

## ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА ГОТОВНОСТИ<sup>1</sup>

Зверкина Г. А.<sup>2</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва,

ФГАОУВО «Российский университет транспорта», Москва)

*В теории надёжности важную роль играет знание значения (или оценок значения) коэффициента готовности, т.е. вероятности того, что в заданный момент времени устройство исправно. В большинстве случаев вычисление стационарного значения коэффициента готовности не вызывает больших сложностей. Однако в реальных приложениях надо знать, как скоро значение коэффициента готовности станет достаточно близким к своему предельному значению, т.е. важно знать скорость сходимости коэффициента готовности к его стационарному значению. В тех случаях, когда распределения времён работы и восстановления являются экспоненциальными, вопрос о скорости сходимости коэффициента готовности – это вопрос о скорости сходимости решения уравнений Колмогорова – Чэпмена с постоянными коэффициентами. Такая задача разрешима с помощью операционного исчисления. Также заметим, что большинство процессов, описывающих поведение систем надёжности, являются регенерирующими, и для них известен тип скорости сходимости распределения к стационарному – экспоненциальное или степенное. Строгие оценки скорости сходимости для регенерирующих процессов могут быть получены с помощью неравенства Лордена, когда известно распределение длины одного периода регенерации. Но для систем надёжности можно учитывать и конкретные особенности исследуемого регенерирующего периода. В настоящей статье показан метод построения строгой экспоненциальной оценки скорости сходимости коэффициента готовности для одного восстанавливаемого элемента.*

**Ключевые слова:** коэффициент готовности, восстанавливаемый элемент, оценка скорости сходимости, экспоненциальная сходимость.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №20-01-00575А.

Автор признателен Л.Г. Афанасьевой за ценное обсуждение и конструктивную критику статьи, а также анонимному рецензенту за указание на погрешности в оформлении текста.

<sup>2</sup> Галина Александровна Зверкина, к.ф.-м.н., доцент (zverkina@gmail.com).

## 1. Введение

Как известно, коэффициент готовности  $k_{\Gamma}(t)$  – это вероятность того, что в момент времени  $t$  изучаемый элемент (устройство, система) находится в рабочем состоянии. Предполагается, что этот элемент (устройство, система) может находиться в двух состояниях: исправном (обозначаемом  $\{1\}$ ) и неисправном (обозначаемом  $\{2\}$ ). Этим состояниям соответствуют последовательности случайных периодов времени  $\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}$ , где  $\xi_k^{(1)}$  –  $k$ -й период безотказной работы элемента, а  $\xi_k^{(2)}$  –  $k$ -й период его восстановления (замены). Периоды рабочего состояния элемента  $\xi_k^{(1)}$  – случайные величины с функцией распределения  $F^{(1)}(s) = \mathbf{P} \left\{ \xi_k^{(1)} \leq s \right\} = \mathbf{P} \left\{ \xi^{(1)} \leq s \right\}$ , периоды его неисправного состояния (время восстановления)  $\xi_k^{(2)}$  – случайные величины с функцией распределения  $F^{(2)}(s) = \mathbf{P} \left\{ \xi_k^{(2)} \leq s \right\} = \mathbf{P} \left\{ \xi^{(2)} \leq s \right\}$ ; случайные величины  $\xi_k^{(j)}, \xi_m^{(i)}$  независимы в совокупности (здесь и везде далее  $i, j = \overline{1, 2}$ ).

Следуя [2, Гл. 2], дадим определение.

Определение 1. Пусть некий элемент, начав работу в момент  $t = 0$  и проработав случайное время  $\xi_1^{(1)}$ , выходит из строя, затем он восстанавливается (заменяется исправным) в течение случайного времени  $\xi_1^{(2)}$ ; восстановленный элемент работает время  $\xi_2^{(1)}$  и затем восстанавливается время  $\xi_2^{(2)}$ ; и т.д. Положим

$$t_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^k \left( \xi_m^{(1)} + \xi_m^{(2)} \right);$$

$$t'_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{k-1} \left( \xi_m^{(1)} + \xi_m^{(2)} \right) + \xi_k^{(1)} = t_k + \xi_k^{(1)};$$

моменты  $t_k$  есть моменты восстановления элемента, а моменты  $t'_k$  – моменты его отказов; при этом  $\xi_k^{(1)} = t'_k - t_k$ ,  $\xi_k^{(2)} = t_k - t'_{k-1}$ .

Коэффициент готовности  $k_{\Gamma}(t)$  элемента в момент  $t$  определяется как вероятность того, что в момент  $t$  элемент исправен:

$$k_{\Gamma}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P} \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} \{t \in (t_k; t'_k)\} \right). \triangleright$$

Случайный процесс, описывающий поведение такого восстанавливаемого элемента, – регенерирующий. Из классической теории восстановления (см., например, [3, Гл. 2] и [5, Ч. I, Гл. 5]) следует, что в случае, когда  $\xi_k^{(1)}$  и  $\xi_k^{(2)}$  имеют *непериодическое распределение* и конечные математические ожидания

$$T_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E} \xi^{(i)} < \infty,$$

существует предельное (стационарное) значение коэффициента готовности:  $\lim_{t \rightarrow \infty} k_{\Gamma}(t) = k_{\Gamma} = \frac{T_1}{T_1 + T_2}$ .

Наиболее просто исследуется ситуация, когда  $F^{(1)}(s)$  и  $F^{(2)}(s)$  – экспоненциальные распределения с параметрами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно. В этом случае  $\lim_{t \rightarrow \infty} k_{\Gamma}(t) = k_{\Gamma} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ , а скорость сходимости  $k_{\Gamma}(t)$  к  $k_{\Gamma}$  экспоненциальна; имеет место точная оценка:

$$(1) \quad 0 < k_{\Gamma}(t) - k_{\Gamma} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t},$$

см. [2, Гл. 2, § 3], [5, Ч. I, Гл. 5].

Из теоремы 3 [1, Приложение 1 (Стр. 330)] (или теоремы 10.7.4 [10, С. 417]) следует, что если при некотором  $c > 0$  выполнено  $\mathbf{E} e^{c(\xi_k^{(1)} + \xi_k^{(2)})} < \infty$ , то  $\forall \alpha \in (0; c) \exists K(\alpha)$  такое, что  $\forall t \geq 0$  верно

$$(2) \quad |k_{\Gamma}(t) - k_{\Gamma}| < K(\alpha) e^{-\alpha t},$$

однако указанные результаты не дают каких-либо оценок для коэффициента скорости сходимости  $K(\alpha)$ .

Если при  $\alpha > c$  выполнено  $\mathbf{E} e^{c(\xi_k^{(1)} + \xi_k^{(2)})} = \infty$ , то  $\lim_{\alpha \uparrow c} K(\alpha) = \infty$ , т.е. при малых  $c - \alpha$  применение неравенства (2)

приводит к очень большим значениям (неизвестной) постоянной  $K(\alpha)$  (естественно, если известна величина этой постоянной  $K(\alpha)$  или хотя бы её оценка).

Целью настоящей работы является получение оценки для  $K(\alpha)$  в случае, когда время безотказной работы элемента задаётся ограниченной отделённой от нуля *интенсивностью*  $\lambda(\cdot)$ , а время его восстановления имеет конечный экспоненциальный момент.

Во второй части работы сформулирован основной результат и изложена идея его доказательства, в третьей части приведены примеры, в четвёртой части приводятся вспомогательные факты, и в пятой и шестой частях – доказательство основного результата.

## 2. Обозначения и основной результат

Итак, имеется элемент, который может находиться в двух состояниях – рабочем  $\{1\}$  и нерабочем  $\{2\}$ . Времена пребывания в этих состояниях случайны и независимы, их распределения имеют соответственно функции распределения  $F^{(1)}(s)$  и  $F^{(2)}(s)$ , при этом *интенсивность* восстановления элемента зависит от времени, прошедшего с момента отказа. Это значит, что если в момент  $t$  элемент находится в состоянии  $\{1\}$  и попал в это состояние  $s$  единиц времени назад, то вероятность того, что на интервале  $(t; t + \Delta t)$  он изменит состояние ( $\{1\} \rightarrow \{2\}$ ), равна  $\lambda(s)\Delta t + o(\Delta t)$ . Распределение  $\xi^{(1)}$  – времени исправного состояния элемента – определяется *интенсивностью*  $\lambda(s)$ , т.е. функцией, связанной с ф.р. времени безотказной работы  $F^{(1)}(s)$ :

$$(3) \quad \mathbf{P} \{ \xi^{(1)} \leq s \} = F^{(1)}(s) = 1 - \exp \left( - \int_0^s \lambda(u) du \right);$$

$$f^{(1)}(s) \stackrel{\text{def}}{=} (F^{(1)}(s))' = \lambda(s) \exp \left( - \int_0^s \lambda(u) du \right).$$

Таким образом, положительная сл.в. с абсолютно непрерывной ф.р. может быть определена как с помощью ф.р. и плотности распределения, так и с помощью интенсивности.

Для того чтобы определённая в (3) функция  $F^{(1)}(s)$  была функцией распределения, достаточно, чтобы  $\lambda(s)$  была неотрицательна, измерима по Борелю и  $\int_0^{\infty} \lambda(s) ds = \infty$ .

Распределение  $\xi^{(2)}$  – времени восстановления элемента – имеет функцию распределения  $F^{(2)}(s)$ . Везде в дальнейшем  $\xi_k^{(i)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \xi^{(i)}$ .

Поведение восстанавливаемого элемента описывается альтернирующим процессом восстановления (см. [5]):

$$n_t = \begin{cases} 1, & \text{если элемент в момент } t \text{ исправен;} \\ 2, & \text{если элемент в момент } t \text{ неисправен.} \end{cases}$$

Дополним этот процесс  $n_t$  ещё одной компонентой – временем, прошедшим с момента попадания процесса  $n_t$  в то состояние, в котором он находится в момент  $t$ , и получим *марковский* случайный процесс  $X_t = (n_t, x_t)$ , определённый так:

$$X_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (1, x), & \text{если элемент исправен и находится} \\ & \text{в исправном состоянии } x \text{ единиц времени;} \\ (2, x), & \text{если элемент неисправен и находится} \\ & \text{в неисправном состоянии } x \text{ единиц времени.} \end{cases}$$

Пространство состояний процесса  $X_t$  есть  $\mathcal{X} = \{1, 2\} \times \mathbb{R}_+ = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ , где  $\mathcal{S}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{\{1\} \times \mathbb{R}_+\}$  (элемент исправен) и  $\mathcal{S}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{\{2\} \times \mathbb{R}_+\}$  (элемент неисправен);  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$ .

