} \pi(\mathbf{x}; I) c(\mathbf{x}) dx, \quad \|I\| = \int_{\mathbf{X}} \pi(\mathbf{x}; I) p(\mathbf{x}) dx.$$

Для каждого $s \in \mathbf{X}$ вводится инструмент $D(s)$, называемый δ -инструментом, как произведение n одномерных δ -инструментов, при этом его *платежной функцией* (доходом) служит (обобщенная) n -мерная δ -функция относительно s , т.е. произведение n одномерных δ -функций:

$$(3) \quad D(s) = \prod_{i \in N} D_i(s_i),$$

$$(4) \quad \pi(\mathbf{x}; D(s)) = \delta(\mathbf{x} - s) = \prod_{i \in N} \delta(x_i - s_i).$$

При этом согласно (2) его стоимость и средний доход

$$(5) \quad |D(s)| = c(s), \quad \|D(s)\| = p(s).$$

Инструменты $D(s)$, $s \in \mathbf{X}$, образуют инструментальный базис. Инструмент (портфель) G с произвольной измеримой платежной функцией $g(\mathbf{x})$ и его стоимость представляются соответственно в виде.

$$(6) \quad G = \int_{\mathbf{X}} g(s) \mathbf{D}(s) ds, \quad |G| = \int_{\mathbf{X}} g(s) |\mathbf{D}(s)| ds = \int_{\mathbf{X}} g(s) c(s) ds.$$

В частности, инструмент $\mathbf{H}\{M\}$, $M \subset \mathbf{X}$, называемый *индикатором множества M* , единичный безрисковый актив $U = \mathbf{H}\{\mathbf{X}\}$ и их стоимости суть соответственно

$$\mathbf{H}\{M\} = \int_M \mathbf{D}(s) ds, \quad |\mathbf{H}\{M\}| = \int_M c(s) ds,$$

$$(7) \quad U = \mathbf{H}\{\mathbf{X}\} = \int_{\mathbf{X}} \mathbf{D}(s) ds, \quad |U| = C\{\mathbf{X}\} = \int_{\mathbf{X}} c(s) ds = 1/r,$$

где r имеет смысл безрискового дохода за период.

Без ущерба для общности принимается $r \equiv 1$. В таком предположении функция $c(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, приобретает свойства плотности вероятности. Она называется *стоимостной плотностью*, и ее можно интерпретировать как порождаемую рынком. При этом *прогнозную плотность $p(\mathbf{x})$* , $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, можно считать *справедливой* с точки зрения инвестора ценой δ -инструмента.

В связи с рассмотрением многомерных рынков стоит остановиться на некоторых принципиальных моментах.

Замечание 1. Упрощение $r \equiv 1$ на *многомерном* рынке может быть оправдано лишь в силу неявного предположения о том, что на нем допустима *только* совместная торговля всех базовых активов. Даже если в описании конкретной сделки на рынке будет фигурировать лишь часть базовых активов, имеется в виду, что в ней участвуют одновременно и остальные базовые активы в форме безрисковых единичных инструментов. Поэтому на рассматриваемых многомерных рынках нельзя говорить о доходностях отдельных активов. В стоимостной плотности $c(\mathbf{x})$ не содержится информации о сравнительной средней доходности для разных базовых активов, а лишь о коллективной доходности r всей их совокупности, что и позволяет прибегнуть к упрощению $r \equiv 1$. \square

Отметим, что подобных реальных рынков, для которых рассматриваемая модель многомерного рынка могла бы служить теоретической абстракцией, на сегодня не существует. Если, пожалуй, не считать бирж, торгующих индексами, которых свойство коллективной доходности отдаленно роднит с введенными многомерными рынками.

Замечание 2. Следует обратить внимание на финансовую размерность вводимых инструментов. Представления (3) базисных инструментов и (4) их платежных функций в виде произведений одномерных агрегатов могут породить сомнение в осмысленности объекта изучения: ведь даже если цены всех базовых активов номинируются в единой валюте, например в рублях, то доходы от инструментов и их цены будут измеряться в n -й степени рубля. Тем более если базовые активы номинируются в разных валютах. Однако кажущаяся парадоксальность этого не должна смущать читателя.

Суть в том, что все базисные инструменты должны быть безразмерными, иначе их нужно нормировать. При этом размерности весовых коэффициентов при базисных инструментах и всех базовых активах должны совпадать. Итак: *доходы от многомерных инструментов и их цен измеряются в произвольной единой валюте, не обязательно связанной с валютами (возможно, разными) базовых активов.* □

Инструментарий δ -рынка допускает возможность сравнивать по относительному доходу любую пару точек во множестве X . И потому алгоритм оптимизации при упорядочении элементов X по этому доходу должен рассматривать их всех равноправными, как если бы они были объединены в некоторое линейное множество (подобно одномерному случаю).

Как и в одномерном случае, алгоритм оптимизации основан на континуальном применении процедуры Неймана – Пирсона [5]. Он почти полностью повторяет (с очевидными изменениями) континуальный алгоритм для одномерного рынка. При этом упорядочение точек в пределах множества X по величине *относительного дохода* проводится сквозным образом.

Фактически, алгоритм имеет дело с двумя структурами данных: исходной многомерной, естественной при описании объекта исследования, подготовке данных, а также при прочтении результатов работы алгоритма в терминах реальной многомерной структуры, и одномерной (линейной), более уместной в самом алгоритме, работающем *на поточечной основе.*

Согласно процедуре *Неймана – Пирсона* строится однопараметрическое (с параметром τ) семейство $\mathbf{Z} = \{Z(\tau)\}$ n -мерных подмножеств по правилу

$$(8) \quad Z(\tau) = \{x \in \mathbf{X} \mid \rho(x) \leq \tau\}, \quad \tau \in [\tau', \tau''],$$

где $\tau \in [\tau', \tau''] (\subset R_+)$ – скаляр, $\tau' = \min_x \rho(x)$, $\tau'' = \max_x \rho(x)$. Через Q_ε , $\varepsilon \in [0, 1]$, обозначаются множества из \mathbf{Z} , такие что $Q_\varepsilon = Z(\tau)$ и $\mathbf{P}\{Q_\varepsilon\} = \varepsilon$ (аналог одномерных множеств X_ε [1–3]).

Тем самым устанавливается связь τ с ε и определяются две функции – прогнозная и стоимостная *скалярные* функции, обладающие свойствами *одномерных* функций распределения:

$$(9) \quad f_p(\tau) = \mathbf{P}\{Z(\tau)\} = \varepsilon, \quad f_c(\tau) = \mathbf{C}\{Z(\tau)\}.$$

Они неубывающие по τ , равны нулю при $\tau < \tau'$ и единице при $\tau > \tau''$. Из них строятся *диссонанта* (стоимость $\mathbf{H}[Q_\varepsilon]$ [1–3])

$$(10) \quad \gamma(\varepsilon) = f_c(f_p^{\leftarrow}(\varepsilon)), \quad \varepsilon \in [0, 1],$$

и ее производная

$$(11) \quad \gamma'(\varepsilon) = v(f_p^{\leftarrow}(\varepsilon)), \quad \varepsilon \in [0, 1], \quad v(\tau) = f_c'(\tau)/f_p'(\tau), \quad \tau \in [\tau', \tau''].$$

Представление (11) получается применением правила дифференцирования суперпозиции функций и обратной функции:

$$\begin{aligned} \gamma'(\varepsilon) &= df_c(f_p^{\leftarrow}(\varepsilon))/d\varepsilon = f_c'(f_p^{\leftarrow}(\varepsilon)) \times df_p^{\leftarrow}(\varepsilon)/d\varepsilon = \\ &= f_c'(f_p^{\leftarrow}(\varepsilon))/f_p'(f_p^{\leftarrow}(\varepsilon)) = v(f_p^{\leftarrow}(\varepsilon)), \quad \varepsilon \in [0, 1]. \end{aligned}$$

В соответствии с теоретическим алгоритмом оптимизации *функция упорядочения* $w(\cdot)$ и *оптимальная весовая функция* $g(\cdot)$ определяются соответственно равенствами

$$(12) \quad w(x) = f_p(\rho(x)), \quad x \in \mathbf{X},$$

$$(13) \quad g(s) = \phi(w(s)) = \phi(f_p(\rho(s))), \quad s \in \mathbf{X}.$$

Оптимальный портфель задается формулой (6) с весовой функцией (13):

$$(14) \quad \mathbf{G} = \int_{\mathbf{X}} g(s) \mathbf{D}(s) ds.$$

В связи с формулой (12) следует заметить, что в случае многомерного рынка для регулярной пары $(\mathbf{C}\{\cdot\}, \mathbf{P}\{\cdot\})$ уровни постоянства функции $\rho(x)$ будут, как правило, $(n - 1)$ -мерные

множества нулевой вероятностной меры. Так, в одномерном регулярном случае функция относительного дохода принимает одно и то же значение в нескольких точках, в двумерном – на нескольких контурах. Тем не менее и в случае, когда конечное ненулевое значение постоянно на множестве положительной вероятностной меры, решение удастся регуляризовать естественным образом. И об этом речь пойдет далее в примере.

Основными традиционными числовыми показателями инвестиционного портфеля служат средний доход, инвестиционная сумма и средняя доходность соответственно:

$$(15) R = \int_0^1 \phi(\varepsilon) d\varepsilon,$$

$$(16) A = \int_0^1 \phi(\varepsilon) d\gamma(\varepsilon) = \int_{\tau'}^{\tau''} \phi(f_P(\tau)) df_C(\tau), \quad y = R/A - 1 > 0.$$

3. Пример оптимизации по CC-VaR на δ -рынке

Продемонстрируем работу теоретического алгоритма на примере двумерного рынка. Хотя алгоритм должен работать для любой пары *стоимостной* и *прогнозной* плотностей, тем не менее они в примере упрощенно подобраны кусочно-линейными. Это делается лишь с целью иллюстрации методики, а подобрать примеры, для которых можно получать аналитические решения, нелегко.

Пусть X, Y – множества будущих цен двух базовых активов, при этом $X = Y = [-1, 1)$. На $X \times Y$ заданы две неотрицательные плотности – *стоимостная* и *прогнозная* соответственно:

$$(17) c(x, y) = \frac{3}{4}(1 - \max(|x|, |y|)), \quad x \in X, \quad y \in Y,$$

$$(18) p(x, y) = \max\left(\frac{1}{54}(51 - 59 \max(|x|, |y|)), \frac{1}{2}(1 - \max(|x|, |y|))\right).$$

Графики плотностей (17) и (18) приводятся на рис. 1.

Формула для стоимостной плотности описывает боковую поверхность правильной пирамиды высотой $3/4$ и с квадратом в основании со стороной 2. Для вычисления объема под этой поверхностью можно обойтись без интегрирования: из геометрических соображений он равен трети произведения площади

основания на высоту. В примере искомый объем выбран единичным.

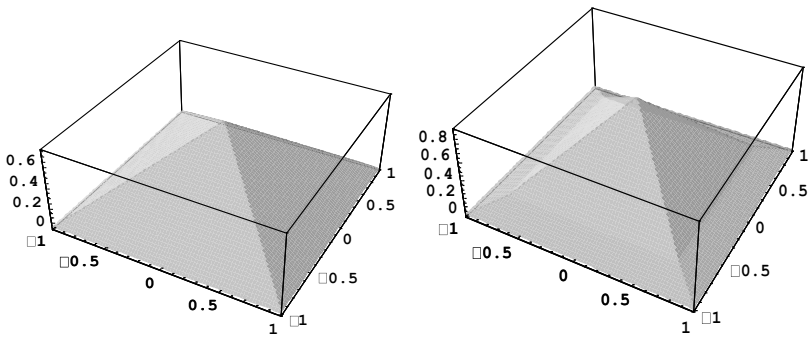


Рис. 1. Графики функций $c(x, y)$ (слева) и $p(x, y)$ (справа)

Формула для прогнозной плотности описывает боковую поверхность пирамидальной конструкции, являющейся объединением двух правильных пирамид, соответствующих двум аргументам функции \max . Удобно считать ее состоящей из нижней усеченной пирамиды, целиком лежащей строго внутри стоимостной пирамиды и с тем же основанием, и надстроенной на таком «постаменте» второй цельной пирамиды. Общая поверхность прогнозной конструкции получается непрерывной, но с изломом. Высота всей этой конструкции превышает высоту стоимостной.

По сравнению со стоимостной картиной рынка инвестор в своей прогнозной плотности намерен больший вес придавать центральной зоне основания и меньший – его краям. В таком случае сравнение двух плотностей говорит о намерении инвестора «продавать волатильность» (на языке финансового рынка), о чем в одномерном случае уже шла речь, например, в [3].

Функция в качестве второго аргумента внешней функции \max в (18) задается произвольно. Она описывает боковую поверхность правильной пирамиды, все ее значения в $3/2$ меньше соответствующих значений стоимостной плотности, как и объем. Но второй аргумент превалирует над первым лишь до

ребер излома, координаты которых задаются произвольно как $x_f = y_f = 3/4$, а по ним находится и аппликата $z_f = 2/3 c(x_f, y_f) = 1/8$.

Функция в качестве первого аргумента функции \max в (18) строится с сохранением непрерывности в ребрах излома и с такой высотой z_0 всей конструкции, чтобы ее объем был единичным. У нее тот же квадрат в основании и тот же единичный объем, но ее высота будет превышать $3/4$. Обе плотности симметричны относительно поворотов вокруг оси аппликат на 90° .

Ребра излома прогнозной конструкции образуют квадрат со стороной $3/2$, расположенный на высоте с аппликатой $z = z_f = 1/8$ и с проекцией на координатную плоскость (x, y) , описываемой уравнением $\max(|x|, |y|) = x_f = y_f = 3/4$. При этом выполняется нужное ограничение $z_f < c(3/4, 3/4) = 3/16$. Подсчет объема всей конструкции показывает, что $z_0 = 17/18$.

Очевидно, многие характеристики вводимых конструкций в силу симметрий определяются лишь своими сечениями при $y = 0$, т.е. функциями $c(x, 0)$ и $p(x, 0)$, $x \geq 0$:

$$(19) c_0(x) = c(x, 0) = 3(1 - x)/4, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$(20) p_0(x) = p(x, 0) = \{17/18 - 59x/54, x < 3/4; (1 - x)/2, x \geq 3/4\}.$$

Эти функции удобны для анализа и графического изображения, но носят вспомогательный характер. Они вообще не являются одномерными плотностями вероятности и даже после нормирования не становятся маргинальными. При желании получить из них выражения для функций $c(x, y)$ и $p(x, y)$ достаточно поменять в (19) и (20) x на $\max(|x|, |y|)$.

Графики функций (19) и (20) приводятся на рис. 2 (слева) – штриховая и сплошная линии соответственно. Они фактически содержат в упрощенной оговоренной выше форме всю информацию, представленную на обоих графиках рис. 1.

Алгоритм основан на анализе функции относительных доходов

$$(21) \rho(x, y) = p(x, y)/c(x, y).$$

Ее график приводится на рис. 3 (слева). И ее также можно записать упрощенно с учетом соотношения $\rho_0(\cdot) = p_0(\cdot)/c_0(\cdot)$:

$$(22) \rho_0(x) = \{2(51 - 59x)/(81(1 - x)), x < 3/4; 2/3, 3/4 \leq x \leq 1\}.$$

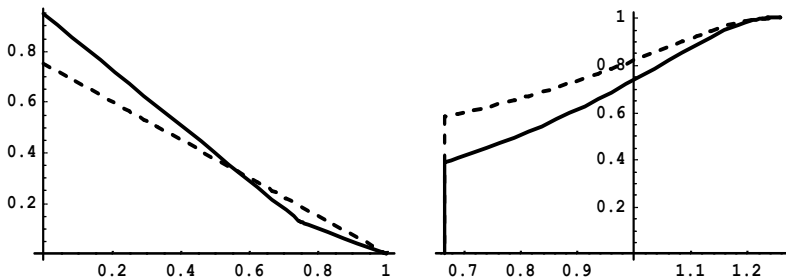


Рис. 2. Графики функций $\rho_0(x)$ и $c_0(x)$ (слева), $f_c(\tau)$ и $f_p(\tau)$ (справа)

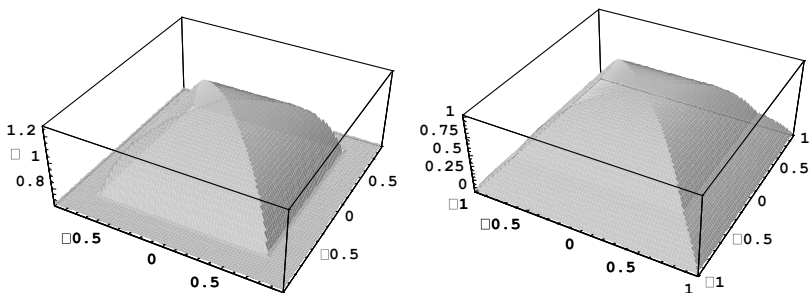


Рис. 3. Функции $\rho(x, y)$ (слева) и $w^i(x, y)$ (справа)

Возможные значения $\tau = \rho_0(x)$ образуют отрезок $[\tau', \tau'']$, $\tau' = 2/3$, $\tau'' = 34/27$. Относительный доход принимает наименьшее значение $\tau' = 2/3$, единое при *всех* значениях $x \in [3/4, 1]$. При *возрастании* относительного дохода τ от уровня τ' до уровня τ'' его аргумент x_τ *убывает* от $3/4$ до нуля.

Параметризация $\rho(x, y) = \tau$ в двумерном случае порождает *оптимальное* семейство \mathbf{Z} множеств

$$(23) Z(\tau) = \{(x, y) \mid \rho(|x|, |y|) \leq \tau\}, \quad \tau \in [\tau', \tau''].$$

Линии уровня двумерной поверхности $\rho(x, y)$ образуют контуры квадратов на высоте аппликат τ . Имеем

$$(24) Z(\tau) = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} \frac{3}{4} \leq \max(|x|, |y|) \leq 1, \\ \frac{102-81\tau}{118-81\tau} \leq \max(|x|, |y|) < \frac{3}{4}, \end{array} \right. \right. \quad \tau = \frac{2}{3}; \\ \left. \left. \frac{2}{3} < \tau \leq \frac{34}{27} \right. \right.$$

По формулам (9) и этим множествам находятся *прогнозная* и *стоимостная функции*. Для этого требуется, вообще говоря, осуществлять кратное интегрирование (в рассматриваемом примере – двукратное). Но удобнее воспользоваться готовыми формулами для объема пирамид.

Достаточно вычислять объемы пирамид с разными высотами и основаниями. Это очевидно для стоимостной пирамиды и для верхней части прогнозной пирамиды, но также может относиться и к ее нижней части прогнозной, если учесть, что она является разностью двух пирамид, связанных со вторым аргументом в (18) внешней функции \max .

Хотя для нижней части можно проводить вычисления и по-другому, разделяя усеченную пирамиду на сумму простых призм и стыковые треугольные пирамиды (уже неправильные). Арифметические подробности этих геометрических вычислений мы опускаем.

Вычисление меры $P\{\cdot\}$ множеств (24) дает *прогнозную функцию* и связь параметра τ с уровнем вероятности ε :

$$(25) \varepsilon = f_P(\tau) = P\{Z(\tau)\} = \begin{cases} 0, & \tau < \frac{2}{3}; \\ 1 - \frac{118(102-81\tau)^3}{81(118-81\tau)^3}, & \frac{2}{3} \leq \tau \leq \frac{34}{27}. \end{cases}$$

Первая строка в правой части формулы, свидетельствующая о том, что при $\tau < \tau'$ множество $Z(\tau)$ пусто, дается лишь с целью подчеркнуть наличие скачка при $\tau = 2/3$ величиной $37/96$, получаемой из второй строки.

При $\tau \geq \tau'$ во множество $Z(\tau)$ включается вся нижняя усеченная часть пирамидальной конструкции, а также примыкающий к ней слой ее верхней части. Оба этих слагаемых определяются упрощенной функциональной зависимостью (20).

Таким образом, при крайнем снизу значении $\tau = \tau' = 2/3$ функция $f_P(\tau)$ претерпевает скачок величиной $37/96$, равной атомарной вероятности минимального относительного дохода

$2/3$ – постоянного для $x \in [3/4, 1]$ (появление первой строки в формуле (25) подчеркивает этот факт). С этого уровня функция $f_P(\tau)$ монотонно возрастает и при $\tau = \tau'' = 34/27$ достигает единицы. Ее график изображен на рис. 2 справа (сплошная линия).

Стоимостная функция (относительных доходов) находится, как и *прогнозная*, только теперь у множеств $Z(\tau)$, $\tau \in [\tau', \tau'']$, вычисляется мера $C\{\cdot\}$, что даже проще. Имеем

$$(26) f_C(\tau) = C\{Q_\varepsilon\} = \begin{cases} 0, & \tau < \frac{2}{3}; \\ 1 - \frac{(102-81\tau)^3}{(118-81\tau)^3}, & \frac{2}{3} \leq \tau \leq \frac{34}{27}. \end{cases}$$

Структура решения аналогична прогнозной функции. При $\tau = 2/3$ функции $f_C(\tau)$ претерпевает скачок величиной $37/64$, равной атомарной вероятности минимального относительного дохода $2/3$ – постоянного для $x \in [3/4, 1]$, что в полтора раза превышает скачок функции $f_P(\tau)$. При $\tau = 34/27$ функция $f_C(\tau)$ после монотонного возрастания от уровня $37/96$ также достигает единицы. График функции $f_C(\tau)$ изображен на том же рис. 2 справа (штриховая линия).

Итак, на отрезке $[\tau', \tau'']$ относительных доходов особо выделяется начальная точка $\tau = \tau' = 2/3$. Такой доход возникает на всем дополнительном к квадрату $[0, 3/4] \times [0, 3/4] \subset X \times Y$ множестве, и ему отвечают атомарные (сосредоточенные) вероятности $p_1 = f_P(\tau') = 37/96$ и $c_1 = f_C(\tau') = 37/64$.

Знание функций $f_P(\tau')$ и $f_C(\tau')$ позволяет, вообще говоря, по формулам (10)–(13) находить *диссонанту* $\gamma(\cdot)$ с производной, *функцию упорядочения* $w(\cdot)$ и оптимальную *весовую функцию* $g(\cdot)$. Однако наличие скачков у функций $f_C(\tau)$ и $f_P(\tau)$ при $\tau = \tau'$, обусловленных постоянством относительного дохода при $\max(|x|, |y|) \geq x_f = 3/4$, вносит особенность в результат применения процедуры Неймана – Пирсона на этом участке и требует специального рассмотрения.

Если действовать строго по принятым правилам построения диссонанты, то интервалу $[0, p_1)$ по ε следует сопоставить начальный линейный участок диссонанты $\gamma(\varepsilon)$, соединяющий на графике точки $(0, 0)$ и (p_1, c_1) . При этом $\gamma(p_1) = c_1$,

$\gamma'(\varepsilon) \equiv c_1/p_1 = 3/2$, $\varepsilon \in [0, p_1]$). Строго говоря, к этому участку следует относиться на графике условно, так как вероятности p_1 и c_1 являются атомарными, а ими определяются лишь начало и конец отрезка.

Действуя формально, при $x \geq 3/4$ в соответствии с (12) из функций $f_p(\tau)$ (25) и $\rho_0(x)$ (22) получаем также вырожденные участки функции упорядочения и весовой функции:

$$(27) w_0(x) = 2/3, \quad g_0(x) = \phi(p_1), \quad x \geq 3/4.$$

При обнаруженной вырожденности процедуры Неймана – Пирсона, связанной в данном примере с положительностью прогнозной меры постоянства функции $\rho_0(x)$ для минимально возможного дохода τ' , характер упорядочения не определяется. Однако в подобных случаях было бы разумным придавать ей смысл и доопределять, и здесь это можно сделать.

4. Исследование особенности при $\rho(x, y) = const$

Неоднозначность устанавливаемого порядка порождает неустойчивость решения – малое изменение прогнозной плотности в зоне $x \geq 3/4$ (если оно исключает постоянство относительного дохода) может значительно изменить в ней функцию упорядочения $w_0(x)$, вплоть до изменения порядка на обратный. Но эту плотность выбирает сам инвестор, и потому в таких случаях имеет смысл ему самому назначать характер упорядочения, например, из соображений удобства (если характер плотности его, в принципе, устраивает).

Понятно, что в примере удобнее всего использовать складывающееся на интервале $[0, 3/4]$ упорядочение по ε от больших значений к меньшим и продолжить ее на отрезок $[3/4, 1]$. Это можно делать уже без участия функции $f_c(\tau)$, поскольку прогнозные вероятности ε связываются с переменными x непосредственно – ведь от них в зоне $3/4 \leq x \leq 1$ относительные доходы не зависят. Притом эта связь подбирается так, чтобы сохранилось основное свойство функции $w(x)$ – равномерность ее распределения. Результатом должна стать обратная трансформация атомарных вероятностей p_1 и c_1 в плотности вероятности.

Итак, в зоне $x < 3/4$ функция $w_0(x)$ остается прежней, а в зоне $x \geq 3/4$ она находится опять же из (12), но с учетом установленного порядка ее роста от больших значений x к меньшим и с сохранением равномерности распределения. Для этого следует чисто номинально связать переменное значение $x \geq 3/4$ с уровнем вероятности $\varepsilon \leq p_1 = 37/96$.

Вспомним, что усеченная нижняя часть (L) пирамидальной конструкции для прогнозной плотности определяется координатами $x_f = y_f = 3/4$ и горизонтальным сечением с аппликатой $z_f = (1 - x_f)/2 = 1/8$; ей отвечает вероятность $\varepsilon_f = p_1 = 37/96$ (равная ее объему). Теперь нам нужно найти для каждого $\varepsilon \leq \varepsilon_f$ такое значение $x_\varepsilon (= y_\varepsilon) \geq x_f$, что объем подмножества L_ε множества L , образованного горизонтальным сечением с аппликатой $z_\varepsilon = (1 - x_\varepsilon)/2 \leq z_f$, равен ε . Подобные объемы (а заодно и вероятности) находятся по аналогии с p_1 .

Легче всего это сделать, если учесть, что у всех введенных усеченных пирамид общий «прародитель» – цельная пирамида объемом $2/3$, описываемая вторым аргументом внешней операции \max в (18), т.е. функцией $(1 - \max(|x|, |y|))/2$.

Зададимся параметром $x_\varepsilon (= y_\varepsilon) \geq 3/4$ нижней усеченной пирамиды, для нее $z_\varepsilon = (1 - x_\varepsilon)/2$. Горизонтальное сечение с аппликатой z_ε делит всю пирамиду на нижнюю усеченную и верхнюю полную части. Объем верхней части определяется проще. Поскольку площадь ее основания равна $(2x_\varepsilon)^2$, а высота – $1/2 - z_\varepsilon = x_\varepsilon/2$, то объем равен $(2x_\varepsilon)^2(x_\varepsilon/2)/3 = 2x_\varepsilon^3/3$.

Для получения объема нижней части пирамиды, и потому искомой вероятности, остается из объема исходной пирамиды $2/3$ вычесть объем верхней части $2x_\varepsilon^3/3$. В результате искомая вероятность равна $2(1 - x_\varepsilon^3)/3 = \varepsilon \leq p_1$, где $x_\varepsilon = y_\varepsilon \geq x_f = 3/4$. Итак, $P\{\max(|x|, |y|) \geq x_\varepsilon\} = \varepsilon$ для всех $\varepsilon \leq p_1$, что говорит о равномерности распределения на рассмотренном отрезке.

Дополнительно можно проверить, что при $\varepsilon = p_1 = 37/96$ (и $x_\varepsilon = 3/4$) объем $2(1 - x_\varepsilon^3)/3$ действительно равен $37/96 = p_1$.

При такой регуляризации вместо функций $w_0(x)$ и $g_0(x)$ в формуле (27) получаем регуляризованные функции (28) $w_0^r(x) = 2(1 - x^3)/3$, $g_0^r(x) = \phi(w_0^r)$, $x \geq 3/4$.

5. Построение диссонанты и прочих характеристик инвестиций

По-другому, почти стандартно (лишь с некоторым нетипичным упрощением) образуется диссонанта $\gamma(\cdot)$ на интервале по $\varepsilon \in (p_1, 1]$. Он соответствует полуинтервалу $(\tau', \tau'']$ с суммарной прогнозной вероятностью $1 - p_1 = 59/96$ и суммарной стоимостной вероятностью $1 - c_1 = 27/64$. К тому же $x < 3/4$.

На нем использованием (22) для относительного дохода устанавливается взаимосвязь x_τ с τ . Поскольку при $x < 3/4$ имеет место

$$\rho_0(x) = 2(51 - 59x)/81/(1 - x) = \tau,$$

то

$$x_\tau = (102 - 81\tau)/(118 - 81\tau).$$

Без труда проверяется, что эта связь обеспечивает непрерывность x_τ в точке $\tau = \tau'$ ($x_\tau = 3/4$ при $\tau = 2/3$).

Вводя вспомогательные агрегаты

$$U(\tau) = (102 - 81\tau)^3/(118 - 81\tau)^3, \quad \tau \geq \tau', \quad b = 81/118,$$

имеем в соответствии с (25) и (26)

$$f_P(\tau) = 1 - U(\tau), \quad f_C(\tau) = 1 - bU(\tau).$$

Исключая $U(\tau)$, получаем взаимосвязь

$$f_C(\tau) = 1 - b(1 - f_P(\tau)),$$

а делая замену $\tau \rightarrow f_P^{-1}(\varepsilon)$, получаем диссонанту

$$(29) \gamma(\varepsilon) = 1 - b(1 - \varepsilon) = (37 + 81\varepsilon)/118.$$

Тем самым устанавливается *линейная* зависимость диссонанты от уровня вероятности ε и на полуинтервале $(p_1, 1]$, соответствующем $(\tau', \tau'']$. Кроме того, $\gamma(p_1) = 37/64 = c_1$ (предельное значение стоимости для полуинтервала $(\tau', \tau'']$ при $\tau \rightarrow \tau'$), что подтверждает непрерывность диссонанты при $\tau = \tau'$. Поэтому на полуинтервале $(p_1, 1)$ имеем также

$$\gamma'(\varepsilon) \equiv (1 - c_1)/(1 - p_1) = 81/118.$$

Эти вычисления подтверждаются использованием теоретического соотношения (11). Вычисление производных от функций $f_P(\tau)$ (25) и $f_C(\tau)$ (26) с учетом непрерывности диссонанты последовательно из (11) дает (дополнительный способ проверки расчетов)

$$f_p'(\tau) = 50976 \frac{(34-27\tau)^2}{(118-81\tau)^4}, \quad f_c'(\tau) = 34992 \frac{(34-27\tau)^2}{(118-81\tau)^4}, \quad \tau \in (\tau', \tau''],$$

$$\gamma'(\varepsilon) = f_c'(f_p^{\leftarrow}(\varepsilon)) / f_p'(f_p^{\leftarrow}(\varepsilon)) = 81/118. \quad \varepsilon \in (p_1, 1].$$

Таким образом,

$$\gamma'(\varepsilon) = \begin{cases} 3/2, & \varepsilon \in [0, 37/96); \\ 81/118, & \varepsilon \in (37/96, 1]. \end{cases}$$

График диссонанты приводится (в сравнении с графиком самого аргумента ε) на рис. 4 (справа).

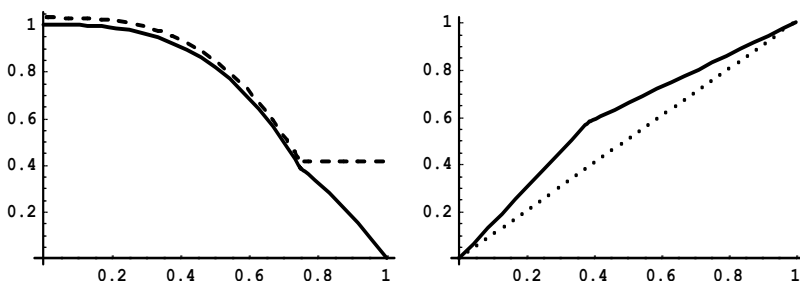


Рис. 4. Графики $w_0(x)$ и $w_0^r(x)$ (слева), $\gamma(\varepsilon)$ (справа)

Отметим, что линейность диссонанты на интервале $(p_1, 1]$ вовсе не является типичным свойством, а обусловлена линейностью прогнозной и стоимостной плотностей. Более того, на этом интервале относительный доход непостоянен, что в корне отличает этот интервал от начального и делает (частично) регулярную задачу редким примером линейности диссонанты.

Таким образом, в рассмотренном примере диссонанта состоит из двух линейных участков разного происхождения.

В случаях затруднений с получением аналитического представления диссонанты (типа (29)) можно было бы воспользоваться, например, интерполяцией.

Поскольку функция $\rho_0(x)$ на полуинтервале $[0, 3/4)$ строго монотонно убывает от τ'' до τ' , функция упорядочения $w_0(x)$ на нем (в отличие от полуинтервала $(3/4, 1]$) является устойчивой.

И проблем с установлением порядка не возникает. В результате *регуляризованная* функция упорядочения (с учетом и (28))

$$w_0^r(x) = \{2(51 - 59x)/(81(1 - x)), x < 3/4; 2(1 - x^3)/3, x \geq 3/4\}.$$

Графики обеих функций $w_0(x)$ в (27) и $w_0^r(x)$ в (28) изображены на рис. 4 (слева, штриховая и сплошная линии соответственно). Для различения функций $w_0(x)$ и $w_0^r(x)$ на этом интервале первая смещена вверх на 0,03. График полной регуляризованной функции $w^r(x, y)$ приводится на рис. 3 (справа).

Регуляризованная функция $g_0^r(x)$ получается в соответствии с ф.р.п. по правилу (13). Применение этого правила для полной функции $g^r(x, y)$ иллюстрируется посредством ф.р.п. $\phi(\varepsilon) = \varepsilon^\lambda$ с тремя значениями $\lambda = 1/3, 1, 3$. Для $\lambda = 1$ имеем $g^r(x, y) \equiv w^r(x, y)$, и ее график уже представлен на рис. 3 (справа), а для $\lambda = 1/3, 3$ – графики приводятся на рис. 5.

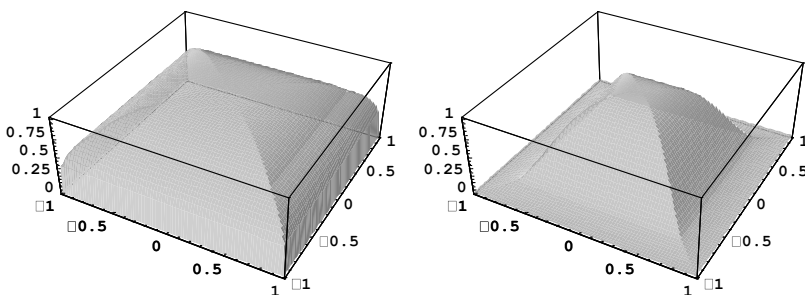


Рис. 5. Функции $g^r(x, y)$ при $\phi(\varepsilon) = \varepsilon^{1/3}$ (слева) и $\phi(\varepsilon) = \varepsilon^3$ (справа)

Оптимальный портфель двумерных δ -инструментов определяется подобно одномерному случаю представлением

$$G = \int_{X \times Y} g(x, y) D(x, y) dx dy,$$

где платежная функция портфеля $g(x, y)$ дается формулой (13). Она при $\phi(\varepsilon) \equiv \varepsilon, \varepsilon \in [0, 1]$, совпадает с $w(x, y)$.

