ОБ ОЦЕНКАХ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ОДНОРОДНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ[1]

Щеголев А. А.[2]

(*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва*)

Рассмотрена улучшенная оценка скорости сходимости однородных нелинейных марковских цепей в дискретном времени. Данный класс процессов нелинеен в терминах закона распределения, т.е. помимо зависимости от текущего состояния процесса переходные ядра также зависят и от вероятностного распределения в этот момент. Чаще всего такие процессы выступают в качестве предельных для больших систем зависимых цепей Маркова со взаимодействием. Полученная в работе оценка обобщает существующие результаты о сходимости с использованием переходных вероятностей за два шага. В частности показано, что данный подход не нарушает существования и единственности инвариантной меры при наложении условий, аналогичных использовавшимся при построении оценки за один шаг. На примере нескольких нелинейных марковских цепей показано, что полученная оценка обладает более высокой скоростью сходимости, а также может быть использована в случаях, когда оценка за один шаг неприменима. Помимо этого, приведённые примеры иллюстрируют тот факт, что невыполнение условий сходимости для оценки за один шаг не препятствует сходимости некоторых однородных нелинейных цепей Маркова в дискретном времени.

Ключевые слова: нелинейные марковские цепи, эргодичность, скорость сходимости.

1. Введение

Эргодические свойства классических цепей Маркова изучались в работах многих авторов, среди которых можно упомянуть А.А. Маркова, А.Н. Колмогорова, В. Дёблина, Дж.Л. Дуба, Р.Л. Добрушина. Существует несколько расширений теории марковских процессов, связанных с зависимостью процесса от его распределения. Так, в работе О. Оническу и Г. Михок [7]

---

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №20-01-00575.*

[2] *Александр Алексеевич Щеголев, аспирант НИУ ВШЭ* (*ashchegolev@hse.ru*).

были предложены «цепи с полными связями» – процессы, зависящие от условного распределения на предыдущем шаге. Эргодические свойства данных процессов изучены школой румынских математиков, основные результаты которой изложены в монографии М. Иосифеску и С. Григореску [3]. Данное обобщение также известно и изучается в области символической динамики под названием g-мер [4]. Другое расширение связано с классом процессов, представленных Г.П. Маккином [6] в 1966 году. Данный тип процессов также изучался в работах ряда авторов, среди которых можно выделить монографии А.С. Шнитмана [8] и В.Н. Колокольцова [5]. Для рассматриваемого нами случая данное расширение получило название нелинейных марковских цепей. Здесь под нелинейностью подразумевается зависимость переходных функций процесса от его состояния и закона распределения в текущий момент. В отличие от «цепей с полными связями» [7], для данных процессов предполагается зависимость процесса от безусловного распределения процесса. Результаты исследования эргодических свойств однородных нелинейных цепей Маркова в дискретном времени были получены О.А. Бутковским [1]. В частности, было показано, что в нелинейном случае теории обычных цепей Маркова недостаточно, а также было установлено дополнительное условие для их сходимости. Такие процессы интересны тем, что чаще всего они выступают в качестве предельных для больших систем зависимых цепей Маркова со взаимодействием.

В данной работе сделано некоторое обобщение существующих результатов о сходимости для однородных нелинейных цепей Маркова с дискретным временем [1], используя оценку за несколько шагов. В первой части получено обобщение оценки эргодической сходимости, зависящей от переходных вероятностей за два шага. Во второй части представлены примеры однородных нелинейных цепей Маркова, для которых выполнены условия сходимости для нового результата, в то время как существующий результат за один шаг либо неприменим, либо приводит к более медленной сходимости.

2. Постановка задачи и основной результат

Условия сходимости и равномерной эргодичности для дискретных неприводимых апериодических однородных цепей Маркова с конечным пространством состояний показаны в различных классических источниках, и схожие результаты также существуют для более общих цепей Маркова (например, [9]).

Пусть задано измеримое пространство $(E, \mathcal{E})$, и $\mathcal{P}(E)$ – множество вероятностных мер, определённых на этом пространстве. Тогда процесс $(X_n^\mu)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – нелинейная цепь Маркова с пространством состояний $(E, \mathcal{E})$, начальным распределением $\mu = \mathrm{Law}\,(X_0^\mu)$, $\mu \in \mathcal{P}(E)$, и переходными вероятностями $P_{\mu_n}(x, B) = \mathbb{P}_{\mu_n}\left(X_{n+1}^\mu \in B | X_n^\mu = x\right)$, где $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\mu_n := \mathrm{Law}(X_n^\mu)$. Таким образом, переходное ядро зависит не только от состояния процесса в момент n, но и от его распределения в этот момент.