В момент времени  $t$  процесс  $X_t$  имеет на пространстве  $\mathcal{X}$  распределение  $\mathcal{P}_t$ , т.е.  $\mathbf{P}\{X_t \in A\} = \mathcal{P}_t(A)$  для  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ . Обозначим  $n(X_t) \stackrel{\text{def}}{=} n_t$ ,  $x(X_t) \stackrel{\text{def}}{=} x_t$ .

В дальнейшем под состоянием процесса  $X_t$  понимаем пару  $(n_t, x_t)$ .

Обычно предполагают, что восстанавливаемый элемент начинает свою работу в исправном состоянии в начальный момент времени  $t = 0$ :  $X_0 = (1, 0)$ . Мы будем предполагать, что в начальный момент времени  $t = 0$  процесс  $X_t$  может принимать

любое значение из  $\mathcal{X}$ :  $X_0 = (n_0, x_0)$ . Поэтому распределение процесса  $X_t$  зависит от начального состояния: будем обозначать это распределение  $\mathcal{P}_t^{X_0}$  или  $\mathcal{P}_t^{(n_0, x_0)}$ . Коэффициент готовности элемента с начальным состоянием  $X_0$  определяется как

$$k_{\Gamma}^{X_0}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}\{n(X_t) = 1\} = \mathbf{P}\{X_t \in \mathcal{S}_1\} = \mathcal{P}_t^{X_0}(\mathcal{S}_1).$$

## 2.1. ОБОЗНАЧЕНИЯ

2.1.1.  $\mathcal{T}(X_0) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > 0 : X_t = (1, 0)\}$  – первый момент регенерации указанного ниже типа процесса  $X_t$  (см. ниже раздел 5.1); вообще говоря, могут рассматриваться и другие точки регенерации, но для простоты изложения мы выбрали эти.

2.1.2.  $\xi_x^{(i)}$  – сл.в. с ф.р.  $F_x^{(i)}(s)$ , и

$$(4) \quad F_x^{(i)}(s) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{1 - F^{(i)}(x + s)}{1 - F^{(i)}(x)}; \quad f_x^{(i)}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \left(F_x^{(i)}(s)\right)'$$

$$\text{Если } F^{(2)}(x) = 1, \text{ то } \frac{1 - F^{(2)}(x + s)}{1 - F^{(2)}(x)} \stackrel{\text{def}}{=} 0; \quad F_0^{(i)}(s) = F^{(i)}(s)$$

при  $F^{(i)}(0+) = 0$ .

При  $X_t \in \mathcal{S}_i$  сл.в.  $\xi_x^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} (\inf\{s > t : X_t \notin \mathcal{S}_i\} - t)$  – остаточное время пребывания процесса  $X_t$  в множестве  $\mathcal{S}_i$  – имеет ф.р.  $F_x^{(i)}(s)$ .

**Замечание 1.** Из (3) следует: найдутся такие положительные  $c$  и  $C$ , что при  $s \in \mathbb{R}_+$

$$f^{(1)}(s), f_x^{(1)}(s) \in (ce^{-Cs}; Ce^{-cs}); \\ F^{(1)}(s), F_x^{(1)}(s) \in (1 - e^{-cs}, 1 - e^{-Cs}),$$

поэтому для всех  $\alpha < c$

$$(5) \quad \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(1)}} \leq \frac{C}{c - \alpha}, \quad \mathbf{E} e^{\alpha \xi_x^{(1)}} \leq \frac{C}{c - \alpha}.$$

Из этого следует, что сумма периодов работы и восстановления имеет конечное математическое ожидание, а, значит, распределение  $\mathcal{P}_t^{X_0}$  состояния рассматриваемой восстанавливаемой системы надёжности при любом начальном состоянии  $X_0$  процесса  $X_t$  слабо сходится к стационарному предельному инвариантному вероятностному распределению  $\mathcal{P}$  на  $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ .  $\triangleright$

$$2.1.3. T_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E} \xi^{(1)}; \quad T_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E} \xi^{(2)}; \quad k_{\Gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T_1}{T_1 + T_2}.$$

2.1.4.  $\tilde{\xi}^{(i)}$  – сл.в. с плотностью распределения

$$(6) \quad \tilde{f}^{(i)}(s) = \frac{1 - F^{(i)}(s)}{\mathbf{E} \xi^{(i)}} = \frac{1 - F^{(i)}(s)}{T_i}.$$

$$2.1.5. \quad \Theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{E} (\xi^{(2)})^2}{2T_2};$$

$$p = p(c, C, R, \Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{ce^{-C\Theta}}{C} \left(1 - \frac{\Theta}{R}\right); \quad q \stackrel{\text{def}}{=} 1 - p;$$

$$R^* = R^*(C, \Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Theta + \sqrt{\Theta^2 + 4\frac{\Theta}{C}}}{C}.$$

$$2.1.6. \quad \widehat{M}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\alpha s} (1 - F^{(2)}(s + u)) \, ds \, du.$$

**Замечание 2.** Для конечности  $\widehat{M}_\alpha$  достаточно конечности  $\sup_{x \geq 0} (1 - F^{(2)}(s)) e^{-cs} < \infty$  при некотором  $c > \alpha$ .  $\triangleright$

$$2.1.7. \quad M_\alpha(n, x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}} \mathbf{E} e^{\alpha \xi_x^{(1)}} & \text{при } n = 1; \\ \mathbf{E} e^{\alpha \xi_x^{(2)}} & \text{при } n = 2. \end{cases}$$

$$2.1.8. \quad \overline{M}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T_1 + T_2} \left( \frac{\alpha C \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}}}{(c - \alpha)c} + \alpha \widehat{M}_\alpha^{(2)} + T_1 \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}} + T_2 \right).$$

$$2.1.9. \quad \mathfrak{K}(\alpha) = \mathfrak{K}(\alpha, c, C, X_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{C e^{\alpha R^*} M_\alpha(X_0) \overline{M}_\alpha}{(c - \alpha) (1 - \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(1)}} \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}} q)}.$$

## 2.2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

**Теорема 1.** Если выполнены условия

$$(7) \quad \begin{aligned} F^{(1)}(s) &= 1 - \exp\left(-\int_0^s \lambda(u) du\right); \\ \forall x \geq 0 \quad 0 < c < \lambda(x) \leq C < \infty, \\ \widehat{M}_c^{(2)} < \infty; \quad F^{(2)}(0+) &= 0, \\ \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(1)}} \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}} q < 1 - \text{см. п. 2.1.5,} \end{aligned}$$

$u \forall t > 0$

$$(8) \quad \|\mathcal{P}_t^{X_0} - \mathcal{P}\|_{TV} \stackrel{\text{def}}{=} \stackrel{\text{def}}{\sup_{A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})}} |\mathcal{P}_t^{X_0}(A) - \mathcal{P}(A)| \leq \mathfrak{K}(\alpha) e^{-\alpha t},$$

где постоянная  $\mathfrak{K}(\alpha)$  определена в п. 2.1.9. •

**Следствие 1.** В условиях теоремы 1

$$\left|k_{\Gamma}^{X_0}(t) - k_{\Gamma}\right| \leq \mathfrak{K}(\alpha) e^{-\alpha t}. \quad \triangleright$$

Следствие 1 вытекает из того, что

$$k_{\Gamma}^{X_0}(t) = \mathbf{P}\{n(X_t) = 1\} = \mathbf{P}\{X_t \in \mathcal{S}_1\} = \mathcal{P}_t^{X_0}(\mathcal{S}_1).$$

## 3. Идея доказательства теоремы 1

Доказательство теоремы основано на использовании *метода склеивания (coupling method)* – см. [8, 10]) марковских процессов.

Метод склеивания основан на оценке момента времени, когда происходит совпадение двух *независимых* марковских процессов с одинаковыми переходными функциями и произвольными начальными состояниями.

То есть мы рассматриваем две *независимые* версии процесса  $X_t - X'_t$  и  $X''_t$ , начинающиеся соответственно из начальных состояний  $X'_0$  и  $X''_0$ . В общем случае эти процессы могут совпасть (склеиться) только в момент перехода в одно и то же состояние (т.е. переход вида  $\{1\} \rightarrow \{2\}$  или  $\{2\} \rightarrow \{1\}$ ). Вероятность того, что эти процессы совпадут (при  $X'_0 \neq X''_0$ ), может оказаться



отличной от нуля только в том случае, когда оба процесса начинаются из состояния  $\{2\}$  и ф.р.  $F_2(s)$  имеет дискретную составляющую (напомним, что ф.р.  $F_1(s)$  абсолютно непрерывна).

Поэтому на некотором специально выбранном вероятностном пространстве строится пара процессов  $(Z'_t, Z''_t)$  такая, что маргинальные распределения компонент этого «парного» процесса совпадают с распределениями процессов  $X'_t, X''_t$  (в частности,  $Z'_0 = X'_0, Z''_0 = X''_0$ ), и при этом для всех  $t > T_{Z'_0, Z''_0} \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > 0 : Z'_t = Z''_t\}$  выполнено равенство  $Z'_t = Z''_t$ . Следуя [7], эту пару называем *склежкой* процессов  $X'_t$  и  $X''_t$ .

Если сл.в.  $T_{Z'_0, Z''_0}$  конечна с вероятностью 1, то *склежка* называется *успешной*.

Наша цель – построить *успешную склейку*  $(Z'_t, Z''_t)$  процессов  $X'_t$  и  $X''_t$ , такую, что для некоторого  $\alpha > 0$  и

$$K(\alpha, Z'_0, Z''_0) = K(\alpha, c, C, Z'_0, Z''_0)$$

выполнено

$$\mathbf{E} e^{\alpha T_{Z'_0, Z''_0}} \leq K(\alpha, Z'_0, Z''_0) < \infty,$$

где  $c$  и  $C$  – постоянные из замечания 1.

В этом случае можно применить к процессам  $X'_t$  и  $X''_t$  основное неравенство склеивания (basic coupling inequality – см. ниже п. 6.3.7).

Пусть  $\tilde{X}_t$  – процесс, начальное *распределение* которого –  $\mathcal{P}$ ; это – стационарный процесс.

Если  $\int_{\mathcal{X}} K(\alpha, X'_0, X''_0) \mathcal{P}(dX''_0) \leq \mathfrak{K}(\alpha) = \mathfrak{K}(\alpha, c, C, X'_0)$ , то

$$\begin{aligned} \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})} \left| \mathbf{P}\{X'_t \in A\} - \mathbf{P}\{\tilde{X}_t \in A\} \right| &= \\ &= \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})} \left| \mathcal{P}_t^{X'_0}(A) - \mathcal{P}(A) \right| \leq \mathfrak{K}(\alpha, X'_0) e^{-\alpha t}, \end{aligned}$$

откуда и следует утверждение теоремы 1.

Полное доказательство теоремы 1 дано в разделах 5–6.