Средний доход R инвестиции вычисляется по формуле (15). Для $\phi(\varepsilon) = \varepsilon^\lambda, \lambda > 0$, имеем

$$R = \int_0^1 \phi(\varepsilon) d\varepsilon = (1 + \lambda)^{-1}.$$

Инвестиционная сумма A и средняя доходность y оптимального портфеля находятся по формулам (16). Простота производной от диссонанты (она – ступенчатая функция) позволяет получить эти показатели в виде формулы:

$$A = (\gamma_2' + (\gamma_1' - \gamma_2') p_1^{1+\lambda}) (1 + \lambda)^{-1},$$

где $\gamma_1' = 3/2$ и $\gamma_2' = 81/118$ – константные производные диссонанты на интервалах $[0, p_1]$ и $(p_1, 1]$ соответственно.

Результаты расчетов для некоторых значений параметра λ в ф.р.п. приведены в таблице 1.

Таблица 1.

λ	1/3	0,5	1	2	3
R	3/4	2/3	1/2	1/3	1/4
A	0,6860	0,5874	0,4036	0,2443	0,1761
y	0,0933	0,1349	0,2387	0,3642	0,4197

6. Заключение

В работе рассмотрена проблема распространения методологии применения инвесторами критерия $CC-VaR$ на финансовых рынках на многомерные теоретические рынки – рынки с несколькими базовыми активами. Изложение ограничивается введением однопериодного идеального теоретического рынка с многомерной δ -функцией в качестве платежной, его инструментария, базисных индикаторов и формул, определяющих основные характеристики инвестиции.

В качестве теоретического алгоритма оптимизации используется результат проецирования одномерного алгоритма, основанного на континуальном применении процедуры Неймана – Пирсона, на многомерный рынок.

Для демонстрации работы многомерного теоретического алгоритма предлагается упрощенный пример двумерного ранка с плотностями, составленными из боковых поверхностей правильных четырехгранных пирамид. Решение задачи оптимизации удастся получить аналитически. Но подобный исход представляет собой скорее исключение, чем правило. И потому

возникает потребность в разработке численных методов решения задач оптимизации для многомерных рынков, как и рассмотрение их сценарных вариантов.

Литература

1. АГАСАНДЯН Г.А. *Применение непрерывного критерия VaR на финансовых рынках*. – М.: ВЦ РАН, 2011. – 299 с.
2. АГАСАНДЯН Г.А. *Непрерывный критерий VaR на многомерных рынках опционов*. – М.: ВЦ РАН, 2015. – 298 с.
3. АГАСАНДЯН Г.А. *Непрерывный критерий VaR и оптимальный портфель инвестора // Управление большими системами*. – 2018. – Вып. 73. – С. 6–26.
4. АГАСАНДЯН Г.А. *Непрерывный критерий VaR на сценарных рынках // Информатика и ее применения*. – 2018. – Т. 12, вып. 1. – С. 32–40.
5. КРАМЕР Г. *Математические методы статистики*. – М.: Наука, 1975. – 750 с. (Перевод с англ.: Cramer H. *Mathematical methods of statistics*. – Princeton University Press, 1946.)
6. AGASANDYAN G.A. *Optimal Behavior of an Investor in Option Market // Int. Joint Conf. on Neural Networks. The 2002 IEEE World Congress on Computational Intelligence (Honolulu, Hawaii, Mai 12–17, 2002)*. – P. 1859–1864.
7. ALEXANDER C., VENKATRAMANAN A. *Analytic approximations for multi-asset option pricing // Mathematical Finance*. – 2012. – Vol. 22(4). – P. 667–689.
8. MARKOWITZ H. *Portfolio Selection // Journal of Finance*. – 1952. – No. 7. – P. 77–91.

CONTINUOUS VAR-CRITERION AND INVESTOR'S OPTIMAL PORTFOLIO

Gennady Agasandyan, Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, Doctor of Science, leading fellow (agasand17@yandex.ru).

Abstract. The work investigates the problem of extending the methodology of applying continuous VaR-criterion (CC-VaR) by investors of one-period option markets with one underlier on tasks of constructing the optimal investor's portfolio

for analogical markets with several underliers, i.e., multidimensional markets. The one-period ideal theoretical multidimensional δ -market is defined, and its tools and the algorithm of constructing optimal-on-CC-VaR portfolio of multidimensional δ -instruments by using the Newman – Pearson procedure are formed. In many ways, the algorithm repeats the sequence of operations from the algorithm of the one-dimensional market, but applied to multidimensional objects. The processing of the theoretical algorithm is illustrated by an example of the two-dimensional δ -market, and the optimal solution is searched by analytical methods. The forecast and cost functions, the dissonant, the ordering and weighted functions, and also basic investment performances are calculated. Some singularity presented in the example is eliminated by a natural and rational way and demonstrates possibilities of extending the canonical model. The exposition is illustrated by graphics.

Keywords: multidimensional markets, underliers, continuous VaR-criterion (CC-VaR), forecast and cost densities, Newman – Pearson procedure, forecast and cost functions, dissonant, investment amount, average income, yield.

УДК 519.685

ББК 22.18

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии*

*Поступила в редакцию
Опубликована*

РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИЗА ТРЕБОВАНИЙ К МЕТОДАМ ВЫДЕЛЕНИЯ СОСТАВЛЯЮЩИХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ¹

Зоркальцев В. И.²

(ФГБУН Лимнологический институт СО РАН, Иркутск)

Полковская М. Н.³

*(ФГБОУ ВО Иркутский государственный аграрный
университет имени А.А. Ежевского, Иркутск)*

Рассматривается задача выбора метода выделения составляющих временно-го ряда. В качестве таких составляющих могут быть, например, тренд или периодические колебания (в частности, сезонные). Исследуемые методы выделения составляющих представляются в виде отображения исходного временного ряда в выделяемые составляющие. Формулируется система требований к этим отображениям, к которым относятся: непрерывность, идемпотентность, аддитивность и учет информативности наблюдений. Помимо этого, доказаны теоремы о том, что всем введенным требованиям удовлетворяет декомпозиция на составляющие временного ряда, использующая метод наименьших квадратов. В качестве примера рассмотрено выделение двух составляющих временного ряда (тренда и сезонной компоненты) из поквартальных и месячных данных на основе аддитивной модели. При этом тренд задан полиномом от времени, а сезонные колебания – в виде суммы взвешенных по степеням времени строго периодических функций. Представленная аддитивная модель применима для анализа динамики запасов, производства, транспорта, потребления отдельных продуктов в различных районах и т.д. Для оценки динамики цен более уместно использовать мультипликативную модель, поскольку большую устойчивость имеют показатели, измеряемые в относительных, а не в балансовых величинах. В этом случае вместо рассмотренного в статье требования аддитивности необходимо ввести требование мультипликативности.

Ключевые слова: методы выделения составляющих временного ряда, аксиоматический подход к сравнительному анализу методов.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ №19-07-00322 и в рамках проекта РАН №0279-2019-0003.

² Валерий Иванович Зоркальцев, д.т.н., профессор (zork@isem.irk.ru).

³ Марина Николаевна Полковская, к.т.н., доцент (polk_mn@mail.ru).

1. Введение

В прикладных исследованиях нередко возникает задача выделения из располагаемого временного ряда отдельных его составляющих. В частности это может быть задача выделения тренда (общей тенденции изменения рассматриваемого ряда) или регулярных (например, сезонных) колебаний. Для решения задачи декомпозиции временных рядов предложено большое количество оригинальных методов и их модификаций [1, 2, 5, 7, 9–11, 13–15], приводящих порой к существенно различающимся результатам. Необходимы исследования по сравнительному анализу методов, что требует выработки методологии такого анализа.

Для целей сравнительного анализа методов декомпозиции временного ряда в данной статье используется аксиоматический подход. Методы выделения составляющих рассматриваются как отображения исходных данных (исходный временной ряд) в выделяемые составляющие. Формулируется набор строго формализуемых требований к этим отображениям. На основе математических доказательств выявляется класс методов, удовлетворяющих введенным требованиям.

2. Выделение составляющих временного ряда методом наименьших квадратов

Задан вектор $x \in R^n$ с компонентами x_t , равными значениям наблюдаемого показателя в моменты времени $t = 1, \dots, n$. Обозначим $z \in R^n$ – вектор, состоящий из суммы искомого составляющих данного временного ряда. Пусть $\varepsilon \in R^n$ – вектор, который в дополнение к искомому вектору z составляет исходный вектор x . То есть справедливо соотношение

$$(1) \quad x = z + \varepsilon.$$

Обычно компоненты вектора ε рассматриваются как погрешности от выделения из исходного временного ряда x составляющих, образующих вектор z .

Часто составляющие временного ряда представляются в виде линейной комбинации некоторых стандартизированных

временных рядов, определяемых как функции от времени t . Пусть g_{it} , $i = 1, \dots, m$, – значения таких функций в моменты времени $t = 1, \dots, n$, m – количество рассматриваемых функций. Обозначим G матрицу размером $n \times m$ с элементами g_{it} . Будем считать, что столбцы этой матрицы линейно независимы:

$$(2) \text{rank} G = m.$$

Это условие, в том числе, означает, что число m не должно превышать числа n .

Обозначим $\alpha \in R^n$ – вектор искомых значений коэффициентов линейной комбинации. Считаем, что

$$(3) z = G\alpha.$$

Пусть $h \in R^n$ – заданный вектор положительных коэффициентов информативности наблюдений. Частным случаем является одинаковая информативность, когда $h_t = 1$, $t = 1, \dots, n$. Соотношения экзогенно задаваемых значений компонент вектора h отражают степень ценности наблюдений в отдельные моменты времени. Они предназначены для соизмерения разномоментных наблюдений исходного ряда x . Диагональную матрицу, составленную из вектора h , обозначим

$$(4) H = \text{diag } h.$$

Для определения значений векторов α , z , ε методом наименьших квадратов необходимо решить задачу минимизации квадратной функции

$$(5) F(\varepsilon) = \varepsilon^T H \varepsilon \rightarrow \min,$$

при условиях (1), (3). В результате решения такой задачи имеем

$$(6) \alpha = (G^T H G)^{-1} G^T H x,$$

$$(7) z = Bx,$$

где

$$(8) B = G(G^T H G)^{-1} G^T H.$$

3. Требования к методам выделения составляющих временных рядов

В самом общем виде используемый метод выделения составляющих временного ряда можно представить как некоторое отображение ϕ исходного ряда $x \in R^n$:

$$(9) z = \phi(x).$$

Отображение ϕ можно назвать также процедурой вычисления, оператором или вектор-функцией, состоящей из функций $\phi_t(x)$, $t = 1, \dots, n$. Сформулируем желаемые требования к этой вектор-функции.

1. Непрерывность. Все функции ϕ_t должны быть непрерывными: малые изменения исходных данных (компонент вектора x , например, из-за погрешности измерений) должны приводить к малым изменениям результатов (компонент вектора z).

2. Идемпотентность: для любого $x \in R^n$

$$(10) \phi(\phi(x)) = \phi(x).$$

Если составляющую, выделенную методом, представленным оператором ϕ , рассматривать как исходный ряд, то попытка выделения из нее такую же составляющую тем же методом должна привести к исходному результату.

3. Аддитивность: для любых x^1, x^2 из R^n

$$(11) \phi(x^1 + x^2) = \phi(x^1) + \phi(x^2).$$

Сумма одинаковых составляющих нескольких временных рядов должна быть равна такой же составляющей суммарного ряда.

Отметим, что из непрерывности и аддитивности оператора ϕ следует его линейность [8]. Следовательно, аддитивный и непрерывный оператор будет дифференцируемым. Для любых $x \in R^n$ существует матрица частных производных с элементами

$$(12) \phi_\tau^t(x) = \frac{\partial \phi_t(x)}{\partial x_\tau}, \quad \tau = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, n.$$

Частную производную ϕ_τ^t можно интерпретировать как количественную оценку влияния изменений компоненты x_τ исходного ряда на изменения составляющей z_t .

4. Учет информативности наблюдений: при любом $x \in R^n$

$$(13) \frac{\phi_\tau^t(x)}{h_\tau} = \frac{\phi_t^\tau(x)}{h_t}, \quad \tau = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, n.$$

Согласно этому требованию отношение экзогенно заданных весов информативности наблюдений h_t и h_τ должно быть равно отношению влияния исходных данных момента t на составляющую момента τ к обратному влиянию исходных данных момен-

та τ на составляющую момента t . Чем больше значение h_τ по сравнению с другими весами информативности, тем сильнее превалирует влияние данных момента t над влиянием данных других моментов времени.

4. Метод наименьших квадратов удовлетворяет всем введенным требованиям

Докажем, что метод наименьших квадратов, изложенный во втором разделе, удовлетворяет всем, введенным в предыдущем разделе, требованиям. Справедлива

Теорема 1. Если выделяемая составляющая z определяется правилом (7),

$$(14) \phi(x) = Bx,$$

где матрица B определяется выражением (8) при некоторой заданной матрице G размера $n \times m$, удовлетворяющей условию (2), то отображение ϕ удовлетворяет требованиям непрерывности, идемпотентности, аддитивности и учета информативности наблюдений.

Доказательство. Поскольку, согласно (14), оператор ϕ линейный, то он непрерывный, аддитивный и дифференцируемый. Причем для любого $x \in R^n$

$$(15) \phi_\tau^t(x) = b_{i\tau}, \quad t = 1, \dots, n, \quad \tau = 1, \dots, n,$$

где $b_{i\tau}$ – элемент матрицы B .

Непосредственно из (8) следует, что матрица B идемпотентна:

$$(16) BB = B.$$

Осталось установить выполнение требования учета информативности наблюдений. В силу (15) требование учета информативности наблюдений (13) имеет вид

$$(17) \frac{b_{i\tau}}{h_\tau} = \frac{b_{i\alpha}}{h_\alpha}, \quad t = 1, \dots, n, \quad \tau = 1, \dots, n.$$

Это условие в матричной форме представляется в виде равенства

$$(18) HB = B^T H.$$

Из выражения (8) матрицы B следует выполнение этого равенства:

$$NB = HG(G^T H G)^{-1} G^T H = (G(G^T H G)^{-1} G^T H)^T H = B^T H.$$

Теорема 1 доказана.

Справедливо утверждение, которое можно назвать обратным к теореме 1. Если отображение ϕ вектора R^n в вектор R^n удовлетворяет всем четырем введенным требованиям, то оно может быть представлено в виде процедуры выделения составляющих методом наименьших квадратов.

Теорема 2. *Если отображение ϕ является непрерывным и дифференцируемым, удовлетворяет требованиям идемпотентности, аддитивности и учета информативности наблюдений, то существует матрица факторов G размера $n \times t$, при некотором натуральном t , такая, что выделение составляющих оператором ϕ равносильно оценке этой составляющей на основе модели (1), (3), (5).*

Доказательство. Из непрерывности и аддитивности, как отмечалось, следует выполнение условия (14) для некоторой квадратной матрицы B размера n . Положим (19) $G = BH^{-1}$.

Считаем, что для матрицы B выполняется требование идемпотентности (16) и требование учета информативности (18). Для доказательства теоремы необходимо установить, что при этих условиях оценки z отображение ϕ равносильно поиску решения задачи (1), (3), (5).

Вектор коэффициентов α , который должен получиться в результате решения задачи (1), (3), (5), является решением системы линейных уравнений

$$(20) (G^T H G)\alpha = G^T H x.$$

Отметим, что определяемая условием (19) матрица G может иметь линейно зависимые векторы столбцы, поэтому не можем использовать обратную к $G^T H G$ матрицу. Используя (19), и затем (16), (18), имеем

$$\begin{aligned} G^T H G &= (BH^{-1})^T H B H^{-1} = (H^{-1} B^T)^T H B H^{-1} = B H^{-1} H B H^{-1} = \\ &= B B H^{-1} = B H^{-1}. \end{aligned}$$

Система уравнений (20) приобретает вид

$$B H^{-1} \alpha = B x.$$

Отсюда в качестве решения системы (20) имеем вектор
(21) $\alpha = Hx$.

Подставляем это значение в (3) и используем (19), получаем
 $z = G\alpha = BH^{-1}\alpha = BH^{-1}H\alpha = B\alpha$,

что и требовалось доказать.

Теорема 2 доказана.

Замечания. Доказанные теоремы относятся к процедуре выделения из исходного ряда одной составляющей, образующей вектор z . Во многих случаях требуется выделить именно одну составляющую временного ряда, например, тренд при анализе рядов годовых данных.

Приведенные здесь результаты являются развитием исследований Ловелла [12], касающихся методов выделения тренда из временного ряда. При этом Ловелл не использовал веса информативности, т.е. фактически рассматривал случай одинаковых весов информативности, когда $h_t = 1$ для всех $t = 1, \dots, n$. В этом случае требование учета информативности наблюдений (13) приобретает вид

$$\varphi_\tau^t(x) = \varphi_\tau^t(x).$$

Ловелл назвал такое условие требованием «симметрии». При замене введенного выше требования «учета информативности наблюдений» на указанное условие «симметрии», удовлетворяющее всем вводимым требованиям, получится метод наименьших квадратов с одинаковыми весовыми коэффициентами.

Иногда проводят различие между «методом наименьшим квадратов» (оставляя этот термин методу наименьших квадратов с одинаковыми весами информативности) и «методом взвешенных наименьших квадратов». Представляется, что такое разделение имеет искусственный характер. И в методическом, и в вычислительном отношении нет необходимости его проводить. Можно отметить, что, например, Гаусс такого различия не проводил и методом наименьших квадратов называл оба случая и одинаковых, и разных положительных весовых коэффициентов, что он особо подчеркивал в своих работах, посвященных методу наименьших квадратов [3].

Матрица G , определяемая правилом (19) при доказательстве теоремы 2, может иметь линейно зависимые векторы столбцы. Тогда выражение (21) для вектора α будет только одним из решений системы линейных уравнений (20).

5. Свойства процедуры выделения нескольких составляющих временного ряда методом наименьших квадратов

Вектор z может быть суммой нескольких составляющих. Рассмотрим случай, когда их две. Результаты для этого случая могут быть обобщены на произвольное количество выделяемых составляющих временного ряда. Итак, пусть

$$(22) z = y + s,$$

где y и s – векторы в R^n , представляющие две выделяемые из исходного ряда z составляющие.

Пример. В качестве двух составляющих временного ряда помесечных или поквартальных данных могут рассматриваться тренд и сезонные колебания. В [5] рассматривалась модель (1), (3), (5), (22), в которой тренд представлен выделяемой составляющей y , а сезонные колебания – составляющей s .

Тренд задается полиномом от времени

$$y_t = \sum_{i=0}^{p-1} c_i t^i$$

при некотором $p \geq 1$. Здесь c_i – искомые коэффициенты, составляющие первые p компонент вектора α :

$$\alpha_i = c_{i-1}, \quad i = 1, \dots, p.$$

Сезонные колебания заданы в виде суммы взвешенных по степеням времени строго периодических функций

$$s_t = \sum_{i=0}^r s_i(t) \cdot t^i, \quad t = 1, \dots, n,$$

где $r \geq 0$ – заданное число. Строго периодические функции имеют вид

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^{K/2} a_{ij} \cos \frac{2\pi j t}{K} + \sum_{j=1}^{K/2-1} b_{ij} \sin \frac{2\pi j t}{K}.$$

Здесь K – количество наблюдений рассматриваемого ряда в году. Если анализируются помесечные данные, то $K = 12$. Если рассматриваются поквартальные данные, то $K = 4$. Коэффициенты a_{ij}, b_{ij} входят в состав искомых коэффициентов α_i при $i > p$. Общее количество искомых коэффициентов a_{ij} и b_{ij} равно

$$q = (K - 1)(r + 1).$$

Для рассматриваемого примера у матрицы G первые p столбцов состоят из коэффициентов

$$g^{ii} = t^{i-1}, t = 1, \dots, n, i = 1, \dots, p.$$

Коэффициенты в остальных столбцах матрицы G являются либо нулевыми, либо равными значениям

$$\left(\cos \frac{2\pi jt}{K} \right) t^i, \left(\sin \frac{2\pi jt}{K} \right) t^i.$$

В [6] представлены результаты использования такой модели для анализа динамики топливопотребления в СССР и динамики температуры воздуха. Такая модель использовалась для целей краткосрочного прогнозирования потребления отдельных видов энергоресурсов. При этом применялись экспоненциальные веса информативности наблюдений

$$h_t = \exp(\lambda t).$$

где λ – параметр, вычисляемый в результате минимизации погрешности ретропрогнозов с использованием метода золотого сечения [6]. Величина $\exp(\lambda)$ интерпретируется как темп старения данных.

Общий случай. Далее будем считать, что первые p столбцов матрицы G состоят из векторов, линейная комбинация которых образует вектор u . Остальные

$$q = m - p$$

столбцов матрицы G состоят из векторов, линейная комбинация которых образует вектор s . Итак, вектор α можно рассматривать как конкатенацию векторов $\alpha^1 \in R^p$ и $\alpha^2 \in R^q$:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\alpha}^2$ – векторы в R^m , образованные из α путем замены в первом случае вектора α^2 на нулевой вектор и во втором случае – вектора α^1 на нулевой вектор:

$$\tilde{\alpha}^1 = \begin{vmatrix} \alpha^1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \tilde{\alpha}^2 = \begin{vmatrix} 0 \\ \alpha^2 \end{vmatrix}.$$

Выражение (3) с учетом декомпозиции (22) и введенных здесь обозначений означает, что

$$(23) \quad y = G\tilde{\alpha}^1, \quad s = G\tilde{\alpha}^2.$$

Можно воспользоваться декомпозицией матрицы G . Обозначим G^1 и G^2 матрицы, составленные из первых p столбцов и последних q столбцов матрицы G . То есть

$$(24) \quad G = [G^1, G^2]$$

Введем матрицы размером $n \times m$, получаемые путем обнуления последних q столбцов и первых p столбцов матрицы G :

$$(25) \quad \tilde{G}^1 = [G^1, 0], \quad \tilde{G}^2 = [0, G^2].$$

В силу (24)

$$(26) \quad \tilde{G}^1 + \tilde{G}^2 = G.$$

Введем матрицы размера $n \times n$

$$B^1 = \tilde{G}^1 (G^T H G)^{-1} G^T H,$$

$$B^2 = \tilde{G}^2 (G^T H G)^{-1} G^T H.$$

Отметим что согласно (8), (24)

$$(27) \quad B^1 + B^2 = B.$$

Из (7), (8), (22) следует, что

$$(28) \quad y = B^1 x, \quad s = B^2 x.$$

Итак, выделение обеих составляющих на базе метода наименьших квадратов сводится к использованию линейных преобразований исходных данных. Следовательно, процедуры выделения являются непрерывными, дифференцируемыми и аддитивными.

Если в качестве исходных данных будут использованы результаты выделения составляющих, то получим значения

$$B^1(B^1 x) = y, \quad B^2(B^1 x) = 0, \quad B^1(B^2 x) = 0, \quad B^2(B^2 x) = s.$$

Первое и последнее из этих выражений означает, что процедуры выделения обеих составляющих y и s являются идемпотентными.

Из (17), (25) следует, что

$$\frac{b_{t\tau}^1}{h_\tau} - \frac{b_{t\tau}^1}{h_t} = \frac{b_{t\tau}^2}{h_t} - \frac{b_{t\tau}^2}{h_\tau}.$$

Здесь $b_{t\tau}^1$, $b_{t\tau}^2$ – элементы матриц B^1 и B^2 , находящиеся в строке t и столбце τ . Правая, как и левая, часть этих равенств могут не быть равны нулю, поэтому для процедуры выделения обеих составляющих требование учета информативности наблюдений не выполняется.

Рассмотренные в разделе 5 свойства процедуры выделения одной составляющей временного ряда позволяют развить теоретические результаты раздела 4 на методы выделения нескольких составляющих. Рассмотрим случай двух составляющих, когда вектор их суммарных значений представляется в виде суммы (22) векторов y и s . Можно (но не обязательно) для наглядности под выделяемой составляющей y понимать тренд, под составляющей, представляемой вектором s , – сезонные колебания.

Процедуру выделения составляющей y будем представлять в виде отображения ϕ^1 вектора $x \in R^n$ в вектор $y \in R^n$. Процедуру выделения составляющей s будем представлять в виде отображения ϕ^2 вектора $x \in R^n$ в вектор $s \in R^n$. Процедуру выделения составляющей z будем обозначать $\bar{\phi}$:

$$y = \phi^1(x), \quad s = \phi^2(x), \quad z = \bar{\phi}(x).$$

Процедура $\bar{\phi}$ является суммой первых двух процедур: для любого $x \in R^n$

$$(29) \quad \bar{\phi} = \phi^1(x) + \phi^2(x).$$

Можно сформулировать следующие семь требований к указанным трем отображениям. Первые шесть из них являются тремя парами требований к отображениям ϕ^1 и ϕ^2 . Выполнение каждой из этих пар требований означает, что это требование будет выполняться и для суммарного отображения $\bar{\phi}$. Послед-

нее, седьмое требование формулируется только к отображению $\bar{\phi}$.

1. Отображение ϕ^1 должно быть непрерывным.
2. Отображение ϕ^2 должно быть непрерывным.
3. Отображение ϕ^1 должно удовлетворять условию идемпотентности (10).
4. Отображение ϕ^2 должно удовлетворять условию идемпотентности (10).
5. Отображение ϕ^1 должно удовлетворять условию аддитивности (11).
6. Отображение ϕ^2 должно удовлетворять условию аддитивности (11).
7. Для отображения $\bar{\phi}$ должно выполняться условие информативности наблюдений (13).

Доказанные выше теоремы 1, 2 можно обобщить в виде следующего утверждения.

Теорема 3. *Все приведенные семь требований к отображениям ϕ^1 , ϕ^2 , $\bar{\phi}$, связанным условием (29), выполняются в том и только в том случае, если существуют матрицы факторов G^1 и G^2 размерами $n \times r$ и $n \times q$ при некоторых r и q , такие, что*

$$y = G^1 \bar{\alpha}^1, \quad s = G^2 \bar{\alpha}^2,$$

где векторы $\bar{\alpha}^1 \in R^r$ и $\bar{\alpha}^2 \in R^q$ составляют вектор

$$\bar{\alpha} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}^1 \\ \bar{\alpha}^2 \end{bmatrix},$$

который является решением задачи (1), (3), (5), (22), (23) с матрицей G размера $n \times t$ при $t = r + q$, образуемой путем конкатенации матриц G^1 и G^2 .

6. Заключение

Использованный здесь подход к исследованию и обоснованию методов выделения составляющих временных рядов может быть полезен и во многих других случаях. В частности, аксиоматический подход можно использовать при обосновании мето-

дов выделения составляющих временных рядов в моделях с мультипликативным взаимодействием составляющих.

В данной статье рассмотрена аддитивная модель взаимодействия составляющих, что отражают условия (1), (22). В некоторых случаях более уместно использование моделей с мультипликативными связями между составляющими. В этих моделях вместо выражений (1), (22) для исходного временного ряда используются зависимости

$$x_t = z_t \varepsilon_t, \quad z_t = y_t s_t, \quad t = 1, \dots, n.$$

В [4] рассматривалась такая мультипликативная модель выделения составляющих временных рядов применительно к проблеме выделения из исходного временного ряда x_t тренда y_t , сезонных отклонений s_t и случайных отклонений ε_t . При этом приводились результаты использования конкретной мультипликативной модели выделения тренда и сезонных колебаний в динамике цен.

Для обоснования использования мультипликативных моделей потребуется изменить набор требований к методам выделения составляющих временного ряда. Так, вместо рассмотренного выше требования аддитивности необходимо ввести требование мультипликативности [4]. При формулировании требования учета информативности наблюдений для описания влияния данных одних моментов времени на выделяемую составляющую других моментов вместо частных производных необходимо использовать логарифмические частные производные, т.е. производные логарифма выделяемой составляющей от логарифма значения исходного ряда. Введение набора требований к мультипликативным моделям взаимодействия составляющих, так же как и к рассмотренным в данной статье аддитивным моделям, позволяет лучше понять свойства и особенности применения разных моделей декомпозиции временных рядов.

Литература

1. АНДЕРСОН Т. *Статистический анализ временных рядов.* – М.: Мир, 1976. – 756 с.
2. БОКС ДЖ., ДЖЕНКИНС Г. *Анализ временных рядов: прогноз и управление.* – М.: Мир, 1974. – 406 с.

3. ГАУСС К.Ф. *Избранные геофизические сочинения.* – М.: Геоиздат, 1957. – Т. 1. – 152 с.
4. ЗОРКАЛЬЦЕВ В.И., ПОЛКОВСКАЯ М.Н. *Аддитивная и мультипликативная модели выявления тренда и сезонных колебаний: приложение мультипликативной модели к динамике цен на сельскохозяйственную продукцию // Управление большими системами.* – 2020. – Вып. 86. – С. 98–115.
5. ЗОРКАЛЬЦЕВ В.И. *Метод наименьших квадратов: геометрические свойства, альтернативные подходы, приложения.* – Новосибирск: Наука, 1995. – 220 с.
6. ЗОРКАЛЬЦЕВ В.И. *Методы прогнозирования и анализа эффективности функционирования системы топливоснабжения.* – М.: Наука, 1980. – 220 с.
7. КЕНДЭЛ М. *Временные ряды.* – М.: Финансы и статистика, 1981. – 191 с.
8. ЛЮСТЕРНИК Л.А., СОБОЛЕВ В.Н. *Элементы функционального анализа.* – М.: Наука, 1965. – 513 с.
9. ХЕННАН Э. *Многомерные временные ряды.* – М.: Мир, 1974. – 576 с.
10. ЧЕТЫРКИН Е.М. *Статистические методы прогнозирования.* – М.: Статистика, 1977. – 200 с.
11. DONG G., LIU H. et al. *Feature engineering for machine learning and data analytics // Chapman & Hall/CRC Data Mining and Knowledge Discovery Series,* 2018. – 400 p.
12. LOVELL M.C. *Seasonal adjustment of economic time series and multiple regression analysis // J. of Amer. Statist. Assoc.* – 1963. – Vol. 58. – P. 993–1010.
13. NIELSEN A. *Practical Time Series Analysis: Prediction with Statistics and Machine Learning.* – O'Reilly Media, Inc., 2019. – 482 p.
14. TSAY R.S., CHEN R. *Nonlinear time series analysis.* – John Wiley & Sons, 2019. – 512 p.
15. WEI W.W.S. *Time Series Analysis Univariate and Multivariate Methods.* – Pearson Education, 2018. – 614 p.

RESULTS OF THE ANALYSIS OF REQUIREMENTS FOR METHODS FOR ALLOCATING TIME SERIES COMPONENTS

Valeriy Zorkaltsev, Limnological Institute of SB RAS, Irkutsk, Doctor of Science, professor (zork@isem.irk.ru).

Marina Polkovskaya, Irkutsk State Agrarian University named after A.A. Ezhevsky, Irkutsk, Cand. Sc., associate professor (polk_mn@mail.ru).

Abstract: The problem of method's choosing for selecting components of a time series is considered. Such components can be a trend or periodic fluctuations (in particular, seasonal). The studied methods for selecting components are presented as a mapping of the original time series to the selected components. The requirements for these maps have been formulated: continuity, idempotency, additivity, and consideration of the informative nature of observations. In addition, we prove theorems that all the requirements are met by the decomposition into components of a time series using the least squares method. The selection of two components of a time series (trend and seasonal components) from quarterly and monthly data based on an additive model has been considered. The trend is defined as a polynomial of time, and seasonal fluctuations are defined as the sum of strictly periodic functions weighted by degrees of time. The presented additive model is applicable for analyzing the dynamics of stocks, production, transport, consumption of individual products in different areas, etc. It is more appropriate to use a multiplicative model for price dynamics, since indicators measured in relative rather than balance values are more stable. In this case, instead of the additivity requirement discussed in the article, it is necessary to introduce the multiplicativity requirement.

Keywords: methods for identifying time series components, axiomatic approach to comparative analysis of methods.

УДК 519.246.8

ББК 22.17

DOI: 10.25728/ubs.2020.88.2

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.

Поступила в редакцию 24.07.2020.

Опубликована 30.11.2020.

О КОЛИЧЕСТВЕ ИНФОРМАЦИИ, НЕОБХОДИМОМ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Горелов М. А.¹

(Вычислительный центр им. А.А. Дородницына
ФИЦ ИУ РАН, Москва)

Хорошо известно, что для эффективного управления необходимо использовать информацию об окружающем мире. Но если этой информации много, то приходится экономить ресурсы, затрачиваемые на ее получение и обработку. Поэтому встает вопрос о поиске рациональных способов работы с информацией. Одна из моделей, позволяющих исследовать этот вопрос формальными методами, исследуется в статье. Рассматривается простейшая система управления в условиях риска. Предполагается, что оперирующей стороне доступна информация о реализовавшемся значении случайного фактора. Эта информация кодируется двоичными словами. Выбор содержания информации, т.е. способа кодировки, считается прерогативой оперирующей стороны. Фиксируется приемлемый для оперирующей стороны результат управления. Ставится задача поиска способа кодирования, позволяющего гарантированно получить этот результат с наименьшим математическим ожиданием длины сообщения о реализовавшемся значении неопределенного фактора. Показано, что при весьма общих предположениях это математическое ожидание конечно. Выявлена качественная структура функции из множества возможных значений случайного фактора в множество двоичных слов, задающей оптимальный способ кодирования. Задача поиска такой функции сведена к решению задачи стохастического программирования на «конечномерном» пространстве. Полученные результаты имеют разумную содержательную интерпретацию. Это позволяет сделать вывод о том, что построенная модель верно отражает основные черты моделируемого явления и заслуживает дальнейшего изучения.

Ключевые слова: принятие решений в условиях риска, максимальный гарантированный результат, количество информации.

1. Введение

Рассматриваемая в данной статье модель находится на стыке трех областей математики: стохастического программирования, теории информации и теории иерархических игр.

¹ Михаил Александрович Горелов, к.ф.-м.н. (griever@ccas.ru).

С одной стороны, рассматривается задача выбора стратегии в условиях, когда получаемый результат зависит не только от этого выбора, но и от внешнего случайного фактора. Такие задачи характерны для стохастического программирования [8, 18].

С другой стороны, основной акцент делается на минимальное количество информации о случайном факторе, которой достаточно для принятия эффективного решения. При этом и само понятие «количество информации» нуждается в определении. Эти вопросы характерны для теории информации [3, 17].

Наконец, используемые методы похожи на те, которые используются в теории иерархических игр. Для этого раздела теории игр характерны следующие постановки задач [11, 12]. Требуется найти оптимальную стратегию, принадлежащую сложному, как правило, функциональному пространству. Задача считается решенной, если поиск удастся свести к решению ряда оптимизационных задач на более простых, «конечномерных», пространствах. Примерно это и будет сделано далее. Только исходная задача будет сведена не к «обычной» задаче математического программирования, а к задаче стохастического программирования. Методы стохастического программирования в статье не используются. Есть основания полагать, что они начнут работать при получении точных количественных результатов. В статье же в основном исследуются качественные особенности решаемой задачи.