Пусть $\mu, \nu \in \mathcal{P}(E)$, тогда расстояние в метрике полной вариации между двумя вероятностными мерами может быть задано следующим образом:

$$\|\mu - \nu\|_{TV} = 2 \sup_{A\in\mathcal{E}} |\mu(A) - \nu(A)| = \int_E |\mu(dx) - \nu(dx)|.$$

Согласно результатам [1], нелинейная цепь Маркова является равномерно эргодическим процессом и существование единственной инвариантной меры π гарантировано, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\sup_{\mu,\nu\in\mathcal{P}(E)} \|P_\mu(x, \cdot) - P_\nu(y, \cdot)\|_{TV} \leqslant 2(1 - \alpha), \tag{1}$$

где $0 < \alpha < 1, \quad x, y \in E$;

$$\|P_\mu(x, \cdot) - P_\nu(x, \cdot)\|_{TV} \leqslant \lambda \|\mu - \nu\|_{TV}, \tag{2}$$

где $\lambda \in [0, \alpha], \quad x \in E, \quad \mu, \nu \in \mathcal{P}(E)$.

Тогда сходимость является экспоненциальной, если $\lambda < \alpha$ и

$$\|\mu_n - \pi\|_{TV} \leqslant 2(1 - (\alpha - \lambda))^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

и в случае $\lambda = \alpha$ имеем линейную сходимость

$$\|\mu_n - \pi\|_{TV} \leqslant \frac{2}{\lambda n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

а для случая $\lambda > \alpha$ в работе [1] были приведены контрпримеры, демонстрирующие как полное отсутствие, так и наличие нескольких инвариантных мер.

Цель данной работы заключается в том, чтобы показать, что эти контрпримеры относятся к определённому ограниченному классу нелинейных цепей, и для других нелинейных цепей Маркова условие $\lambda > \alpha$ не препятствует экспоненциальной сходимости.

Обобщим результат [1] с использованием переходных ядер за два шага.

Теорема 1 Существование и единственность инвариантной меры. *Пусть процесс X имеет матрицу переходных вероятностей за два шага $Q_\mu(x, A) := P_\mu(X_2 \in A | X_0 = x)$ и удовлетворяет следующим условиям:*

$$\sup_{\mu,\nu \in \mathcal{P}(E)} \|Q_\mu(x,\cdot) - Q_\nu(y,\cdot)\|_{TV} \leqslant 2(1-\alpha_2), \tag{3}$$

где $0 < \alpha_2 < 1, \quad x, y \in E$,

$$\|Q_\mu(x,\cdot) - Q_\nu(x,\cdot)\|_{TV} \leqslant \lambda_2 \|\mu - \nu\|_{TV}, \tag{4}$$

где $\lambda_2 \in [0, \alpha_2], \quad x \in E, \quad \mu, \nu \in \mathcal{P}(E)$,

$$\|P_\mu(x,\cdot) - P_\nu(x,\cdot)\|_{TV} \leqslant \lambda_1 \|\mu - \nu\|_{TV}, \ \lambda_1 < \infty. \tag{5}$$

Тогда процесс X имеет единственную инвариантную меру π и для любой вероятностной меры $\mu \in \mathcal{P}(E)$ справедлива сходимость:

$$\begin{aligned} \|\mu_n - \pi\|_{TV} &\leqslant \\ &\leqslant \|\mu_0 - \pi\|_{TV}(1-\alpha_2+\lambda_2)^{[n/2]}((1+\lambda_1)\mathbf{1}(n\,\textit{нечётное}) \vee 1), \end{aligned} \tag{6}$$

и в случае $\lambda_2 = \alpha_2$

$$\|\mu_n - \pi\|_{TV} \leqslant \frac{\|\mu_0 - \pi\|_{TV}}{1 + \frac{\lambda_2 n}{2}\|\mu_0 - \pi\|_{TV}}((1+\lambda_1)\mathbf{1}(n\,\textit{нечётное}) \vee 1). \tag{7}$$

Для доказательства данной теоремы потребуется вспомогательная теорема о сближении любых двух начальных вероятностных мер для данного процесса.