#### 4. Примеры использования полученных результатов

Для двух вариантов ф.р.  $F^{(1)}(s)$  и  $F^{(2)}(s)$  было проведено имитационное моделирование (10 000 000 реализаций, вычисления с 16 знаками после нуля) поведения процесса  $X_t$  с различными начальными условиями, вычислены эмпирические значения коэффициента готовности  $k_{\Gamma}^{эмн}(t)$  для  $t = 1, 2, \dots, 650$ , получена (несколько заниженная) эмпирическая оценка  $\mathfrak{K}^{эмн}(\alpha)$  величины  $\mathfrak{K}(\alpha)$ , которая была сравнена с  $\mathfrak{K}(\alpha) = \mathfrak{K}(\alpha, c, C, X_0)$ .

Причин того, что эмпирическая оценка  $\mathfrak{K}^{эмн}(\alpha)$  занижена, две.

Во-первых, при  $\Delta^{эмн}(t) \stackrel{\text{def}}{=} |k_{\Gamma}^{эмн}(t) - k_{\Gamma}| < 0,0004$  разброс  $\Delta^{эмн}(t)$  сравним с величиной  $\Delta^{эмн}(t)$ . Это следствие накопления ошибок округления при вычислении значений сл.в.  $\xi^{(i)}$ ; увеличение числа реализаций здесь не даёт улучшения точности (см. рис.1 и таблицу 1).

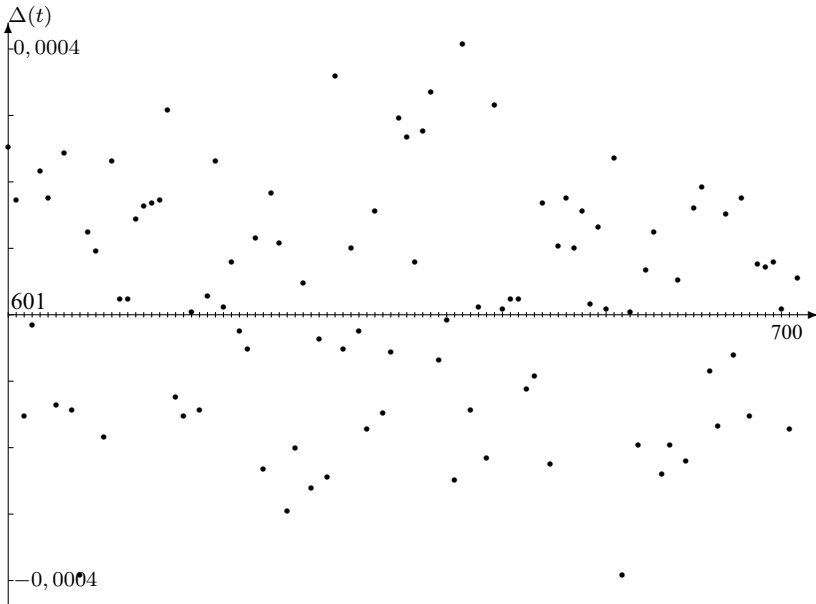


Рис. 1.  $\Delta(t)$  для  $t = 601, 602, \dots, 700$

Поэтому вычисление  $\mathfrak{K}^{mn}(\alpha)$  проводилось только по нескольким из эмпирических данных – по значениям  $\Delta(t)$  для первых 10–15 единиц времени.

Таблица 1.  $\Delta(t)$  для примера 1 (начальное условие  $X_0 = (2, 0)$ )

$t$	$\Delta(t)$	$t$	$\Delta(t)$
0	-0,5	16	0,0000432
1	0	17	0,0002705
2	-0,1322323	18	0,0001697
3	0,0032313	19	-0,0000246
4	0,0045013	20	0,0000847
5	-0,0005616	21	-0,0000148
6	-0,0003203	22	-0,0002263
7	0,0002989	23	-0,0000415
8	-0,0000282	24	-0,0000685
9	0,0002417	25	0,0004427
10	-0,0001726	26	-0,0003706
11	-0,0000200	27	-0,0003147
12	0,0001399	28	-0,0000076
13	-0,0001912	29	-0,0001412
14	0,0002538	30	-0,0000692
15	-0,0000148	31	-0,0001873

Также было проведено сравнение величин  $\mathfrak{T}_\varepsilon^{mn}(X_0) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > 0 : \forall s > t \quad |k_\Gamma^{mn}(s) - k_\Gamma| < \varepsilon\}$ , полученных в численных экспериментах (здесь точность определения  $\mathfrak{T}_\varepsilon^{mn}(X_0)$  представляется удовлетворительной) и  $\mathfrak{T}_\varepsilon(X_0) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > 0 : \forall s > t \quad |k_\Gamma(s) - k_\Gamma| < \varepsilon\}$ , полученных из оценки (8).  $\mathfrak{T}_\varepsilon(X_0)$  – это время, по истечении которого можно с точностью  $\varepsilon$  определить  $k_\Gamma$  по результатам наблюдений за процессом  $X_t$ .

Поскольку при имитационном моделировании значение  $k_\Gamma(t)$  вычислялось в целочисленные моменты времени, для  $\mathfrak{T}_\varepsilon^{mn}(X_0)$  определялся интервал единичной длины, в который попало значение  $\mathfrak{T}_\varepsilon^{mn}(X_0)$  – см. таблицы 3 и 4.

4.1. ПРИМЕР 1

Пусть  $F^{(1)}(s) = 1 - e^{-s}$ ,  $\xi^{(2)} \equiv 1$  (время восстановления элемента постоянно). В этом случае  $C = c = 1$ ;  $\Theta = 1$ ;  $R^* \approx 1,618$ ;<sup>1</sup>  $q \approx 0,9243$ ;  $\mathbf{E} e^{\xi^{(1)}} = \frac{1}{1 - \alpha}$  при  $\alpha < 1$ ;  $\mathbf{E} e^{\alpha\xi^{(1)}} \mathbf{E} e^{\alpha\xi^{(2)}} q < 1$  при  $\alpha < 0,039$ , т.е. формула (8) применима для  $\alpha \in (0; 0,03899)$ .

Поскольку для любых  $a > 0$  верно равенство  $F_a^{(1)}(s) \equiv F_0^{(1)}(s)$ , распределения  $\mathcal{P}_t^{(1,0)}$  и  $\mathcal{P}_t^{(1,\cdot)}$  совпадают.

Заметим, что при любом начальном значении  $X_0$  максимум  $|\Delta(t)|$  достигается при  $t = 0$ :  $|\Delta(0)| = 0,5$ , поскольку  $\mathbf{P}\{X_0 \in \mathcal{S}_1\} = 0$  или  $\mathbf{P}\{X_0 \in \mathcal{S}_1\} = 1$ , а при  $k \in N$  величина  $|\Delta(t)|$  убывает очень быстро. То есть при  $\alpha \in (0; 0,03899)$  величина оценки  $K^{\varepsilon mn}(\alpha)$  не зависит от  $\alpha$ :  $K^{\varepsilon mn}(\alpha) \equiv 0,5$ .

Поэтому также вычислялись оценки для  $\tilde{\mathfrak{K}}^{\varepsilon mn}$  без учёта значений  $k_{\Gamma}^{\varepsilon mn}(t)$  для  $t \in [0; 1)$ .

Оценки  $\mathfrak{K}(\alpha)$  приведены в таблице 3; поскольку диапазон изменения  $\alpha$  очень мал ( $\alpha < 0,03899$ ), отношения величин  $M_\alpha(X_0)$  для рассмотренных начальных значений  $X_0$  равны примерно 1, и поэтому отношения величин  $\mathfrak{K}(\alpha, X_0)$  также близки к 1 (см. п. 2.1.9).

<sup>1</sup> Золотое сечение.

Таблица 2. Пример 1:  $\mathfrak{T}_\varepsilon^{\varepsilon mn}$ ,  $\mathfrak{T}_\varepsilon$ ; минимальные значения  $\mathfrak{T}_\varepsilon$  достигаются при  $\alpha \approx 0,0341$ ,  $\alpha \approx 0,0353$  и  $\alpha \approx 0,0360$  соответственно

	$\varepsilon = 0,1$	$\varepsilon = 0,01$	$\varepsilon = 0,001$
$\mathfrak{T}_\varepsilon^{\varepsilon mn}(2,0)$	(2;3)	(2;3)	(5;6)
$\mathfrak{T}_\varepsilon(2,0)$	90,213	118,993	147,025
$\mathfrak{T}_\varepsilon^{\varepsilon mn}(2, \frac{1}{2})$	(2;3)	(2;3)	(4;5)
$\mathfrak{T}_\varepsilon(2, \frac{1}{2})$	89,996	118,776	146,808
$\mathfrak{T}_\varepsilon^{\varepsilon mn}(1, \cdot)$	(0;1)	(0;1)	(4;5)
$\mathfrak{T}_\varepsilon(1, \cdot)$	90,66	119,435	147,468

Таблица 3. Пример 1: значения  $\mathfrak{R}(\alpha)$

$X_0$	$\alpha$	0	0,01	0,02	0,03	0,03899
(2,0)	$\mathfrak{R}^{ЭМП}$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	$\tilde{\mathfrak{R}}^{ЭМП}$	0,132	0,135	0,138	0,14	0,143
	$\mathfrak{R}$	13,203	18,414	29,154	63,873	$1,787 \cdot 10^6$
$(2, \frac{1}{2})$	$\mathfrak{R}^{ЭМП}$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	$\tilde{\mathfrak{R}}^{ЭМП}$	0,132	0,135	0,138	0,14	0,143
	$\mathfrak{R}$	13,203	18,322	28,864	62,922	$1,752 \cdot 10^6$
(1,·)	$\mathfrak{R}^{ЭМП}$	$3,36 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$3,43 \cdot 10^{-3}$	$3,47 \cdot 10^{-3}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$
	$\tilde{\mathfrak{R}}^{ЭМП}$	$3,36 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$3,43 \cdot 10^{-3}$	$3,47 \cdot 10^{-3}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$
	$\mathfrak{R}$	13,203	18,678	29,735	63,135	$2,532 \cdot 10^5$

#### 4.2. ПРИМЕР 2

Пусть  $F^{(1)}(s) = 1 - e^{-4s}$ ,  $F^{(2)}(s) = 1 - e^{-s^2}$ ; заметим, что в этом случае интенсивность восстановления элемента  $\frac{(F^{(2)}(s))'}{1 - F^{(2)}(s)} = 2s$ .

Далее,

$$\begin{aligned}
 c = C = 0,7; & & \mathbf{E} \xi^{(1)} \approx 1,428; & & \mathbf{E} (\xi^{(1)})^2 \approx 4,082; \\
 \mathbf{E} \xi^{(2)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0,8862; & & \mathbf{E} (\xi^{(2)})^2 = 1; & & \Theta = \mathbf{E} \xi^{(1)} \approx 1,428; \\
 R^* \approx 2,3115; & & q \approx 0,9243; & & k_{\Gamma} \approx 0,6171;
 \end{aligned}$$

функция  $q \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(1)}} \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}}$  равна 1 при  $\alpha = \alpha_0 \approx 0,04117$ , т.е. для всех  $\alpha < 0,04117$  применима оценка (8).