Для начала исследования выбран самый простой вариант модели. На неформальном уровне ее можно описать следующим образом. Оперирующая сторона выбирает некоторое управление. Эффективность этого управления описывается критерием, который помимо сделанного выбора зависит от внешнего случайного фактора. Считается, что оперирующей стороне заранее известно распределение вероятности, описывающее этот фактор. Будем предполагать, что оперирующей стороне в принципе доступна и информация о реализовавшемся значении случайного фактора. Но получение и обработка этой информации требует затрат времени и ресурсов. Поэтому желательно получить достаточно эффективное решение при минимуме этих побочных затрат.

Актуальность такой постановки вопроса вряд ли может вызывать сомнения, особенно в «эпоху Интернета». Подобные задачи (без учета затрат на обработку информации) помимо собственно стохастического программирования неоднократно исследовались в теории иерархических игр [11, 12], теории активных систем [1, 2], теории контрактов [15, 16] и т.д. Работы, в которых явно учитывались ограничения, связанные с объемами обрабатываемой информации, появились относительно недавно. Видимо, одной из первых была статья [5]. Понятно, что во многих случаях такие более детальные модели адекватнее описывают реальные процессы. Но и их исследование, и даже построение, заметно сложнее.

Серьезные сомнения может вызвать предположение о том, что неопределенный фактор является *случайным* и оперирующей стороне известно соответствующее распределение вероятностей. К сожалению, нередко случаи, когда подобные предположения используются «неправомерно». Но это все стало «общим местом», поэтому дополнительно обсуждать это предположение не станем. В данной чисто теоретической статье достаточно предположить, что *существуют* практические задачи, для которых это предположение выполняется. Такая гипотеза вряд ли может вызвать серьезные возражения.

Само понятие «количество информации» – сложное и неоднозначное. Н.Н. Моисеев вообще считал, что «достаточно строгого и универсального определения понятия об информации не может быть» [9, с. 129]. Может быть, это утверждение слишком категорично, но будем исходить из констатации того факта, что единое определение этого понятия на сегодняшний день отсутствует. Но для решения конкретной узкой задачи оно и не обязательно (например, К. Шеннон успешно обошелся без него, решая задачу о передаче информации по каналам с шумами). Нужно только выделить существенные для решаемой задачи черты и суметь достаточно адекватно описать их на формальном уровне.

В настоящее время обычно говорят о синтаксической, семантической и прагматической¹ «границы» понятия информации (вероятно, можно выделить и другие, скажем, эстетическую). В данной статье можно сосредоточиться на двух из них: синтаксической и прагматической². Прагматическая ценность информации достаточно адекватно описывается выигрышем, который может получить оперирующая сторона, используя данную информацию. Кроме того, в данной статье важно учитывать такую синтаксическую характеристику информации, как ее объем. К сожалению, единой, пригодной во всех случаях меры количества информации тоже нет [10].

Это создает дополнительные трудности. В данной статье выбран следующий вариант. Считается, что вся информация о случайном факторе «кодируется» словами из нулей и единиц. В таком случае длину соответствующего слова можно считать мерой количества информации. При этом, разумеется, длина слова зависит от реализовавшегося значения неопределенного фактора, т.е. сама является случайной величиной.

Опереирующая сторона принимает решение в условиях риска. Поэтому математическая модель этого процесса должна содержать формальное описание отношения оперирующей стороны к этому риску. Наиболее простыми и наиболее часто используемыми подходами являются два³: гарантированный и риск-нейтральный. При первом из них оперирующая сторона ориентируется на наихудший возможный случай, а при втором готова ориентироваться на математическое ожидание своего результата. В рассматриваемом случае имеется два критерия: эффективность управления и количество информации. К каждому из них можно применить один из двух подходов. Таким образом, получаем четыре варианта.

¹ О синтаксисе и семантике логики говорят уже давно. Кто первым выделил эти аспекты сказать трудно. Вопрос о прагматической ценности информации, видимо, одним из первых поставил А.А. Харкевич [13]

² Семантика «оптимальных» сообщений будет найдена в процессе решения задачи.

³ Разумеется, возможны и более сложные варианты, такие как принцип *Value at Risk*, но на них пока останавливаться не станем.

Задача, в которой дважды используется гарантированный подход, легко сводится к задаче, исследованной в [6]. Аналогично, если использовать риск-нейтральный подход для оценки эффективности и гарантированный подход для оценки количества информации, то получится задача, сводящаяся к решенной в [7]. В данной статье гарантированный подход используется в отношении эффективности управления, а риск-нейтральный – в отношении количества информации. Последний вариант, в котором оба критерия «сворачиваются» с помощью оператора математического ожидания, видимо, самый сложный. Наряду с первым он выглядит наиболее логичным, но разобраться с ним пока не удается.

Использование средней длины сообщения в качестве меры количества информации, по сути, приводит к идеям, впервые использованным К. Шенноном [14]. Использование гарантированного подхода активно пропагандировал Ю.Б. Гермейер [4].

Устранив таким образом неопределенность, придем к классической двухкритериальной задаче. Причем из формальных конструкций легко увидеть, что два используемых критерия противоречивы: чем большей гарантированной эффективности управления желательно достичь, тем больше информации для этого потребуется. Поэтому с данной многокритериальностью нужно как-то «бороться». Технически проще решать задачу в следующей постановке. Фиксируем устраивающую оперирующую сторону эффективность управления и будем искать стратегию, которая обеспечит гарантированное получение этой эффективности с наименьшими «затратами» информации. Поскольку при этом удастся описать все достижимые значения векторного критерия, все остальные варианты свертки критериев можно сводить к этой задаче (хотя бы в принципе¹).

¹ В самом деле, пусть решается двухкритериальная задача с критериями $f_1(u)$ и $f_2(u)$ и оперирующая сторона склонна использовать свертку $F(f_1(u), f_2(u))$. Если удастся описать множество X реализуемых векторов $(f_1(u), f_2(u))$, то останется лишь решить задачу поиска максимума функции $F(x_1, x_2)$ на множестве X .

Всякая «разумная» постановка задачи должна быть математически корректной. В частности, ее решение не должно «сильно» меняться при «малых» изменениях параметров задачи. В рассматриваемой модели с этим дело обстоит не совсем благополучно. Конечно, всякую некорректную задачу можно регуляризовать, но не хотелось бы с самого начала заниматься этим. Поэтому при постановке задачи пришлось много внимания уделить техническим деталям, чтобы добиться необходимой степени устойчивости. Кое-чем при этом пришлось пожертвовать. Например, далее отсутствует определение «точного» решения. Вместо этого осуществляется поиск ε -оптимальных стратегий. Детальное обсуждение этих вопросов выходит за рамки данной статьи, хотя, вероятно, представляет определенный интерес.

2. Постановка задачи

Рассмотрим простейшую модель принятия решений в условиях риска.

Пусть функция g отображает декартово произведение $U \times A$ множеств U и A в множество действительных чисел \mathbf{R} . Множества U и A будем предполагать наделенными топологиями и компактными. Функцию g будем считать непрерывной в топологии декартова произведения $U \times A$. Допустим, кроме того, что на множестве A задана борелевская вероятностная мера \wp . Оператор вычисления математического ожидания по этой мере будем обозначать символом M .

Интерпретировать эти конструкции будем следующим образом. Оперирующая сторона выбирает свое управление из множества U . Ее цель состоит в максимизации своего выигрыша, задаваемого функцией g . Но этот выигрыш зависит не только от выбранного управления $u \in U$, но и от реализовавшегося значения случайного фактора $\alpha \in A$. Мера \wp на множестве A описывает вероятность реализации конкретного значения α .

Будем искать максимальный гарантированный результат оперирующей стороны. Разумеется, он зависит от ее информированности о реализовавшемся значении α . Если оперирующая

сторона в момент принятия решения не имеет информации об α , то ее максимальный гарантированный результат равен

$$\max_{u \in U} \min_{\alpha \in A} g(u, \alpha).$$

Если же она рассчитывает на получение достоверной информации об α , то ее максимальный гарантированный результат составит

$$\min_{\alpha \in A} \max_{u \in U} g(u, \alpha).$$

Это – два крайних случая. В данной статье в основном будет исследоваться промежуточный случай. Начнем с его неформального описания. Несложно придумать примеры операций, в которых для однозначной идентификации значения $\alpha \in A$ требуется очень большой объем информации. В таком случае своевременное получение и обработка такой информации может оказаться технически невозможной. Поэтому представляют значительный интерес те способы управления системой, при которых удастся получить достаточно хороший гарантированный результат с помощью обработки относительно небольших объемах информации. Формализовать сказанное можно следующим образом.

Здесь и далее $\Phi(X, Y)$ будет обозначать класс всех функций из множества X в множество Y .

Пусть Ξ – множество всех слов в алфавите $\{0, 1\}$. Пустое слово Λ будем считать принадлежащим множеству Ξ . Обозначим через $l(s)$ длину слова $s \in \Xi$. Разумеется, $l(\Lambda) = 0$. Множество Ξ счетно, поэтому можно считать, что на нем задана σ -алгебра множеств, в которой все одноточечные множества измеримы. На множестве A также задана σ -алгебра измеримых множеств. Обозначим через $\Psi(A, \Xi)$ множество всех измеримых функций, отображающих A в Ξ .

Предположим, что оперирующая сторона имеет свободный доступ к информации о реализовавшемся значении случайного фактора $\alpha \in A$, но получает ее закодированной в виде слов из множества Ξ . Способ кодировки $P: A \rightarrow \Xi$ выбирает сама опе-

рирующая сторона¹. В качестве способов кодировки будем рассматривать только измеримые функции P . Если реализуется значение случайного фактора α , то оперирующая сторона получит сообщение $P(\alpha)$. Объем этого сообщения составит $l(P(\alpha))$ бит. Получив такое сообщение, она вправе выбрать любое управление u из множества U . Тогда, по сути, она выбирает некоторую функцию $u_*: \Xi \rightarrow U$.

В описанных условиях гарантированный результат оперирующей стороны будет равен

$$R(u_*, P) = \inf_{\alpha \in A} g(u_*(P(\alpha)), \alpha).$$

А математическое ожидание объема перерабатываемой информации составит $L(u_*, P) = Ml(P(\alpha))$ бит.

Хотелось бы, чтобы при выбранной стратегии (u_*, P) величина $R(u_*, P)$ была побольше, а величина $L(u_*, P)$ – как можно меньше. Но очевидно, что эти два условия противоречивы. Таким образом, здесь имеется двухкритериальная задача. Чтобы с ней разобраться, опишем все реализуемые в данной модели принятия решений пары значений $R(u_*, P)$ и $L(u_*, P)$. Технически удобнее поставить задачу следующим образом.

Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Будем искать такую стратегию (u_*, P) , для которой выполняется неравенство

$$(1) \quad R(u_*, P) > \sup_{(u_*, P) \in \Phi(\Xi, U) \times \Psi(A, \Xi)} \inf_{\alpha \in A} g(u_*(P(\alpha)), \alpha) - \varepsilon,$$

а величина $L(u_*, P)$ имеет наименьшее возможное значение.

3. Первая оценка

В данном разделе будет получена самая грубая оценка решения сформулированной задачи. Кроме того здесь удобно будет обсудить некоторые детали ее постановки.

Множество Ξ содержит слова сколь угодно большой длины. Поэтому а priori не очевидно, что математическое ожидание

¹ Возвращаясь к сказанному во введении, отметим, что «смысл» сообщения $s \in \Xi$ состоит в том, что реализовавшееся значение неопределенного фактора α принадлежит множеству $P^{-1}(s)$.

$L(u^*, P) = MI(P(\alpha))$ будет конечным даже при «оптимальном» выборе стратегии (u^*, P) . Тем не менее справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует стратегия (u^*, P) , удовлетворяющая неравенству (1), для которой величина $L(u^*, P)$ конечна.

Доказательство. Обозначим

$$R = \sup_{(u^*, P) \in \Phi(\Xi, U) \times \Psi(A, \Xi)} \inf_{\alpha \in A} g(u^*(P(\alpha)), \alpha).$$

По определению точной верхней грани существует стратегия (u^*, P) , для которой $R(u^*, P) > R - \varepsilon$. Но тогда по определению величины $R(u^*, P)$ для любого $\alpha \in A$ выполняется неравенство $g(u^*(P(\alpha)), \alpha) > R - \varepsilon$. Следовательно, множества

$$O_\varepsilon(u) = \{ \alpha \in A : g(u, \alpha) > R - \varepsilon \}$$

покрывают пространство A .

Функция g непрерывна, поэтому множества $O_\varepsilon(u)$ открыты. А пространство A предполагается компактным, поэтому существует конечный набор u_1, u_2, \dots, u_n элементов множества U такой, что множества $O_\varepsilon(u_1), O_\varepsilon(u_2), \dots, O_\varepsilon(u_n)$ по-прежнему покрывают пространство A .

Произвольным образом выберем n слов s_1, s_2, \dots, s_n из множества Ξ . Определим отображение $P: A \rightarrow \Xi$ условием: $P(\alpha) = s_k$, где k — это наименьший номер i , для которого выполняется включение $\alpha \in O_\varepsilon(u_i)$ (такой номер существует, поскольку множества $O_\varepsilon(u_1), O_\varepsilon(u_2), \dots, O_\varepsilon(u_n)$ покрывают A). Пусть функция $u^*: \Xi \rightarrow U$ такова, что $u^*(s_i) = u_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Покажем, что так построенная стратегия (u^*, P) удовлетворяет всем условиям леммы.

Так как функция g непрерывна, множества $O_\varepsilon(u_i)$ открыты. А поскольку мера на множестве A предполагается борелевской, отображение P измеримо.

Отображение P определено так, что мера множества

$$P^{-1}(s) = \{ \alpha \in A : P(\alpha) = s \}$$

положительна лишь для конечного множества слов $s \in \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. Поэтому очевидно, что

$$L(u_*, P) \leq \max_{i=1,2,\dots,n} l(s_i).$$

Фиксируем произвольное $\alpha \in A$. Пусть $P(\alpha) = s_i$. Тогда по построению отображения P выполняется включение $\alpha \in O_\varepsilon(u_i)$. Значит, $g(u_*(P(\alpha)), \alpha) = g(u_*(s_i), \alpha) = g(u_i, \alpha) > R - \varepsilon$.

Поскольку это неравенство справедливо при любом $\alpha \in A$, имеем

$$\inf_{\alpha \in A} g(u_*(P(\alpha)), \alpha) > R - \varepsilon,$$

т.е. выполняется условие (1).

Лемма доказана.

Рассмотрим конкретную модель рассматриваемого типа.

Пример 1. Пусть $U = [0, 1]$, $A = [0, 1]$, множества U и A снабжены евклидовыми топологиями, а множество A , кроме того, наделена мерой Лебега, которая используется для вычисления математических ожиданий. Интересы оперирующей стороны описываются стремлением к максимизации значения функции $g(u, \alpha) = -|u - \alpha|$.

Прежде всего заметим, что верхняя грань в формуле (1) в этой достаточно простой модели не достигается. Покажем это.

С одной стороны, очевидно, что эта верхняя грань не может быть строго больше нуля.

Фиксируем произвольное $\delta > 0$. Определим стратегию $(u_{*\delta}, P_\delta)$ следующим образом.

Прежде всего, перенумеруем слова из множества Ξ . Припишем к слову $s \in \Xi$ слева единичку. Тогда слово $1s$ можно рассматривать как двоичную запись некоторого натурального числа k . Именно этот номер и присвоим слову s . Легко видеть, что построенное отображение множества Ξ в множество натуральных чисел \mathbb{N} взаимно однозначно и каждому натуральному числу k соответствует единственное слово s_k . Очевидно, $s_1 = \Lambda$, а при $k > i$ имеем $l(s_k) \geq l(s_i)$. Это свойство нумерации очень удобно. Поэтому такая нумерация будет использоваться и в дальнейшем.

Далее имеем $l(s_1) = 0$, $l(s_2) = (s_3) = 1, \dots$ В общем случае получим $l(s_k) = [\log k]$ (здесь и далее используются логарифмы по

основанию 2, а квадратные скобки обозначают целую часть числа). Пусть $a_k = [\log k]$.

Положим $b_k = 2k\delta$, $k = 1, 2, \dots, m = \left[\frac{1}{2\delta} \right]$. Пусть $P(\alpha) = s_0$ при $\alpha \in [0, b_1]$, $P(\alpha) = s_k$ при $\alpha \in (b_{k-1}, b_k]$, $k = 2, \dots, m$, $P(\alpha) = s_{m+1}$ при $\alpha \in (b_m, 1]$. Определим функцию u_* условиями $u_*(s_k) = b_k - \delta$ при $k = 1, 2, \dots, m$, $s_*(s_{m+1}) = \min\{b_m + \delta, 1\}$ (при $k > m + 1$ можно определить функцию произвольно).

Непосредственно проверяется, что для такой стратегии $(u_{*\delta}, P_\delta)$ выполняется равенство

$$\min_{\alpha \in A} g(u_*(P(\alpha)), \alpha) = -\delta,$$

причем минимальное значение достигается в точках $\alpha = 0, b_1, b_2, \dots, b_m$. А при $\delta < \varepsilon$ стратегия $(u_{*\delta}, P_\delta)$ удовлетворяет условию (1).

Поскольку δ выбиралось произвольно, верхняя грань в формуле (1) для данной модели в точности равна нулю.

Предположим, что эта верхняя грань достигается и оптимальной является стратегия (u_*, P) . Тогда для любого $\alpha \in [0, 1]$ выполняется равенство $u_*(P(\alpha)) = \alpha$, т.е. множество значений функции $u_* \circ P$ совпадает с отрезком $[0, 1]$ и, следовательно, имеет мощность континуума. Но с другой стороны мощность множества значений функции $u_* \circ P$ не может быть больше мощности множества значений функции P . А последнее множество принадлежит счетному множеству Ξ , а потому само не более чем счетно. Получено противоречие.

Таким образом, чтобы получить формально корректную постановку задачи, «отступить» хотя бы на ε от наибольшего значения, как это сделано в формуле (1), просто необходимо. Такой подход оправдан и в прикладном смысле. А.Ф. Кононенко неоднократно подчеркивал, что максимальный гарантированный результат сам по себе не имеет особого смысла. Осмысленным является гарантированный результат, который приемлем для оперирующей стороны. И такой подход оправдан, поскольку в рассматриваемой в данной статье и в других похожих моделях при приближении к оптимуму увеличивается «слож-

ность» оптимальных стратегии, увеличивается чувствительность к малым изменениям параметров модели, и другие «неприятные» свойства накапливаются. Это никак не учитывается в формальной постановке, но играет значительную роль на практике.

Теперь можно заняться наименьшим объемом информации, позволяющей получить нужный результат. На самом деле построенная выше стратегия $(u_{*\delta}, P_\delta)$ «почти оптимальна», а именно, она предполагает использование наименьшего объема информации среди всех стратегий, удовлетворяющих нестрогому ограничению

$$(2) \quad R(u_*, P) \geq \sup_{(u, P) \in \Phi(\Xi, U) \times \Psi(A, \Xi)} \inf_{\alpha \in A} g(u_*(P(\alpha)), \alpha) - \delta.$$

Докажем это. Пусть (u_*, P) – произвольная стратегия. Поскольку выполняется неравенство (2), при любом i множество $P^{-1}(s_i)$ содержится в отрезке $[u_*(s_i) - \delta, u_*(s_i) + \delta]$ а потому его мера $x_i = \varphi(P^{-1}(s_i))$ не превосходит 2δ . Значит, набор чисел x_1, x_2, \dots является допустимой точкой (бесконечномерной) задачи линейного программирования

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \rightarrow \min,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1,$$

$$x_i \leq 2\delta, \quad i = 1, 2, \dots$$

Но так как последовательность a_1, a_2, \dots не убывает, числа $x_{1\delta} = 2\delta, x_{2\delta} = 2\delta, \dots, x_{m\delta} = 2\delta, x_{m+1} = 1 - 2m\delta, 0, 0, \dots$ дают оптимальное решение этой задачи линейного программирования. Поэтому

$$L(u_*, P) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_{i\delta} = L(u_{*\delta}, P_\delta).$$

Отсюда следуют два факта. Во-первых, при $\delta = \varepsilon$ условие (2) слабее условия (1), поэтому оптимальное значение критерия в рассматриваемой задаче принятия решений не превосходит $L(u_{*\delta}, P_\delta) = L(u_{*\varepsilon}, P_\varepsilon)$. А с другой стороны, при $\delta < \varepsilon$ уже условие (1) слабее условия (2), и потому искомое значение кри-

терия не меньше, чем $\lim_{\delta \rightarrow \varepsilon - 0} L(u_{*\delta}, P_\delta) = L(u_{*\varepsilon}, P_\varepsilon)$. Таким образом, оптимальное значение критерия в нашем примере равно $L(u_{*\varepsilon}, P_\varepsilon)$, но оно не достигается.

Теперь можно понять, почему не достигается верхняя грань в формуле (1). Несложно проверить, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} L(u_{*\varepsilon}, P_\varepsilon) = \infty$, т.е. для того чтобы получить максимальный возможный результат в данном примере, необходим бесконечный объем информации. Подобный эффект характерен для многих задач подобного типа.

4. Структура оптимальной стратегии

Фиксируем произвольную стратегию (u^*, P) , удовлетворяющую условию (1). Последовательно будем упрощать ее, приводя к некоторому стандартному виду. При этом будем следить за тем, чтобы на каждом шаге ограничение (1) не нарушалось, а значение критерия $L(u^*, P)$ не увеличивалось.

Будем использовать нумерацию слов из множества Ξ , определенную при исследовании примера 1.

Выберем число ε' так, что $g(u^*(P(\alpha)), \alpha) > R - \varepsilon' > R - \varepsilon$. Это можно сделать, так как выполняется условие (1). Пусть

$$O_{\varepsilon'}(u) = \{\alpha \in A: g(u, \alpha) > R - \varepsilon'\}.$$

В силу выбора числа ε' , множества $O_{\varepsilon'}(u^*(s_1)), O_{\varepsilon'}(u^*(s_2)), \dots$ покрывают пространство A . Поскольку функция g непрерывна, эти множества открыты. Пространство A предполагается компактным, поэтому из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Зафиксируем одно из таких подпокрытий. Пусть m – наибольший из номеров i слов s_i , для которых $O_{\varepsilon'}(u^*(s_i))$ входит в это подпокрытие. Тогда множества $O_{\varepsilon'}(u^*(s_1)), O_{\varepsilon'}(u^*(s_1)), \dots, O_{\varepsilon'}(u^*(s_m))$ тоже образуют покрытие пространства A , возможно, избыточное.

Если $P(\alpha) \leq m$, то положим $P_1(\alpha) = P(\alpha)$. Для остальных $\alpha \in A$ найдем наименьший номер i , для которого $\alpha \in O_{\varepsilon'}(u^*(s_i))$ и положим $P_1(\alpha) = i$. Поскольку $O_{\varepsilon'}(u^*(s_1)), O_{\varepsilon'}(u^*(s_1)), \dots, O_{\varepsilon'}(u^*(s_m))$ – покрытие, тем самым корректно определена функ-

ция $P_1: A \rightarrow \Xi$. Кроме того, по построению для всех $\alpha \in A$ выполняется неравенство $P_1(\alpha) \leq m$.

Докажем, что построенная функция P_1 измерима. Поскольку множество Ξ счетно, достаточно доказать, что измеримы множества $P_1^{-1}(s_i), i=1, 2, \dots$. Если $i > m$, то множество $P_1^{-1}(s_i)$ пусто, поэтому все очевидно. Множество $P_1^{-1}(s_1)$ может быть представлено в виде

$$P_1^{-1}(s_1) = P^{-1}(s_1) \cup \bigcup_{i=m+1}^{\infty} (O_{\varepsilon'}(u_*(s_1)) \cap P^{-1}(s_i)).$$

Множество $P^{-1}(s_1)$ измеримо, поскольку измерима функция P . Множество $O_{\varepsilon'}(u_*(s_1))$ открыто, а потому измеримо, так как мера предполагается борелевской. Множество $P^{-1}(s_i)$ тоже измеримо, поскольку измерима функция P . Значит измеримо пересечение $O_{\varepsilon'}(u_*(s_1)) \cap P^{-1}(s_i)$, а, следовательно, и объединение счетного числа измеримых множеств $P_1^{-1}(s_1)$. Для $i = 2, \dots, m$ измеримость множества $P_1^{-1}(s_i)$ доказывается теми же простыми рассуждениями с использованием представления

$$P_1^{-1}(s_i) = P^{-1}(s_i) \cup \bigcup_{l=m+1}^{\infty} \left(\left(O_{\varepsilon'}(u_*(s_i)) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} O_{\varepsilon'}(u_*(s_j)) \right) \cap P^{-1}(s_l) \right).$$

Покажем, что для стратегии (u_*, P_1) выполняется условие $R(u_*, P_1) > R - \varepsilon$. Если α таково, что $P(\alpha) \leq m$, то по определению $g(u_*(P_1(\alpha)), \alpha) = g(u_*(P(\alpha)), \alpha) > R - \varepsilon'$.

В противном случае $P_1(\alpha) = s_i$ при некотором $i = 1, 2, \dots, m$ и $\alpha \in O_{\varepsilon'}(u_*(s_i)) = O_{\varepsilon'}(u_*(P_1(\alpha)))$. Тогда

$$g(u_*(P_1(\alpha)), \alpha) = g(u_*(s_i), \alpha) > R - \varepsilon'.$$

Таким образом, для любого $\alpha \in A$ выполняется неравенство

$$g(u_*(P_1(\alpha)), \alpha) > R - \varepsilon'.$$

Значит,

$$R(u_*, P_1) = \inf_{\alpha \in A} g(u_*(P_1(\alpha)), \alpha) - \varepsilon' \geq R - \varepsilon' > R - \varepsilon.$$

Теперь убедимся в том, что $L(u_*, P) \geq L(u_*, P_1)$. Нумерация слов из множества Ξ выбрана так, что $l(s_i) \geq l(s_m)$ при $i > m$ и $l(s_i) \leq l(s_m)$ при $i \leq m$. А функция P_1 построена так, что

$\wp(P_1^{-1}(s_i)) = 0$ при $i > m$ и $\wp(P^{-1}(s_i)) \geq \wp(P_1^{-1}(s_i))$ при $i \leq m$. Поэтому

$$\begin{aligned} L(u_*, P) - L(u_*, P_1) &= Ml(P(\alpha)) - Ml(P_1(\alpha)) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} l(s_i) \wp(P^{-1}(s_i)) - \sum_{i=1}^{\infty} l(s_i) \wp(P_1^{-1}(s_i)) = \\ &= \sum_{i=1}^m l(s_i) (\wp(P^{-1}(s_i)) - \wp(P_1^{-1}(s_i))) - \sum_{i=m+1}^{\infty} l(s_i) \wp(P_1^{-1}(s_i)) \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^m l(s_m) (\wp(P^{-1}(s_i)) - \wp(P_1^{-1}(s_i))) - \sum_{i=m+1}^{\infty} l(s_m) \wp(P_1^{-1}(s_i)) = \\ &= l(s_m) \left(\sum_{i=1}^m (\wp(P^{-1}(s_i)) - \wp(P_1^{-1}(s_i))) - \sum_{i=m+1}^{\infty} \wp(P_1^{-1}(s_i)) \right) = \\ &= l(s_m) \left(\sum_{i=1}^m \wp(P^{-1}(s_i)) - \sum_{i=1}^{\infty} \wp(P_1^{-1}(s_i)) \right) = 0, \end{aligned}$$

так как $\sum_{i=1}^m \wp(P^{-1}(s_i)) = 1$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \wp(P_1^{-1}(s_i)) = 1$.

Перейдем к следующему шагу. Определим функцию $P_2: A \rightarrow \Xi$ условиями: $P_2(\alpha) = s_1$ при $\alpha \in O_{\varepsilon'}(u_*(s_1))$, и $P_2(\alpha) = P_1(\alpha)$ при остальных значениях α .

Множество $P_2^{-1}(s_1)$ открыто, а потому измеримо. При $i > 1$ имеем $P_2^{-1}(s_i) = P_1^{-1}(s_i) \setminus O_{\varepsilon'}(u_*(s_1))$. Это множество измеримо, поскольку измерима функция P_1 . Таким образом, функция P_2 тоже измерима.

Для $\alpha \in O_{\varepsilon'}(u_*(s_1))$ неравенство $g(u_*(P_1(\alpha)), \alpha) > R - \varepsilon'$ выполняется в силу определения множества $O_{\varepsilon'}(u_*(s_1))$. А для остальных α оно выполняется так как

$$g(u_*(P_2(\alpha)), \alpha) = g(u_*(P_1(\alpha)), \alpha) > R - \varepsilon'.$$

Отсюда, как и выше, следует неравенство $R(u_*, P_1) > R - \varepsilon$.

Наконец, по построению выполняются включения $P_1^{-1}(s_1) \subset P_2^{-1}(s_1)$ и $P_2^{-1}(s_i) \subset P_1^{-1}(s_i)$ при $i > 1$. Следовательно, $\wp(P_1^{-1}(s_1)) \leq \wp(P_2^{-1}(s_1))$ и $\wp(P_1^{-1}(s_i)) \geq \wp(P_2^{-1}(s_i))$ для $i > 1$. Отсю-

да, как и на предыдущем шаге, получается неравенство $L(u_*, P_1) \geq L(u_*, P_2)$.

Теперь будем рассуждать индуктивно. Пусть функция P_i уже определена. Определим функцию P_{i+1} следующим образом.

Положим $P_{i+1}(\alpha) = s_i$ при $\alpha \in O_{\varepsilon'}(u_*(s_i)) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} O_{\varepsilon'}(u_*(s_j))$. А при

остальных значениях α положим $P_{i+1}(\alpha) = P_i(\alpha)$.

Те же рассуждения, которые использовались раньше, показывают, что так построенная функция P_{i+1} измерима, а для стратегии (u_*, P_{i+1}) выполняются неравенства $R(u_*, P_{i+1}) > R - \varepsilon$ и $L(u_*, P_{i+1}) \geq L(u_*, P_i)$.

Дальше нас будет интересовать стратегия (u_*, P_m) . Для нее

$$L(u_*, P_m) = h_m(u_1, u_2, \dots, u_m, \varepsilon') = \sum_{i=1}^m l(s_i) \wp \left(O_{\varepsilon'}(u_i) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} O_{\varepsilon'}(u_j) \right),$$

где для простоты положено $u_i = u_*(s_i)$ и $\bigcup_{j=1}^0 O_{\varepsilon'}(u_j) = \emptyset$.

Кроме того,

$$f_m(u_1, u_2, \dots, u_m) = \min_{\alpha \in A} \max_{i=1, 2, \dots, m} g(u_i, \alpha) =$$

$$\min_{\alpha \in A} \max_{i=1, 2, \dots, m} g(u_*(s_i), \alpha) \geq \min_{\alpha \in A} g(u_*(P_m(\alpha)), \alpha) \geq R - \varepsilon'.$$

Положим

$$D_m(\varepsilon') = \{(u_1, u_2, \dots, u_m) \in U^m : f_m(u_1, u_2, \dots, u_m) \geq R - \varepsilon'\}.$$

Из приведенных рассуждений следует, что точная нижняя грань значений величины $L(u_*, P_i)$ при выполнении ограничения (1) не меньше, чем

$$(3) \quad L_\varepsilon = \inf_{0 < \varepsilon' < \varepsilon} \inf_{m=1, 2, \dots} \inf_{(u_1, u_2, \dots, u_m) \in D_m(\varepsilon')} h_m(u_1, u_2, \dots, u_m, \varepsilon').$$

Полученная оценка является точной. А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема. Точная нижняя грань значений величины $L(u_*, P_i)$ при выполнении ограничения (1) равна L_ε .

Доказательство. Осталось доказать, что существуют стратегии оперирующей стороны, позволяющие получать результат, сколь угодно близкий к L_ε . Фиксируем произвольное $\delta > 0$ и по-

строим стратегию (u^*, P_i) , для которой $R(u^*, P_i) > R - \varepsilon$, а $L(u^*, P_i) < L_\varepsilon + \delta$.

Выберем числа $\varepsilon'' \in (0, \varepsilon)$ и m и управления $(u_1, u_2, \dots, u_m) \in D_m(\varepsilon'')$ так, что $h_m(u_1, u_2, \dots, u_m, \varepsilon'') < L_\varepsilon + \delta$. Пусть число ε' удовлетворяет условию $\varepsilon'' < \varepsilon' < \varepsilon$.

Пусть $u_*(s_i) = u_i$ для $i = 1, 2, \dots, m$ (для остальных i можно определить функцию произвольно). Для $\alpha \in A$ найдем наименьший номер k , для которого $\alpha \in O_{\varepsilon'}(u_k)$ и положим $P(\alpha) = s_k$.

Поскольку $(u_1, u_2, \dots, u_m) \in D_m(\varepsilon'')$, выполняется неравенство $f_m(u_1, u_2, \dots, u_m) \geq R - \varepsilon''$, значит, множества

$$\{\alpha \in A: g(u_i, \alpha) \geq R - \varepsilon''\}, i = 1, 2, \dots, m,$$

покрывают пространство A . Значит, тем более множества $O_{\varepsilon'}(u_1), O_{\varepsilon'}(u_2), \dots, O_{\varepsilon'}(u_m)$ покрывают его. Поэтому функция P корректно определена для всех $\alpha \in A$.

Множества $O_{\varepsilon'}(u_i)$ открыты, а мера \wp предполагается борелевской, поэтому функция P измерима. Значит, (u^*, P_i) – стратегия.

По построению, для каждого $\alpha \in A$ имеет место включение $\alpha \in O_{\varepsilon'}(u_*(P(\alpha)))$. Значит, для любого $\alpha \in A$ выполняется неравенство $g(u_*(P(\alpha)), \alpha) > R - \varepsilon'$. А в силу произвольности α получим

$$R(u^*, P_i) = \inf_{\alpha \in A} g(u_*(P_i(\alpha)), \alpha) - \varepsilon' \geq R - \varepsilon' > R - \varepsilon.$$

Таким образом, для построенной стратегии (u^*, P_i) условие (1) выполнено.

Остается недоказанным лишь неравенство $L(u^*, P_i) < L_\varepsilon + \delta$. По построению $L(u^*, P_i) = h_m(u_1, u_2, \dots, u_m, \varepsilon')$. А в силу выбора чисел ε'' и m и управлений (u_1, u_2, \dots, u_m) , выполняется неравенство $h_m(u_1, u_2, \dots, u_m, \varepsilon'') < L_\varepsilon + \delta$. Поэтому достаточно доказать, что $h_m(u_1, u_2, \dots, u_m, \varepsilon') \leq h_m(u_1, u_2, \dots, u_m, \varepsilon'')$. Это можно сделать по индукции.