Теорема 2. *Пусть процесс X имеет матрицу переходных вероятностей за два шага $Q_\mu(x, B)$ и удовлетворяет условиям* (3) *и* (4) *теоремы 1. Тогда для любой пары вероятностных мер $\mu, \nu \in \mathcal{P}(E)$ справедлива сходимость:*

$$\begin{aligned}(8)\qquad &\|\mu_n - \nu_n\|_{TV} \leqslant \\ &\leqslant \|\mu_0 - \nu_0\|_{TV}(1 - \alpha_2 + \lambda_2)^{[n/2]}((1+\lambda_1)\mathbf{1}(n\,\textit{нечётное}) \vee 1),\end{aligned}$$

и в случае $\lambda_2 = \alpha_2$

(9)

$$\|\mu_n - \nu_n\|_{TV} \leqslant \frac{\|\mu_0 - \nu_0\|_{TV}}{1 + \frac{\lambda_2 n}{2}\|\mu_0 - \nu_0\|_{TV}}((1+\lambda_1)\mathbf{1}(n\,\textit{нечётное}) \vee 1).$$

Доказательства данных теорем аналогичны [1] с использованием переходного ядра за два шага. Полное доказательство приведено с целью исправить вычислительные неточности доказательства [1], которые, однако, не влияли на конечный результат.

Докажем теорему 2.

Доказательство. Пусть даны $P : E \times \mathcal{E} \to [0, 1]$ – переходное ядро, измеримая функция $\varphi : E \to \mathbb{R}$ и вероятностная мера $\mu \in \mathcal{P}(E)$; обозначим $\mu P := \int_E P(x, dt)\mu(dx)$; в случае, когда P зависит от меры μ, имеем: $\mu_1(\mu) := \mu P_\mu := \int_E P_\mu(x, dt)\mu(dx)$, тогда переходное ядро за два шага

$$Q_\mu(x, dy) = \int P_\mu(x, dx_1)P_{\mu_1(\mu)}(x_1, dy).$$

Рассмотрим расстояние в метрике полной вариации между мерами после применения переходного ядра за два шага. Для любых вероятностных мер $\mu, \nu \in \mathcal{P}(E)$ обозначим

$$d\eta = ((d\mu/d\nu) \wedge 1)d\nu$$

и применим неравенство треугольника, в результате получаем

$$\|\mu Q_\mu - \nu Q_\nu\|_{TV} = \|(\eta + (\mu - \eta))Q_\mu - (\eta - (\nu - \eta))Q_\nu\|_{TV} =$$

$$= \int_E |\eta Q_\mu(dx) + (\mu - \eta)Q_\mu(dx) - \eta Q_\nu(dx) - (\nu - \eta)Q_\nu(dx)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_E |\eta Q_\mu(dx) - \eta Q_\nu(dx)| + \int_E |(\mu - \eta)Q_\mu(dx) - (\nu - \eta)Q_\nu(dx)| \leqslant$$

$$\leqslant \|\eta Q_\mu - \eta Q_\nu\|_{TV} + \|(\mu - \eta)Q_\mu - (\nu - \eta)Q_\nu\|_{TV}.$$

Рассмотрим первое слагаемое, применяя к нему неравенство Йенсена и (4), а также используя следующий факт: $\eta(E) = 1 - \|\mu - \nu\|_{TV}/2$. Получим

$$\|\eta Q_\mu - \eta Q_\nu\|_{TV} = \int_E \left| \int_E Q_\mu(x, dy)\eta(dx) - \int_E Q_\nu(x, dy)\eta(dx) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_E \int_E |Q_\mu(x, dy) - Q_\nu(x, dy)|\eta(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_2 \|\mu - \nu\|_{TV} \left(1 - \frac{1}{2}\|\mu - \nu\|_{TV}\right).$$

Тогда второе слагаемое

$$\|(\mu - \eta)Q_\mu - (\nu - \eta)Q_\nu\|_{TV} = \int_E |(\mu - \eta)Q_\mu(dx) - (\nu - \eta)Q_\nu(dx)| =$$

$$= \int_E \left| \int_E Q_\mu(x, dy)(\mu - \eta)(dx) - \int_E Q_\nu(x', dy)(\nu - \eta)(dx') \right|.$$

Напомним, что $\mu_n = \mathrm{Law}(X_n^\mu)$, $\nu_n = \mathrm{Law}(X_n^\nu)$, обозначим $p_0 = \|\mu_0 - \nu_0\|_{TV}/2$, предполагая $p_0 > 0$ (если $p_0 = 0$, тогда $p_2 = 0$ и т.д.).