Сравнение эмпирических результатов и результата применения теоремы 1 приведено в таблице 4.

В этом случае  $\frac{\mathfrak{R}(\alpha, (2, 0))}{\mathfrak{R}(\alpha, (1, \cdot))} \in (0,95; 1)$ , но  $\frac{\mathfrak{R}(\alpha, (2, x))}{\mathfrak{R}(\alpha, (1, \cdot))} < 0,05$  при  $x \geq 10$ , поэтому оценки  $\mathfrak{T}_{\varepsilon}$  для  $X_0 = (2, 0)$  и  $X_0 = (1, \cdot)$  близки, а оценки  $\mathfrak{T}_{\varepsilon}$  для  $X_0 = (2, 10)$  и  $X_0 = (2, 25)$  существенно от них отличаются (таблица 5).

Таблица 4. Пример 2:  $\mathfrak{F}_\varepsilon^{\mathfrak{M}N}$ ,  $\mathfrak{F}_\varepsilon$ ; указаны значения  $\alpha$ , соответствующие указанным значениям  $\mathfrak{F}_\varepsilon$

	$X_0$	$\varepsilon = 0,1$	$\varepsilon = 0,01$	$\varepsilon = 0,001$
$\mathfrak{F}_\varepsilon$	(2,0)	86,008	113,263	139,809
$\mathfrak{F}_\varepsilon^{\mathfrak{M}N}$	(2,0)	(1;2)	(2;3)	(3;4)
$\alpha$	(2,0)	0,036	0,0373	0,038
$\mathfrak{F}_\varepsilon$	(2,10)	47,627	77,154	104,729
$\mathfrak{F}_\varepsilon^{\mathfrak{M}N}$	(2,10)	(0;1)	(1;2)	(2;3)
$\alpha$	(2,10)	0,0317	0,0354	0,037
$\mathfrak{F}_\varepsilon$	(2,25)	34,409	67,269	93,919
$\mathfrak{F}_\varepsilon^{\mathfrak{M}N}$	(2,25)	(0;1)	(0;1)	(2;3)
$\alpha$	(2,25)	0,0279	0,0373	0,0373
$\mathfrak{F}_\varepsilon$	(1,·)	86,45	113,705	140,252
$\mathfrak{F}_\varepsilon^{\mathfrak{M}N}$	(1,·)	(0;1)	(0;1)	(2;3)
$\alpha$	(1,·)	0,036	0,0373	0,038

### 4.3. ПРИМЕР 3

Пусть  $F^{(1)}(s) = 1 - e^{-\lambda s}$ ,  $F^{(2)}(s) = 1 - e^{-\mu s}$ ; в этом случае имеет место оценка (1);  $k_\Gamma = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$ .

Оценим скорость сходимости  $k_\Gamma(t)$  к предельному значению, используя оценки из доказательства теоремы 1, но несколько улучшив точность с использованием свойств показательного распределения: входящие в  $\mathfrak{R}(\alpha)$  величины либо вычисляются точно, либо могут быть более точно оценены.

1.  $\mathbf{P}(\mathcal{E}_k)$  (см. 6.3.4) вычисляется явно:  $\mathbf{P}(\mathcal{E}_k) = \frac{\mu}{2(\lambda + \mu)}$ ; чтобы эта вероятность была больше, будем считать, что  $\mu > \lambda$ .

2. Из того, что

$$(9) \quad F_a^{(i)}(s) \equiv F^{(i)}(s),$$

следует, что  $\varkappa_{x,y} \equiv 1$ .

3. Поскольку  $\mathbf{P} \left\{ \xi_1^{(1)} > \xi_2^{(1)} + \xi_2^{(2)} \right\} = 1 - q = \frac{\mu}{2(\lambda + \mu)}$ ;

$$q = \frac{2\lambda + \mu}{2(\lambda + \mu)} \quad \left( \text{здесь } \hat{\xi}_k^{(i)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \xi^{(i)} \right).$$

Таблица 5. Пример 2: значения  $\mathfrak{K}(\alpha)$

$X_0$	$\alpha$	0	0,01	0,02	0,03	0,04117
(2,0)	$\mathfrak{K}^{\text{ЭМН}}(\alpha)$	0,6171	0,6171	0,6171	0,6171	0,6171
	$\tilde{\mathfrak{K}}^{\text{ЭМН}}(\alpha)$	0,119	0,12	0,121	0,122	0,124
	$\mathfrak{K}(\alpha)$	13,203	18,287	28,239	56,143	$2,428 \cdot 10^5$
(2,10)	$\mathfrak{K}^{\text{ЭМН}}(\alpha)$	0,6171	0,6171	0,6171	0,6171	0,6171
	$\tilde{\mathfrak{K}}^{\text{ЭМН}}(\alpha)$	0,008	$8,414 \cdot 10^{-3}$	$8,498 \cdot 10^{-3}$	$8,584 \cdot 10^{-3}$	$8,68 \cdot 10^{-3}$
	$\mathfrak{K}(\alpha)$	0,657	0,902	1,382	2,724	$1,167 \cdot 10^4$
(2,25)	$\mathfrak{K}^{\text{ЭМН}}(\alpha)$	0,6171	0,6171	0,6171	0,6171	0,6171
	$\tilde{\mathfrak{K}}^{\text{ЭМН}}(\alpha)$	0,005	$5,189 \cdot 10^{-3}$	$5,241 \cdot 10^{-3}$	$5,294 \cdot 10^{-3}$	$5,354 \cdot 10^{-3}$
	$\mathfrak{K}(\alpha)$	0,264	0,362	0,554	1,092	$4,677 \cdot 10^4$
(1,.)	$\mathfrak{K}^{\text{ЭМН}}(\alpha)$	0,3829	0,3829	0,3829	0,3829	0,3829
	$\tilde{\mathfrak{K}}^{\text{ЭМН}}(\alpha)$	0,003	$3,397 \cdot 10^{-3}$	$3,431 \cdot 10^{-3}$	$3,465 \cdot 10^{-3}$	$3,504 \cdot 10^{-3}$
	$\mathfrak{K}(\alpha)$	13,203	18,471	28,815	57,879	$2,532 \cdot 10^5$

4. Вместо  $M_\alpha(n, x)$  будем использовать

$$\tilde{M}_\alpha(n, x) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 1; \\ \frac{\mu}{\mu - \alpha} & \text{при } n = 2. \end{cases}$$

5. Из (9) следует, что в качестве  $\mathcal{T}_0$  (14) для процесса  $Z_t$  можно взять момент  $\tilde{\mathcal{T}}_0(Z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t \geq 0 : n(Z_t) = 1\}$ ; соответственно

$$\tilde{\mathcal{T}}_0(n, x) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \begin{cases} 0 & \text{при } n = 1; \\ \xi_x^{(2)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \xi^{(2)} & \text{при } n = 2, \end{cases}$$

поэтому  $\mathbf{E} e^{\alpha \tilde{\mathcal{T}}_0(n, x)} = \tilde{M}_\alpha(n, x)$ .

6. Далее, можно явно выписать распределение сл.в.  $\tilde{\mathcal{T}}_0(X'_0, X''_0) \stackrel{\text{def}}{=} \max(\tilde{\mathcal{T}}_0(X'_0), \tilde{\mathcal{T}}_0(X''_0))$ :

$$\mathbf{P} \left\{ \tilde{\mathcal{T}}_0(X'_0, X''_0) \leq s \right\} = \begin{cases} 1 & \text{при } n' = n'' = 1; \\ 1 - e^{-\mu s} & \text{при } n' + n'' = 3; \\ (1 - e^{-\mu s})^2 & \text{при } n' = n'' = 2. \end{cases}$$

То есть

$$\mathbf{E} e^{\alpha \tilde{T}_0(X'_0, X''_0)} = \begin{cases} 1, & \text{при } n' = n'' = 1; \\ \frac{\mu}{\mu - \alpha}, & \text{при } n' + n'' = 3; \\ \frac{2\mu^2}{(2\mu - \alpha)(\mu - \alpha)}, & \text{при } n' = n'' = 2, \end{cases}$$

и

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} \mathbf{E} e^{\alpha \tilde{T}_0(X'_0, X''_0)} \mathcal{P}(dX''_0) &\leq \frac{\mu}{\mu - \alpha} \left( k_\Gamma + \frac{2\mu(1 - k_\Gamma)}{2\mu - \alpha} \right) = \\ &= \frac{\mu^2(2\mu + 2\lambda - \alpha)}{(\mu - \alpha)(\lambda + \mu)(2\mu - \alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{W}(\alpha, \lambda, \mu); \end{aligned}$$

эта оценка может быть уточнена.

7. В случае если по схеме, описанной в 6.3.5, после момента  $\mathcal{T}_k$  произошло склеивание процессов  $Z_t^I$  и  $Z_t^{II}$  в момент  $\mathcal{T}_{k+1}$ , то разность  $\mathcal{T}_{k+1} - \mathcal{T}_k$  оценим сверху не величиной  $R^* + \hat{\xi}_k^{(1)}$ , а величиной  $\varrho \stackrel{\text{def}}{=} (\max(\xi_k^{(1)} + \xi_k^{(2)}, \xi_\ell^{(1)}) + \xi_{k'}^{(1)})$  – здесь мы учитываем, что  $\hat{\xi}_k^{(1)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \xi_k^{(1)}$ .

Ф.р.  $F_{1+2}(s) = \mathbf{P} \left\{ \xi_k^{(1)} + \xi_k^{(2)} \leq s \right\} = 1 - \frac{\lambda e^{-\mu s} - \mu e^{-\lambda s}}{\lambda - \mu}$ , и при  $\alpha < \min(\lambda, \mu)$

$$\mathbf{E} e^{\alpha \varrho} = \frac{2\lambda^5 \mu - 2\lambda^3 \mu^3 + 3\alpha(\lambda^3 \mu^2 - \lambda^4 \mu)}{(\lambda - \mu)(\lambda - \alpha)(2\lambda - \alpha)(\mu - \alpha)(\lambda + \mu - \alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}(\alpha, \lambda, \mu).$$

8. Далее, следуя по пути доказательства теоремы 1, имеем: для сл.в.  $\nu$  такой, что  $\mathbf{P}\{\nu = k\} = p q^k$  ( $k \in \mathbb{Z}_+$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{\alpha T_{Z'_0, Z''_0}} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} e^{\alpha(\tilde{T}_k + \varrho + \xi^{(1)})} \mathbf{P}\{\nu = k\} \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} e^{\alpha \tilde{T}_0} \left( \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(1)}} \right)^{k+1} \left( \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}} \right)^k \mathbf{E} e^{\alpha \varrho} q^k = \\ &= \frac{\mathbf{E} e^{\alpha \tilde{T}_0} \mathcal{A}(\alpha, \lambda, \mu) \lambda}{(\lambda - \alpha) \left( 1 - \frac{q \lambda \mu}{(\lambda - \alpha)(\mu - \alpha)} \right)}; \end{aligned}$$



интегрируя это выражение по стационарной мере  $\mathcal{P}$ , получаем равномерную оценку:

$$\mathbb{E} e^{\alpha T_{Z'_0, Z''_0}} \leq \frac{\lambda \mu \mathcal{W}(\alpha, \lambda, \mu) \mathcal{A}(\alpha, \lambda, \mu)}{(\lambda - \alpha) \left( \mu - \alpha - \frac{q \lambda \mu}{(\lambda - \alpha)} \right)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{K}(\alpha),$$

и для всех  $\alpha$ , удовлетворяющих неравенству

$$(10) \quad (\lambda - \alpha)(\mu - \alpha) > q \lambda \mu$$

верна оценка:  $|k_{\Gamma}(t) - k_{\Gamma}| < \mathfrak{K}(\alpha) e^{-\alpha t}$ .