Так как $\varepsilon'' < \varepsilon'$ имеем $O_{\varepsilon''}(u_1) \subset O_{\varepsilon'}(u_1)$, поэтому $\wp(O_{\varepsilon''}(u_1)) \leq \wp(O_{\varepsilon'}(u_1))$, $\wp(O_{\varepsilon''}(u_2) \setminus O_{\varepsilon''}(u_1)) \geq \wp(O_{\varepsilon'}(u_2) \setminus O_{\varepsilon'}(u_1))$ и т.д. Поскольку последовательность $l(s_i)$ не убывает, получаем отсюда

$$\begin{aligned}
 h_m(u_1, u_2, \dots, u_m, \varepsilon^n) &= \sum_{i=1}^m l(s_i) \wp \left(O_{\varepsilon^r}(u_i) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} O_{\varepsilon^r}(u_j) \right) - \\
 &- l(s_1) \wp(O_{\varepsilon^r}(u_1)) - \sum_{i=2}^m l(s_i) \wp \left(O_{\varepsilon^r}(u_i) \setminus \left(O_{\varepsilon^r}(u_i) \cup \bigcup_{j=2}^{i-1} O_{\varepsilon^r}(u_j) \right) \right) = \\
 &= l(s_1) (\wp(O_{\varepsilon^r}(u_1)) - \wp(O_{\varepsilon^r}(u_1))) - \\
 &- \sum_{i=2}^m \left[l(s_i) \left(\wp \left(O_{\varepsilon^r}(u_i) \setminus \left(O_{\varepsilon^r}(u_i) \cup \bigcup_{j=2}^{i-1} O_{\varepsilon^r}(u_j) \right) \right) \right) \right] - \\
 &- \wp \left(O_{\varepsilon^r}(u_i) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} O_{\varepsilon^r}(u_j) \right) \Big] \geq \\
 &\geq l(s_1) (\wp(O_{\varepsilon^r}(u_1)) - \wp(O_{\varepsilon^r}(u_1))) - \\
 &- \sum_{i=2}^m l(s_i) \left[\wp \left(O_{\varepsilon^r}(u_i) \setminus \left(O_{\varepsilon^r}(u_i) \cup \bigcup_{j=2}^{i-1} O_{\varepsilon^r}(u_j) \right) \right) \right] - \\
 &- \wp \left(O_{\varepsilon^r}(u_i) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} O_{\varepsilon^r}(u_j) \right) \Big] = \\
 &= l(s_1) \left[\sum_{i=1}^m \wp \left(O_{\varepsilon^r}(u_i) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} O_{\varepsilon^r}(u_j) \right) - \right. \\
 &\left. - \wp(O_{\varepsilon^r}(u_1)) - \sum_{i=2}^m \wp \left(O_{\varepsilon^r}(u_i) \setminus \left(O_{\varepsilon^r}(u_i) \cup \bigcup_{j=2}^{i-1} O_{\varepsilon^r}(u_j) \right) \right) \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^m l(s_i) \wp \left(O_{\varepsilon^r}(u_i) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} O_{\varepsilon^r}(u_j) \right) \geq \\
 &\geq l(s_1) \wp(O_{\varepsilon^r}(u_1)) + \sum_{i=2}^m l(s_i) \wp \left(O_{\varepsilon^r}(u_i) \setminus \left(O_{\varepsilon^r}(u_i) \cup \bigcup_{j=2}^{i-1} O_{\varepsilon^r}(u_j) \right) \right),
 \end{aligned}$$

т.е. в сумме, стоящей в левой части этого неравенства, можно заменить множество $O_{\varepsilon^r}(u_1)$ бóльшим множеством $O_{\varepsilon^r}(u_1)$, не увеличив при этом суммы. Аналогичными выкладками показы-

вається, что в новой сумме можно заменить множество $O_{\varepsilon''}(u_2)$ множеством $O_{\varepsilon'}(u_2)$ и т.д. Заменяя множество $O_{\varepsilon''}(u_m)$ множеством $O_{\varepsilon'}(u_m)$ получим сумму

$$\sum_{i=1}^m l(s_i) \delta \left(O_{\varepsilon'}(u_i) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} O_{\varepsilon'}(u_j) \right) = h_m(u_1, u_2, \dots, u_m, \varepsilon').$$

Таким образом, $L(u^*, P_i) < L_{\varepsilon} + \delta$. Теорема доказана.

5. Комментарии и примеры

Остановимся на некоторых математических аспектах рассматриваемой постановки задачи. Здесь имеется довольно много тонкостей. Некоторые из них мы и обсудим.

За одним исключением, о котором будет сказано далее, при постановке выбрана следующая стратегия. Если какое-то предположение позволяет «не думать» о технических деталях, но при этом не кажется ограничительным при возможном исследовании конкретных прикладных задач, то оно принимается¹. При прочих же равных выбиралась более общая постановка задачи. Пожалуй, наибольшие сомнения вызывает условие (1).

В частности, пример 1 показывает, что в рассматриваемой задаче точное решение может отсутствовать, поскольку соответствующий минимум не достигается. И в этом примере такой не очень приятный факт напрямую связан с тем, что неравенство в условии (1) – строгое. Не стоит ли заменить это неравенство на нестрогое?

Сразу же заметим, что при такой замене (с сохранением остальных предположений) точное решение, вообще говоря, может все-таки отсутствовать. Другая причина, по которой выбран вариант со строгим неравенством, более существенна.

Всякая постановка задачи должна быть корректной, в частности, ее решение не должно сильно меняться при малых изме-

¹ Таким является, например, предположение о компактности множества U . Кстати говоря, предположение о компактности множества A в данном случае более критично, но и оно вряд ли может вызывать серьезные возражения.

нениях параметров задачи. В рассматриваемой задаче с этим все не очень благополучно. Но выбор варианта со строгим неравенством гарантирует хотя бы следующее. Выбранная «почти оптимальная» стратегия остается допустимой и в «достаточно близких» задачах и позволяет оперирующей стороне получить «почти такой же» выигрыш (смысл слов «достаточно близкий» в данном случае зависит от выбранной стратегии). При этом, конечно, точная нижняя грань может «скачком» уменьшиться при переходе к «близкой» модели, из-за чего выбранная стратегия может перестать быть «почти оптимальной». Это достаточно приятное свойство, если говорить о возможных приложениях. И на практике этого обычно бывает достаточно. При замене строгого неравенства на нестрогое все станет совсем не так.

В данной задаче исследование ее устойчивости оказывается довольно интересным. Но объем статьи не позволяет останавливаться на нем подробно. Укажем лишь некоторые (наиболее важные?) причины появления неустойчивости.

- Даже для непрерывной функции $\varphi: X \rightarrow \mathbf{R}$ множество $\{x \in X: \varphi(x) \geq 0\}$ может быть «больше» замыкания множества $\{x \in X: \varphi(x) > 0\}$.

- Мера $\wp(\overline{X})$ замыкания \overline{X} множества X может оказаться строго больше меры $\wp(X)$ самого множества X (например, если существуют точки положительной меры).

- Условие $\inf_{x \in X} \varphi(x) > 0$, вообще говоря, сильнее, чем условие « $\forall x \in X \varphi(x) > 0$ ».

Знание таких причин часто помогает при исследовании устойчивости задачи и ее регуляризации.

Отдельного обсуждения заслуживает третья причина.

Можно заменить условие (1) условием

$$(4) \quad \forall \alpha \in A \quad g(u_*(P(\alpha)), \alpha) > R - \varepsilon.$$

В содержательных терминах новая задача интерпретируется не хуже старой. Решить ее можно с использованием тех же идей, которые применялись в предыдущем разделе. При этом ряда технических трудностей удастся избежать. Да и сам ответ в этой задаче выглядит несколько проще.

Правда сама постановка не совсем привычна: если условие (1) содержит одно ограничение, то в условии (4) записано (бесконечно) много ограничений. Только по этой причине решена задача с ограничением (1) (тем более что вторая задача решается действительно проще).

Задача вычисления величины L_ε по формуле (3) в общем случае довольно сложна. Поэтому стоит обсудить возможные пути ее упрощения.

Прежде всего обратим внимание на число m используемых сообщений. Для его определения так или иначе придется использовать какой-то перебор. Поэтому, конечно, хотелось бы иметь априорную оценку оптимального значения этого числа. К сожалению, простых оценок нет. Уже пример 1 показывает, что оптимальное число m существенно зависит от величины «погрешности» ε и от каких-то глобальных характеристик рассматриваемой модели. Локальных характеристик, типа, скажем, константы Липшица, здесь явно не достаточно. Нужны характеристики вроде ε -энтропии или ε -емкости. Но их вычисление уже само по себе в общем случае представляет собой достаточно серьезную задачу. Поэтому проще и эффективнее искать эти априорные оценки для конкретных задач.

Желание уменьшить число m приводит к идее рассматривать при решении задачи только «неизбыточные» покрытия множества A множествами $O_\varepsilon(u)$. К сожалению, эта идея не срабатывает, что показывает следующий пример.

Пример 2. Пусть $U = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, а функция $g(u, \alpha)$ равна 1 при $u = 1$ и $\alpha = 1, 2, 3$, при $u = 2$ и $\alpha = 4, 5, 6$ и при $u = 3$ и $\alpha = 2, 3, 4, 5$, а при остальных значениях аргументов $g(u, \alpha) = 0$. Множества U и A конечны. Поэтому их можно считать наделенными дискретными топологиями. Тогда все их подмножества будут открытыми. Будем считать все значения α равновероятными.

Понятно, что при полной информации оперирующая сторона может гарантированно получить выигрыш $R = 1$, и в данной задаче интересны значения $\varepsilon \in (0, 1)$.

В таком случае существует лишь два различных покрытия: одно состоит из множеств $O_\varepsilon(1)$ и $O_\varepsilon(2)$, а второе – из множеств $O_\varepsilon(1)$, $O_\varepsilon(2)$ и $O_\varepsilon(3)$.

Если применять описанный выше алгоритм к первому из этих покрытий, то получим отображение $P(\alpha)$, для которого $P(\alpha) = \Lambda$ при $\alpha = 1, 2, 3$ и $P(\alpha) = 0$ при $\alpha = 4, 5, 6$, и функцию u_* , для которой $u_*(\Lambda) = 1$ и $u_*(0) = 0$. При этом $L_\varepsilon = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Если будем использовать покрытие $O_\varepsilon(3)$, $O_\varepsilon(1)$, $O_\varepsilon(2)$, то получим отображение $P(\alpha)$, задаваемое условиями $P(\alpha) = \Lambda$ при $\alpha = 2, 3, 4, 5$, $P(1) = 0$ и $P(6) = 1$. Тогда $L_\varepsilon = 0 \cdot \frac{4}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Разумеется, второе покрытие «лучше», но при этом из него можно «выбросить» множество $O_\varepsilon(3)$.

Отсюда, кстати видно, что порядок множеств в покрытии является существенным. Если использовать вместо покрытия $O_\varepsilon(3)$, $O_\varepsilon(1)$, $O_\varepsilon(2)$ покрытие $O_\varepsilon(1)$, $O_\varepsilon(2)$, $O_\varepsilon(3)$, то вернемся к значению $L_\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Самая «неприятная» часть вычисления величины L_ε по формуле (3) – это, вероятно, поиск минимума по переменным (u_1, u_2, \dots, u_m) . Нетрудно понять, что избежать решения такой «многомерной» задачи не получится: в конце концов, эти переменные входят в «ответ» решаемой задачи, и так или иначе их значения нужно определять. Тогда встает другой вопрос: а нельзя ли заменить этот «кратный» минимум «последовательным», тем самым осуществив декомпозицию задачи?

В теории информации хорошо зарекомендовали себя разного рода жадные алгоритмы [3, 14, 17]. В рассматриваемой задаче эти идеи тоже работают, но до известного предела. По сути, с использованием этих идей было построено решение в примере 1. Да и в доказательстве основной теоремы эти идеи применялись. Пределы использования этих приемов определяются спецификой конкретных задач, как показывает следующий пример.

Напрашивается следующая идея вычисления инфимума по (u_1, u_2, \dots, u_m) . Выберем управление u_1 так, чтобы мера множества $O_\varepsilon(u_1)$ была наибольшей. Затем выберем управление u_2 , для которого множество $O_\varepsilon(u_2)$ покрывает большую (по мере) часть остатка $A \setminus O_\varepsilon(u_1)$. Будем продолжать действовать подобным образом до тех пор, пока множества $O_\varepsilon(u_1), O_\varepsilon(u_2), \dots, O_\varepsilon(u_m)$ не образуют покрытия пространства A . Хотелось бы, чтобы в результате получилось решение задачи. К сожалению, это не так уже в следующем простом случае.

Пример 3. Пусть $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2, \dots, 15\}$, а функция g принимает значение 1 при $u = 1$ и $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$, при $u = 2$ и $\alpha = 6, 7, 8, 9, 10$, при $u = 3$ и $\alpha = 11, 12, 13, 14, 15$ и при $u = 4$ и $\alpha = 1, 2, 6, 7, 11, 12$, а при остальных значениях переменных она равна 0. На множествах U и A зададим дискретные топологии, а на множестве A еще и равномерную меру.

Как и в предыдущем примере $R = 1$ и интересны значения $\varepsilon \in (0, 1)$.

Описанный выше жадный алгоритм предписывает начинать выбор с управления $u_1 = 4$, которому соответствует шестиэлементное множество $O_\varepsilon(4)$. Далее задача становится симметричной, и при любом порядке выбора оставшихся управлений (в покрытие будет входить четыре множества) получим значение

$$L_\varepsilon = 0 \cdot \frac{6}{15} + 1 \cdot \frac{3}{15} + 1 \cdot \frac{3}{15} + 2 \cdot \frac{3}{15} = \frac{4}{5}.$$

Если же использовать покрытие $O_\varepsilon(1), O_\varepsilon(2), O_\varepsilon(3)$, то получим результат $L_\varepsilon = 0 \cdot \frac{5}{15} + 1 \cdot \frac{5}{15} + 1 \cdot \frac{5}{15} = \frac{2}{3}$. Этот результат лучше (и является оптимальным).

Чтобы не заканчивать на минорной ноте заметим, что «негативные» эффекты, найденные в примерах 2 и 3, в какой-то степени определяются дискретным характером решаемых задач. Эти примеры намеренно строились так, чтобы обсуждение можно было вести на качественном уровне. В общем случае нужно более детальное количественное исследование, но его приходится отложить до другого раза. Приведенные примеры

показывают, что оно не может быть совсем уж тривиальным, но может оказаться полезным.

6. Заключение

Итак, поставленная в разделе 2 задача имеет естественное, разумно интерпретируемое решение. Эта задача довольно нестандартна¹. Поэтому сам факт того, что удалось найти структуру оптимальных стратегий, «избавившись» тем самым от функционального пространства в определении, заслуживает внимания. Указанные обстоятельства свидетельствуют о том, что подобные задачи заслуживают дальнейшего изучения.

Отметим некоторые направления дальнейших исследований. Начнем с вопросов, относящихся непосредственно к описанной выше модели.

Один качественный вопрос, относящийся к рассматриваемой задаче пока остался без ответа. Пример 1 показывает, что существуют модели, для которых $L(u^*_\varepsilon, P_\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$ для любой стратегии $(u^*_\varepsilon, P_\varepsilon)$. Нетрудно придумать примеры, в которых величина $L(u^*_\varepsilon, P_\varepsilon)$ остается ограниченной при уменьшении ε , по крайней мере для оптимальных стратегий $(u^*_\varepsilon, P_\varepsilon)$ (достаточно рассмотреть, например, модели в которых одно из множеств U или A конечно). Было бы интересно выяснить, являются ли оба эти случая типичными или один из них – вырожденный. Разумеется, для этого необходимо ввести какую-то дополнительную структуру на классе рассматриваемых моделей, позволяющую характеризовать «массивность» множества моделей. Сюда же примыкают вопросы об устойчивости решений рассматриваемой задачи, лишь слегка затронутые выше.

Очевидно, что поиск оптимальных стратегий даже с использованием доказанной теоремы становится неподъемной задачей, когда объем необходимой информации действительно

¹ Заметим, что в структуре найденного решения отсутствуют пресловутые стратегии наказания. Но в целом найденная структура решения характерна и для других задач принятия решений в условиях конфликта или неопределенности.

велик, а именно такой случай представляет основной интерес. Поэтому имеется насущная необходимость в получении простых, пускай и грубых асимптотических оценок.

Выше осуществлялся поиск минимума точного значения функции $L(u^*_\varepsilon, P_\varepsilon)$. Понятно, что дискретный «характер» этой функции существенно усложняет задачу. А при больших объемах информации этой дискретностью, очевидно, можно пренебречь, заменив эту функцию «хорошей» гладкой аппроксимацией. Это попутно решило бы еще одну проблему – зависимость решения от используемого алфавита. Понятно, что в простых моделях, например, описанных в примерах 2 и 3, характер решения существенно изменится, если информацию кодировать не в алфавите $\{0, 1\}$, а, скажем, в трехбуквенном алфавите. Это не очень приятно и от этого хотелось бы уйти. К. Шеннон решил эту задачу, введя понятие энтропии [14]. Это понятие оказалось чрезвычайно полезным и за пределами теории информации. Что-то подобное было бы важно получить и для рассматриваемой задачи¹.

В этой связи можно подумать о следующей модификации модели. В статье рассматривался одношаговый вариант принятия решения: вся информация о реализовавшемся значении случайного фактора получалась сразу. Можно подумать об иной схеме принятия решения: сначала собирается некая предварительная информация, на ее основе формулируется новый список вопросов и лишь после получения ответов на них принимается окончательное решение. Понятно, что такой подход вполне реализуем на практике. Несложно показать, что такой двухшаговый способ принятия решения может позволить обойтись меньшим объемом обрабатываемой информации при том же гарантированном результате. Насколько сложной является задача поиска оптимальных стратегий в новой задаче пока не ясно. А при ее успешном решении можно думать о задаче поиска «оптимального» числа шагов.

¹ По сути, здесь речь идет о получении меры прагматической ценности информации, аналогичной синтаксической мере, предложенной Шенноном. Этот вопрос был поставлен уже в [13], но решения до сих пор не нашел.

Выше рассмотрена модель идеальной ситуации, когда оперирующей стороне в принципе доступна вся существенная информация. На практике дело обычно обстоит сложнее: часть значимой информации по тем или иным причинам в момент принятия решений является недоступной. Можно предположить, что новые трудности при исследовании такого более общего случая носят в основном технический характер. Но это стоит проверить.

Разумеется, можно встраивать рассмотренные конструкции и в теоретико-игровые модели принятия решений.

Безусловно, исследованная модель слишком абстрактна, чтобы можно было говорить о ее непосредственном применении на практике. Но актуальность поставленных вопросов не должна вызывать сомнений. А предложенные подходы к их решению кажутся вполне разумными.

Литература

1. БУРКОВ В.Н., ЕНАЛЕЕВ А.К., НОВИКОВ Д.А. *Вероятностная задача стимулирования* // Автоматика и телемеханика. – 1993. – №12. – С. 140–145.
2. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А. *Теория активных систем: состояние и перспективы*. – М.: Синтег, 1999. – 128 с.
3. ВЕРЕЩАГИН Н.К., ЩЕПИН Е.В. *Информация, кодирование и предсказание*. – М.: ФМОП МСНМО, 2012. – 236 с.
4. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Введение в теорию исследования операций*. – М.: Наука, 1971. – 383 с.
5. ГОРЕЛОВ М.А. *Максимальный гарантированный результат при ограниченном объеме передаваемой информации* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №3. – С. 124–144.
6. ГОРЕЛОВ М.А., ЕРЕШКО Ф.И. *Информированность и децентрализация управления* // Автоматика и телемеханика. – 2019. – №6. – С. 156–172.
7. ГОРЕЛОВ М.А., ЕРЕШКО Ф.И. *Информированность и децентрализация управления (стохастический случай)* // Автоматика и телемеханика. – 2020. – №1. – С. 52–66.

8. ЕРМОЛЬЕВ Ю.М. *Методы стохастического программирования*. – М.: Наука, 1976. – 239 с.
9. МОИСЕЕВ Н.Н. *Быть или не быть... человечеству*. – М.: Ульяновский Дом печати, 1999. – 288 с.
10. КОЛМОГОРОВ А.Н. *Три подхода к определению понятия «количество информации»* // Проблемы передачи информации. – 1965. – Т. 1, №1. – С. 3–14.
11. КОНОНЕНКО А.Ф., ХАЛЕЗОВ А.Д., ЧУМАКОВ В.В. *Принятие решений в условиях неопределенности*. – М.: ВЦ АН СССР, 1991. – 197 с.
12. ХАЛЕЗОВ А.Д. *Общее решение задачи Центр–Агент с симметричной информацией в условиях риска* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2001. – Т. 41, №3. – С. 374–383.
13. ХАРКЕВИЧ А.А. *О ценности информации* // Проблемы кибернетики. – 1960. – Вып. 4. – С. 53–57.
14. ШЕННОН К. *Работы по теории информации и кибернетике*. – М.: ИЛ, 1963. – 827 с.
15. BOLTON P., DEWATRIPONT M. *Contract Theory*. – Mass.: MIT Press, 2005. – 740 p.
16. LAFFONT J.-J., MARTIMORT D. *The Theory of Incentives: The Principal – Agent Model*. – Princeton: Princeton University Press, 2002. – 440 p.
17. MACKAY D.J.C. *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2003. – 628 p.
18. SHAPIRO A., DENCHEVA D., RUSZCZYNSKI A. *Lectures on stochastic programming: modeling and theory*. – USA: SIAM, 2009. – 436 p.

ON A QUANTITY OF INFORMATION REQUIRED FOR EFFICIENT CONTROL

Mikhail Gorelov, Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, Cand.Sc. (griever@ccas.ru).

Abstract: It is well known that for effective management it is necessary to use information about the surrounding world. But if there is a lot of this information, then one have to save the resources spent on its receipt and processing. Therefore,

the question arises of finding rational ways to handle this information. One of the models that allow us to study this question by formal methods is investigated in the article. The simplest control system under risk is considered. It is assumed that information about the realized value of a random factor is available to the operating party. This information is encoded in binary words. The choice of information content, that is, the encoding method, is considered as the prerogative of the operating party. A control result acceptable to the operating party is determined. The task is set to find an encoding method that can guarantee to get this result with the smallest expected value of the length of the message about the realized value of the uncertain factor. It is shown that under very general assumptions this expected value is finite. The qualitative structure of the function from the set of possible values of a random factor to the set of binary words, which defines the optimal coding method, is clarified. The task of search such a function is reduced to solving the stochastic programming problem on a "finite-dimensional" space. The results obtained have a reasonable meaningful interpretation. This allows us to conclude that the model constructed correctly reflects the main features of the simulated phenomenon and deserves further study.

Keywords: decision-making under risk, the maximal guaranteed result, the quantity of information.

УДК 519.865 + 519.95

ББК 22.165

DOI: 10.25728/ubs.2020.88.3

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Ю.В. Сидельниковым.*

Поступила в редакцию 10.07.2020.

Опубликована 30.11.2020.

АНАЛИЗ СОВРЕМЕННЫХ ПРИНЦИПОВ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

Есин А. А.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Проведён анализ и представлен обзор современных приложений, в которых разработка гетерогенных вычислительных систем с небольшими вычислительными блоками на основе трёхзначной логики является математически лучшим решением по сравнению с бинарными моделями. В частности, рассматриваются приложения в телекоммуникационной отрасли, где подобные решения на базе трёхзначной логики фактически могут обеспечить 1,5-кратный рост скорости передачи данных. Для приложений необходимо реализовать схемы из чипов, работа которых основана на трёхзначной логике. Для возможности реализации таких схем должна быть решена принципиально важная задача – задача полноты классов функций трёхзначной логики. С практической стороны полнота классов таких функций гарантирует, что на базе произвольного множества чипсетов можно произвести плату с нужной функциональной схемой. В данной работе были рассмотрены операторы замыкания на множестве функций трёхзначной логики, являющиеся усилением обычного оператора подстановки, и было показано, что задача полноты для этого оператора имеет решение. Поэтому можно восстановить подрешётку замкнутых классов в общем случае замыкания функций относительно классического оператора суперпозиций. Это позволит оптимизировать возможное производство чипов для новых функциональных схем для задач передачи и обработки данных.

Ключевые слова: многозначная логика, трёхзначная логика, приложения многозначной логики, проблема полноты, оператор замыкания, функции трёхзначной логики.

1. Введение

Известно, что удельная плотность записи информации описывается следующей функцией [12]:

$$Y(a) = \frac{\ln y(a)}{a} = \frac{\ln a}{a},$$

¹ Антон Анатольевич Есин, соискатель ИПУ РАН (ae@incarnet.ru).

которая достигает максимума при $a = e \approx 2,718$ [12, 23, 31] (см. рис. 1), т.е. трёхзначная система счисления (из целочисленных) является самой оптимальной с точки зрения плотности записи информации [4, 5, 12, 23].

Как с практической точки зрения, так и в качестве обобщения бинарной логики, наиболее важным случаем многозначной логики является троичная логика.

Общим случаем (обобщением) для многозначной логики является троичная логика [1, 14], поэтому далее, говоря о многозначной логике, будем в первую очередь подразумевать троичную (если явно не указано другое). В троичной логике высказыванию присваивается одно из трёх значений: «истина», «ложь», «не определено» [1, 2, 12, 23]; в двоичной логике – два: либо «истина», либо «ложь». Симметричная форма представления числа на базе трёхзначной логики упрощает работу с отрицательными числами, поскольку не требует выделения дополнительного разряда для хранения знака [12].

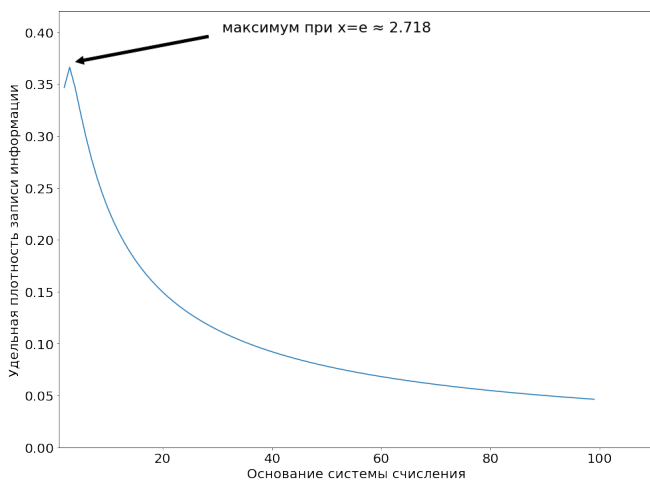


Рис. 1. Зависимость плотности записи информации от основания системы счисления

Преимущество трёхзначной логики над двузначной можно продемонстрировать на простом примере [12]. Операция сравнения двух чисел в троичной логике выполняется за один шаг: сразу выдается результат (больше, меньше или равно). В двоичной логике операция выполняется за два шага:

- 1) проверяется, больше ли первое число второго;
- 2) проверяется, не больше ли второе число первого.

Базовые троичные логические операции «Отрицание», «И», «ИЛИ» представлены ниже в таблицах 1, 2 и 3 [2, 3] («0» означает, что состояние не определено).

Таблица 1. Отрицание

a	$\text{NOT}^- a$	$\text{NOT}^0 a$	$\text{NOT}^+ a$
–	–	+	0
0	+	0	–
+	0	–	+

Таблица 2. Конъюнкция – логическое И

$x \wedge y = \min(x, y)$	–	0	+
–	–	–	–
0	–	0	0
+	–	0	+

Таблица 3. Дизъюнкция – логическое ИЛИ

$x \vee y = \max(x, y)$	–	0	+
–	–	0	+
0	0	0	+
+	+	+	+

Слабое использование троичной логики в реальных вычислениях обусловлено исключительно тем, что технология двоичной обработки за многие десятилетия уже хорошо разработана и используется повсеместно. А стоимость производства систем (как аппаратного, так и программного обеспечения) на базе троичного кодирования более высока именно ввиду отсутствия массового производства.

Особенности работы логики такого компьютера, например, представление отрицательных чисел, создают базу для построения высокопроизводительных и надёжных систем для целого ряда современных приложений, возникших за последние несколько лет в различных предметных областях. Математически троичная логика более эффективна, чем двоичная [1, 2, 5, 12, 23].

Исследования и разработка алгоритмов на основе трёхзначной логики вновь актуальны [22], например, в телекоммуникациях [20, 43], в области искусственного интеллекта (ИИ) [18], квантовых вычислениях [20, 28, 36, 37], медицине, физике [41].

Это подтверждается и значительным ростом за последние несколько лет числа научных публикаций в ведущих научных изданиях, связанных с различными приложениями трёхзначной логики [31].

В этой статье мы представляем обзор приложений, где построение алгоритмов на основе трёхзначной логики обеспечивает большую эффективность и оказывается предпочтительнее в сравнении с двузначной. Будет дано сравнение двоичного и троичного кодирования по их эффективности для ряда приложений.

2. Обзор некоторых реальных систем, построенных на базе k -значной логики

2.1. АНАЛИЗ СТРУКТУРНЫХ ПРОЦЕССОВ И ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ФАКТОРОВ НА НАДЁЖНОСТЬ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Многозначная логика позволяет вводить качественные (лингвистические) переменные вместо количественных. Количественные показатели (факторы) дискретизируются путём отображения в некоторую m -интервальную шкалу. Такой подход позволяет соединить в одной модели количественные и качественные показатели и значительно упростить достаточно сложные вероятностные схемы оценки надёжности [32, 33]. Достоверность факторов при такой дискретизации снижается минимально, что позволяет максимально полно исследовать модель. Это особенно эффективно в ситуациях, когда нет возможности количественно

оценить влияние того или иного фактора на процесс; использование качественных переменных дает дополнительные возможности в оценке исследуемых факторов [9, 10].

Для установления функциональной зависимости между входными лингвистическими параметрами модели и выходным параметром (т.е. работоспособностью всей системы) необходимо построить специальную функцию, которая получила название структурной функции. Структурная функция устанавливает однозначное соответствие между возможными состояниями работоспособности элементов и работоспособностью системы [9]:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x) : \{0, \dots, m - 1\} \rightarrow \{0, \dots, m - 1\}.$$

Для построения структурной функции необходимо четко и ясно представлять структуру процесса и состав задействованных в нем лиц.

В качестве примера эффективной реализации системы на базе k -значной логики можно привести процедуру регистрации абитуриентов на централизованное тестирование (ЦТ) на базе автоматизированной информационной системы [9]. При построении системы важно было изучить влияние различных (внутренних и внешних) параметров на работу данной системы.

Процесс построения структурной функции надёжности процесса записи абитуриентов на тестирования состоял из следующих шагов [9]:

- 1) определение переменных, включаемых в математическую модель;
- 2) агрегирование входных переменных по степени схожести влияния на итоговый процесс и нахождение промежуточных переменных на основе экспертной базы правил;
- 3) расчет структурной функции на основе полученных промежуточных переменных.

По аналогии со схемой структурной функции процесса из работы [9], можно построить схему для любого процесса из любой другой предметной области. Например, на рис. 2 представлена в общем виде графическая интерпретация структурной функции процесса для оценки качества работы системы Wi-Fi-доступа

к сети Internet на подвижных объектах (в автомобилях, поездах, на объектах городского пассажирского транспорта пр.). При построении данной схемы были проанализированы и отобраны следующие ключевые внутренние и внешние параметры, влияющие на рассматриваемый организационный процесс: качество связи (наличие доступа ко внешней сети по одному из трёх каналов связи), качество используемого телекоммуникационного оборудования, стабильность обеспечения электроэнергии. Для построения схемы были отобраны только основные факторы влияния. Список можно существенно расширить за счёт учёта дополнительных параметров, например, таких как: скорость движения объекта, уровень сигнала станций сотовой связи, объём нагрузки на сеть (количество пользователей), ёмкость канала, виды трафика и пр.; в этом случае будет возрастать вычислительная сложность структурной функции.

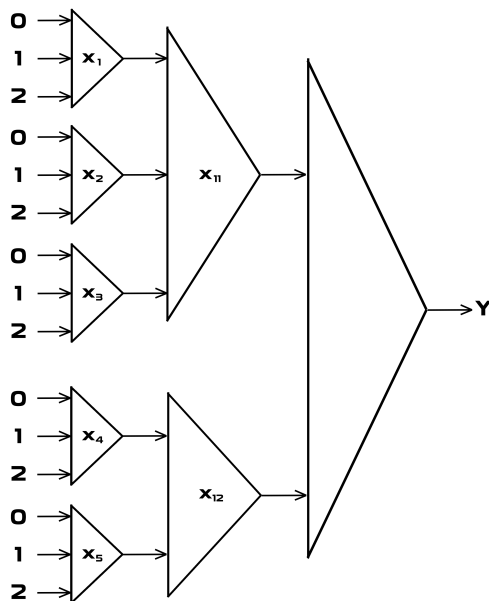


Рис. 2. Схема структурной функции процесса оценки качества работы системы доступа к сети Internet

Для уменьшения вычислительной сложности структурной функции переменные группируют по признакам принадлежности к классам: например, линии связи (x_{11}), сетевое оборудование (x_{12}); и производят расчет промежуточных переменных на основе экспертной базы правил.

В таблице 4 приведены переменные и их значения с необходимыми расшифровками для представленного выше примера. Результаты расчетов промежуточных значений представлены в таблице 5.

Таблица 4. Входные параметры для анализа качества работы системы доступа к сети Internet

Параметр	Значение параметра и его описание		
	0	1	2
Канал связи 1 (x_1)	Не доступен	Слабый сигнал	Устойчивое соединение
Канал связи 2 (x_2)	Не доступен	Слабый сигнал	Устойчивое соединение
Канал связи 3 (x_3)	Не доступен	Слабый сигнал	Устойчивое соединение
Состояние каналов связи x_{11}	Не доступен	Слабый сигнал	Устойчивое соединение
Блок питания (x_4)	Не работает	Неустойчивая работа	Работает
Состояние модема (x_5)	Не работает	Неопределено	Работает
Состояние приёмо-передающего оборудования x_{12}	Не работает	Неустойчивая работа	Работает
Качество работы системы в целом (Y)	Не работает	Нестабильный доступ к сети	Работает

На основе промежуточных переменных находятся значения выходной функции Y . Результаты расчетов представлены ниже в таблице 6.

Таким образом, результатом построения структурной функции процесса стал вектор, интерпретируемый как столбец таблицы истинности на упорядоченных наборах переменных:

$$\{00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22\} \rightarrow Y.$$

Таблица 5. Расчет промежуточных переменных

x_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
x_3	0	1	2	0	1	2	0	1	2
x_{11}	0	0	2	0	1	2	2	2	2
x_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
x_2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
x_3	0	1	2	0	1	2	0	1	2
x_{11}	0	1	2	1	1	2	2	2	2
x_1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
x_2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
x_3	0	1	2	0	1	2	0	1	2
x_{11}	2	2	2	2	2	2	2	2	2
x_4	0	0	0	1	1	1	2	2	2
x_5	0	1	2	0	1	2	0	1	2
x_{12}	0	0	0	0	1	2	0	2	2

Далее полученная структурная функция может быть использована для определения эффективности и надёжности исследуемого объекта при заданных входных параметрах. Например, если известно, что при создании системы использовалось надёжное и высокопроизводительное телекоммуникационное оборудование, но нет автономных источников питания, способных обеспечить бесперебойную работу данного оборудования, или в зоне нахождения объекта нет достаточного покрытия станциями сотовой связи (или имеет место большая удаленность от них), то это может привести к неустойчивому подключению к сети и, как следствие, к потере данных при передаче по сети. Разработанная структурная функция может использоваться для принятия управленческих решений по улучшению качества работы системы, что позволит снизить риски частичного или полного отказа работоспособности исследуемых объектов в будущем. Дальнейшие ис-

следования и дополнение данной методики позволят более полно оценить влияния различных факторов на работоспособность системы в целом.