Оценим выражение $\|\mu_2 - \nu_2\|_{TV}$ сверху.

$$\|\mu_2 - \nu_2\|_{TV} \leqslant \lambda_2 \|\mu_0 - \nu_0\|_{TV} \left(1 - \frac{1}{2}\|\mu_0 - \nu_0\|_{TV}\right) +$$

$$+ p_0 \int \left| \int Q_\mu(x, dy) \frac{(\mu_0 - \eta_0)(dx)}{p_0} - \int Q_\nu(x', dy) \frac{(\nu_0 - \eta_0)(dx')}{p_0} \right| =$$

$$= 2p_0\lambda_2(1 - p_0) + p_0 \int \left| \iint (Q_\mu(x, dy) - Q_\nu(x', dy)) \frac{(\mu_0 - \eta_0)(dx)}{p_0} \frac{(\nu_0 - \eta_0)(dx')}{p_0} \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2p_0\lambda_2(1-p_0) + p_0 \iiint \left|Q_\mu(x,dy) - Q_\nu(x',dy)\right| \frac{(\mu_0-\eta_0)(dx)}{p_0} \frac{(\nu_0-\eta_0)(dx')}{p_0} \leqslant$$
$$\leqslant 2p_0\lambda_2(1-p_0) + 2(1-\alpha_2)p_0 \iint \frac{(\mu_0-\eta_0)(dx)}{p_0} \frac{(\nu_0-\eta_0)(dx')}{p_0} =$$
$$= 2p_0\lambda_2(1-p_0) + 2p_0(1-\alpha_2) = 2p_0(\lambda_2 - \lambda_2 p_0 + 1 - \alpha_2).$$

Если $\lambda_2 < \alpha_2$, получаем

$$\|\mu_2 - \nu_2\|_{TV} \leqslant \|\mu_0 - \nu_0\|_{TV}(1 - \alpha_2 + \lambda_2),$$

в то время как в случае $\lambda_2 = \alpha_2$ имеем

$$\|\mu_2 - \nu_2\|_{TV} \leqslant 2p_0(1 - \lambda_2 p_0),$$

или

$$p_2 \leqslant p_0(1 - \lambda_2 p_0).$$

Для случая $2n+1$ имеем:

$$\|\mu_{2n+1} - \nu_{2n+1}\|_{TV} \leqslant \lambda_1 \|\mu_{2n} - \nu_{2n}\|_{TV} \left(1 - \frac{1}{2}\|\mu_{2n} - \nu_{2n}\|_{TV}\right) +$$
$$+ p_{2n} \int \left| \int P_\mu(x,dy) \frac{(\mu_{2n}-\eta_{2n})(dx)}{p_{2n}} - \int P_\nu(x',dy) \frac{(\nu_{2n}-\eta_{2n})(dx')}{p_{2n}} \right| =$$
$$= 2p_{2n}\lambda_1(1-p_{2n}) + p_{2n} \int \left| \iint (P_\mu(x,dy) - P_\nu(x',dy)) \frac{(\mu_{2n}-\eta_{2n})(dx)}{p_{2n}} \frac{(\nu_{2n}-\eta_{2n})(dx')}{p_{2n}} \right| \leqslant$$
$$\leqslant 2p_{2n}\lambda_1(1-p_{2n}) + p_{2n} \iiint \left|P_\mu(x,dy) - P_\nu(x',dy)\right| \frac{(\mu_{2n}-\eta_{2n})(dx)}{p_{2n}} \frac{(\nu_{2n}-\eta_{2n})(dx')}{p_{2n}} \leqslant$$
$$\leqslant 2p_{2n}(\lambda_1(1-p_{2n}) + 1) = (1+\lambda_1)\|\mu_{2n} - \nu_{2n}\|_{TV}.$$

Следовательно,

$$\|\mu_{2n+1} - \nu_{2n+1}\|_{TV} \leqslant (1+\lambda_1)\|\mu_{2n} - \nu_{2n}\|_{TV}. \tag{10}$$

Таким образом, итерируя оценку для $\lambda_2 < \alpha_2$, получаем по индукции

$$\|\mu_n - \nu_n\|_{TV} \leqslant \|\mu_0 - \nu_0\|_{TV}(1 - \alpha_2 + \lambda_2)^{[n/2]}((1+\lambda_1)\mathbf{1}(n\,\text{нечётное}) \vee 1).$$