9. Пусть  $\lambda = 1, \mu = 5$ . Тогда  $\mathcal{W}(\alpha, 1, 5) = \frac{25(12 - \alpha)}{6(10 - \alpha)(5 - \alpha)}$

$q = \frac{5}{12}, p = \frac{7}{12}$ ; условие (10) выполнено при  $\alpha < 0,370044$ .

При  $\alpha = 0,3$ :  $\mathcal{A}(\alpha, \lambda, \mu) \approx 1,7408979$ ;  $\mathcal{W}(\alpha, \lambda, \mu) \approx 1,06931345$ ;  $\mathfrak{K}(0,3) \approx 10,3882007$ , т.е. при любых начальных условиях  $|k_{\Gamma}(t) - k_{\Gamma}| < 10,3882007 e^{-0,3t}$ , что хуже (1), но даёт вполне приемлемую оценку скорости сходимости, существенно лучшую, чем в примерах 1 и 2.

#### 4.4. ВЫВОДЫ

Несмотря на то, что оценка (8), как будет видно из доказательства теоремы 1, строится довольно грубо, полученные формулы позволяют давать оценки скорости сходимости коэффициента готовности для достаточно широкого класса распределений. Однако диапазон изменения  $\alpha$ , при котором возможно применение оценки (8), как правило, довольно мал.

Численные эксперименты показали, что чем выше скорость сходимости  $k_{\Gamma}(t)$  к предельному значению, тем хуже полученные по формуле (8) оценки.

Однако, как видно из примера 3, знание некоторой дополнительной информации о функциях распределения  $F_1(s)$  и  $F_2(s)$  позволяет улучшить оценку скорости сходимости, избежав излишних округлений неравенств в оценках доказательства теоремы 1.

При этом из таблиц 2 и 4 видно, что при наблюдении работы реального восстанавливаемого элемента для получения приемлемой оценки  $k_{\Gamma}$  достаточно наблюдать около 100 периодов регенерации.

Таблицы 2–4 показывают, что, как правило, вычисленная по формуле (8) оценка для  $K(\alpha)$  отличается от эмпирического значения в  $10^2$ – $10^3$  раз.

Ниже приводится доказательство основной теоремы 1.

## **5. Предварительные соображения и вспомогательные факты**

### **5.1. ОБ ИССЛЕДУЕМОМ ПРОЦЕССЕ**

Мы рассматриваем процесс  $X_t$ , который является регенерирующим процессом. В дальнейшем в качестве периодов регенерации мы будем рассматривать интервалы вида  $(t_k, t_{k+1})$  – интервалы между последовательными попаданиями процесса  $X_t$  в состояние  $(1, 0)$  (вообще говоря, можно рассматривать и другие точки регенерации). Моменты  $(t_1, t_2, \dots)$  (или  $(t'_1, t'_2, \dots)$ ) – точки его регенерации, а длина периода регенерации  $\xi \stackrel{\text{def}}{=} \xi^{(1)} + \xi^{(2)}$  имеет математическое ожидание, равное  $\mathbf{E} \xi^{(1)} + \mathbf{E} \xi^{(2)} = T_1 + T_2$ .

Мы будем использовать также сл.в.

$$(11) \quad \zeta_t^* \stackrel{\text{def}}{=} (\inf\{T > t : X_t = (1, 0)\} - t),$$

$\zeta_t^*$  – время до начала следующего периода регенерации («время перескока» периода регенерации) процесса  $X_t$ .

Известно, что процесс  $X_t$  является строго марковским (см., например, [6]).

### **5.2. Полезные следствия из Ключевой теоремы восстановления (теоремы Смита)**

Следствием из Ключевой теоремы восстановления ([5, С.23]) являются следующие факты:

**Предложение 1.** *В условиях теоремы 1 распределение процесса  $X_t$  при любых начальных условиях слабо сходится к распределению  $\mathcal{P}$ , которое задаётся следующим образом (см. [4,*

§ 2.6], [9] и формулу (6):

$$\mathcal{P}(\{n = 1, x \leq s\}) = k_{\Gamma} \int_0^s \tilde{f}^{(1)}(u) du;$$

$$\mathcal{P}(\{n = 2, x \leq s\}) = (1 - k_{\Gamma}) \int_0^s \tilde{f}^{(2)}(u) du,$$

где  $k_{\Gamma} = \frac{T_1}{T_1 + T_2}$ ,  $\tilde{f}^{(1)}(u)$  определены в (6).  $\triangleright$

**Предложение 2.** Для процесса восстановления  $t_0 = 0$ ,  $t_1, t_2, \dots, t_k \dots, t_{k+1} - t_k = \xi$  - н.о.р. сл.в. с нерешётчатой ф.р.  $F(x)$ , имеющие конечный второй момент, верно следующее неравенство:

$$\mathbf{E} x_t^* \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} x_t^* = \frac{\mathbf{E} \xi^2}{2\mathbf{E} \xi},$$

где  $x_t^* \stackrel{\text{def}}{=} (\min\{t_k : t_k > t\} - t)$  - время перескока ([2, 3]) процесса восстановления (или прямое время восстановления - [5]) в момент  $t$  (см., например, [9]).  $\triangleright$

**Следствие 2.** В условиях теоремы 1

$$\mathbf{E}(\zeta_t^* | t > t_1) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \zeta_t^* = \Theta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{E}(\xi)^2}{2\mathbf{E} \xi} = \frac{\mathbf{E}(\xi^{(1)} + \xi^{(2)})^2}{2(T_1 + T_2)}. \triangleright$$

**Следствие 3.** В условиях теоремы 1

$$(12) \quad \mathbf{E}(\zeta_t^* | t > t_1, X_t \in \mathcal{S}_2) \leq \Theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{E}(\xi^{(2)})^2}{2T_2},$$

где  $\zeta_t^* \stackrel{\text{def}}{=} (\inf\{s > t : Z_s'' = (1, 0)\} - t)$  - время от момента  $t$  до попадания процесса  $X_t$  в множество  $\mathcal{S}_1$ .  $\triangleright$

### 5.3. ОБОЗНАЧЕНИЯ

5.3.1.  $\mathcal{L}$  - мера Лебега.

5.3.2.  $\mathcal{U}_{\Omega}$  - равномерно распределённая случайная величина, заданная на  $\Omega = [0; 1]$ .

$$5.3.3. \varphi_{x,y}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \min \left( f_x^{(1)}(s), f_y^{(1)}(s) \right); \varkappa_{x,y} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} \varphi_{x,y}(s) ds.$$

**Замечание 3.** В условиях теоремы 1

$$\varphi_{x,y}(s) \geqslant ce^{-Cs} \quad \text{и} \quad \varkappa_{x,y} \geqslant \frac{c}{C}. \triangleright$$

5.3.4. Для монотонно неубывающей функции  $\Psi(s)$  обозначим

$$\Psi^{-1}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{v : \Psi(v) \leqslant u\}.$$

**Замечание 4.** Если  $\Psi(s)$  – функция распределения сл.в., то  $\Psi^{-1}(\mathcal{U}_\Omega)$  – сл.в. на  $\Omega$  с ф.р.  $\Psi(s)$ .  $\triangleright$

$$5.3.5. \Phi_{x,y}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^s \varphi_{x,y}(u) du, \quad \widehat{\Phi}_{x,y}(s) \stackrel{\text{def}}{=} F_x^{(1)}(s) - \Phi_{x,y}(s).$$

**Замечание 5.**  $\Phi_{x,y}(s)$  и  $\widehat{\Phi}_{x,y}(s)$  – неотрицательные неубывающие непрерывные функции и

$$\Phi_{x,y}(+\infty) = \varkappa_{x,y}, \quad \widehat{\Phi}_{x,y}(+\infty) = 1 - \varkappa_{x,y},$$

$$\Phi_{x,y}(0+) = \widehat{\Phi}_{x,y}(0+) = 0. \triangleright$$

$$5.3.6. \Xi_{x,y}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \Phi_{x,y}^{-1}(s) & \text{при } s \in [0; \varkappa_{x,y}); \\ \widehat{\Phi}_{x,y}^{-1}(s - \varkappa_{x,y}) & \text{при } s \in [\varkappa_{x,y}; 1). \end{cases}$$

**Замечание 6.**  $\Xi_{x,y}(\mathcal{U}_\Omega)$  – сл.в. на  $\Omega$  с ф.р.  $F_x^{(1)}(s)$ . При этом  $\mathbf{P}\{\Xi_{x,y}(\mathcal{U}_\Omega) = \Xi_{y,x}(\mathcal{U}_\Omega)\} = \varkappa_{x,y}$  – подробнее об этом см. [8, 11, 12].  $\triangleright$

Кроме того, в условиях теоремы 1 плотность  $\widetilde{p}_{x,y}(s)$  распределения сл.в.  $(\Xi_{x,y}(\mathcal{U}_\Omega) | \Xi_{x,y}(\mathcal{U}_\Omega) = \Xi_{y,x}(\mathcal{U}_\Omega))$  удовлетворяет неравенству  $\widetilde{p}_{x,y}(s) \leqslant Ce^{-cs}$  (см. условие (7)).

## 6. Доказательство теоремы 1

### 6.1. КОНСТРУКЦИЯ ПРОЦЕССА $X_t$

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \mathcal{L})$ . Возьмём прямое произведение счётного множества экземпляров пространства

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ), предварительно их пронумеровав:

$$(\Omega^X, \mathcal{F}^X, \mathbf{P}^X) = (\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}_0) \times (\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbf{P}_1) \times (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbf{P}_2) \times \dots \\ \dots \times (\Omega_k, \mathcal{F}_k, \mathbf{P}_k) \times (\Omega_{k+1}, \mathcal{F}_{k+1}, \mathbf{P}_{k+1}) \times \dots$$

и будем строить на нём процесс  $X_t$ , выходящий из состояния  $X_0 = (i, a)$ , который мы обозначим  $X_t^{(i,a)}$ , следующим образом.