Таблица 6. Значения выходной функции Y

x_{11}	0	0	0	1	1	1	2	2	2
x_{12}	0	1	2	0	1	2	0	1	2
Y	0	0	0	0	1	2	0	2	2

2.2. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И СОВРЕМЕННЫЕ ЯЗЫКИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Имитационное моделирование является единственным и доступным способом проверки качества и надёжности сложных и дорогостоящих технических систем на этапе их проектирования. Автоматизированные средства проектирования позволяют оценить качество с учетом реальных условий эксплуатации. Имитационное моделирование схем в системах автоматизированного моделирования часто базируется на принципах трёхзначной логики [3, 4, 13].

Функциональные элементы системы при построении имитационной модели представляются логическими блоками на входах/выходах которых формируются многозначные сигналы. Замена двузначных (промежуточных) сигналов на переходах трёхзначными и четырёхзначными позволяет более точно описать реальные параметры работы системы. Значения сигналов представляются как трёхзначные или четырёхзначные, например [4, 13]: $\{A, B, x/, x\}$, где $\{A, B\}$ – постоянные, $x/$ – положительный сигнал, $x\$ – отрицательный сигнал.

Функционирование логических блоков с такими сигналами описывают таблицами, являющимися аналогами традиционных таблиц истинности в двузначной логике. Пример приведён ниже в таблице 7 [4, 13], где для простоты константы обозначены через «0» и «1», а положительный и отрицательный фронты – через «2» и «3» соответственно.

Ниже в таблице 8 приведён пример вычислений значений для следующей результирующей функции:

$$f = m_1(m(X_1; m_{01}(X_1; X_2)); A + 2(X_1)).$$

На рис. 3 приведена логическая схема построения данной функции.

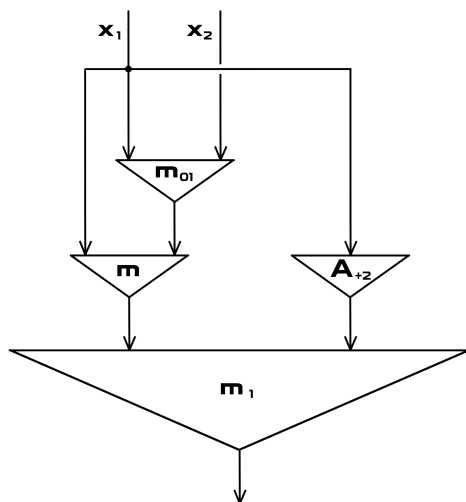


Рис. 3. Пример построения результирующей функции $f(A, B)$

Практически данный подход давно реализован и широко применяется в многих современных системах и языках автоматического проектирования функциональных схем, например, таких, как [7, 8]:

- 1) программируемая логическая интегральная схема (ПЛИС);
- 2) языки автоматического проектирования Hardware Description Language, Veri-log, VHDL.

Все эти средства проектирования поддерживают имитационное моделирование функциональных схем именно на базе k -значных ($k > 2$) логических вычислений [7, 8].

Язык Veri-log работает с трёх- и четырёхзначными сигналами: «0», «1» – для L и H уровней, X – для неопределенного

Таблица 7. Таблицы истинности для некоторых операций четырёхзначной логики

A	$A + 1$
0	1
1	2
2	3
3	0

A	$A + 2$
0	2
1	3
2	0
3	1

$m(A, B)$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	1	1
2	0	1	2	2
3	0	1	2	3

$m_1(A, B)$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	1	1
2	2	1	3	0
3	3	1	0	1

$m_{01}(A, B)$	0	1	2	3
0	0	1	1	1
1	1	0	1	0
2	2	0	3	3
3	0	0	3	2

Таблица 8. Таблица значений результирующей функции f

$f(A, B)$	0	1	2	3
0	2	2	2	2
1	1	3	1	3
2	1	2	2	2
3	1	1	1	1

уровня. В начале моделирования логические блоки имеют состояние «не определено» [3, 11, 13]. Соответственно, связанные с ними функциональные элементы на вход получают сигнал, имеющей значение «не определено». При моделировании это указывает разработчику на необходимость начального сброса.

Ниже приведены таблицы истинности для определения логических связок с четырёх- и пятизначными сигналами (таблицы 9 и 10), где Z – плавающий уровень на входах вызывает неопределенное значение X на выходе.

Таблица 9. Логические связки с четырёхзначными сигналами

&	0	1	Z	X
0	0	0	0	0
1	0	1	X	X
Z	0	X	X	X
X	0	X	X	X

Язык проектирования VHDL поддерживает пятизначные сигналы. К перечисленным выше сигналам «0», «1» – для L и H и уровней X и Z , в VHDL к сигналам добавляется значение U – неинициализированное значение.

Таблица 10. Логические связки с пятизначными сигналами

&	0	1	Z	X	U
0	0	0	0	0	0
1	0	1	X	X	X
Z	0	1	X	X	U
X	0	X	X	X	U
U	0	U	U	0	U

2.3. НЕДВОИЧНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Обычно описание компьютеров на базе троичной логики ограничивается упоминанием проектов ЭНИАК (и их последователей – серии машин IBM, UNIVAC) и «Сетунь–70» [1, 2, 12]. В различных источниках данные проекты зачастую приводятся как примеры того, что многозначная логика в итоге оказалась неэффективной и окончательно «проиграла» бинарной модели компьютера.

Сейчас построение универсального компьютера на базе трёхзначной логики представляется нецелесообразным ввиду

- 1) более высокой стоимости трёхзначных логических элементов по сравнению с двоичными и
- 2) отсутствия качественного троичного программного обеспечения [12].

Несмотря на то, что троичные компьютеры общего назначения не достигли успеха в общем использовании, гетерогенные вычислительные системы с небольшими троичными вычислительными блоками являются математически лучшим решением при построении ряда узкоспециализированных вычислительных систем [22, 41].

Кроме того, с момента завершения проекта «Сетунь–70» производство электроники достигло большого прогресса, и появились новые возможности для построения троичного компьютера [23, 27, 39], в том числе на базе оптических систем [43].

Выделим несколько частных задач для применения троичной вычислительной техники.

Задача 1. *Троичная логика эффективна при построении вычислительных блоков для оборудования сетей передачи данных. Потенциально передача трёх состояний вместо двух по одному разряду может увеличить скорость передачи данных в 1,5 раза. При увеличении числа разрядов скорость может расти экспоненциально [26, 42, 43].*

На базе многозначной логики возможна реализация решений для агрегации данных и обмена данными, которые обеспечивают единым пространством большой размерности для сетевой ад-

ресации – как для стандартных целей передачи данных [24], так и для новых задач по управлению роботизированными устройствами для Internet Of Things [20].

В работе [43] авторы предлагают совершенно новый способ создания троичного оптического компьютера: информация предлагается представлять двумя поляризованными состояниями с ортогональными направлениями колебаний света и одним состоянием с отсутствием интенсивности света. Реализация такой архитектуры возможна за счет удачного сочетания электрического управления и оптических вычислений: оптоволоконное кольцо предлагается использовать в качестве регистра, полупроводниковую память – в качестве тройной ячейки, жидкий кристалл – в качестве модулятора и сумматора. Данное решение на основе трёхзначной логики может оказаться эффективным и при создании специализированных вычислительных блоков для систем передачи данных

Задача 2. Эффективной оказывается трёхзначная логика и при решении задач обработки изображений [17].

Задача 3. Задачи криптографии [21]. Использование только бинарных систем создаёт вычислительную однородность, неустойчивую ко многим кибератакам, ставшими особенно частыми в последние годы на всех уровнях: начиная от простых пользователей и заканчивая целыми государствами. Троичная логика может улучшить безопасность, что особенно важно в эпоху развития Интернета вещей (IoT), когда ни одно электронное устройство не может быть полностью защищенным от кибератаки. Современные схемы троичного шифрования показывают высокую эффективность при решении криптографических задач и имеют потенциал для повышения надёжности информации, передаваемой через небезопасные каналы связи. Также они могут быть использованы как вспомогательные при создании унаследованных двоичных кодов [21].

Квантовые вычисления являются наиболее эффективным методом обеспечения криптографической защиты для мобильных роботов и Интернета вещей и безопасности распределённых при-

ложений. Данная задача требует разработки новых схем секретного кодирования, которые также могут быть основаны на многозначной логике [14, 20].

Задача 4. Новые алгоритмы для сжатия текстовых и графических данных в троичном представлении позволяют минимизировать длину строки битов и тем самым резко сократить длину кода [19, 34].

Каких-либо принципиальных ограничений для создания цифровых схем на базе трёхзначной логики нет. Более того, предлагаются новые и перспективные системы на базе трёхзначной логики [30].

Эффективность алгоритмов на базе трёхзначной логики подтверждается и тем, что ведущие разработчики компьютеров, такие как Huawei, Samsung, проводят многочисленные исследования и разработки в области троичных вычислений для целого ряда задач: от обработки изображений до разработки троичных полупроводников [27, 44].

Фактически трёхзначная логика уже реализована во многих современных системах на программном уровне.

Например, в языке SQL используется трёхзначная логика: кроме значений «истина» и «ложь», результатом выполнения логических выражений также может быть ответ «неизвестно». Трёхзначная логика SQL является следствием поддержки null-значений для отметки отсутствующих данных. Если нулевое значение влияет на результат логического выражения, результат является не истинным, не ложным, а неизвестным [40]. Трёхзначная логика является неотъемлемой частью Core SQL и используется почти в каждой системе управления базами данных на базе SQL (см. таблицу 11).

Задача 5. В связи с бурным развитием квантовых компьютеров троичные вычисления вновь стали актуальны [5, 17, 36, 37]. Ведущие IT-компании в последнее десятилетие представили свои квантовые компьютеры, работающие на нескольких десятках кубитов: квантовые процессоры IBM состоят из 65 кубитов, у Google – из 72. В планах разработчиков к 2023 году выпу-

стать 1112-кубитный процессор под кодовым названием Condor, который должен вывести квантовые технологии на коммерческий уровень [29]. Но это пока далеко от миллионов кубитов, которые могут потребоваться для практических вычислений.

Таблица 11. Поддержка трёхзначной логики в наиболее распространённых СУБД

	Big Query	Db2 LUW	My SQL	Oracle DB	Postgre SQL	SQL Server	SQ Lite
Трёхзн. логика	+	+	+	+	+	+	+
Значения true и false	+	+	+	–	+	–	+

Ячейка для хранения единицы информации в квантовом компьютере – кубит, т.е. это аналог бита в обычном компьютере [5]. Вариантом квантовой ячейки с тремя возможными состояниями является квантовый трит или кутрит. Можно построить троичный квантовый компьютер, используя вместо кубитов кутриты. Используя в универсальных квантовых вентилях кутриты вместо кубитов, исследователи могут существенно снизить количество необходимых вентилях [5]: в обычном случае нужно 50 традиционных квантовых вентилях, а при троичном представлении – всего девять. При этом исследования последних нескольких лет показывают, что использование квантовых тритов вместо кубитов существенно упростит разработку квантовых алгоритмов и программ [19, 31, 35].

2.4. ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА ДАННЫХ И РАЗРАБОТКИ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

Мнозначная, в частности, троичная логика является вполне естественной в таких приложениях, как последовательный статистический анализ Вальда или принятие статистических решений при фиксированных вероятностях ошибок и первого, и второго рода. В настоящее время инструментарий многозначной

логики находит широкое применение в задачах, связанных с анализом данных и построением моделей искусственного интеллекта, например, в задачах иерархической кластеризации произвольных наборов данных [18, 20].

Теория многозначной логики над полем комплексных чисел и пороговая функция многозначной логики применяются при построении модели многозначного нейрона. Для дискретнозначного многозначного нейрона отображение ввода/вывода всегда описывается некоторой пороговой функцией многозначной логики. Это применяется при рассмотрении непрерывного многозначного нейрона и построении разделяющей гиперплоскости в n -мерном пространстве, которая определяется функцией активации дискретного многозначного нейрона. Это позволяет решать задачи многоклассовой классификации [18]. Н. Айзенбергом было предложено рассматривать следующую функцию $P(z)$, которая и называется k -значным предикатом:

$$(1) \quad P(z) = \text{CSIN}(z) = \varepsilon_k^j, \quad 2\pi j/k \leq \arg z < 2\pi(j+1)/k,$$

где $z \in \mathbb{C}$. Данная функция по сути задаёт деление комплексной плоскости на k равных секторов линиями, проходящими через начало координат, и точки на единичной окружности, соответствующие корням k -й степени из единицы.

Определение 1 [18]. Пороговой функцией k -значной логики (или многозначной пороговой функцией) называется функция

$$f(x_1, \dots, x_n) : T \rightarrow E; \quad T \subseteq E_k^n,$$

если существуют $(n+1)$ комплексные числа w_0, w_1, \dots, w_n , такие, что для любого вектора $(x_1, \dots, x_n) \in T$

$$f(x_1, \dots, x_n) = P(w_0 + w_1x_1 + \dots + w_nx_n),$$

где $P(z)$ – k -значный предикат, определяемый по формуле (1).

Вектор $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ – вектор весов для функции f .

Таким образом, введение многозначных функций значительно расширяет набор функций, которые могут быть представлены с использованием $(n+1)$ весов путем добавления

многозначных пороговых функций к булевым пороговым функциям, а логическая пороговая функция – это частный случай многозначной пороговой функции. В качестве простого примера такой функции можно рассмотреть функцию максимума из двух аргументов [18]: $f = \max(x_1, x_2)$.

Данная функция является пороговой функцией (так же, как, например, $f = \min(x_1, x_2)$). Многозначные функции над полем комплексных чисел существенно расширяют набор пороговых функций и перспективы в пороговой логике, в нейронных сетях и в решении задач мультиклассовой классификации. Ниже в таблице 12 приведены значения функции Поста $f = \max(x_1, x_2)$ (пороговая функция трёхзначной логики) с вектором весов $W = (-2 - 4\varepsilon_3, 4 + 5\varepsilon_3, 4 + 5\varepsilon_3)$ [18].

Таблица 12. Многозначная функция Поста $f = \max(x_1, x_2)$

#	x_1	x_2	$z = w_0 + w_1x_1 + w_2x_2$	$\arg(z)$	$P(z)$	$f_{\max}(x_1, x_2)$
1	ε_3^0	ε_3^0	$6 + 6\varepsilon_3$	1,0471	ε_3^0	ε_3^0
2	ε_3^0	ε_3^1	$2 + 5\varepsilon_3 + 5\varepsilon_3^2$	π	ε_3^1	ε_3^1
3	ε_3^0	ε_3^2	$7 + \varepsilon_3 + 4\varepsilon_3^2$	5,7596	ε_3^2	ε_3^2
4	ε_3^1	ε_3^0	$2 + 5\varepsilon_3 + 5\varepsilon_3^2$	π	ε_3^1	ε_3^1
5	ε_3^1	ε_3^1	$2 + 4\varepsilon_3 + 10\varepsilon_3^2$	3,6652	ε_3^1	ε_3^1
6	ε_3^1	ε_3^2	$-2 + 9\varepsilon_3^2$	4,5223	ε_3^2	ε_3^2
7	ε_3^2	ε_3^0	$7 + \varepsilon_3 + 4\varepsilon_3^2$	5,7596	ε_3^2	ε_3^2
8	ε_3^2	ε_3^1	$3 + 9\varepsilon_3^2$	4,4223	ε_3^2	ε_3^2
9	ε_3^2	ε_3^2	$8 - 4\varepsilon_3 + 8\varepsilon_3^2$	5,2359	ε_3^2	ε_3^2

2.5. ПРИМЕНЕНИЕ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

В завершение обзора приложений многозначной логики отметим ещё одно реальное применение в экономических исследованиях и в ситуациях, связанных с проблемой коллективно выбора, где возникает «циклическая логика» как частный случай k -значной логики [6].

Один из наиболее характерных примеров связан с проблемой выбора. Рассмотрим выбор из трёх альтернатив (например, выборы с тремя кандидатами) A, B, C . При этом, голосующий имеет

некую систему предпочтений, устроенную циклическим образом: $A \prec B \prec C \prec A$. Тогда задание отношений между элементами определяет аналоги операций «ИЛИ» и «И» для трёхзначной логики (таблицы 13 и 14).

Ещё одно применение многозначная логика находит в экономических исследованиях при оценке инвестиционных рисков и прогнозировании стоимости страховых убытков. Постановки задач в этой области приложений аналогичны постановке задачи по оценке эффективности и надёжности технических систем, рассмотренной выше: сначала определяется полный спектр возможных сценариев развития инвестиционного процесса и факторы, оказывающие влияние на этот процесс, а затем находятся оценки (как значения функции от вектора факторов) для принятия инвестиционного решения.

Таблица 13. Операция «ИЛИ»

ИЛИ	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
<i>B</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>
<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>A</i>

Таблица 14. Операция «И»

И	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
<i>C</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>C</i>
<i>A</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>A</i>

В отличие от технических систем, факторы задаются не лингвистическими переменными (оцениваются не точно), а полем интервальных значений с некоторым распределением вероятностей.

3. Теоретические аспекты построения реальных систем на базе трёхзначной логики

Любая из выше рассмотренных задач сводится к определению факторов, влияющих на процесс, и рассмотрению счетного множества P_3 состояний этих факторов (любое счётное число состояний можно аппроксимировать до принципиально трех состояний) [16]: 0, 1, 2.

Для принятия решения необходимо найти значение выходной функции Y . Соответственно, мы можем представить выходную функцию Y как комбинацию предикатов на множестве P_3 [15]: для этого мы будем рассматривать сложные предикаты и суперпозиции этих предикатов на P_3 .

Данные предикаты практически могут быть реализованы как схемы из чипов, работа которых основана на трёхзначной логике.

Для возможности реализации таких схем должна быть решена принципиально важная задача – *задача полноты классов функций трёхзначной логики* [15]. С практической стороны полнота классов таких функций гарантирует, что на базе произвольного множества чипсетов можно создать плату с нужной функциональной схемой. Для двузначной логики эта задача была также решена Постом, что привело к бурному росту электроники [38].

Классическая теорема Поста описывает пять предполных классов в множестве булевых функций [38].

Для случая трёхзначной логики задача была решена С.В. Яблонским в 1958 г. [15, 16]. Он показал, что для функций трёхзначной логики существует 18 предполных классов. В работах [15, 16] рассматривалось замыкание множества функций относительно оператора подстановки.

К сожалению, для трёхзначной логики было доказано, что в общем случае эта задача не может быть решена [16]. Если в случае двузначной логики решётка замкнутых классов счетная, то в случае трёхзначной логики она экспоненциальная.

Однако, можно рассматривать *операторы замыкания* на множестве функций трёхзначной логики, являющиеся усиленными

ем обычного оператора подстановки. Решение для этого нового оператора замыкания задач полноты и нахождение структуры решётки замкнутых классов поможет не только восстановить подрешётку замкнутых классов в общем случае замыкания функций относительно классического оператора суперпозиций, но и позволит оптимизировать возможное производство чипов для функциональных схем для решения задач, описанных выше в разделе 2.

3.1. ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАТОРА ЗАМКНАНИЯ И ОПИСАНИЕ ПРЕДПОЛНЫХ КЛАССОВ В P_3

Пусть дано множество M функций из P_3 . Через $\mathfrak{R}_2(M)$ будем обозначать результат замыкания множества функций M относительно операции подстановки и перехода от функции g к эквивалентной функции $f \sim g$, где

$$f \sim g \Leftrightarrow (\forall \vec{x} [(f(\vec{x}) = g(\vec{x})) \vee (f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \{0, 1\})]) \& (|X_f| = |X_g|).$$

В дальнейшем все рассуждения ведутся для $k = 3$.

Пусть $\alpha^n \in E_3^n$, $\alpha^n = (a_1, \dots, a_n)$, обозначим $O_2(\alpha^n) = |\{a_i | a_i = 2, i \in \{1, n\}\}|$ – порядок двойки набора α^n .

Определение 2. Для $f \in P_3$, такой что $|X_f| = n$, считаем $f \in \nabla_2$, если для каждого α^n такого, что $\alpha^n \in E_3^n$ и $O_2(\alpha^n) > 0$, выполняется $f(\alpha^n) = 2$. Также считаем, что все константы содержатся в ∇_2 .

Можно показать [25], что будет иметь место

Теорема 1 (Полноты). Существует пять \mathfrak{R}_2 -предполных классов $P_3 : T_2, T_{01}, T_{\sim}, \Delta_2, P_3(x)$.

Доказательство. Доказательство следует из лемм 1–3, которые формулируются и доказываются ниже.

Лемма 1. Множество ∇_2 является \mathfrak{R}_2 -замкнутым.

Доказательство. \mathfrak{R}_2 – многократная суперпозиция расширения $R_2(\cdot)$ и стандартного замыкания $[\cdot]$. Очевидно, в силу определения замыкания, что расширение не выходит за пределы ∇_2 .

Осталось доказать, что ∇_2 замкнуто относительно $[\cdot]$. Пусть $f \in \nabla_2$. Очевидно, что после подстановки констант вместо од-

ной (или нескольких) переменных функции f она не потеряет свойство принадлежности классу ∇_2 . Если же мы вместо всех существенных переменных подставим константы, то получим константу, которая, в свою очередь, также лежит в ∇_2 . Пусть $f \in \nabla_2$, а $g_i, i = \overline{1, n}$, – либо переменные, либо $g_i \in \nabla_2$. Возьмем $h = f(g_1, \dots, g_n)$. Без ограничения общности считаем, что h существенно зависит от всех своих переменных, так как если это не так, то берем $h' = h$, полученную путем отождествления фиктивных переменных. Пусть $|X_h| = k$. Если на вход h подается набор $\gamma^k = (c_1, \dots, c_k)$ и для некоторого i выполняется $c_i = 2$, тогда эта 2-ка попадет на вход к одной из g_i . Но если g_i – переменная, то получаем, что на вход к f подошла двойка, а $f \in \nabla_2$, значит, $h(\gamma^k) = 2$. Если же $g_i \in \nabla_2$, то на выходе g_i будем иметь 2, которая также идет на вход f , но $f \in \nabla_2$, значит, $h(\gamma^n) = 2$, и получаем $h \in \nabla_2$.

Лемма 2. *Класс $P_3(x)$ является \mathfrak{R}_2 -предполным.*

Доказательство. \mathfrak{R}_2 -замкнутость класса $P_3(x)$ следует из того, что $[P_3(x)] = P_3(x)$, и по определению из fR_2g вытекает, что $|X_f| = |X_g|$, т.е. расширение не выйдет за пределы $P_3(x)$.

Докажем, что $\mathfrak{R}_2(P_3(x) \cup f^{P_3(x)}) = P_3$. Построим вектор принадлежности. Пусть $g_1(x) = x + 2$, $g_2(x) = x^2$. Прямая проверка определений классов из $\mathcal{K}_{[1]}$ показывает, что $g_1 \notin M_1^3 \cup M_2^3 \cup M_3^3 \cup T_{01} \cup T_{02} \cup T_{12} \cup T_0 \cup T_1 \cup T_2 \cup H_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup T_{\sim} \cup T_{\{0,2\},1} \cup T_{\{1,2\},0}$, $g_2 \notin L \cup S_{x+1}$.

Из определения Sl выполняется $P_3(x) \subset Sl$.

Докажем, что $\mathfrak{R}_2(P_3(x) \cup f^{P_3(x)}) = P_3$. Если $f^{P_3(x)} \notin Sl$, то, в силу теоремы Слупецкого, все доказано. Пусть $f = f^{P_3(x)} \in Sl$, т.е. $f \notin P_3(x)$, $f \in Sl$. Пусть $|X_f| = n$. Рассмотрим вектор значений $f^n = (f_1, \dots, f_{3^n})^T$. По определению f множество $\{0, 1, 2\}$ не содержится в $\{f_1, \dots, f_{3^n}\}$, следовательно, существует единственное $a \in \{0, 1\}$ такое, что $f_i \in \{a, 2\}$, $i = \overline{1, 3^n}$. Пусть без ограничения общности $a = 0$. Возможны три случая.

а. Пусть $O_2(f^n) \leq 3^n - 2$, т.е. имеются α_1^n, α_2^n такие, что $f(\alpha_1^n) = f(\alpha_2^n) = 0$. Перейдем к функции g такой, что fR_2g и g совпадает с f на всех наборах, кроме α_1^n , на котором $g(\alpha_1^n) = 1$.

В силу того, что $1 \notin \{f_1, \dots, f_{3^n}\}$, расширение корректно (т.е. $|X_f| = |X_g|$). Заметим, что $g \notin Sl$.

б. Пусть теперь $O_2(f^n) = 3^n - 1$, т.е. имеется единственное α_1^n такое, что $f(\alpha_1^n) = 0$. Заметим, что существует $g' \in P_3(x)$, $g'^1 = (2, 2, 0)^T$. Рассмотрим функцию $h = g'(f)$. Очевидно, что $|X_f| = |X_h|$. Также заметим, что если $h^n = (h_1, \dots, h_{3^n})$, то $h_i \in \{0, 2\}$, $i = \overline{1, 3^n}$, и $O_2(h^n) = 1 \leq 3^n - 2$. Таким образом пункт б сводится к пункту а.

в. Если $O_2(f^n) = 0$, то с помощью функции $x + 1$ можно построить $f'(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) + 1$. При этом $f' \in \mathfrak{R}_2(P_3(x) \cup f^{P_3(x)})$, и для f' выполнено либо условие а, либо условие б, а, значит, найдется $f^{Sl} \in \mathfrak{R}_2(P_3(x) \cup f_3^P(x))$, следовательно, $P_3(x) - \mathfrak{R}_2 -$ предполный класс.

Лемма 3. Если после замены в векторе функции f , $|X_f| \geq 1$ нуля на единицу или единицу на ноль получился вектор функции g , $|X_g| < |X_f|$, то с помощью подстановки констант в функцию f можно получить функцию $h \in \tilde{P}_2(x)$.

Доказательство. Пусть после перехода от f к g переменная x_i стала несущественной, тогда существуют наборы $\alpha_1^n = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i^1, a_{i+1}, \dots, a_n)$, $\alpha_2^n = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i^2, a_{i+1}, \dots, a_n)$, $\alpha_3^n = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i^3, a_{i+1}, \dots, a_n)$, что существует перестановка $\sigma \in \mathcal{S}$, $\sigma(a_i^j) = j$, при $j \in E_3$. Заметим, что $f(\alpha_1^n)Rf(\alpha_2^n)Rf(\alpha_3^n)$, и $f(\alpha_1^n)$, $f(\alpha_2^n)$, $f(\alpha_3^n) \in E_2$, причем существуют $l, m \in E_3$, что $f(\alpha_l^n) \neq f(\alpha_m^n)$. Получаем, что функция $h(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$ будет удовлетворять всем требуемым условиям.

Таким образом для оператора \mathfrak{R}_2 доказано, что при $k = 3$ существует 5 предполных классов.

4. Выводы

В статье был проведён анализ и представлен обзор современных приложений, где построение алгоритмов на основе трёхзначной логики обеспечивает большую эффективность и оказывается предпочтительнее в сравнении с двузначной.

Создание гетерогенных вычислительных систем с небольшими троичными вычислительными блоками является математически лучшим решением при построении узкоспециализированных вычислительных систем, особенно для задач передачи, обработки и защиты данных, распознавания изображений, квантовых вычислений, в том числе для проведения научных исследований в современных областях физики.

В области телекоммуникаций решения на базе трёхзначной логики фактически могут обеспечить 1,5-кратный рост скорости передачи данных (а в перспективе и экспоненциальный). Для практического решения данной задачи необходимо реализовать схемы из чипов, работа которых основана на трёхзначной логике. Для возможности реализации таких схем должна быть решена принципиально важная задача – *задача полноты классов функций трёхзначной логики*. С практической стороны полнота классов таких функций гарантирует, что на базе произвольного множества чипсетов можно создать плату с нужной функциональной схемой.

В данной работе были рассмотрены *операторы замыкания* на множестве функций трёхзначной логики, являющиеся усилением обычного оператора подстановки. Было показано, что задача полноты для этого оператора имеет решение, то есть можно восстановить подрешетку замкнутых классов в общем случае замыкания функций относительно классического оператора суперпозиций. Это позволит оптимизировать возможное производство чипов для новых функциональных схем для задач передачи и обработки данных.

Автор статьи выражает благодарность Г.А. Зверкиной и М.П. Фархадову за полезное обсуждение статьи и ценные советы.

Литература

1. БРУСЕНЦОВ Н.П. *Об использовании троичного кода и троичной логики в цифровых машинах* // Вычислительная техника и вопросы кибернетики. – 1970. – Вып. 7. – С. 3–33.

2. БРУСЕНЦОВ Н.П. *Трехзначное обобщение алгебры логики. Преодоление несовершенности ДНФ трехзначным обобщением логики* // Историко-математические исследования. Вторая серия. – 2014. – Выпуск 15(50). – С. 241–242.
3. ДМИТРИЕНКО В.Д., ЛЕОНОВ С.Ю. *Моделирование цифровых устройств на основе многозначных алфавитов и k-значного дифференциального исчисления* // Вестник Национального технического университета Харьковский политехнический институт. Серия: Информатика и моделирование. – 2008. – Т. 57, №4. – С. 42–51.
4. ЗЫКОВ А.Г., ПОЛЯКОВ В.И., СКОРУБСКИЙ В.И. *Математическая логика и теория алгоритмов: Учебное пособие*. – СПб: НИУ ИТМО, 2013. – 131 с.
5. *Замена двоичной логики – увеличит ли это производительность?* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://habr.com/ru/post/166679/> (дата обращения: 10.10.2020).
6. *«Иная» логика и обратимые вычисления* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://habr.com/ru/post/274645/> (дата обращения: 10.10.2020).
7. КАЛИННИКОВ В.А. *Применение многозначной логики в цифровой технике. (Обзор)* // Приборы и техника эксперимента. – 2006. – №6. – С. 5–17.
8. КАЛИННИКОВ В.А. *Применение многозначной логики в цифровой технике*. – Дубна, Объед. ин-та ядер. исслед., 2005.
9. КОВАЛЕНКО И.В., ПОТТОСИНА С.А. *Об использовании многозначной логики в исследовании социально-экономических систем* // Доклады Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники. – 2015. – №1(62). – 7 с.
10. ЛЕВАШЕНКО В.Г., КОЗЛОВА И.К., ПОТТОСИНА С.А. *Анализ чувствительности структурных функций многозначной логики в системах поддержки принятия решений* // Доклады Белорусского государственного университета ин-

- форматики и радиоэлектроники. – 2008. – №1(31). – 8 с.
11. МАРЧЕНКОВ С.С. *S-классификация функций трёхзначно логики*. – М., Физматлит, 2001.
 12. *Недвоичная логика* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://habr.com/ru/post/160595/> (дата обращения: 10.10.2020).
 13. ПОЛЯКОВ В.И., СКОРУБСКИЙ В.И. *Использование многозначной логики при проектировании функциональных схем* // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2014. – Т. 57, №4. – С. 57–60.
 14. ФАТХИ Д.В., ДУДЕНКОВ А.В. *Оценка угроз в сфере высоких технологий на основе многозначной логики с переменными весами операций* // Информационная безопасность регионов. – 2012. – №1. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/otsenka-ugroz-v-sfere-vysokih-tehnologiy-na-osnove-mnogoznachnoy-logiki-s-peremennymi-vesami-operatsiy> (дата обращения: 10.10.2020).
 15. ЯБЛОНСКИЙ С.В., ГАВРИЛОВ Г.П., КУДРЯВЦЕВ В.Б. *Функции алгебры логики и классы Поста*. – М.: Изд-во «Наука», 1966.
 16. ЯБЛОНСКИЙ С.В. *Функциональные построения в k-значной логике* // Тр. Матем. инст. им. В.А. Стеклова. – 1958. – Том 51.
 17. ABIRI E., DARABI A., SALEM S. *Design of multiple-valued logic gates using gate-diffusion input for image processing applications* // Computers Electrical Engineering. – 2018. – Vol. 69. – P. 142–157. – DOI: 0.1016/j.compeleceng.2018.05.019.
 18. AIZENBERG I. *Complex-Valued Neural Networks with Multi-Valued Neurons*. Studies in Computational Intelligence. – 2011. – Vol. 353. – 273 p. – DOI: 10.1007/978-3-642-20353-4.
 19. ASADI M., MOSLEH M., HAGHPARAST M. *Toward novel designs of reversible ternary 6:2 Compressor using efficient reversible ternary full-adders* // The Journal of Supercomputing. – 2020. – DOI:

- <https://doi.org/10.1007/s11227-020-03485-7>.
20. BYKOVSKY A.YU. *Heterogeneous Network Architecture for Integration of AI and Quantum Optics by Means of Multiple-Valued Logic* // Quantum Rep. – 2020. – No. 2. – P. 126–165. – DOI:10.3390/quantum2010010.
 21. CAMBOU B., FLIKKEMA P.G., PALMER J., TELESCA D., PHILABAUM C. *Can Ternary Computing Improve Information Assurance?* // Cryptography. – 2018. – Vol.2, Iss.1. – DOI: 10.3390/cryptography2010006.
 22. COBREROS P., EGRE P., RIPLEY D., VAN ROOIJ R. *Three-valued logics and their applications* // Journal of Applied Non-Classical Logics. – 2014. – Vol. 24, Iss. 1-2. – P. 1–11. – DOI: 10.1080/11663081.2014.909631.
 23. CONNELLY J. *Ternary Computing Testbed 3-Trit Computer Architecture*. PhD thesis. Computer Engineering Department. California Polytechnic State University. – 2008. – 192 p. – URL: <http://xyzyzy.freeshell.org/trinary/CPE%20Report%20-%20Ternary%20Computing%20Testbed%20-%20RC6a.pdf> (дата обращения: 10.10.2020).
 24. ESIN A., YAVORSKIY R., ZEMTSOV N. *Brief Announcement Monitoring of Linear Distributed Computations* // In: Dolev S. (eds) Distributed Computing. DISC 2006. Lecture Notes in Computer Science. – Vol. 4167. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2006. – DOI: <https://doi.org/10.1007/11864219-47>.
 25. ESIN A.A. *On function classes in P3 precomplete with respect to a strengthened closure operator* // Math Notes. – 2008. – Vol. 83, No. 5. – P. 594–603. – DOI: 10.1134/S0001434608050027.
 26. GAUDET V. *A survey and tutorial on contemporary aspects of multiple-valued logic and its application to microelectronic circuits* // IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems. – 2016. – Vol. 6, March, No. 1. – P. 5–12. – DOI: 10.1109/JETCAS.2016.2528041.

27. HRUSKA J. *Samsung-Backed Researchers Debut Ternary Semiconductor Design* // ExtremeTech. – 2019, July 22. – URL: <https://www.extremetech.com/computing/295424-back-off-binary-samsung-backed-researchers-debut-ternary-semiconductor> (дата обращения: 10.10.2020).
28. HU ZH., DEIBUK V. *Design of ternary reversible/quantum sequential elements* // Journal of Thermoelectricity. – 2018. – No. 1. – P. 5–16.
29. *IBM Quantum Summit 2020: Exploring the Promise of Quantum Computing for Industry* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.ibm.com/blogs/research/2020/09/quantum-industry/> (дата обращения: 30.10.2020).
30. *Implementation of a Simple Ternary System* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://habr.com/ru/post/431726/> (дата обращения: 10.10.2020).
31. КАК SUBHASH *On Ternary Coding and Three-Valued Logic*. – 2018. – URL: <https://arxiv.org/abs/1807.06419> (дата обращения: 10.10.2020).
32. KALIMULINA E.YU. *Analysis of system reliability with control, dependent failures, and arbitrary repair times* // Int. Journal of System Assurance Engineering. – 2017. – Vol. 8. – P. 180–188. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s13198-016-0520-5>.
33. KALIMULINA E.YU. *Rate of Convergence to Stationary Distribution for Unreliable Jackson-Type Queueing Network with Dynamic Routing* // Communications in Computer and Information Science. – 2017. – Vol. 678. – DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-51917-3_23.
34. KATUGAMPOLA U. *A New Technique for Text Data Compression*. – 2012. – URL: <https://arxiv.org/abs/1012.4241> (дата обращения: 10.10.2020).
35. МОНАГHEGH S.M., SABBAGHI-NADOOSHAN R., МОНАММАДИ M. *Designing ternary quantum-dot cellular automata logic circuits based upon an alternative model* // Computers Electrical Engineering. – 2018. – Vol. 71. – P. 43–59. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.compeleceng.2018.07.001>.

36. MUTHUKRISHNAN A., STROUD C.R.JR. *Multivalued logic gates for quantum computation* // Phys. Rev. A. – 2000. – Vol. 62, Iss. 5. – DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.052309>.
37. MUTHUKRISHNAN A. *Classical and Quantum Logic Gates: An Introduction to Quantum Computing*. – Rochester Center for Quantum Information (RCQI). Quantum Information Seminar, 1999. – 22 p. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www2.optics.rochester.edu/stroud/presentations/muthukrishnan991/LogicGates.pdf> (дата обращения: 10.10.2020).
38. POST E.L. *Two-valued iterative systems of mathematical logic* // Annals of Math. Studies. – 1941. – Vol. 5.
39. SIMONETTA A., PAOLETTI M.C. *Designing Digital Circuits in Multi-Valued Logic* // Int. Journal on Advanced Science Engineering Information Technology. – 2018. – Vol. 8, No. 4. – URL: <https://core.ac.uk/download/pdf/325990569.pdf>.
40. *The Three-Valued Logic of SQL* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://modern-sql.com/concept/three-valued-logic> (дата обращения: 10.10.2020).
41. WARZECHA M., OSZAJCA M., PILARCZYK K., SZACIŁOWSKI K. *A three-valued photoelectrochemical logic device realising accept anything and consensus operations* // Chemical Communications. – 2015. – Vol.51, Iss.17. – P. 3559–3561. – DOI: 10.1039/C4CC09980J.
42. WU HAIXIA, BAI YILONG, LI XIAORAN, WANG YIMING *Design of High-Speed Quaternary D Flip-Flop Based on Multiple-valued Current-mode* // Journal of Physics: Conference Series. – 2020, October. – Vol. 1626. – DOI: 10.1088/1742-6596/1626/1/012067.
43. YI JIN, HUACAN HE, YANGTIAN L. *Ternary Optical Computer Architecture* // Physica Scripta. – 2005. – T118. – DOI: 10.1238/physica.topical.118a00098.
44. ZHANG WEI, HOU LU, YIN YICHUN, LIFENG SHANG, XIAO CHEN, XIN JIANG, QUN LIU. *TernaryBERT:*

Distillation-aware Ultra-low Bit BERT. – 2020. –
URL: <https://arxiv.org/abs/2009.12812> (дата обращения:
10.10.2020).

ANALYSIS AND DESIGN PRINCIPLES OF MODERN CONTROL SYSTEMS BASED ON MULTI-VALUED LOGIC MODELS

Anton Esin, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS,
Moscow, PhD student (ae@incarnet.ru).

Abstract: An analysis and an overview of modern applications based on three-valued logic have been presented in this paper. Small computing units based on three-valued logic is a better solution (in comparison with binary models) for several applications such as the telecommunications industry, where three-valued logic units may increase the data transmission rate by one and a half times. It is important to have a possibility to assemble any circuits from three-valued logic chips. An important fundamental problem of class completeness for three-valued logic functions must be solved to make such implementation possible. The class completeness for three-valued logic functions guarantees that any digital circuit may be assembled from the finite number of ternary chipsets. The closure operator on the set of three-valued functions has been considered in this paper. It is a strength of the substitution operator. The completeness problem for this operator has been proved. This fact allows to restore in the general case the sublattice of closed classes with respect to the classical operator of superpositions. It's a principal theoretical result that can optimize the assembly process for new digital circuits for transmission and data processing problems.

Keywords: multivalued logic, three-valued logic, applications of multivalued logic, completeness problem, closure operator, functions of three-valued logic.

УДК 510.644, 519.716.32

ББК 22.12

DOI: 10.25728/ubs.2020.88.4

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Э.Ю. Калимулиной.*

Поступила в редакцию 13.11.2020.

Дата опубликования 30.11.2020.

УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННО-АНАЛИТИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ НА ОСНОВЕ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМ НЕЧЕТКОГО ВЫВОДА

Сорокин А. А.¹

(ФГБОУ ВО Астраханский государственный технический университет, Астрахань)

Предложены положения по усовершенствованию вычислительных комплексов, основанных на использовании иерархических систем нечеткого вывода. Положения связаны с предварительной подготовкой данных и последующей интерпретацией результатов. Подготовка данных основана на выполнении операций по нормализации входных параметров к шкале с одинаковым диапазоном значений при условии, что эти значения имеют положительную корреляцию с выходной переменной. Реализация положений основана на использовании кусочных функций. Использование положений позволяет упростить формирование продукционных правил в базе знаний системы нечеткого вывода. Исследование поведения изменения значений выходных оценок в зависимости от количества уровней в иерархической системе нечеткого вывода позволило выявить свойство, связанное с группированием этих оценок в окрестностях численных значений термов, которые описывают выходную переменную. Это позволило отнести иерархическую систему нечеткого вывода к классификатору анализируемых объектов по их состоянию с учетом критериев проводимой оценки. Принадлежность к определенному классу определяется величиной итоговой оценки. Для идентификации групп объектов с близкими свойствами внутри классов предложена совокупность операций, основанная на последовательном использовании алгоритма горной кластеризации, евклидовой метрики и метрики Хаусдорфа. Применение операций позволяет выделять типичных представителей исследуемых классов, а затем определять объекты, которые наиболее близки к ним по параметрам с учетом установленных ограничений на отклонения. Проведенный эксперимент подтвердил работоспособность предложенных положений.

Ключевые слова: иерархическая система нечеткого вывода, нормализация, кластеризация, метрика Хаусдорфа, классификатор объектов, алгоритм горной кластеризации.

1. Введение

В настоящее время одной из тенденций развития систем обработки информации стало решение задач по агрегированию

¹ Александр Александрович Сорокин, к.т.н., доцент (alsorokin.astu@mail.ru).

разнородных данных для идентификации оценки состояния различных объектов. Подобное направление получило название Big Data (аналитика больших данных) [19, 20]. Положения по агрегированию разнородной информации часто используются для реализации систем поддержки принятия решений (СППР), которые получили распространение во время управления хозяйственными процессами различных отраслей экономики. К подобным отраслям относятся банковский сектор, телекоммуникационные, транспортные и другие виды компаний [10, 17, 21].

В [8, 9] описывается, что одной из сложностей идентификации интегральных оценок является реализация оператора агрегирования разнородных параметров. Часто сложности вызваны тем, что величины параметров могут оцениваться по различным метрическим шкалам, иметь разный уровень влияния на итоговый результат. Идентификация одинаковых значений интегральной оценки часто происходит при различных комбинациях значений входных величин. Для разрешения подобных сложностей нашли применение экспертные системы [5, 13]. Методы теории нечетких множеств часто используются как теоретическая основа подобных систем обработки информации. В работах [9, 14] указывается, что одним из ограничений систем нечеткого вывода (СНВ) является усложнение структуры правил и увеличение их числа при возрастании количества входных переменных. В работах [2, 14–16] для упрощения структуры правил предлагается агрегирование групп входных переменных при помощи отдельных СНВ с последующим их объединением в единый вычислительный комплекс – иерархическую СНВ (ИСНВ). Как показывает обзор [3, 9, 12], специфика функционирования ИСНВ требует дальнейшего развития положений по предварительной подготовке исходных данных и постобработке полученных значений итоговой оценки.

Цель работы: предложение положений по предварительной подготовке и постобработке данных для иерархических систем нечеткого вывода.

2. Анализ особенностей функционирования систем нечеткого вывода

В рамках исследований принимается, что в основе рассматриваемых СНВ заложен алгоритм Сугено (АС). При прочих равных условиях преимущества АС над алгоритмом Мамдани (АМ) с учетом анализа [9, 14] заключается в том, что:

- АС использует более простую операцию дефаззификации, что сокращает затраты времени на выполнение расчетов;
- выходная переменная СНВ на основе АС обладает более широким диапазоном выходных значений;

В процессе функционирования СНВ на основе АС можно выделить следующие основные этапы обработки информации:

- Фаззификация – преобразование переменной из четкой численной формы x в нечеткую χ при помощи оператора преобразования μ_τ – (функции принадлежности) ФП:

$$(1) \quad \chi = \mu_\tau(x).$$

Задача ФП – определить степень принадлежности значения переменной x к элементам терм-множества $T_\chi = \{\tau_\kappa^\chi\}$, где κ – номер термина в терм-множестве, которое описывает переменную χ ; в качестве ФП обычно используются треугольные, трапециевидальные, гауссовы, синглтоны и др. виды функций.

– Агрегирование подусловий правил в зависимости от значений входных переменных в нечеткой форме; в рамках проводимых исследований будут рассматриваться правила типа MISO (англ. multiple input, single output), которые для агрегирования используют операцию логического «И» – « \wedge »:

$$(2) \quad \omega \text{ if } (\chi_1 = \tau_{\kappa_1, \chi_1}) \wedge \dots \wedge (\chi_n = \tau_{\kappa_n, \chi_n}) \Rightarrow (\psi = \tau_{\kappa_\psi}), \xi_\omega,$$

где ω – номер правила; $\langle \chi_1, \dots, \chi_n \rangle$ – множество входных переменных, а n – их порядковый номер во множестве входных переменных $\mathbf{X} = \{\chi_n\}$; $\tau_{\kappa_1, \chi_1}, \dots, \tau_{\kappa_n, \chi_n}$ – значения термов из терм-множеств, используемых для описания входных переменных; i_1, \dots, i_n – номера термов в терм-множествах; ψ^{fuzz} – выходная переменная в нечеткой форме; $\tau_{\theta, \psi}$ – значение термина выходной переменной, θ – номер термина в терм-множестве; ξ – коэффи-

циент доверия (КД). Выходное значение правила φ_ω применительно к АС может быть определено следующим образом:

$$(3) \quad \varphi_\omega = \xi_\omega \cdot \text{prod}(\mu_\tau(x_1), \dots, \mu_\tau(x_n)) = \xi_\omega \cdot \prod_{i=1}^n \mu_\tau(x_i).$$

– Получение численного значения выходной переменной выполняются при помощи соотношения вида

$$(4) \quad y_{out} = \left(\sum_{\omega=1}^{\Omega} \varphi_\omega \zeta_{\tau_{\kappa_{\psi}}} \right) / \sum_{\omega=1}^{\Omega} \varphi_\omega,$$

где $\zeta_{\tau_{\kappa_{\psi}}}$ – численное значение термина $\tau_{\kappa_{\psi}}$, входящего в термножество, которое описывает выходную переменную в СНВ, а Ω – общее количество правил вида (2), входящих в базу знаний (БЗ) СНВ.

Основное ограничение применения СНВ связано с сильным ростом количества правил в зависимости от количества переменных и термов, которые их описывают. Как показывает анализ [2, 3, 12, 14–16], для устранения подобного ограничения предлагается использовать ИСНВ. В процессе формирования ИСНВ множества входных переменных $X^1 = \{x_n\}$ разделяются на m_1 непересекающихся подмножеств:

$$(5) \quad X^1 \supset X_1^1, \dots, X_{m_1}^1 : X_1^1 \cap \dots \cap X_{m_1}^1 = \emptyset.$$

После этого для каждого подмножества переменных формируется отдельная СНВ. В результате формируется множество СНВ первого уровня иерархии – $F_1 = \{f_{m_1}^1\}$. Функционирование СНВ первого уровня иерархии формирует множество переменных X_2 . Эти переменные аналогично (5) разделяются на m_2 непересекающиеся подмножества переменных, для которых формируются СНВ второго уровня иерархии F_2 . Подобные операции выполняются пока не идентифицируется множество содержащее набор целевых переменных Y_v . Так как в рамках исследований рассматриваются СНВ на основе правил вида MISO, то множество Y_v содержит одну выходную переменную y_{out} .

Часто при разработке СНВ эксперту необходимо для каждой переменной предложить термножество, где каждому тер-

му соответствует отдельная ФП со «своими» специфичными характеристиками. В результате семантическое значение двух идентичных термов, используемых для описания переменных, имеющих положительную и отрицательную корреляцию с выходной переменной, будут различаться. Реализация идентичности семантических значений термов подобных переменных приведет к тому, что аналогичные обозначения термов будут находиться в различных частях шкал абсолютных (естественных) значений входных переменных. Подобное порождает неопределенность при формировании БЗ СНВ и может привести к ошибкам при формировании правил. Для сокращения подобных ошибок целесообразно, чтобы у идентичных термов были близкие семантические значения, одинаковая хронология следования термов на шкале значений входных переменных, а сами входные переменные имели положительную корреляцию с выходной переменной. Для этого необходимо приведение различных значений входных переменных к единой шкале оценки.

3. Преобразование значений входных переменных к единой форме представления

Задачей предлагаемых положений по преобразованию входных переменных является обеспечение результата, когда семантические значения термов и хронология шкалы оценки параметра имеют положительную корреляцию с семантическими значениями термов и численными значениями шкалы выходной переменной. Использование подобных положений позволит обеспечить формирование выходной поверхности СНВ, показывающей закономерность взаимодействия входных переменных в монотонно неубывающем виде. Реализация этого возможна за счет нормализации значений входных переменных отложенных на разных метрических шкалах. Примеры операторов нормализации значений входных переменных, подаваемых на вход СНВ, в виде линейной функции описаны в работе [9]:

$$(б) \quad x_{norm} = f_{norm}(x_{фст}) : x_{norm} \in [0, 1],$$

где f_{norm} – оператор нормализации, $x_{фст}$ – фактическое значение параметра. Однако операторы в работе [9] не учитывают нели-

нейного характера закономерности между значением входной и выходной переменной. Для разрешения этого предлагается выполнять нормализацию входных параметров при помощи кусочных функций $f_{norm}^{piec}(x_{ест})$. Подобное можно представить в виде

$$(7) \quad x_{norm} = f_{norm}^{piec}(x_{ест}) = \begin{cases} \varphi_{u_1}(x_{ест}) : x_{ест} \in [x_{u_{1,1}}^{ест}, x_{u_{1,2}}^{ест}), \\ \dots \\ \varphi_{u_{max}}(x_{ест}) : x_{ест} \in [x_{u_{max,1}}^{ест}, x_{u_{max,2}}^{ест}]; \end{cases}$$

где φ – оператор преобразования естественного значения переменной на отрезке $[x_{u_{1,1}}^{ест}, x_{u_{1,2}}^{ест})$ шкалы оценки параметра $x_{ест}$.

Количество участков и их граничные точки, вид функций нормализации на этих участках определяются экспертами или с учетом нормативных документов, регулирующих обращение с оцениваемым объектом. В рамках исследований реализацию подобных операторов предлагается выполнять на основе уравнения прямой, проходящих через две точки, которые характеризуют изменение закономерности влияния значения входной переменной на выходную. В зависимости от специфики переменной предлагаются три основных вида операторов нормализации при помощи кусочных функций:

- для переменных, которые имеют положительную корреляцию на рис. 1а (сплошная линия) или отрицательную корреляцию на рис. 1а (пунктирная линия) с выходной оценкой;
- для переменных, которые имеют точку оптимума для значения выходной оценки, пример показан на рис. 1б.

Примером параметра, имеющего «точку оптимума», является температура помещения, где находится технологическое оборудование. Значение «благоприятной температуры» занимает относительно «узкий» участок на шкале оценки значений этого параметра, а выход за допустимые границы его значения ухудшит эксплуатационные свойства оборудования.

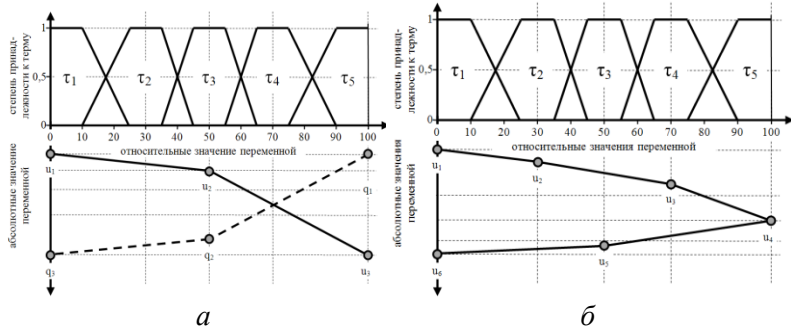


Рис. 1. Вид операторов нормализации значений параметров

Анализ работ [3, 9, 12] показал, что еще одним свойством СНВ является неравномерная чувствительность к изменению значений входных переменных. Результатом подобного становится группировка выходных оценок в окрестностях определенных точек, что приводит к снижению разнообразия оценок и возникновению сложностей идентификации ситуации по значению интегральной оценки. Таким образом, возникает обоснованное предположение, что последовательное применение СНВ еще больше усилит группировку выходных значений в окрестностях определенных точек. Для проверки подобного предположения в следующем разделе описываются результаты эксперимента, посвященного исследованию закономерностей распределения выходных оценок в ИСНВ.

4. Исследование закономерностей функционирования иерархических систем нечеткого вывода

Учитывая результаты сравнения алгоритмов, заложенных в основе функционирования СНВ, дальнейшие рассуждения ведутся из допущения, что при формировании ИСНВ используется алгоритм Сугено. Исследовались ИСНВ следующих видов:

- с однотипными базами правил, в которых семантическое значение выходной переменной равно минимальному семантическому значению входных переменных, далее «СНВ тип 1»;

– с однотипными базами правил, в которых семантическое значение выходной переменной равно максимальному семантическому значению входных переменных, далее «СНВ тип 2»;

Для анализа была построена ИСНВ, состоящая из пяти уровней иерархии. Общее количество входных переменных составило 32, и каждая СНВ, входящая в состав исследуемого вычислительного комплекса, агрегировала две переменные. С учетом соотношения (7) значения входных, промежуточных и выходной переменных задавались в диапазоне от 0 до 100 баллов. Каждый эксперимент включает в себя две серии: ФП для входных переменных СНВ из первой серии показаны на рис. 2а; ФП для входных переменных СНВ из второй серии показаны на рис. 2б.

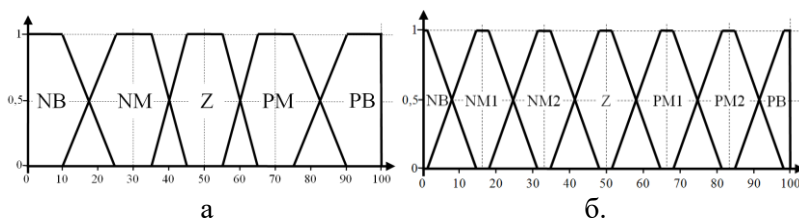


Рис. 2. Функции принадлежности входной переменной

Вид образующих поверхностей элементарных СНВ для:

- первой серии первого эксперимента показан на рис. 3а;
- второй серии первого эксперимента показан на рис. 3б;
- первой серии второго эксперимента показан на рис. 3в;
- второй серии второго эксперимента показан на рис. 3г.

Описание значений переменных проводилось аналогично рекомендациям в работе [6] при помощи следующих термов: NB – низкий; NM – скорее низкий; NM1 – ближе к низкому, чем к среднему; NM2 – ближе к среднему, чем к низкому; Z – средний; PM – скорее высокий; PM1 – ближе к среднему, чем к высокому; PM2 – ближе к высокому, чем к среднему; PB – высокий. Во всех сериях для описания выходных переменных использовались константы, в первой – пять, а во второй – семь. Когда выходная переменная описывается пятью термами, за

каждым термом закреплялись следующие значения: $NB = 0$, $NM = 25$, $Z = 50$, $PM = 75$, $PB = 100$ баллов. Когда выходная переменная описывается семью термами, за каждым термом закреплялись следующие значения: $NB = 0$, $NM1 = 16,67$, $NM2 = 33,33$, $Z = 50$, $PM1 = 66,67$, $PM2 = 83,33$, $PB = 100$ баллов.

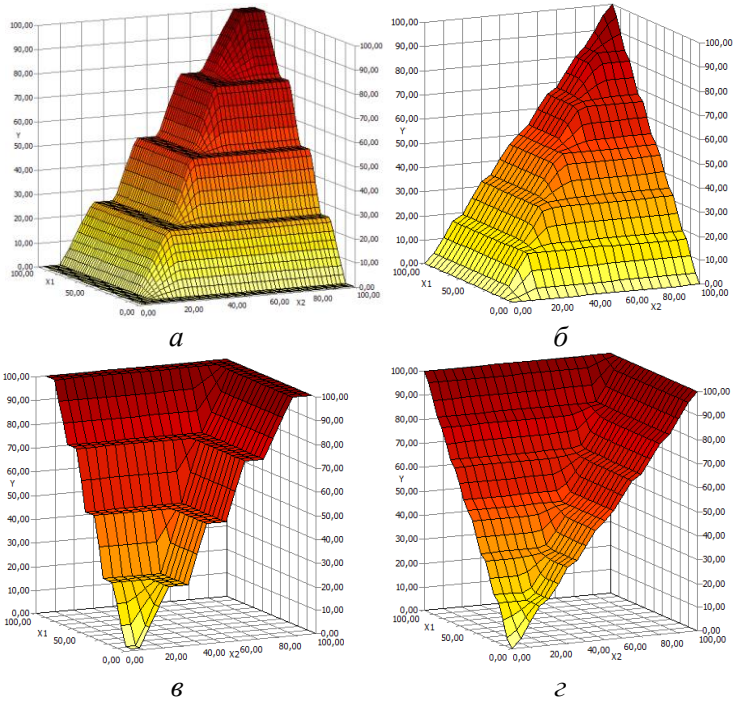


Рис. 3. Поверхности порождаемые СНВ Сугено

В процессе проведения эксперимента на вход первой переменной подавались изменяемые значения в диапазоне от 0 до 100 баллов с шагом 5 баллов, а на другие входы – различные комбинации значений. Комбинации значений включали диапазоны от 0 до 100 баллов с шагом 5 баллов, а также фиксированные значения по 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 и 100 баллов. Учитывая большое количество данных, на рис. 4 приведены за-

кономерности для случаев, когда на входы синхронно подавались значения в диапазоне от 0 до 100 баллов с шагом 5 для:

- первой серии первого эксперимента показан на рис. 4а;
- второй серии первого эксперимента показан на рис. 4б;
- первой серии второго эксперимента показан на рис. 4в;
- второй серии второго эксперимента показан на рис. 4г.

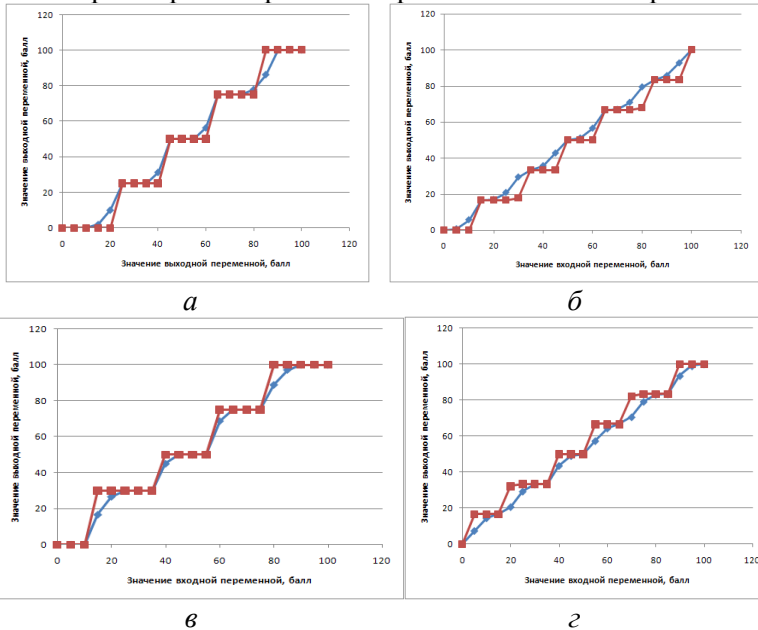


Рис. 4. Закономерности поведения СНВ

Во всех экспериментах заметна тенденция группировки выходных значений в окрестностях значений термов выходной переменной, при увеличении количества иерархий эта тенденция становится более явной. Выходные значения пятого уровня иерархии имеют ступенчатый характер, тогда как выходные значения СНВ первого уровня иерархии имеют более плавный вид. Общий анализ результатов экспериментов позволяет сделать заключение, что:

- при увеличении количества иерархий в вычислительной системе наблюдается группировка выходных значений по определенным областям;
- количество формируемых групп с одинаковыми значениями выходной оценки пропорциональна количеству термов, которые описывают выходную переменную;
- устойчивость результатов группировки наблюдалась после четвертого уровня иерархии;
- области концентрации значений привязаны к значениям термов выходных переменных.

Таким образом, при увеличении уровней иерархии модель, построенная при помощи ИСНВ, теряет чувствительность и ее выходные значения устойчивы относительно значений ФП выходной переменной. В результате ИСНВ фактически становится классификатором оцениваемых объектов по группам состояний. Классификационная способность ИСНВ пропорциональна мощности терм-множества выходной переменной. Общим признаком объектов одного класса является итоговая оценка. Классификатор позволяет разделить исходное множество объектов на подмножества объектов с оценками, соответствующими значениям термов выходной переменной. Подобная классификация позволяет, например, ранжировать объекты по очередности оказания управляющих воздействий, построить график распределения комплексного состояния объектов по определенной территории и решить ряд других задач, в которых важно знать усредненное состояние элементов.

Для оказания управляющего воздействия на определенный элемент необходимо определить, к какой подгруппе внутри выделенного класса этот объект относится. Спецификой подобной задачи является то, что объекты внутри каждой из подгрупп должны незначительно отличаться друг от друга в пределах ограниченных рамок. Следующим этапом исследования стало предложение положений для разделения класса объектов на подгруппы, в которых различие объектов ограничено установленными допусками.

5. Разделение объектов одного класса на подгруппы близких элементов

Как описывается в работах [1, 4, 6, 11] задачи распределения объектов по группам с близкими свойствами при условии неизвестности общего количества групп решаются методами кластеризации. Анализ [1, 4, 6, 11] показал, что алгоритмы кластеризации можно разделить на два вида:

- алгоритмы, в которых проводится расчет «усредненного» центра кластера, с учетом свойств анализируемых объектов, примерами являются алгоритмы k -средних и c -средних;

- алгоритмы, в которых в роли центра кластера выступают определенные вершины анализируемой выборки, а сами объекты выделяются в группу относительно близости к этим вершинам, примером является алгоритм горной кластеризации (АГК) и его модификации.

Учитывая, что в рамках проводимых исследований необходимо выделять объекты близкие к некоторому образцу, который нужно идентифицировать в исходном множестве то применение АГК более целесообразно, так как с его помощью изначально определяется вершина, являющаяся центром некоторой группы.

Работа АГК заключается в выполнении следующей последовательности операций [1, 4, 6, 11]:

1. задается функция $\delta(\lambda_q, \lambda_p)$ с помощью которой рассчитывается расстояние между элементами λ_q и λ_p (описываемые векторами $\langle x_1^q, \dots, x_n^q \rangle$ и $\langle x_1^p, \dots, x_n^p \rangle$), включенными в анализи-

руемое множество $L = \{\lambda_r\} : r = \overline{1, R}$, где R – общее количество элементов множества; часто функция $\delta(\lambda_q, \lambda_p)$ определяется как евклидово расстояние:

$$(8) \quad \delta(\lambda_q, \lambda_p) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i^q - x_i^p)^2 \right)^{1/2}.$$

2. Элементы выборки, которые могут быть определены как центры кластеров, обозначаются в виде подмножества

$$H = \{h_t\} : t = \overline{1, T}, \text{ часто справедливо } L = H.$$

3. Для элементов h_t рассчитывается метрика \mathcal{G} , показывающая возможность формирования кластера в ее окрестности:

$$(9) \quad \mathcal{G}_t^1 = \sum_{r=1}^R e^{-\gamma \cdot \delta(h_t, \lambda_r)},$$

где γ – константа, описывающая показатель масштаба расстояния между объектами; часто величина определяется как $1/d_{mean}$, где d_{mean} – среднее расстояние между элементами множества L , в результате формируется множество значений полученных метрик $\{\mathcal{G}_t^1\} = V^1$;

4. Центром первого кластера $h_{c,1}$ назначается элемент h_t с максимальным значением метрики \mathcal{G}_t^1 :

$$(10) \quad h_{c,1} = \arg \max(\{\mathcal{G}_t^1\}).$$

5. При определении центра последующего кластера влияние предыдущего кластера исключается, – это выполняется за счет повторного расчета метрик оставшихся вершин h_t , для этого от текущего значения \mathcal{G}_t^1 оставшихся точек h_t отнимается вклад уже определенного центра кластера $h_{c,1}$:

$$(11) \quad \mathcal{G}_t^2 = \mathcal{G}_t^1 - \mathcal{G}_{t, \max}^1 \cdot e^{-\beta \cdot \delta(h_t, h_{c,1})},$$

где β – положительная константа, характеризующая размер кластера (часто полагают $\beta = \gamma$);

6. Центром второго кластера $h_{c,2}$ назначается элемент h_t с максимальным значением \mathcal{G}_t^2 :

$$(12) \quad h_{c,2} = \arg \max(\{\mathcal{G}_t^2\}).$$

7. Операции 5 и 6 выполняются до наступления условия

$$(13) \quad \mathcal{G}_{t, \max}^v < \mathcal{G}_{t, \text{доп}},$$

где v – номер итерации описываемого алгоритма, $\mathcal{G}_{t, \text{доп}}$ – минимально допустимое значение метрики \mathcal{G} (например, $\mathcal{G}_{t, \text{доп}} \approx 0,1 \mathcal{G}_{t, \max}^1$).

Включение определенной вершины в кластер с центром $h_{t,c}$ определяется на основании степени принадлежности μ_{H_t} , которую можно определить соотношением

$$(14) \mu_{H_t} = 1 - \delta_{h_t, h_{c,1}} / \delta_{h_{c,1}, \max},$$

где $\delta_{h_{c,1}, \max}$ – расстояние между центром кластера и максимально удаленной от него вершиной.

Применение описанных операций ограничивается тем, что часто интерес представляет часть объектов, включенных в кластер H_t , при условии, что эти объекты находятся в окрестности центра кластера на расстоянии не более величины ε .

Таким образом, возникает задача выделения из кластера H_t подмножества элементов H_t^ε , для которых расстояние между вершиной h_t и любым элементом выделенного подмножества H_t^ε не должно превышать величины ε . Решение задачи проводится при помощи использования метрики Хаусдорфа [7]. Сущность применения этой метрики заключается в том, что объект $h_t \subset H_t^\varepsilon$ признается элементом подмножества H_t^ε , если расстояние $\delta_{h_t, h_{c,1}}$ меньше наперед заданного числа ε – радиуса окрестности. С учетом [3, 15] предлагается интерпретация метрики Хаусдорфа в виде решения $d(H_t^\varepsilon)$ о включении $d(H_t^\varepsilon) = 1$ или не включении $d(H_t^\varepsilon) = 0$ вершины h_t в подмножество H_t^ε :

$$(15) d(H_t^\varepsilon) = \begin{cases} 1, & \delta_{h_t, h_{c,1}} \leq \varepsilon, \\ 0, & \delta_{h_t, h_{c,1}} > \varepsilon; \end{cases}$$

если условие выполняется для нескольких центров кластеров, то объект ставится в соответствие с кластером, расстояние до центра которого минимально.

После формирования подгрупп H_t^ε для всех центров кластеров может остаться подмножество элементов H_t^Δ , для которых $d(H_t^\varepsilon) = 0$. Для этого подмножества проводится повторное определение центров кластеров при помощи соотношений (8)–(13) с последующим определением вершин, для которых вы-

полнимо условие (15). Выполнение операций остановится, когда все вершины будут распределены по кластерам или останутся вершины в окрестности, которых не будут включены другие вершины. Такие вершины признаются кластерами, которые содержат один элемент. С учетом (8)–(15) разделение групп, полученных ИСНВ можно описать последовательностью операций:

1. Расчет центров кластеров в каждом из выделенных классов объектов, имеющих определенную интегральную оценку.
2. Выделение объектов, которые наиболее близки к рассчитанным центрам кластеров.
3. Расчет центров кластеров для элементов, оставшихся внутри класса.

После формирования групп элементов с близкими свойствами для каждой из групп возможно формирование общего управляющего воздействия в виде сценария σ_t^ε . Совокупность сценариев σ_t^ε для класса объектов образует множество сценариев воздействий Ψ_y на объекты, получивших определенную оценку y_{out} . Объединение совокупностей сценариев Ψ_y образует множество управляющих воздействий Y на все множество L анализируемых элементов:

$$(16) \forall H_t^\varepsilon \stackrel{\text{эксперт}}{\Rightarrow} \sigma_t^\varepsilon : \bigcup_{t=1}^{t_{max}} \sigma_t^\varepsilon = \Psi_y : \bigcup_{y=1}^{y_{max}} \Psi_y = Y.$$

Таким образом, совокупность теоретических положений (1)–(16) формирует аналитический комплекс для обработки информации, позволяющий из множества исследуемых объектов выделять подмножества элементов с одинаковой интегральной оценкой, а затем из каждого подмножества выделять группы объектов с близкими значениями оцениваемых параметров.