Используя распределения (3) и (4), положим:

$\theta_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$ ,  $i_0 \stackrel{\text{def}}{=} i$ ;  $\theta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \xi^{(i_0)}(a) + \theta_0$ , где  $\xi^{(i_0)}(a)$  – случайная величина с функцией распределения  $F_a^{(i)}(s)$  на пространстве  $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}_0)$ ;

$i_1 \stackrel{\text{def}}{=} i_0 - (-1)^{i_0}$ ,  $\theta_2 \stackrel{\text{def}}{=} \xi_1^{(i_1)} + \theta_1$ , где  $\xi_1^{(i_1)}$  – случайная величина с функцией распределения  $F^{(i_1)}(s)$  на пространстве  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbf{P}_1)$ ;

$i_2 \stackrel{\text{def}}{=} i_1 - (-1)^{i_1}$ ;  $\theta_3 \stackrel{\text{def}}{=} \xi_2^{(i_2)} + \theta_1$ , где  $\xi_2^{(i_2)}$  – случайная величина с функцией распределения  $F^{(i_2)}(s)$  на пространстве  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbf{P}_2)$ ;

· · · и т.д.; · · ·

$i_k \stackrel{\text{def}}{=} i_{k-1} - (-1)^{i_{k-1}}$ ;  $\theta_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \xi_k^{(i_k)} + \theta_1$ , где  $\xi_k^{(i_k)}$  – случайная величина с функцией распределения  $F^{(i_k)}(s)$  на пространстве  $(\Omega_k, \mathcal{F}_k, \mathbf{P}_k)$ ;

· · · и т.д. · · ·

Обозначим  $r(t) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{k : \theta_k < t\}$  и  $U_t \stackrel{\text{def}}{=} (i_{r(t)}, t - \theta_{r(t)})$ .

Построенный процесс  $U_t$  начинается из состояния  $(i, a)$ , первое изменение компоненты  $n_t$  этого процесса происходит в момент, когда заканчивается остаточное время пребывания элемента в состоянии  $i$  при условии, что к начальному моменту времени элемент находился в этом состоянии  $a$  единиц времени; в дальнейшем элемент поочередно находится в состояниях  $j = i - (-1)^i$  и  $i$  в течение случайного времени с функциями распределения  $F^{(j)}(s)$  и  $F^{(i)}(s)$  соответственно;  $\theta_k$  – моменты скачков (изменений) первой компоненты процесса  $U_t$ .

То есть  $(U_t, t \geq 0) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (X_t^{(i,a)}, t \geq 0)$ , где  $X_t^{(i,a)}$  – процесс  $X_t$  с начальным состоянием  $(i, a)$ .

## 6.2. КОНСТРУКЦИЯ СКЛЕЙКИ $(Z'_t, Z''_t)$

Для конструирования *одного* процесса  $X_t$  на пространстве  $(\Omega^X, \mathcal{F}^X, \mathbf{P}^X)$  строятся случайные моменты  $\theta_0, \theta_1, \dots$ , в которые происходит изменение состояния (исправное или неисправное) восстанавливаемого элемента. Для конструирования пары процессов нам нужны две последовательности таких случайных моментов. В предложенной ниже конструкции будут строиться случайные моменты  $\vartheta_0 = 0, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots$ , в которые происходит изменение состояния *хотя бы одного* из пары процессов (при этом конструкция будет такова, что в некоторые моменты может произойти изменение состояния *обоих* процессов).

Пару процессов  $(Z'_t, Z''_t) = ((m'_t, z'_t), (m''_t, z''_t))$  будем строить на вероятностном пространстве

$$\begin{aligned} (\Omega^{Z', Z''}, \mathcal{F}^{Z', Z''}, \mathbf{P}^{Z', Z''}) &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=0}^{\infty} ((\Omega'_k, \mathcal{F}'_k, \mathbf{P}'_k) \times (\Omega''_k, \mathcal{F}''_k, \mathbf{P}''_k)) = \\ &= \prod_{k=0}^{\infty} (\Omega'_k, \mathcal{F}'_k, \mathbf{P}'_k) \times \prod_{k=0}^{\infty} (\Omega''_k, \mathcal{F}''_k, \mathbf{P}''_k) = \\ &= (\Omega^{Z'}, \mathcal{F}^{Z'}, \mathbf{P}^{Z'}) \times (\Omega^{Z''}, \mathcal{F}^{Z''}, \mathbf{P}^{Z''}), \end{aligned}$$

здесь  $(\Omega'_k, \mathcal{F}'_k, \mathbf{P}'_k)$  и  $(\Omega''_k, \mathcal{F}''_k, \mathbf{P}''_k)$  – экземпляры пространства  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ .

Пусть

$$\begin{aligned} Z'_0 = (m'_0, z'_0) &= (n'_0, x'_0) = X'_0, \text{ и} \\ Z''_0 = (m''_0, z''_0) &= (n''_0, x''_0) = X''_0. \end{aligned}$$

Положим  $\vartheta_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$ . Конструирование моментов  $\vartheta_k$  строится последовательно, в некотором смысле «по индукции».

Пусть момент  $\vartheta_k$  уже определён с помощью сл.в., заданных на пространстве  $\prod_{\ell=0}^{k-1} (\Omega'_\ell, \mathcal{F}'_\ell, \mathbf{P}'_\ell) \times \prod_{\ell=0}^{k-1} (\Omega''_\ell, \mathcal{F}''_\ell, \mathbf{P}''_\ell)$ , и в этот момент  $Z'_{\vartheta_k} = (m'_{\vartheta_k}, z'_{\vartheta_k})$  и  $Z''_{\vartheta_k} = (m''_{\vartheta_k}, z''_{\vartheta_k})$ .

6.2.1. Если  $Z'_{\vartheta_k} = Z''_{\vartheta_k}$ , то полагаем  $Z'_t = Z'_t$  при  $t \geq \vartheta_k$  и строим процесс  $Z'_t$  для  $t > \vartheta_k$  на пространствах  $(\Omega'_k, \mathcal{F}'_k, \mathbf{P}'_k)$ ,  $(\Omega'_{k+1}, \mathcal{F}'_{k+1}, \mathbf{P}'_{k+1})$ , ... по схеме, описанной в разделе 6.1.

6.2.2. Если  $Z'_{\vartheta_k} \neq Z''_{\vartheta_k}$  и  $m'_{\vartheta_k} + m''_{\vartheta_k} > 2$ , т.е. не выполнено  $\left\{ Z'_{\vartheta_k} \in \mathcal{S}_1, Z''_{\vartheta_k} \in \mathcal{S}_1 \right\}$ , полагаем  $\vartheta_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \vartheta_k + \min(\vartheta'_{k+1}, \vartheta''_{k+1})$ , где

$$\vartheta'_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \left( F_{z'_{\vartheta_k}}^{(m'_{\vartheta_k})} \right)^{-1} \left( \mathcal{U}_{\Omega'_k} \right), \quad \vartheta''_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \left( F_{z''_{\vartheta_k}}^{(m''_{\vartheta_k})} \right)^{-1} \left( \mathcal{U}_{\Omega''_k} \right).$$

Для  $t \in [\vartheta_k; \vartheta_{k+1})$

(13)

$$Z'_t \stackrel{\text{def}}{=} (m'_{\vartheta_k}, z'_{\vartheta_k} + (t - \vartheta_k)), \quad Z''_t \stackrel{\text{def}}{=} (m''_{\vartheta_k}, z''_{\vartheta_k} + (t - \vartheta_k));$$

$$Z'_{\vartheta_{k+1}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (m'_{\vartheta_k}, z'_{\vartheta_k} + (t - \vartheta_{k+1})) & \text{при } \vartheta'_{k+1} \neq \min(\vartheta'_{k+1}, \vartheta''_{k+1}); \\ (m'_{\vartheta_k} - (-1)^{m'_{\vartheta_k}}, 0) & \text{при } \vartheta'_{k+1} = \min(\vartheta'_{k+1}, \vartheta''_{k+1}); \end{cases}$$

$$Z''_{\vartheta_{k+1}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (m''_{\vartheta_k}, z''_{\vartheta_k} + (t - \vartheta_{k+1})) & \text{при } \vartheta''_{k+1} \neq \min(\vartheta'_{k+1}, \vartheta''_{k+1}); \\ (m''_{\vartheta_k} - (-1)^{m''_{\vartheta_k}}, 0) & \text{при } \vartheta''_{k+1} = \min(\vartheta'_{k+1}, \vartheta''_{k+1}). \end{cases}$$

Здесь  $\vartheta'_{k+1}$  и  $\vartheta''_{k+1}$  – остаточные времена пребывания процессов  $Z'_t$  и  $Z''_t$  в состояниях  $m'_{\vartheta_k}$  и  $m''_{\vartheta_k}$  в момент времени  $\vartheta_k$  соответственно; в момент  $\vartheta_{k+1}$  один из них изменяет это состояние; может случиться так, что состояние в момент  $\vartheta_{k+1}$  изменят оба процесса.

6.2.3. Если  $m'_{\vartheta_k} = m''_{\vartheta_k} = 1$  и  $Z'_{\vartheta_k} \neq Z''_{\vartheta_k}$ , полагаем:

$\vartheta'_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \Xi_{z'_{\vartheta_k}, z''_{\vartheta_k}} (\mathcal{U}_{\Omega'_k})$ ,  $\vartheta''_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \Xi_{z''_{\vartheta_k}, z'_{\vartheta_k}} (\mathcal{U}_{\Omega'_k})$ ,  $\vartheta_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \vartheta_k + \min(\vartheta'_{k+1}, \vartheta''_{k+1})$ . Здесь опять  $\vartheta'_{k+1}$  и  $\vartheta''_{k+1}$  – остаточные времена пребывания процессов  $Z'_t$  и  $Z''_t$  в состояниях  $m'_{\vartheta_k}$  и  $m''_{\vartheta_k}$  соот-

ответственно; в момент  $\vartheta_{k+1}$  один из них изменяет состояние. При этом  $\mathbf{P}\{\vartheta'_{k+1} = \vartheta''_{k+1}\} = \kappa_{z'_{\vartheta_k}, z''_{\vartheta_k}} \geq \frac{c}{C}$ .