6. Исследование работоспособности предложенных положений

В рамках исследований построена ИСНВ для выделения близких по заданным геометрическим размерам элементов вы-

борки. В качестве выборки использована база данных цветов ирисов, содержащаяся в файле «Iris.data» [18]. Атрибуты каждого из объектов и диапазон и значений следующие:

- длина чашелистика (англ. sepal length): $4,3 \div 7,9$ см;
- ширина чашелистика (англ. sepal width): $2,0 \div 4,4$ см;
- длина лепестка (англ. petal length): $1,0 \div 6,9$ см;
- ширина лепестка (англ. petal width): $0,1 \div 2,5$ см.

В рамках эксперимента необходимо сформировать подмножество элементов, которое будет соответствовать условиям: длина чашелистика примерно 5,4 см и более; ширина чашелистика примерно 3,0 см и более; длина лепестка примерно 4,0 см; ширина лепестка примерно 1,2 см. Для описания входных переменных используются ФП, показанные на рис. 1а, агрегирование переменных проводится при помощи СНВ, поверхность БЗ которой показана на рис. 2а. Операторы для преобразования входных переменных от абсолютных значений к относительным с учетом положений (6), (7) и условий задачи имеют вид:

- для длины чашелистика:

$$(17) \quad p_{norm}^{SL} = \begin{cases} p_{1,norm}^{SL} = 0: p_1^{SL} \in [0; 4,7); \\ p_{2,norm}^{SL} = 250 \cdot p_2^{SL} - 1175: p_2^{SL} \in [4,7; 4,9); \\ p_{3,norm}^{SL} = 100 \cdot p_3^{SL} - 440: p_3^{SL} \in [4,9; 5,4); \\ p_{4,norm}^{SL} = 100: p_4^{SL} \in [5,4; +\infty). \end{cases}$$

- для ширины чашелистика:

$$(18) \quad p_{norm}^{SW} = \begin{cases} p_{1,norm}^{SW} = 100: p_1^{SW} \in [0; 3,0); \\ p_{2,norm}^{SW} = -50 \cdot p_2^{SW} + 250: p_2^{SW} \in [3,0; 3,5); \\ p_{3,norm}^{SW} = -150 \cdot p_3^{SW} + 600: p_3^{SW} \in [3,5; 4,0); \\ p_{4,norm}^{SW} = 0: p_4^{SW} \in [4,0; +\infty). \end{cases}$$

– для длины лепестка:

$$(19) \quad p_{norm}^{PL} = \begin{cases} p_{1,norm}^{PL} = 0 : p_1^{PL} \in [0; 2,0); \\ p_{2,norm}^{PL} = \frac{100}{3} \cdot p_2^{PL} - \frac{200}{3} : p_2^{PL} \in [2,0; 3,5); \\ p_{3,norm}^{PL} = 100 \cdot p_3^{PL} - 300 : p_3^{PL} \in [3,5; 4,0); \\ p_{4,norm}^{PL} = -\frac{125}{3} \cdot p_4^{PL} - \frac{800}{3} : p_4^{PL} \in [4,0; 5,2); \\ p_{5,norm}^{PL} = -250 \cdot p_5^{PL} + 1350 : p_5^{PL} \in [5,2; 5,4); \\ p_{6,norm}^{PL} = 0 : p_6^{PL} \in [5,2; +\infty). \end{cases}$$

– для ширины лепестка:

$$(20) \quad p_{norm}^{PW} = \begin{cases} p_{1,norm}^{PW} = 0 : p_1^{PW} \in [0; 0,6); \\ p_{2,norm}^{PW} = 187,5 \cdot p_2^{PW} - 112,5 : p_2^{PW} \in [0,6; 1,0); \\ p_{3,norm}^{PW} = 125 \cdot p_3^{PW} - 50 : p_3^{PW} \in [1,0; 1,2); \\ p_{4,norm}^{PW} = -62,5 \cdot p_4^{PW} + 175 : p_4^{PW} \in [1,2; 1,6); \\ p_{5,norm}^{PW} = -187,5 \cdot p_5^{PW} + 375 : p_5^{PW} \in [1,6; 2,0); \\ p_{6,norm}^{PW} = 0 : p_6^{PW} \in [2,0; +\infty). \end{cases}$$

Анализ соотношений (17)–(20) показал, что до преобразования длина чашелистика имеет положительную корреляцию с итоговой оценкой, ширина чашелистика – отрицательную, а длина и ширина лепестка имеют точки оптимума соответственно в точках 4,0 и 1,2 см.

На первом уровне иерархии СНВ №1 агрегировала параметры p_{norm}^{SL} и p_{norm}^{SW} , СНВ №2 агрегировала параметры p_{norm}^{PL} и p_{norm}^{PW} . На втором уровне иерархии СНВ №3 агрегировала переменные, полученные при помощи СНВ №1 и СНВ №2. Результат распределения выходных значений в соответствии с нумерацией в базе данных показан на рис. 5а. Группировки выходных оценок в порядке их возрастания – на рис. 5б. Анализ рис. 5 показывает выполнение закономерности о группировки значений выходной переменной в определенных областях.

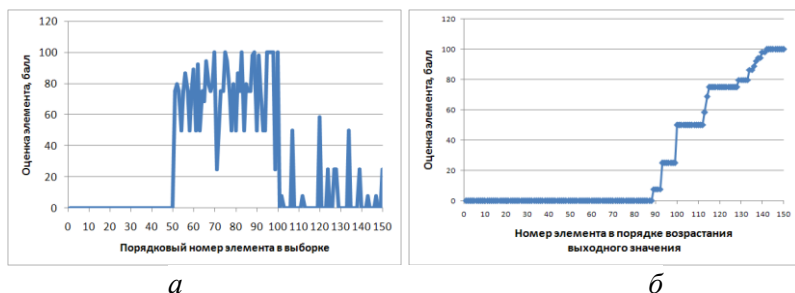


Рис. 5. Выходные значения исследуемой ИСНВ

Перечень объектов выборки, которые наилучшим образом соответствуют задачи классификации, приведены в таблице 1.

Таблица 1. Перечень элементов набравших по 50 баллов выходной оценки

Номер элемента в выборке	Длина чашелисти-ка, см	Ширина чашелистика, см	Длина лепестка, см	Ширина лепестка, см
75	6,4	2,9	4,3	1,3
83	5,8	2,7	3,9	1,2
89	5,6	3	4,1	1,3
95	5,6	2,7	4,2	1,3
96	5,7	3	4,2	1,2
97	5,7	2,9	4,2	1,3
98	6,2	2,9	4,3	1,3
100	5,7	2,8	4,1	1,3
Дисперсия	0,09	0,01	0,02	0,00

Анализ таблицы 1 показывает низкий разброс параметров объектов внутри выборки, что подтверждается малым значением дисперсии. Анализ других выборок показал, что при одинаковом значении интегральной оценки может наблюдаться большой разброс значений параметров. Примером является выборка объектов, набравших 50 баллов, которая приведена в таблице 2. Для выделения групп объектов с близкими параметрами потребовалась их кластеризация.

Таблица 2. Перечень элементов набравших по 50 баллов выходной оценки

Номер элемента в выборке	Длина чашелистика, см	Ширина чашелистика, см	Длина лепестка, см	Ширина лепестка, см
54	5,5	2,3	4	1,3
58	4,9	2,4	3,3	1
61	5	2	3,5	1
63	6	2,2	4	1
72	6,1	2,8	4	1,3
78	6,7	3	5	1,7
80	5,7	2,6	3,5	1
84	6	2,7	5,1	1,6
90	5,5	2,5	4	1,3
93	5,8	2,6	4	1,2
94	5	2,3	3,3	1
107	4,9	2,5	4,5	1,7
134	6,3	2,8	5,1	1,5
Дисперсия	0,33	0,08	0,42	0,08

С использованием положений (8)–(13) определены три вершины, которые можно назначить центрами кластеров, ими стали объекты номер 90, 94, 134. При помощи метрики Евклида было определено расстояние от центров кластеров до остальных объектов класса, результаты расчета представлены в таблице 3.

С учетом (15) принимается, что объект относится к определенному кластеру, если расстояние между ним и центром кластера не более 1 см ($\varepsilon \leq 1$). Если условие выполнимо для нескольких вершин сразу, то объект признается относящимся к тому центру, до которого расстояние минимально. На основании таблицы 2 сформирован перечень групп объектов, наиболее близких к центрам кластеров, который представлен в таблице 4, также в таблице приведены значения дисперсии по каждому из параметров внутри всех полученных групп объектов.

Таблица 3. Расстояния от объектов до центров кластеров

Номер элемента в выборке	Расстояние до вершины №90, см	Расстояние до вершины №94, см	Расстояние до вершины №134, см
54	0,20	0,91	1,46
58	0,97	0,14	2,37
61	0,92	0,36	2,27
63	0,66	1,22	1,38
72	0,67	1,43	1,14
78	1,69	2,60	0,50
80	0,62	0,79	1,79
84	1,26	2,18	0,33
90	0,00	0,93	1,41
93	0,33	1,12	1,26
94	0,93	0,00	2,33
107	0,88	1,41	1,57
134	1,41	2,33	0,00

Таблица 4. Распределение объектов по кластерам

Номер элемента в выборке	Длина чашелистика, см	Ширина чашелистика, см	Длина лепестка, см	Ширина лепестка, см
Кластер №1				
54	5,5	2,3	4	1,3
63	6	2,2	4	1
72	6,1	2,8	4	1,3
80	5,7	2,6	3,5	1
90 (центр кластера)	5,5	2,5	4	1,3
93	5,8	2,6	4	1,2
107	4,9	2,5	4,5	1,7
Дисперсия	0,16	0,04	0,08	0,06
Кластер №2				
58	4,9	2,4	3,3	1
61	5	2	3,5	1
94 (центр кластера)	5	2,3	3,3	1
Дисперсия	0,00	0,04	0,01	0,00

Продолжение таблицы 4

Номер элемента в выборке	Длина чашелистика, см	Ширина чашелистика, см	Длина лепестка, см	Ширина лепестка, см
Кластер №3				
78	6,7	3	5	1,7
84	6	2,7	5,1	1,6
134 (центр кластера)	6,3	2,8	5,1	1,5
Дисперсия	0,12	0,02	0,00	0,01

Анализ таблиц 2 и 4 показывает, что в выделенных группах снизилась дисперсия по всем параметрам, характеризующим состояние объекта. Подобное позволяет прийти к выводу, что внутри групп находятся объекты с более близкими значениями параметров.

7. Заключение

В ходе исследований, предложены положения по предварительной подготовке и постобработке данных для иерархических систем нечеткого вывода. Предварительная подготовка данных заключается в реализации операции нормализации значений входных различных параметров к единой шкале. Реализация положений основана на использовании кусочных функций. После нормализации все параметры приобретают положительную корреляцию с выходной оценкой. Применение предложенных положений упрощает формирование базы правил системы нечеткого вывода, поскольку ее выходная поверхность, интерпретирующая результат взаимодействия входных переменных, принимает монотонно неубывающий характер. Анализ закономерностей изменения оценок в зависимости от количества уровней иерархий в вычислительной системе позволил установить свойство группировки выходных оценок в окрестностях значений термов, описывающих выходную переменную. В результате ИСНВ становится классификатором анализируемых объектов

по группам состояний. Принадлежность к группе определяется величиной итоговой оценки.

Для распределения объектов внутри класса предложена последовательность операций, позволяющих определить объекты, которые могут выступать в роли центра группы, а затем выделять из класса группу объектов, которые наиболее близки к центрам. Реализация положений основана на совместном использовании алгоритма горной кластеризации, Евклидовой метрики и метрики Хаусдорфа. Проведенный эксперимент по оценке элементов множества согласно заранее установленным условиям, подтвердил работоспособность предложенных положений. В результате была сформирована группа объектов, которая полностью соответствует поставленному заданию, эти объекты получили максимальную оценку и были выделены группы объектов, которые частично соответствовали требованиям поставленной задачи. Внутри групп были выделены типичные представители, а потом определены перечни наиболее близких к ним объектов.

Предложенные теоретические положения расширяют возможности использования систем нечеткого вывода в процессе анализа объектов различных видов сложных систем.

Литература

1. АНАНЧЕНКО И.В., ЗУДИЛОВА Т.В., ПОЛИН Я.А., ОСЕТРОВА И.С. *О применимости алгоритмов кластеризации для борьбы со спамом в социальных сетях // Современные наукоемкие технологии.* – 2020. – №4-2. – С. 190–194.
2. ВЕРЕТЁХИН А.В. *Управление уровнем эколого-экономической безопасности промышленного предприятия с применением нечетко-множественного инструментария // Вестник Забайкальского государственного университета.* – 2017. – Т. 23, №6. – С. 128–138. – DOI: 10.21209/2227-9245-2017-23-6-128-138.
3. ЗЁРНЫШКИН А.Е., СИЗОВ А.С., ДОБРИЦА В.П., ГОЛОВИН А.А., ХАЛИН Ю.А. *Модель оценки привлекательности поставщика товарно-материальных ценностей логистиче-*

- ских компаний // Вестник Брянского государственного технического университета. – 2019. – № 3(76). – С. 78–85.
4. ЗУБКОВА Т.М., НАТОЧАЯ Е.Н. *Использование горного алгоритма для оценки затрат при проектировании программных проектов* // Программные продукты и системы. – 2018. – №1. – С. 134–139.
 5. КАРЕЛИН А.Е., БЕРЕЗА А.Н. *Экспертная система для поддержки принятия решений оператора в системе электроснабжения города* // Инженерный вестник Дона. – 2019. – №4(55). – С. 28.
 6. ЛЕОНЕНКОВ А.В. *Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTech*. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 736 с.
 7. ЛЕОНТЬЕВ В.К. *О мерах сходства и расстояниях между объектами* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2009. – Т. 49, №11. – С. 2041–2058.
 8. НИКИТИН В.В., БОБИН Д.В., НАЗАРОВ А.А. *Моделирование интегрального показателя комплексной оценки объектов исследования* // Вестник Чувашского университета. – 2015. – №3. – С. 172–177.
 9. ПЕГАТ А. *Нечеткое моделирование и управление*. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2017. – 800 с.
 10. ПОЛЕШКИНА И.О., ВАСИЛЬЕВА Н.В. *Технология Blockchain как инструмент управления цепями поставок с участием воздушного транспорта* // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. – 2020. – Т. 23, №2. – С. 72–86.
 11. ПТАШКО Е.А., УХОБОТОВ В.И. *Автоматическая генерация нечетких правил для управления мобильным роботом с гусеничным шасси на основе числовых данных* // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. – 2017. – Т. 6, №3. – С. 60–72.
 12. САНАЕВА Г.Н., ПРОРОКОВ А.Е., БОГАТИКОВ В.Н., ВЕНТ Д.П. *Иерархическая система нечеткого регулирования процесса получения ацетилена окислительным пиролизом природного газа* // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная

- техника и информатика. – 2020. – №1. – С. 7–17. – DOI: 10.24143/2072-9502-2020-1-7-17.
13. ЧУВИКОВ Д.А. *Универсальные алгоритмы взаимодействия экспертной системы и системы имитационного моделирования* // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. – 2017. – Т. 11, №4. – С. 34–40.
 14. ШТОВБА С.Д. *Проектирование нечетких систем средствами MATLAB*. – М.: Горячая линия-Телеком, 2007. – 288 с.
 15. Alrashoud M. *Hierarchical Fuzzy Inference System for Diagnosing Dengue Disease* // IEEE Int. Conf. on Multimedia & Expo Workshops (ICMEW), Shanghai, China, China. – 2019. – P. 31–36. – DOI: 10.1109/ICMEW.2019.00013.
 16. ALRASHOUD M., HAZZA E., ALQAHTANI F., ALHAMMADI M., ABHARI A., GHONEIM A. *Cognitive and Hierarchical Fuzzy Inference System for Generating Next Release Planning in SaaS Applications* // IEEE Access. – 2019. – Vol. 7. – P. 102966–102974. – DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2929214.
 17. ELBAHRI F.M., AL-SANJARY O.I., ALI M.A.M., NAIF Z.A., IBRAHIM O., MOHAMMED M. N. *Difference Comparison of SAP, Oracle, and Microsoft Solutions Based on Cloud ERP Systems: A Review* // IEEE 15th Int. Colloquium on Signal Processing & Its Applications (CSPA), Penang, Malaysia, 2019. – P. 65–70. – DOI: 10.1109/CSPA.2019.8695976.
 18. *Iris data set, Machine Learning Repository*. – URL: <https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/iris>
 19. LIU Y., HE J., GUO M., YANG Q., ZHANG X. *An Overview of Big Data Industry in China* // China Communications. – 2014. – Vol. 11(12). – P. 1–10. – DOI: 10.1109/CC.2014.7019834.
 20. LU R., JIN X., ZHANG S., QIU M., WU X. *A Study on Big Knowledge and Its Engineering Issues*. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, Vol.: 31, Iss.: 9. – 2019. – P. 1–14. – DOI: 10.1109/TKDE.2018.286686.
 21. PEREIRA S., KARIA D. *AI Use Cases in Operational Support System and Business Support System* // 3rd Int. Conf. on Communication and Electronics Systems (ICCES), Coimbatore, India. – 2018. – P. 15–20. – DOI: 10.1109/CESYS.2018.8724092.

IMPROVEMENT OF INFORMATION-ANALYTICAL COMPLEXES BASED ON HIERARCHICAL SYSTEMS OF FUZZY OUTPUT

Alexandr Sorokin, Astrakhan State Technical University, Astrakhan, Cand.Sc., associate professor (alsorokin.astu@mail.ru).

Abstract: Provisions for the improvement of computing systems based on the use of hierarchical fuzzy inference systems associated with preliminary data preparation and subsequent interpretation of the results are proposed. Data preparation is based on performing operations to normalize the input parameter values to a scale with the same range of values, provided that these values have a positive correlation with the values of the output variable. The implementation of the provisions is based on the use of piecewise functions. The use of provisions makes it possible to simplify the formation of production rules in the knowledge base of the fuzzy inference system. The study of the behavior of changes in estimates depending on the number of levels of hierarchies in the computing system made it possible to identify a property associated with the grouping of output estimates in the vicinity of the values of the terms that describe the output variable. This made it possible to refer the hierarchical system of fuzzy inference to the classifier of the analyzed objects by their state, taking into account the criteria of the assessment. Belonging to a certain class is determined by the value of the integral final grade. For the identify groups of objects with similar properties within classes, a set of operations is proposed based on the sequential use of the mountain clustering algorithm, the Euclidean metric and the Hausdorff metric. The use of operations makes it possible to single out typical representatives of the studied classes, and then determine the objects that are closest to them in terms of parameters, taking into account the established restrictions on deviations. The experiment carried out confirmed the efficiency of the proposed provisions.

Keywords: hierarchical system of fuzzy inference, normalization of input variables, clustering, Hausdorff metric, object classifier, mountain clustering algorithm.

УДК 004.8

ББК 22.18

DOI: 10.25728/ubs.2020.88.5

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким.*

Поступила в редакцию 12.08.2020.

Опубликована 30.11.2020.

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПОРоговых ЗНАЧЕНИЙ ИНДЕКСА БЛИЗОСТИ ПОЗИЦИЙ ПАРТИЙ НА МЕРУ СБАЛАНСИРОВАННОСТИ РЕЙХСТАГА ВЕЙМАРСКОЙ РЕСПУБЛИКИ¹

Ткачев Д. С.²

(МЦАВР НИУ ВШЭ, Москва)

Рассматривается 8 созывов Рейхстага Веймарской республики с 1920 по 1933 год. Для каждого созыва строится несколько моделей Рейхстага, описывающих возможные коалиции среди партий. Идеологии основных политических партий Веймарской республики рассматриваются с точки зрения их положений на шкале «левые/правые». Для каждой рассматриваемой партии принимается значение индекса от 1 до 10, характеризующее её положение на соответствующей шкале. Левые партии имеют индекс близкий к 1, правые – к 10. Для решения вопроса о возможности конкретных партий Рейхстага образовать коалицию рассматривается расстояние между положениями партий на шкале «левые/правые», равное разности соответствующих значений индексов. Считается, что чем больше расстояние, тем меньше готовность данных партий образовать друг с другом коалицию, т.е. партии, сильно отличающиеся своими идеологиями, не вступают в одну коалицию. Для каждой модели созыва выбирается пороговое значение расстояния партий, которое принимается максимально допустимым для вступления партий в коалицию. На каждый рассматриваемый созыв приходится несколько моделей, соответствующих разным пороговым значениям. Сбалансированность парламента рассматривается как возможность разбить его на две коалиции. Для произвольного парламента используется мера сбалансированности, характеризующая его близость к сбалансированному. Мы используем два способа вычисления меры сбалансированности. Первый способ учитывает все возможные коалиции партий Рейхстага, второй учитывает только те коалиции, в которых сумма голосов партий не меньше необходимой квоты для принятия решений в Рейхстаге. Цель данной работы – рассмотреть сбалансированность различных моделей Рейхстага с учетом и без учета квоты.

¹ Автор выражает благодарность Фуаду Тагиевичу Алескерову за постановку задач и обсуждение полученных результатов. Статья подготовлена в ходе проведения работы в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ) и с использованием средств субсидии в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100». Работа проведена Международным центром анализа и выбора решений Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

² Даниил Сергеевич Ткачев, стажер-исследователь (dstkachev2506@gmail.com).

Ключевые слова: сбалансированность парламента, Рейхстаг, знаковый граф, модель парламента, мера сбалансированности.

1. Введение

Веймарская республика – неофициальное наименование Германии в период с 1919 по 1933 год. Оно происходит от названия города Веймар, в котором 11 августа 1919 года была принята новая конституция Германии. Несмотря на это, официальное название «Германское государство» осталось. Рейхстаг являлся высшим представительным и законодательным органом Веймарской республики. Согласно статье 32 конституции Веймарской республики решения в Рейхстаге принимались путем голосования и решение считалось принятым, если число голосов за него превышало половину от общего числа голосов. Ни в одном из восьми созывов Рейхстага не было партии, которая по итогам выборов имела более половины голосов. Следовательно, никакая партия не могла в одиночку обеспечить принятие решений. Для проведения решений партии образовывали коалиции, позволяющие обеспечить необходимое большинство.

В книгах по теории политических процессов считается, что парламент сбалансирован, если он состоит из двух коалиций, одна из которых контролирует большинство [8]. Коалиция, обладающая большинством, позволяет обеспечить принятие решений. Однако в случае, если парламент представлен более чем двумя коалициями, может наблюдаться ситуация, когда парламент не в состоянии принять решение или принимает противоречивые решения. В таких ситуациях говорят о несбалансированности парламента.

Сбалансированный парламент – явление, редко реализуемое на практике, поэтому для характеристики близости произвольного парламента к сбалансированному рассматривают меру его сбалансированности.

В построенных моделях рассматривается сбалансированность созывов Рейхстага Веймарской республики с 1920 по 1933 год с учетом и без учета установленной квоты для принятия решений.

2. Описание модели

Рассмотрим модель произвольного парламента как множество партий, обозначенных вершинами, соединенными друг с другом ребрами, при этом любые две вершины соединены не более чем одним ребром, и никакая вершина не соединена сама с собой. Каждое ребро имеет знак плюс либо минус, соответствующий информации о возможности вступления данных партий в одну коалицию. Знак плюс означает, что партии могут войти в коалицию, минус означает, что не могут. Если возможность вступления двух различных партий неизвестна, то соответствующие вершины не соединяются ребром.

Например, рассмотрим модель парламента на рис. 1, состоящую из четырех партий: A , B , C , D . В нем партия A может вступить в коалицию только с B , партия B со всеми, партия C – с B и D , партия D – с B и C .

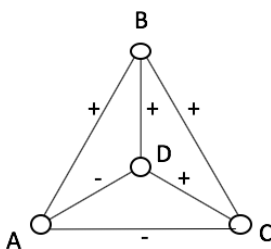


Рис. 1. Знаковый граф парламента

Подобные представления моделей называются знаковыми графами. Для упрощения модели предполагается, что депутаты внутри одной партии голосуют и принимают решение одинаково.

Говорят, что знаковый граф связный, если из любой его вершины существует путь по ребрам в любую другую вершину. В нашем исследовании все рассматриваемые знаковые графы моделей будут связными.

Например, знаковый граф на рис. 1 является связным, так как существует путь из любой вершины в любую другую.

Знаковые графы парламента удобно представлять в виде матриц, в которых элемент, стоящий на пересечении i -й строки

и j -го столбца равен $+1$, если партия i может вступить в коалицию с партией j , и -1 , если не может вступить. Ноль ставится в случае, если вершины i и j не соединены ребром. Такие матрицы называются матрицами смежности.

Например, модель парламента на рис. 1 можно представить в виде матрицы

$$\begin{matrix} & A & B & C & D \\ A & 0 & +1 & -1 & -1 \\ B & +1 & 0 & +1 & +1 \\ C & -1 & +1 & 0 & +1 \\ D & -1 & +1 & +1 & 0 \end{matrix}$$

Предполагается, что если партия i готова вступить в коалицию с партией j , то и партия j готова вступить в коалицию с партией i , т.е. любой элемент на пересечении i -й строки и j -го столбца равен элементу на пересечении j -й строки и i -го столбца.

Знаковые графы применяются для исследования сбалансированности малых групп. Одна из первых работ в этой области принадлежит австрийскому психологу Ф. Хайдеру, который исследовал совместимость группы из трех лиц [7]. В его работе члены групп представляются вершинами знакового графа, а знаки ребер отражают их симпатию («+»), антипатию («-»). На рис. 2 изображены все возможные такие модели.

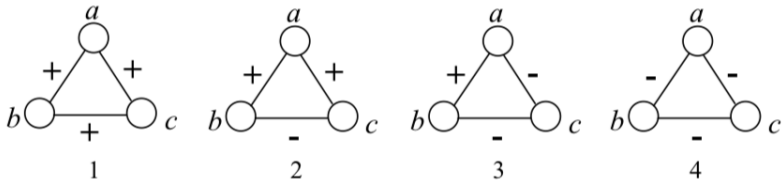


Рис. 2. Модели малых групп

В первой группе все симпатизируют друг другу, таким образом они все могут работать вместе. В третьей a и b симпатизируют друг другу, c никому не симпатизирует, поэтому a и b могут работать вместе, а c отдельно. Во второй группе a симпатизирует и b , и c , однако все вместе они работать не смогут, так как b и c не симпатизируют друг другу. Четвертая группа явля-

ется вырожденной, когда никто друг другу не симпатизирует, все работают отдельно.

Знаковый граф считается сбалансированным, если множество его вершин можно разбить на два подмножества таким образом, что любое ребро, соединяющее вершины из одного подмножества, имеет знак «+», а ребра, соединяющие вершины из разных подмножеств, знак «-».

В данной работе во всех рассмотренных моделях созывов Рейхстага есть хотя бы две партии, которые не готовы вступать в коалицию, тем самым ситуации, когда парламент состоит из одной коалиции, нет. Таким образом, для рассмотренных моделей созывов Рейхстага понятие сбалансированности знакового графа модели совпадает с понятием сбалансированности парламента.

Используя данные, полученные Ф. Хайдером, Д. Картрайт и Ф. Харари, заметили, что для того чтобы понять, является ли данный знаковый граф сбалансированным или нет, необходимо и достаточно рассмотреть знаки ребер, образующих пути, в которых из всех вершин, входящих в путь, выходит ровно два ребра пути (такой путь называется циклом) [4]. Знаком цикла знакового графа называется произведение знаков ребер, входящих в цикл, если знак плюс заменить на 1, а минус – на -1 . Если произведение равно 1, то говорят, что цикл положительный, в противном случае – отрицательный. Было установлено, что если знаковый граф сбалансирован, то любой цикл в нем положителен и, наоборот, если любой цикл знакового графа положителен, то знаковый граф сбалансирован [5].

Например, на рис. 3 показаны все циклы знакового графа на рис. 1. Из них 3 положительных и 4 отрицательных.

Для того чтобы оценить, насколько произвольный парламент сбалансирован, рассматривается мера сбалансированности соответствующей модели знакового графа [6]. Мерой сбалансированности знакового графа парламента (обозначим его G) называется величина

$$(1) \quad b(G) = \frac{|C^+|}{|C|},$$

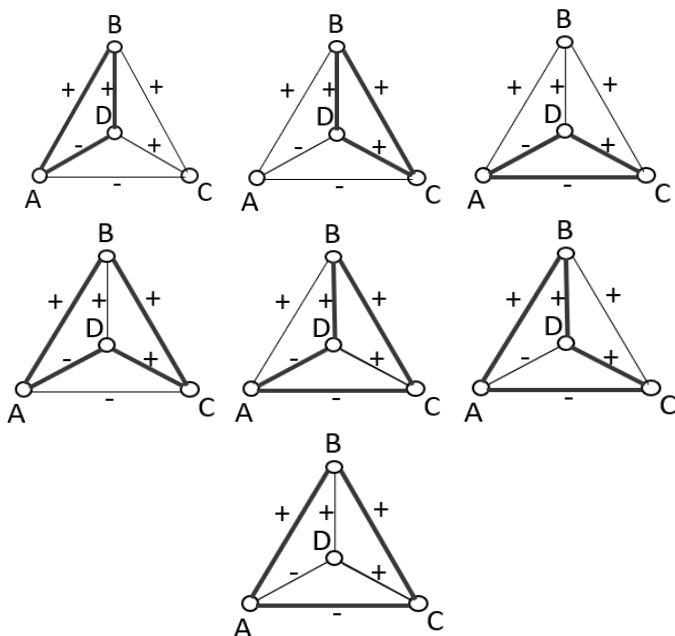


Рис. 3. Циклы знакового графа

где $|C^+|$ – количество положительных циклов в знаковом графе G , $|C^-|$ – количество всех циклов в знаковом графе G .

Например, посчитаем меру сбалансированности парламента на рис. 1. Всего циклов в данном знаковом графе семь, положительных из них три, поэтому мера сбалансированности равна $3/7$.

Заметим, что $0 \leq b(G) \leq 1$, причем $b(G) = 1$ в том и только том случае, когда все циклы в знаковом графе парламента положительны. Если в рассматриваемом знаковом графе парламента нет циклов, то его мера сбалансированности не определена. В случае если G – полный граф (любая вершина соединена ребром с любой другой), минимальное значение $b(G)$ можно уточнить.

Например, если G – полный знаковый граф на 7 вершинах, то $0,448 \leq b(G) \leq 1$, на 8 вершинах – $0,466 \leq b(G) \leq 1$, на 9 – $0,447 \leq b(G) \leq 1$.

Утверждение. Пусть G^* – множество графов, которые можно получить из графа G всеми возможными расстановками знаков на ребрах G , причем в G есть хотя бы один цикл. Тогда среднее значение меры сбалансированности $b(\hat{G})$, $\hat{G} \in G^*$, равно 0,5.

Доказательство. Заметим, что существует $2^{E(G)}$ способов расставить знаки на ребрах графа G , где $E(G)$ – количество ребер в графе G . Таким образом, среднее значение меры сбалансированности $b(\hat{G})$ по всем возможным способам расставить знаки на ребрах G равно $2^{-E(G)} \sum_{G \in G^*} b(G)$. Заметим, что

$$(2) \quad b(G) = \frac{1 + \frac{|C^+| - |C^-|}{|C|}}{2},$$

где $|C^+|$ – множество положительных циклов в графе \hat{G} , $|C^-|$ – множество отрицательных циклов в графе \hat{G} , $|C|$ – множество всех циклов в графе \hat{G} .

Действительно,

$$\frac{1 + \frac{|C^+| - |C^-|}{|C|}}{2} = \frac{|C| + |C^+| - |C^-|}{2|C|} = \frac{|C^+| + |C^-| + |C^+| - |C^-|}{2|C|} = \frac{|C^+|}{|C|}.$$

Последнее слагаемое, по определению, есть мера сбалансированности графа \hat{G} . Таким образом,

$$2^{-E(G)} \sum_{G \in G^*} b(G) = 2^{-E(G)} \sum_{G \in G^*} \frac{1 + \frac{|C^+| - |C^-|}{|C|}}{2} = 2^{-E(G)} \left(\sum_{G \in G^*} \frac{1}{2} + \frac{\sum_{G \in G^*} (|C^+| - |C^-|)}{2|C|} \right).$$

Заметим, что

$$(3) \quad \sum_{G \in G^*} (|C^+| - |C^-|) = \sum_{c \in C} \left(\sum_{G \in G^*} \text{sign}(c, G) \right),$$

где $\text{sign}(c, \hat{G})$ – знак цикла c в знаковом графе \hat{G} . Причем

$\sum_{G \in G^*} \text{sign}(c, G)$ обращается в ноль, так как одна половина слагаемых равна 1, другая половина равна -1 . Таким образом,

$$\sum_{G \in G^*} \left(|C^+| - |C^-| \right) = 0.$$

Получаем

$$2^{-E(G)} \left(\sum_{G \in G^*} \frac{1}{2} + \frac{\sum_{G \in G^*} \left(|C^+| - |C^-| \right)}{2|C|} \right) = 2^{-E(G)} \sum_{G \in G^*} \frac{1}{2} = 2^{-E(G)} \cdot \frac{2^{E(G)}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Очевидно, что партиям нет смысла образовывать коалицию, если сумма их голосов меньше установленной квоты (далее будем обозначать ее q). Однако в рассмотренной выше мере сбалансированности $b(G)$ учитываются любые коалиции, включая те, в которых сумма голосов меньше квоты q . Для того чтобы считать только выигрывающие коалиции, рассматривается мера сбалансированности

$$(4) \quad b^*(G) = \frac{|C_q^+|}{|C_q|},$$

где $|C_q|$ – количество всех циклов в графе G , в которых сумма голосов партий не меньше q ; $|C_q^+|$ – количество положительных циклов, в которых сумма голосов партий не меньше q [2].

Например, предположим, что в модели парламента на рис. 1 партии A, B имеют по 10 голосов, C имеет 30 голосов, а D – 50 голосов. Суммарное количество голосов 100, $q = 51$, тогда $|C_q| = 6$, $|C_q^+| = 3$, таким образом $b(G) = 0,5$.

3. Модель рейхстага

Работа Рейхстага Веймарской республики представлена семью созывами: 1-й созыв – с 1920 по 1924 год, 2-й созыв – в 1924 году, 3-й созыв – с 1924 по 1928 год, 4-й созыв – с 1928 по 1930 год, 5-й созыв – с 1930 по 1932 год, 6-й созыв – в 1932 году, 7-й созыв – с 1932 по 1933 год, 8-й созыв – в 1933 году.

Для каждого рассмотренного созыва в данном исследовании строится несколько моделей знаковых графов Рейхстага, зависящих от различных предположений о возможности образования коалиций.

Для того чтобы оценить возможность образования коалиции теми или иными партиями, представленными в Рейхстаге, рассмотрим значение индекса r , характеризующего положение конкретной партии на шкале «левые/правые» [3]. Левые партии имеют значение r близкое к 1, правые – к 10. В таблице 1 представлены соответствующие значения индексов [3].

Таблица 1. Значения индекса r

Партия	Индекс r
1. Коммунистическая партия Германии (KPD)	1
2. Независимая социал-демократическая партия Германии (USPD)	2
3. Социал-демократическая партия Германии (SPD)	3
4. Немецкая демократическая партия (DDP)	4
5. Немецкая государственная партия (DStP)	4
6. Партия Центра (Zentrum)	5
7. Христианская народная партия (CVP)	5
8. Немецкая народная партия (DVP)	6
9. Блок DVP-CZVD-DBP-DHP	7
10. Баварский союз фермеров (BBB)	7
11. Баварская народная партия (BVP)	7
12. Немецкая национальная народная партия (DNVP)	8
13. Боевой фронт Черный-Белый-Красный (KFSWR)	9
14. Немецкая партия расовой свободы (DVFP)	10
15. Немецкое национал-социалистическое освободительное движение (NSFB)	10
16. Национал-социалистическая немецкая рабочая партия (NSDAP)	10

Для того чтобы определить величину различия политических идеологий двух партий i, j , рассматривается индекс

$$(5) \quad \lambda_{ij} = |r_i - r_j|,$$

характеризующий расстояние между позициями соответствующих партий на шкале «левые/правые», где r_i , r_j – значения индекса i -й и j -й партии соответственно [3].

Для оценки возможности образования коалиции рассматривается индекс близости p_{ij} , характеризующий готовность партии i образовать коалицию с партией j . В [3] считается, что $p_{ij} = 0$, если $\lambda_{ij} = |r_i - r_j| > 3$; $p_{ij} = 1$, если $\lambda_{ij} = |r_i - r_j| = 3$; $p_{ij} = 2$, если $\lambda_{ij} = |r_i - r_j| = 2$; $p_{ij} = 3$, если $\lambda_{ij} = |r_i - r_j| = 0$ или $\lambda_{ij} = |r_i - r_j| = 1$. Принято, что чем больше значение p_{ij} , тем выше готовность партии i вступить в коалицию с партией j .

Согласно определению индекса близости $p_{ij} = p_{ji}$, так как $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = |r_i - r_j| = |r_j - r_i|$. Однако на практике не всегда из готовности одной партии образовать коалицию с другой следует обратное, поэтому в некоторых ситуациях p_{ij} определяется иным способом.

Например, при построении моделей 3, 5 и 8 созывов Рейхстага для некоторых партий i , j используются несовпадающие показатели индексов близости p_{ij} и p_{ji} (см. таблицы 8, 12, 18 в Приложении).

Пороговым значением a индекса близости p_{ij} называют число, при котором партии i , j могут образовать коалицию, если $p_{ij} > a$, и не могут при $p_{ij} \leq a$.

Например, если $a = 0$, то партии i , j образуют коалицию, если только $p_{ij} = 1$, $p_{ij} = 2$, $p_{ij} = 3$.

Для каждого созыва Рейхстага по возможности строятся все три следующие модели знакового графа и для каждой из них вычисляется мера сбалансированности с учетом и без учета установленной квоты. Модель 1 соответствует случаю, когда пороговое значение a принимается равным 0. В модели 2 принимается $a = 1$, в модели 3 $a = 2$.

Рассмотрим более подробно описание некоторых партий Веймарской республики взятое из [3].

Коммунистическая партия Германии (Kommunistische Partei Deutschlands, KPD). KPD была основана 1 января 1919 года. Партия боролась за права рабочих и выступала против USPD и SPD. После неудачной попытки государственного переворота KPD ушла в подполье до весны 1924 года, после чего Эрнст

Тельман, руководитель KPD, отложил идею реализации немедлительной революции.

Начиная с середины 1920-х годов KPD следовала указаниям Коммунистического Интернационала. Одним из ярких таких примеров является обвинение выдвинутое партии SPD в приверженности «социальному фашизму». Напряженные отношения между SPD и KPD не позволили создать объединенную оппозицию к NSDAP. Влияние KPD в Рейхстаге неуклонно росло на протяжении 1920–1933 годов. Партия получила на выборах 6 ноября 1932 года рекордные 6 миллионов голосов. 28 февраля 1933 года общественная деятельность KPD была запрещена. После выборов 5 марта 1933 года депутаты-коммунисты были арестованы, KPD официально прекратила свое существование 8 марта 1933 года.

Независимая социал-демократическая партия Германии (Unabhängige Sozialdemokratische Partei Deutschlands, USPD). Партия USPD была образована в 1917 году на фоне раскола SPD. В 1920 году на съезде USPD было принято решение о вступлении в Коминтерн. 2 декабря 1920 года около 400000 членов партии USPD присоединилось к KPD, оставшиеся продолжили свою деятельность под названием USPD. Разногласия между USPD и SPD со временем стали сокращаться. В 1922 году на их объединительном съезде было объявлено о создании объединенной партии VSPD, носившее название SPD с 1924 года. Однако меньшинство партии USPD продолжило действовать под своим старым названием. В 1931 году оставшиеся члены USPD вошли в состав Социалистической рабочей партии Германии.

Социал-демократическая партия Германии (Sozialdemokratische Partei Deutschlands, SPD). SPD была сформирована на основе Социалистической рабочей партии Германии (SAPD) в 1875 году, однако получила название SPD только в 1890 году. Партия до сих пор продолжает свое существование и является самой старой партией в Европе.

После выступления против Капповского путча SPD потеряла значительную часть своих голосов на выборах 6 июня 1920 года. SPD отказалась от вступления в Веймарскую коалицию в Рейхстаге и, как следствие, предоставила возможность

Zentrum играть ключевую роль в парламенте. Весь период «Золотых двадцатых» партия SPD провела в оппозиции. Возвращение SPD в правящую коалицию произошло в 1928 году, когда канцлер Герман Мюллер сформировал правительство на основе «Большой коалиции», состоящую из SPD, Zentrum, DDP, DVP. Однако эта коалиция распалась с началом Великой депрессии. Основными причинами распада стали постоянные споры социал-демократов и членов DVP, а также рост инфляции и безработицы в стране.

Немецкая демократическая партия (Deutsche Demokratische Partei, DDP). Немецкая демократическая партия была основана 20 ноября 1918 года лидерами Прогрессивной народной партии Максом Вебером и Гуго Прейссом. DDP выступала за личную свободу человека, частную собственность и социальную ответственность. Партия состояла в Веймарской коалиции в Рейхстаге. В мае 1930 года DDP решает трансформироваться в DStP (Deutsche Staatspartei), но результат данной трансформации становится неутешительным. Партия стала играть незначительную роль в политической жизни Веймарской республики и, как следствие, распустилась 28 июня 1933 года под давлением нацистского правительства.

Партия Центра (Deutsche Zentrumspartei, Zentrum). Zentrum была основана в 1871 году как Католическая политическая партия Германии. В 1918 году BVP откололась от Zentrum и начала выступать за автономию земель Рейхстага. Zentrum являлся членом Веймарской коалиции и играл ключевую роль в ней после того как из нее вышла SPD. Партия сотрудничала как с либералами, так и с националистами за исключением радикалов, а также входила в каждую правящую коалицию.

В 1928 году Людвиг Каас, став председателем партии, выступил за участие NSDAP в политической системе страны через парламент. В 1932 году Zentrum оказала поддержку Паулю фон Гинденбургу в переизбрании на пост рейхспрезидента, в то время как его главным соперником являлся Адольф Гитлер. Это повлекло напряженные отношения Zentrum с NSDAP. Однако после назначения Гитлера на должность рейхсканцлера Zentrum была готова поддержать его и все его правительство, стать партнерами NSDAP и проводить совместную религиозно

направленную политику, но Гинденбург по предложению Гитлера распустил Рейхстаг. 23 марта 1933 года Zentrum раскололась по поводу принятия «Закона о чрезвычайном положении». 5 июля 1933 года Zentrum распустилась под влиянием нацистов.

Немецкая народная партия (Deutsche Volkspartei, DVP).

Немецкая народная партия была основана 22 ноября 1918 года Густавом Штреземаном после реорганизации Национальной либеральной партии. DVP представляла интересы крупных корпораций, провозглашала приверженность национальному либерализму и стремление восстановить былое величие страны. Партия не сотрудничала с радикальными националистами, считала социал-демократов ответственными за ноябрьскую революцию 1918 года и своими главными соперниками. DVP выступала против Веймарской коалиции, но позже стала сотрудничать с центристами и левоцентристскими партиями. В 1929 году после смерти Густава Штреземана основными целями партии стали борьба с парламентской демократией и пропаганда национализма. Партия распалась 27 июня 1933 года.

Баварская народная партия (Bayerische Volkspartei, BVP).

BVP создана 12 ноября 1918 года на основе баварского отделения партии Zentrum. Несмотря на рост популярности NSDAP, Баварская народная партия сумела избежать падения популярности благодаря своему консервативно настроенному электорату. BVP была распущена только после захвата власти нацистами, 4 июля 1933 года.

Немецкая национальная народная партия (Deutsche Nationale Volkspartei, DNVP). DNVP была основана 24 ноября 1918 года. Партия выступала за монархию, защищала интересы привилегированных слоев немецкого общества, промышленников и землевладельцев. DNVP занимала антисемитскую и ксенофобскую позицию, выступала против конституции республики. В 1925–1928 годах DNVP сдерживала свой радикализм и пыталась войти в правящую коалицию. Политика партии резко сместилась в сторону национализма после назначения Альфреда Гугенберга председателем DNVP в 1928 году. В 1933 году DNVP объединилась с организацией «Stahlhelm, Bund der Frontsoldaten», чтобы сформировать партию KFSWR, которая должна была помочь NSDAP получить абсолютное большин-

ство в Рейхстаге. Под давлением NSDAP партия была распущена 28 июня 1933 года.

Национал-социалистическая немецкая рабочая партия (Nationalsozialistische Deutsche Arbeiterpartei, NSDAP). Национал-социалистическая немецкая рабочая партия была основана 24 февраля 1920 года в Мюнхене на основе Немецкой рабочей партии (DAP). После Пивного путча и тюремного заключения Адольфа Гитлера NSDAP была юридически запрещена. В 1924 году многие нацисты объединились с другими правыми группировками, создав единую организацию. NSDAP присоединилась к Великогерманскому национал-социалистическому освободительному движению для участия в выборах в Рейхстаг.

В феврале 1925 года Гитлер после своего освобождения начал реорганизацию NSDAP, утверждая себя вождем. В начале 1926 года это привело к ожесточенной борьбе между левым и правым крылом NSDAP. В итоге 22 июня 1926 года Адольф Гитлер был единогласно избран лидером NSDAP.

С началом Великой депрессии в 1929 году NSDAP начала получать массовую поддержку в основном со стороны бедного населения. В 1932 году NSDAP стала крупнейшей партией в Рейхстаге. Однако, несмотря на успехи NSDAP на выборах в Рейхстаг, на президентских выборах в марте 1932 года Адольф Гитлер потерпел поражение, уступив действующему президенту Паулю фон Гинденбургу. 30 января 1933 года Гитлер был назначен рейхсканцлером. 23 марта 1933 года Рейхстаг принял «Закон о чрезвычайном положении», согласно которому KPD потеряла 81 место в Рейхстаге. 14 июля 1933 года был принят закон, запрещающий создание новых партий. 2 сентября 1933 года NSDAP стала единственной партией, допущенной к выборам в Рейхстаг.

4. Результаты

В таблице 2 приведены значения мер сбалансированности $b(G)$ и $b^*(G)$ для моделей различных созывов Рейхстага. Ознакомиться с подробным распределением голосов по результатам выборов можно в Приложении.

Таблица 2. Значения мер сбалансированности

Созыв	Квота q	Модель	$b(G)$	$b^*(G)$
1-й (1920–1924 гг.)	230	1	0,496	0,495
1-й (1920–1924 гг.)	230	2	0,497	0,497
1-й (1920–1924 гг.)	230	3	0,5	0,5
2-й (1924 г.)	237	1	0,495	0,495
2-й (1924 г.)	237	2	0,499	0,499
2-й (1924 г.)	237	3	0,498	0,498
4-й (1928–1930 гг.)	246	1	0,495	0,495
4-й (1928–1930 гг.)	246	2	0,499	0,499
4-й (1928–1930 гг.)	246	3	0,498	0,498
5-й (1930–1932 гг.)	289	1	0,488	0,488
5-й (1930–1932 гг.)	289	2	0,496	0,497
6-й (1932 г.)	305	1	0,495	0,493
6-й (1932 г.)	305	2	0,499	0,5
6-й (1932 г.)	305	3	0,498	0,498
7-й (1932–1933 гг.)	293	1	0,495	0,494
7-й (1932–1933 гг.)	293	2	0,499	0,5
7-й (1932–1933 гг.)	293	3	0,498	0,498
8-й (1933 г.)	324	1	0,486	0,483
8-й (1933 г.)	324	2	0,498	0,501
8-й без KPD (1933 г.)	284	1	0,485	0,487
8-й без KPD (1933 г.)	284	2	0,457	0,446

Отметим, что для 3-го созыва не удалось построить никакой модели, так как в таблице значений индекса близости $p_{KPD,DNVP} = 3$, $p_{DNVP,KPD} = 0$. При любом пороговом значении a соответствующая модель знакового графа будет несимметричной, что противоречит свойству знакового графа. В связи с этим невозможно построить знаковый граф соответствующих моделей для 3-го созыва и вычислить рассмотренные выше меры сбалансированности данного созыва ни при каком пороговом значении a . Для 5-го и 8-го созыва удалось построить только первую и вторую модель, так как $p_{DVP,DNVP} = 2$, $p_{DNVP,DVP} = 3$ в 5-м созыве, $p_{Zentrum,SPD} = 2$, $p_{SPD,Zentrum} = 3$ в 8-м созыве.

В 8-м созыве члены остальных партий в таблице 17 после выборов распределились в Рейхстаге между партиями, с которыми они были в одном альянсе на выборах 5 марта 1933 года.

Количество мест KFSWR, Bloc DVP-CZVD-DBP-DHP в 8-м созыве считаем 53 и 8 соответственно.

8 марта 1933 года Коммунистическая партия Германии (KPD) была юридически запрещена, членов партии KPD не пускали в Рейхстаг, поэтому рассматриваем 8-й созыв Рейхстага без KPD как отдельную модель.

5. Заключение

Для каждой построенной модели созывов Рейхстага 1920–1933 годов вычислены меры сбалансированности с учетом и без учета квоты. Установлено, что значения мер сбалансированности $b(G)$ и $b^*(G)$ в рассмотренных моделях не превышают 0,502. При переходе от одной модели к другой значение меры $b(G)$ во всех случаях, за исключением 8-го созыва, изменяется не более чем на 0,008, $b^*(G)$ – не более чем на 0,009. Резкий скачок наблюдается в период работы 8-го созыва, когда в стране начинают происходить глобальные изменения и устанавливается диктаторский режим. Разница значений меры сбалансированности $b(G)$ составляет 0,012 для 8-го созыва без KPD и 0,028 – для 8-го созыва с KPD для меры $b^*(G)$ 0,018 и 0,041 соответственно. Максимальная разность среди значений $b^*(G)$ и $b(G)$ одного созыва для моделей 1 ($a = 0$) составляет 0,003, для моделей 2 ($a = 1$) – 0,011, для моделей 3 ($a = 2$) – 0,001.

Значения мер сбалансированности всех моделей находились в окрестности 0,5 радиуса 0,04. Согласно утверждению, можно сделать вывод, что парламент Рейхстага в рассмотренных моделях сбалансирован средне среди всех возможных способов образовать коалиции.

Для сравнения, значения меры сбалансированности Государственной Думы России в период с 1993 по 2005 год в большинстве случаев попадали в интервал от 0,48 до 0,56 или были равны 1. Однако меньше 0,48 значение никогда не опускалось [1].

К сожалению, никакого однозначного вывода о влиянии порогового значения на изменение меры сбалансированности сказать нельзя. Значения меры сбалансированности при изменении порогового значения могут как возрастать, так и убывать.

Наглядную динамику изменения значений мер сбалансированности в различных моделях можно рассмотреть на рис. 4-5 в Приложении.

6. Приложение

Таблицы распределения партий и таблицы значений индекса близости r_{ij} взяты из [3].

6.1. ПЕРВЫЙ СОЗЫВ

Таблица 3. Таблица распределения партий

Партия	%	Мест
Баварская народная партия (BVP)	4,6	21
Немецкая демократическая партия (DDP)	8,5	39
Немецкая национальная народная партия (DNVP)	15,5	71
Немецкая народная партия (DVP)	14,2	65
Партия Центра (Zentrum)	13,9	64
Коммунистическая партия Германии (KPD)	0,9	4
Социал-демократическая партия Германии (SPD)	22,4	103
Независимая социал-демократическая партия Германии (USPD)	18,1	83
Остальные	2,2	10
Итого		459

Таблица 4. Таблица значений индекса близости r_{ij}

	BVP	DDP	DNVP	DVP	Zentrum	KPD	SPD	USPD	Остальные
BVP		1	3	3	2	0	0	0	0
DDP	1		0	2	3	0	3	2	0
DNVP	3	0		2	1	0	0	0	0
DVP	3	2	2		3	0	1	0	0
Zentrum	2	3	1	3		0	2	1	0
KPD	0	0	0	0	0		0	0	0
SPD	0	3	0	1	2	0		3	0
USPD	0	2	0	0	1	0	3		0
Остальные	0	0	0	0	0	0	0	0	

Модель 1 ($a = 0$)

$$\begin{pmatrix} 0 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & 0 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & 0 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & 0 & -1 & +1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & 0 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Модель 2 ($a = 1$)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & 0 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & 0 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 & 0 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & 0 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Модель 3 ($a = 2$)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & 0 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.2. ВТОРОЙ СОЗЫВ

Таблица 5. Таблица распределения партий

Партия	%	Мест
Баварская народная партия (BVP)	3,4	16
Немецкая демократическая партия (DDP)	5,9	28
Немецкая национальная народная партия (DNVP)	20,1	95
Немецкая народная партия (DVP)	9,5	45
Партия Центра (Zentrum)	13,8	65
Коммунистическая партия Германии (KPD)	13,1	62
Социал-демократическая партия Германии (SPD)	21,2	100
Немецкая партия расовой свободы (DVFP) и NSDAP	6,8	32
Остальные	6,1	29
Итого		472

Таблица 6. Таблица значений индекса близости r_{ij}

	BVP	DDP	DNVP	DVP	Zentrum	KPD	SPD	DVFP и NSDAP	Остальные
BVP		1	3	3	2	0	0	1	0
DDP	1		0	2	3	0	3	0	0
DNVP	3	0		2	1	0	0	2	0
DVP	3	2	2		3	0	1	0	0
Zentrum	2	3	1	3		0	2	0	0
KPD	0	0	0	0	0		0	0	0
SPD	0	3	0	1	2	0		0	0
DVFP и NSDAP	1	0	2	0	0	0	0		0
Остальные	0	0	0	0	0	0	0	0	

Модель 1 ($a = 0$)

$$\begin{pmatrix} 0 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & 0 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & 0 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & 0 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Модель 2 ($a = 1$)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & 0 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & 0 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 & 0 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Модель 3 ($a = 2$)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & 0 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.3. ТРЕТИЙ СОЗЫВ

Таблица 7. Таблица распределения партий

Партия	%	Мест
Баварская народная партия (BVP)	3,9	19
Немецкая демократическая партия (DDP)	6,5	32
Немецкая национальная народная партия (DNVP)	20,9	103
Немецкая народная партия (DVP)	10,3	51
Партия Центра (Zentrum)	14,0	69
Коммунистическая партия Германии (KPD)	9,1	45
Немецкое национал-социалистическое освободительное движение (NSFB)	2,8	14
Социал-демократическая партия Германия (SPD)	26,6	131
Остальные	5,9	29
Итого		493

Таблица 8. Таблица значений индекса близости p_{ij}

	BVP	DDP	DNVP	DVP	Zentrum	KPD	NSFB	SPD	Остальные
BVP		1	3	3	2	0	1	1	0
DDP	1		0	2	3	0	0	3	0
DNVP	3	0		2	1	0	2	1	0
DVP	3	2	2		3	0	0	1	0
Zentrum	2	3	1	3		0	0	2	0
KPD	0	0	3	0	0		0	0	0
NSFB	1	0	2	0	0	0		0	0
SPD	1	3	1	1	2	0	0		0
Остальные	0	0	0	0	0	0	0	0	

6.4. ЧЕТВЁРТЫЙ СОЗЫВ

Таблица 9. Таблица распределения партий

Партия	%	Мест
Баварская народная партия (BVP)	3,3	16
Немецкая демократическая партия (DDP)	5,1	25
Немецкая национальная народная партия (DNVP)	14,9	73
Немецкая народная партия (DVP)	9,2	45
Партия Центра (Zentrum)	12,6	62
Коммунистическая партия (KPD)	11,0	54
Национал-социалистическая немецкая рабочая партия (NSDAP)	2,4	12
Социал-демократическая партия Германии (SPD)	31,2	153
Остальные	10,4	51
Итого		491

Таблица 10. Таблица значений индекса близости p_{ij}

	BVP	DDP	DNVP	DVP	Zentrum	KPD	NSDAP	SPD	Остальные
BVP		1	3	3	2	0	1	0	0
DDP	1		0	2	3	0	0	3	0
DNVP	3	0		2	1	0	2	0	0
DVP	3	2	2		3	0	0	1	0
Zentrum	2	3	1	3		0	0	2	0
KPD	0	0	0	0	0		0	0	0
NSDAP	1	0	2	0	0	0		0	0
SPD	0	3	0	1	2	0	0		0
Остальные	0	0	0	0	0	0	0	0	

Модель 1 ($a = 0$)

$$\begin{pmatrix} 0 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & 0 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & 0 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & 0 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Модель 2 ($a = 1$)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & 0 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & 0 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 & 0 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Модель 3 ($a = 2$)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & 0 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.5. ПЯТЫЙ СОЗЫВ

Таблица 11. Таблица распределения партий

Партия	%	Мест
Баварская народная партия (BVP)	3,3	19
Немецкая национальная народная партия (DNVP)	7,1	41
Немецкая государственная партия (DStP)	3,5	20
Немецкая народная партия (DVP)	5,2	30
Партия Центра (Zentrum)	11,8	68
Коммунистическая партия Германии (KPD)	13,3	77
Национал-социалистическая немецкая рабочая партия (NSDAP)	18,5	107
Социал-демократическая партия Германии (SPD)	24,8	143
Остальные	12,5	72
Итого		577

Таблица 12. Таблица значений индекса близости p_{ij}

	BVP	DNVP	DStP	DVP	Zentrum	KPD	NSDAP	SPD	Остальные
BVP		3	1	3	2	0	1	0	0
DNVP	3		0	3	1	0	2	0	0
DStP	1	0		2	3	0	0	3	3
DVP	3	2	2		3	0	0	1	1
Zentrum	2	1	3	3		0	0	2	2
KPD	0	0	0	0	0		0	0	0
NSDAP	1	2	0	0	0	0		0	0
SPD	0	0	3	1	2	0	0		
Остальные	0	0	3	1	2	0	0		

Модель 1 ($a = 0$)

$$\begin{pmatrix} 0 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & 0 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & 0 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & 0 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Модель 2 ($a = 1$)

$$\begin{pmatrix} 0 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & 0 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 & 0 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.6. ШЕСТОЙ СОЗЫВ

Таблица 13. Таблица распределения партий

Партия	%	Мест
Баварская народная партия (BVP)	3,6	22
Немецкая национальная народная партия (DNVP)	6,1	37
Немецкая государственная партия (DStP)	0,7	4
Немецкая народная партия (DVP)	1,2	7
Партия Центра (Zentrum)	12,3	75
Коммунистическая партия Германии (KPD)	14,6	89
Национал-социалистическая немецкая рабочая партия (NSDAP)	37,8	230
Социал-демократическая партия Германии (SPD)	21,9	133
Остальные	1,8	11
Итого		608

Таблица 14. Таблица значений индекса близости p_{ij}

	BVP	DNVP	DStP	DVP	Zentrum	KPD	NSDAP	SPD	Остальные
BVP		3	1	3	2	0	1	0	0
DNVP	3		0	2	1	0	2	0	0
DStP	1	0		2	3	0	0	3	0
DVP	3	2	2		3	0	0	1	0
Zentrum	2	1	3	3		0	0	2	0
KPD	0	0	0	0	0		0	0	0
NSDAP	1	2	0	0	0	0		0	0
SPD	0	0	3	1	2	0	0		0
Остальные	0	0	0	0	0	0	0	0	

Модель 1 ($a = 0$)

$$\begin{pmatrix} 0 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & 0 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & 0 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & 0 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Модель 2 ($a = 1$)

$$\begin{pmatrix} 0 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & 0 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 & 0 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Модель 3 ($a = 2$)

$$\begin{pmatrix} 0 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & 0 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.7. СЕДЬМОЙ СОЗЫВ

Таблица 15. Таблица распределения партий

Партия	%	Мест
Баварская народная партия (BVP)	3,4	20
Немецкая национальная народная партия (DNVP)	8,9	52
Немецкая государственная партия (DStP)	0,3	2
Немецкая народная партия (DVP)	1,9	11
Партия Центра (Zentrum)	12,0	70
Коммунистическая партия Германии (KPD)	17,1	100
Национал-социалистическая немецкая рабочая партия (NSDAP)	33,6	196
Социал-демократическая партия Германии (SPD)	20,7	121
Остальные	2,1	12
Итого		584

Таблица 16. Таблица значений индекса близости p_{ij}

	BVP	DNVP	DStP	DVP	Zentrum	KPD	NSDAP	SPD	Остальные
BVP		3	1	3	2	0	1	0	0
DNVP	3		0	2	1	0	2	0	0
DStP	1	0		2	3	0	0	3	0
DVP	3	2	2		3	0	0	1	0
Zentrum	2	1	3	3		0	0	2	0
KPD	0	0	0	0	0		0	0	0
NSDAP	1	2	0	0	0	0		0	0
SPD	0	0	3	1	2	0	0		0
Остальные	0	0	0	0	0	0	0	0	

Модель 1 ($a = 0$)

$$\begin{pmatrix} 0 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & 0 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & 0 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & 0 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Модель 2 ($a = 1$)

$$\begin{pmatrix} 0 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & 0 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 & 0 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Модель 3 ($a = 2$)

$$\begin{pmatrix} 0 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & 0 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.8. ВОСЬМОЙ СОЗЫВ

Таблица 17. Таблица распределения партий

Партия	%	Мест
Боевой фронт Черный-Белый-Красный (KFSWR)	8,0	52
Баварская народная партия (BVP)	2,8	18
Коммунистическая партия Германия (KPD)	12,5	81
Партия Центра (Zentrum)	11,4	74
Немецкая народная партия (Блок DVP-CZVD-DBP-DHP)	0,3	2
Немецкая государственная партия (DStP)	0,8	5
Национал-социалистическая немецкая рабочая партия (NSDAP)	44,5	288
Социал-демократическая партия Германии (SPD)	18,5	120
Остальные	1,1	7
Итого		647

Таблица 18. Таблица значений индекса близости p_{ij}

	BVP	DVP-CZVD-DBP-DHP	Zentrum	KFSWR	KPD	DStP	NSDAP	SPD
BVP		3	2	2	0	1	1	0
DVP-CZVD-DBP-DHP	3		2	2	0	1	1	0
Zentrum	2	2		1	0	3	1	2
KFSWR	2	2	1		0	0	3	0
KPD	0	0	0	0		0	0	0
DStP	1	1	3	0	0		0	3
NSDAP	1	1	1	3	0	0		0
SPD	0	0	2	0	0	3	0	

Модель 1 ($a = 0$)

$$\begin{pmatrix} 0 & +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & 0 & +1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & 0 & +1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & 0 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & 0 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Модель 2 ($a = 1$)

$$\begin{pmatrix} 0 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & 0 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & 0 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & 0 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.9. ВОСЬМОЙ СОЗЫВ БЕЗ KPD

Таблица 19. Таблица распределения партий

Партия	%	Мест
Боевой фронт Черный-Белый-Красный (KFSWR)	9,2	52
Баварская народная партия (BVP)	3,2	18
Партия Центра (Zentrum)	13,1	74

Немецкая народная партия (Блок DVP-CZVD-DBP-DHP)	0,4	2
Немецкая государственная партия (DStP)	0,9	5
Национал-социалистическая немецкая рабочая партия (NSDAP)	50,9	288
Социал-демократическая партия Германии (SPD)	21,2	120
Остальные	1,2	7
Итого		566

Таблица 20. Таблица значений индекса близости p_{ij}

	BVP	DVP-CZVD-DBP-DHP	Zentrum	KFSWR	DStP	NSDAP	SPD
BVP		3	2	2	1	1	0
DVP-CZVD-DBP-DHP	3		2	2	1	1	0
Zentrum	2	2		1	3	1	2
KFSWR	2	2	1		0	3	0
DStP	1	1	3	0		0	3
NSDAP	1	1	1	3	0		0
SPD	0	0	3	0	3	0	

Модель 1 ($a = 0$)

$$\begin{pmatrix} 0 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & 0 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & 0 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & 0 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & 0 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Модель 2 ($a = 1$)

$$\begin{pmatrix} 0 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & 0 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & 0 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & -1 & 0 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & +1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

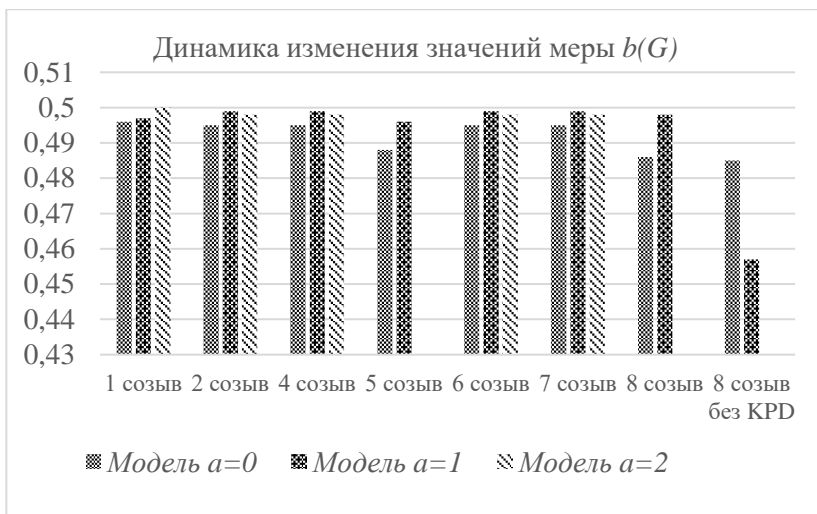


Рис. 4.

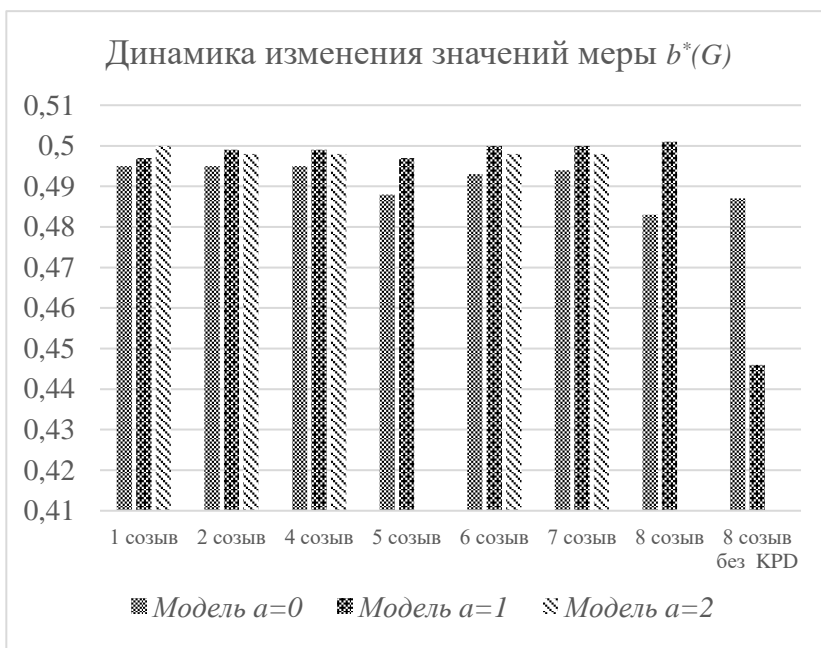


Рис. 5.

Литература

1. АЛЕСКЕРОВ Ф.Т., БЛАГОВЕЩЕНСКИЙ Н.Ю., САТАРОВ Г.А., СОКОЛОВА А.В., ЯКУБА В.И. *Влияние и структурная устойчивость в российском парламенте (1905-1917 и 1993-2005 гг.)*. – М.: Физматлит, 2007.
2. ALESKEROV F., ERSEL H., SABUNCU Y. *Power distribution, inequality of power, and coalitional stability in the turkish parliament* // Turkish Studies – 2000. – Vol. 1. – P. 2138.
3. ALESKEROV F., HOLLER M., KAMALOVA R. *Power distribution in the Weimar Reichstag in 1919-1933*. – М.: HSE, 2010.
4. CARTWRIGHT D., HARARY F. *Structure balance: A generalization of Heider's theory* // Psychological Review. – 1956. – Vol. 63(5). – P. 277–293.
5. HARARY F. *On the notion of a balance of signed graph* // Michigan Mathematical Journal. – 1954. – Vol. 2. – P. 143–46.
6. HARARY F., NORMAN R.Z., CARTWRIGHT D. *Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs*. – N. Y.: John Wiley and Sons, 1965.
7. HEIDER F. *Attitudes and cognitive organization* // Journal of Psychology. – 1970. – Vol. 21. – P. 107-112.
8. ROBERTS F.S. *Applications of combinatorics and graph theory to the biological and social sciences* // IMA Volumes in Mathematics and its Applications. – 1989. – Vol. 17. – Springer-Verlag, New York.

INFLUENCE OF CHANGING THRESHOLD VALUES OF PROXIMITY INDEX OF PARTY'S POSITIONS ON THE MEASURE OF THE BALANCEDNESS OF THE REICHSTAG OF THE WEIMAR REPUBLIC

Daniil Tkachev, International Center of Decision Choice and Analysis, HSE, Moscow, researcher (dstkachev2506@gmail.com).

Abstract: In this research we study 8 convocations of the Weimar Reichstag between 1920 and 1933. For each convocation we construct models, describing all possible coalitions in the Reichstag. The ideology of each party can be identified by their position on the "left/right" scale. Parties of the Reichstag are prescribed the index

from 1 to 10 depending on their position on this scale. The index of left parties is close to 1, whereas the index of right parties is close to 10. To evaluate two parties can coalesce we calculate the distance of these parties' positions on the "left/right" scale, that is equal to the index difference. It is assumed that the high distance of two parties means the impossibility to coalesce. Several models of coalition formation are constructed on the threshold value of positions distance. A parliament is called balanced if it consists of two coalitions. We evaluate the measure of the balancedness, which shows the degree of proximity to the total balanced parliament. We use two different methods to calculate the measure of the balancedness. First one includes all possible coalitions in the Reichstag. The second measure includes only coalitions in which the number of votes is greater than the established quota of the Reichstag convocation. For each model we evaluate the measure of the balancedness using both methods.

Keywords: balance of the parliament, Reichstag, parliament's model, signed graph, measure of the balancedness.

УДК 328

ББК 66.06

DOI: 10.25728/ubs.2020.88.6

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Ф.Т. Алескеровым.*

Поступила в редакцию 03.09.2020.

Опубликована 30.11.2020.