То есть с вероятностью  $\kappa_{z'_{\vartheta_k}, z''_{\vartheta_k}} \geq \frac{c}{C}$  процессы  $Z'_t$  и  $Z''_t$  одновременно перейдут в множество  $\mathcal{S}_2$  (в соответствии с Замечанием 6), тогда  $Z'_{\vartheta_{k+1}} = Z''_{\vartheta_{k+1}} = (2, 0)$  и, в соответствии с п. 1 этой конструкции, при  $t > \vartheta_{k+1}$   $Z'_t = Z''_t$ . Поведение процессов  $Z'_t$  и  $Z''_t$  на промежутке  $[\vartheta_k, \vartheta_{k+1}]$  задаётся с помощью формул (13).

**Замечание 7.** Обозначим  $\hat{\xi}_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \vartheta'_{k+1} \Big|_{\vartheta'_{k+1} = \vartheta''_{k+1}} \right\}$ . Сл.в.  $\hat{\xi}_{k+1}$  имеет плотность  $\varphi_{z'_{\vartheta_k}, z''_{\vartheta_k}}(s) \in [ce^{-Cs}; Ce^{-cs}]$ , т.е.  $\mathbf{E} e^{\alpha \hat{\xi}_{k+1}} \leq \frac{C}{c - \alpha}$  при  $\alpha < c$ .  $\triangleright$

**Замечание 8.** Можно показать, что построенная таким образом пара процессов  $(Z'_t, Z''_t)$  является марковским процессом, и распределение компонент этого процесса совпадает с распределением процессов  $X'_t = X_t^{X'_0}$  и  $X''_t = X_t^{X''_0}$ :  $(X_t^{X'_0}, t \geq 0) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (Z'_t, t \geq 0)$  и  $(X_t^{X''_0}, t \geq 0) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (Z''_t, t \geq 0)$ . В настоящей статье, в связи с громоздкостью доказательства этого факта, мы его не приводим.  $\triangleright$

Теперь наша задача – оценить распределение (и экспоненциальные моменты) сл.в.  $T_{Z'_0, Z''_0}$ , т.е. убедиться в успешности склейки  $(Z'_t, Z''_t)$ .

### 6.3. ОЦЕНКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $T_{Z'_0, Z''_0}$

6.3.1. Пусть

$$(14) \quad \begin{aligned} \mathcal{T}'_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > 0 : Z'_t = (1, 0)\}, \\ \mathcal{T}''_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > 0 : Z''_t = (1, 0)\}; \end{aligned}$$

положим  $\mathcal{T}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \max(\mathcal{T}'_0, \mathcal{T}''_0) \leq (\mathcal{T}'_0 + \mathcal{T}''_0) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{T}_0$ ;  $M \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E} \hat{T}_0$ .

Здесь  $\mathcal{T}'_0$  и  $\mathcal{T}''_0$  – моменты начала *полных* периодов регенерации процессов  $Z'_t$  и  $Z''_t$ , поэтому после момента  $\mathcal{T}_0$  поведение обоих процессов не зависит от начального состояния. До момента  $\mathcal{T}_0$  процессы могли склеиться (например, в случае, ес-



ли  $X'_0, X''_0 \in \mathcal{S}_1$ ), но мы отбросим эту возможность, что сделает нашу оценку распределения  $\Gamma_{Z'_0, Z''_0}$  более грубой.

Не ограничивая общности, будем считать, что  $Z'_{\mathcal{T}_0} = (1, 0)$  (случай  $Z''_{\mathcal{T}_0} = (1, 0)$  рассматривается аналогично).

Обозначим  $\mathcal{T}_k \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > \mathcal{T}_{k-1} : Z'_t = (1, 0)\}$  – моменты начала периодов регенерации процесса  $Z'_t$  начиная с момента  $\mathcal{T}_0$  ( $k \in \mathbb{N}$ );  $\mathcal{T}_{k+1} - \mathcal{T}_k = \xi_k^{(1)} + \xi_k^{(2)}$  ( $k \in \mathbb{Z}_+$ ).

6.3.2. В момент времени  $\mathcal{T}_k$  начинается период работы элемента длиной  $\xi_k^{(1)}$ . В этот момент (если ранее не произошло совпадения (склейки) процессов  $Z'_t$  и  $Z''_t$ ) процесс  $Z''_t$  находится на некотором периоде регенерации, и он находится в исправном состоянии ( $Z''_{\mathcal{T}_k} \in \mathcal{S}_1$ ) с вероятностью  $k_{\Gamma}^{X''}(\mathcal{T}_k)$ , или в неисправном ( $Z''_{\mathcal{T}_k} \in \mathcal{S}_2$ ) состоянии с вероятностью  $(1 - k_{\Gamma}^{X''}(\mathcal{T}_k))$ . Рассмотрим оба случая.

6.3.3.  $Z''_{\mathcal{T}_k} \in \mathcal{S}_1$ . При  $n(Z''_{\mathcal{T}_k}) = 1$ , в соответствии с конструкцией раздела 6.2, совместное пребывание в множестве  $\mathcal{S}_1$  с вероятностью  $\varkappa_{0, z''_{\mathcal{T}_k}} \geq \frac{c}{C}$  может завершиться склейкой процессов  $Z'_t$  и  $Z''_t$  через время  $\hat{\xi}_k \stackrel{\text{def}}{=} \left( \Xi_{0, z''_{\mathcal{T}_k}}(\mathcal{U}_{\Omega}) | \Xi_{0, z''_{\mathcal{T}_k}}(\mathcal{U}_{\Omega}) = \Xi_{Z''_{\mathcal{T}_k}, 0}(\mathcal{U}_{\Omega}) \right)$ .

6.3.4.  $Z''_{\mathcal{T}_k} \in \mathcal{S}_2$ . Если  $Z''_{\mathcal{T}_k} \in \mathcal{S}_2$ , рассмотрим сл.в.  $\varsigma_{\mathcal{T}_k}^*$  – остаточное время пребывания  $Z''_t$  в множестве  $\mathcal{S}_2$ ;  $\varsigma_{\mathcal{T}_k}^* \stackrel{\text{def}}{=} (\inf\{t > \mathcal{T}_k : Z''_t = (1, 0)\} - \mathcal{T}_k)$  и оценим  $\mathbf{P}\{\varsigma_{\mathcal{T}_k}^* < \xi^{(1)}\}$ ; событие  $\mathcal{E}_k \stackrel{\text{def}}{=} \{\varsigma_{\mathcal{T}_k}^* < \xi^{(1)}\}$  означает, что на интервале  $(\mathcal{T}_k, \mathcal{T}_k + \xi_k^{(1)})$  процессы  $Z'_t$  и  $Z''_t$  одновременно окажутся в множестве  $\mathcal{S}_1$  (после чего они могут склеиться с ненулевой вероятностью).

Поскольку  $\mathbf{E}\varsigma_{\mathcal{T}_k}^* \leq \Theta$  (12), оценим вероятность события  $\mathcal{E}_k^R \stackrel{\text{def}}{=} \{\varsigma_{\mathcal{T}_k}^* < R < \xi^{(1)}\}$ , где  $R$  – некоторое число. Очевидно,  $\mathcal{E}_k^R \subset \mathcal{E}_k$ .

Пусть  $R > \Theta$ ;  $\mathbf{P}\{\xi_k^{(1)} > R\} = 1 - F^{(1)}(R) \geq e^{-CR}$ , а по неравенству Маркова  $\mathbf{P}\{\varsigma_{\mathcal{T}_k}^* < R\} = 1 - \mathbf{P}\{\varsigma_{\mathcal{T}_k}^* \geq R\} \leq 1 - \frac{\Theta}{R}$ .

Поэтому

$$\mathbf{P}(\mathcal{E}_k) \geq \mathbf{P}(\mathcal{E}_k^R) \geq \rho = \rho(C, R, \Theta) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-CR} \left(1 - \frac{\Theta}{R}\right).$$

Вероятность  $\rho$  достигает максимума при  $R = R^*(C, \Theta)$ , т.е.  $\mathbf{P}(\mathcal{E}_k) \geq \rho$ .

Итак, на интервале  $(\mathcal{T}_k, \mathcal{T}_k + R^*)$  оба процесса окажутся в множестве  $\mathcal{S}_1$  с вероятностью большей, чем  $\rho$ .

6.3.5.  $\{Z''_{\mathcal{T}_k} \in \mathcal{S}_2\}, \mathcal{E}_k$ . Если произошло событие  $\mathcal{E}_k$ , и в момент  $\widehat{\mathcal{T}}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}_k + \varsigma_{\mathcal{T}_k}^*$  выполнено  $Z'_{\widehat{\mathcal{T}}_k} \in \mathcal{S}_1, Z''_{\widehat{\mathcal{T}}_k} \in \mathcal{S}_1$ , то, в соответствии с конструкцией раздела 6.2, с вероятностью  $\varkappa_{0, \varsigma_{\mathcal{T}_k}^*} \geq \frac{c}{C}$  в момент  $\widehat{\mathcal{T}}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}_k + \xi_k^{(1)}$  процессы  $Z'_t$  и  $Z''_t$  совпадут, при этом (см. замечание 7)

$$\xi_k^{(1)} \left| \left\{ \mathcal{E}_k, \left\{ Z'_{\widehat{\mathcal{T}}_k} = Z''_{\widehat{\mathcal{T}}_k} \right\} \right\} \right. = \varsigma_{\mathcal{T}_k}^* + \widehat{\xi}_k \leq R^* + \widehat{\xi}_k.$$

6.3.6. Поэтому с вероятностью большей, чем

$$(15) \quad \frac{c}{C} \left( k_{\Gamma}^{X''_0}(\mathcal{T}_k) + \left(1 - k_{\Gamma}^{X''_0}(\mathcal{T}_k)\right) e^{-CR} \left(1 - \frac{\Theta}{R}\right) \right) > \\ > \frac{c e^{-CR^*(C, \Theta)}}{C} \left(1 - \frac{\Theta}{R^*}\right) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - q,$$

процессы  $Z'_t$  и  $Z''_t$  совпадут в момент времени

$$(16) \quad T_{Z'_0, Z''_0} \leq \mathcal{T}_k + R^* + \widehat{\xi}_k.$$

6.3.7. Итак, учитывая, что начиная с момента  $T_{Z'_0, Z''_0}$  распределения процессов  $Z'_t$  и  $Z''_t$  совпадают, для всех  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$  верно основное неравенство склеивания (basic coupling inequality):

$$\left| \mathcal{P}_t^{X'_0}(A) - \mathcal{P}_t^{X''_0}(A) \right| = \\ = \left| \mathbf{P}\{X'_t \in A\} - \mathbf{P}\{X''_t \in A\} \right| = \left| \mathbf{P}\{Z'_t \in A\} - \mathbf{P}\{Z''_t \in A\} \right| = \\ = \left| \mathbf{P}\{Z'_t \in A, T_{Z'_0, Z''_0} \leq t\} + \mathbf{P}\{Z'_t \in A, T_{Z'_0, Z''_0} > t\} - \right. \\ \left. - \mathbf{P}\{Z''_t \in A, T_{Z'_0, Z''_0} \leq t\} - \mathbf{P}\{Z''_t \in A, T_{Z'_0, Z''_0} > t\} \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| \mathbf{P}\{Z'_t \in A, T_{Z'_0, Z''_0} > t\} - \mathbf{P}\{Z''_t \in A, T_{Z'_0, Z''_0} > t\} \right| \leq \\ &\leq \mathbf{P}\{T_{Z'_0, Z''_0} > t\} = \mathbf{P}\{e^{\alpha T_{Z'_0, Z''_0}} > e^{\alpha t}\} \leq \\ &\leq \frac{\mathbf{E} e^{\alpha T_{Z'_0, Z''_0}}}{e^{\alpha t}} \leq K(\alpha, Z'_0, Z''_0) e^{-\alpha t} = K(\alpha, X'_0, X''_0) e^{-\alpha t}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{P}_t^{X'_0}(A) - \mathcal{P}_t^{X''_0}(A) \right\|_{TV} &\stackrel{\text{def}}{=} \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})} \left| \mathcal{P}_t^{X'_0}(A) - \mathcal{P}_t^{X''_0}(A) \right| \leq \\ &\leq K(\alpha, X'_0, X''_0) e^{-\alpha t}. \end{aligned}$$

6.3.8. Оценим  $\mathbf{E} e^{\alpha T_{Z'_0, Z''_0}}$  при  $\alpha$ , удовлетворяющих (7).

Обозначим  $\nu$  – номер периода регенерации  $(\mathcal{T}_k; \mathcal{T}_{k+1}]$ , на котором произошло совпадение процессов  $Z'_t$  и  $Z''_t$ . Заметим, что при конструировании склейки  $(Z'_t, Z''_t)$  были схеме учтены не все возможные ситуации склеивания процессов. Учитывая (15) и (16),

$$\mathbf{P}\{\nu = k\} = \mathbf{P}\{\bar{\mathcal{E}}_0 \cap \bar{\mathcal{E}}_1 \cap \bar{\mathcal{E}}_2 \cap \dots \cap \bar{\mathcal{E}}_{k-1} \cap \mathcal{E}_k\} \leq q^k;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{\alpha T_{Z'_0, Z''_0}} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} e^{\alpha(\mathcal{T}_k + R^* + \widehat{\xi}_k^{(1)})} \mathbf{P}\{\nu = k\} \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} e^{\alpha\left(\mathcal{T}_0 + \sum_{r=1}^k (\xi_r^{(1)} + \xi_r^{(2)}) + R^* + \widehat{\xi}_k^{(1)}\right)} q^k = \\ &= e^{\alpha R^*} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} e^{\alpha \mathcal{T}_0} \mathbf{E} e^{\alpha \widehat{\xi}_k^{(1)}} \left( \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(1)}} \right)^k \left( \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}} \right)^k q^k \leq \\ &\leq e^{\alpha R^*} e^{\alpha \mathbf{E} e^{\alpha \mathcal{T}_0}} \frac{C}{c - \alpha} \left( 1 - \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(1)}} \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}} q \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{\alpha \mathcal{T}_0} &= \mathbf{E} e^{\alpha \mathcal{T}_0(Z'_0, Z''_0)} \leq \mathbf{E} e^{\alpha(\mathcal{T}'_0(Z'_0) + \mathcal{T}''_0(Z''_0))} = \\ &= \mathbf{E} e^{\alpha \mathcal{T}'_0(Z'_0)} \times \mathbf{E} e^{\alpha \mathcal{T}''_0(Z''_0)}; \quad \text{и} \quad \mathbf{E} e^{\alpha \mathcal{T}'_0(Z'_0)} = M_\alpha(m'_0, z'_0); \\ &\quad \mathbf{E} e^{\alpha \mathcal{T}''_0(Z''_0)} = M_\alpha(m''_0, z''_0) - \text{см. п. 2.1.7.} \end{aligned}$$

Поэтому (учитывая (5))

$$\mathbf{E} e^{\alpha T_{z'_0, z''_0}} \leq \frac{C e^{\alpha R^*} M_\alpha(Z'_0) M_\alpha(Z''_0)}{(c - \alpha) (1 - \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(1)}} \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}} q)} \stackrel{\text{def}}{=} \\ \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{K}(\alpha, c, C, Z'_0, Z''_0) = \mathfrak{K}(\alpha, Z'_0, Z''_0);$$

$$\int_{\mathcal{X}} M_\alpha(Z''_0) \mathcal{P}(dZ''_0) = \\ = \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}} \int_{S_1} \left( \int_0^\infty e^{\alpha s} f_z^{(1)}(s) ds \right) \mathcal{P}(d(1, z)) + \\ + \int_{S_2} \left( \int_0^\infty e^{\alpha s} F_z^{(2)}(ds) \right) \mathcal{P}(d(2, z)) \leq \\ \leq k_\Gamma \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}} \int_0^\infty \left( \alpha \int_0^\infty e^{\alpha s} \frac{1 - F^{(1)}(s+z)}{1 - F^{(1)}(z)} ds + 1 \right) \times \\ \times \frac{1 - F^{(1)}(z)}{T_1} dz + \\ + (1 - k_\Gamma) \int_0^\infty \left( \alpha \int_0^\infty e^{\alpha s} \frac{1 - F^{(2)}(s+z)}{1 - F^{(2)}(z)} ds + 1 \right) \frac{1 - F^{(2)}(z)}{T_2} dz \leq \\ \leq \frac{\alpha \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}}}{T_1 + T_2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\alpha s} C e^{-c(s+z)} ds dz + \\ + \frac{\alpha}{T_1 + T_2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\alpha s} (1 - F^{(2)}(s+z)) ds dz + \\ + k_\Gamma \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}} + (1 - k_\Gamma) \leq$$

$$\leq \frac{1}{T_1 + T_2} \left( \frac{\alpha C \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}}}{(c - \alpha)c} + \alpha \widehat{M}_\alpha^{(2)} + T_1 \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}} + T_2 \right) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{M}_\alpha.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} K(\alpha, Z'_0, Z''_0) \mathcal{P}(dZ''_0) &= \\ &= \mathfrak{K}(\alpha, Z'_0) \leq \frac{C e^{\alpha R^*} M_\alpha(Z'_0) \overline{M}_\alpha}{(c - \alpha) (1 - \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(1)}} \mathbf{E} e^{\alpha \xi^{(2)}} q)}, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство теоремы 1. ■

**Замечание 9.** Вообще говоря, условия теоремы 1 не позволяют оценить сверху величину  $\Theta$ . Если при исследовании конкретной технической системы такой оценки нет, то величину  $\Theta$  можно заменить величиной  $\Theta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{E} (\xi^{(1)} + \xi^{(2)})^2}{2(T_1 + T_2)}$ . Доказательство теоремы в этом случае меняется в части разделов 6.3.3–6.3.5: случай 6.3.3 вообще не учитывается, а вместо сл.в.  $\zeta_{\mathcal{F}_k}^*$  – остаточного времени пребывания процесса  $Z''_t$  в множестве  $\mathcal{S}_2$  – рассматривается сл.в.  $\zeta_{\mathcal{F}_k}^*$  – остаточное время периода регенерации процесса  $Z''_t$  – см. (11). В остальном доказательство не меняется. ▷

### Литература

1. БОРОВКОВ А.А. *Вероятностные процессы в теории массового обслуживания*. – М.: Наука, Гл. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1972. – 368 с.
2. ГНЕДЕНКО Б.В., БЕЛЯЕВ Ю.К., СОЛОВЬЕВ А.Д. *Математические методы в теории надежности*. – М.: Наука, 1965; также изд. 2, испр. и доп. – М.: URSS, 2013.
3. ГНЕДЕНКО Б.В., КОВАЛЕНКО И.Н. *Введение в теорию массового обслуживания*. – М.: Наука, 1966.
4. КЛИМОВ Г.П. *Теория вероятностей и математическая статистика*. – М.: Изд-во МГУ, 1983.

5. КОКС Д.Р., СМИТ В.Л. *Теория восстановления*. – М.: Сов. радио, 1967.
6. DAVIS M.H.A. *Piecewise-deterministic Markov processes: a general class of nondiffusion stochastic models* // J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. – 1984. – Vol. 46, No. 3. – P. 353–388. – MR MR790622 (87g:60062).
7. GRIFFEATH D. *A maximal coupling for Markov chains* // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete. – 1975. – Vol. 31, – Iss. 2. – P. 95–106.
8. LINDVALL T. *Lectures on the Coupling Method*. – Wiley, New York, 1992.
9. LORDEN G. *On Excess over the Boundary* // The Annals of Mathematical Statistics. – 1970. – Vol. 41, No. 2. – P. 520–527. – DOI: 10.1214/aoms/1177697092.
10. THORISSON H. *Coupling, Stationarity, and Regeneration*. – Springer, 2000.
11. VERETENNIKOV A.YU., BUTKOVSKY, O.A. *On asymptotics for Vaserstein coupling of Markov chains* // Stochastic Processes and their Applications. – 2013. – Vol. 123(9). P. 3518–3541.
12. VERETENNIKOV A. *Coupling method for Markov chains under integral Doeblin type condition* // Theory Stoch. Process. – 2002. – Vol. 8(24), No. 3–4. – P. 383–390.

## **ON EXPONENTIAL CONVERGENCE OF AVAILABILITY FACTOR**

**Galina Zverkina**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., senior researcher; Russian University of transport (MIIT), Moscow, associate professor (zverkina@gmail.com).

*Abstract: The availability factor is the probability that the system is working properly at a given moment of time. It's estimation and calculation are one the most important tasks in a reliability theory. The calculating of the stationary value of the availability factor is not difficult for the most cases. However, in real applications it is necessary to know how soon the value of the availability factor becomes sufficiently close to its limiting value, i.e. it is important to know the rate of convergence of the availability factor to its stationary value. In cases where the distributions function of the operating and recovery times are exponential, the question of the rate of convergence of the availability factor is the question of the rate of convergence of the solution of the Kolmogorov-Chapman equations with constant coefficients. This problem is solvable by means of Laplace transform. The most processes describing the behavior of reliability systems are regenerative, and for them the type of rate of convergence of the distribution to a stationary one is known - exponential or polynomial. The strong upper bounds of the rate of the convergence for regenerative processes can be obtained using the Lorden's inequality, when the distribution of the length of a regeneration period is known. But for reliability systems, it is possible to take into account the specific features of the investigated regeneration period. This article shows a method for constructing a strong exponential bounds for convergence rate of the availability factor for one restorable element.*

Keywords: availability factor, restorable element, bounds for convergence rate, exponential convergence.

УДК 519.2

ББК 22.171

DOI: 10.25728/ubs.2021.90.1

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии В.М. Вишневым.*

*Поступила в редакцию 30.01.2021.*

*Дата опубликования 31.03.2021.*