В случае $\alpha_2 = \lambda_2$ применим следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть* $a_0, a_1, \ldots$ *– некоторая последовательность положительных чисел. Предположим, что* $0 < a_0 \leqslant 1$ *и справедлива оценка*

$$a_{n+1} \leqslant a_n(1 - \psi(a_n)), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\psi : [0,\infty) \to [0,1]$ *– непрерывная неубывающая функция с* $\psi(0) = 0$ *и* $\psi(x) > 0$ *при* $x > 0$. *Тогда*

$$a_n \leqslant g^{-1}(n)$$

для всех $n \in \mathbb{Z}_+$, *где*

$$g(x) = \int_x^{a_0} \frac{dt}{t\psi(t)}, \quad 0 < x \leqslant 1.$$

Данная лемма в несколько ином варианте и ее доказательство приведены в [2]. Поскольку здесь используется слегка измененный вариант с другим верхним пределом в интеграле, доказательство приводится ради удобства читателя, несмотря на то, что оно совпадает с первоисточником.

Доказательство. Заметим, что функция g^{-1} существует, поскольку g неограничена, неотрицательна и строго убывает. Тогда из неотрицательности ψ следует, что $a_{n+1} \leqslant a_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда найдется $s \in [a_{n+1}, a_n]$ такое, что

$$g(a_{n+1}) - g(a_n) = g'(s)(a_{n+1} - a_n) = -\frac{a_{n+1} - a_n}{s\psi(s)} \geqslant \frac{a_n\psi(a_n)}{s\psi(s)} \geqslant 1.$$

Таким образом, $g(a_n) \geqslant n$ и $a_n \leqslant g^{-1}(n)$.

Применяя лемму 1 для a_{n+2} и $\psi(t) = \lambda_2 t$ получаем

$$p_2 \leqslant g^{-1}(n) = \frac{1}{\lambda_2 n + \frac{1}{p_0}} = \frac{p_0}{1 + p_0\lambda_2 n}.$$

Обобщая результат для нечётных n, используя (10), имеем:

$$\|\mu_n - \nu_n\|_{TV} \leqslant \frac{\|\mu_0 - \nu_0\|_{TV}}{1 + \frac{\lambda_2 n}{2}\|\mu_0 - \nu_0\|_{TV}}((1 + \lambda_1)\mathbf{1}(n \,\text{нечётное}) \vee 1).$$

Далее перейдём к доказательству теоремы 1.

Доказательство. Рассмотрим последовательность вероятностных мер $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Согласно теореме 2, в силу (8) и (9), для любых $m, n \in \mathbb{N}$

$$\|\mu_n - \mu_{n+m}\|_{TV} \leqslant \frac{\|\mu_0 - \mu_m\|_{TV}}{1 + \frac{\lambda_2 n}{2}\|\mu_0 - \mu_m\|_{TV}}((1+\lambda_1)\mathbf{1}(n \,\text{нечётное}) \vee 1).$$

Тогда $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ является последовательностью Коши в полном метрическом пространстве $(\mathcal{P}(E), \|\cdot\|_{TV})$ и можно найти $\pi \in \mathcal{P}(E)$, такое что $\lim_{n\to\infty} \|\mu_n - \pi\|_{TV} = 0$.

Покажем, что предельная мера π инвариантна. Для этого используем неравенство треугольника и условие (10) при $n \to \infty$:

$$\|\pi P_\pi - \mu_{n+1}\|_{TV} = \|\pi P_\pi - \mu_n P_{\mu_n}\|_{TV} \leqslant (1+\lambda_1)\|\pi - \mu_n\|_{TV} \to 0,$$

тогда как $\mu_{n+1} \to \pi$, имеем

$$\|\pi P_\pi - \pi\|_{TV} \leqslant \|\pi P_\pi - \mu_{n+1}\|_{TV} + \|\mu_{n+1} - \pi\|_{TV} \to 0.$$

Откуда получаем $\pi = \pi P_\pi$.

Для доказательства единственности инвариантной меры π предположим, что $\nu \in \mathcal{P}(E)$ такая, что $\nu \neq \pi$ и $\nu = \nu P_\nu$, тогда итеративно применяя результаты (8) и (9) получаем противоречие

$$\|\nu - \pi\|_{TV} = \|\nu Q_\nu - \pi Q_\pi\|_{TV} < \|\nu - \pi\|_{TV}.$$

Таким образом, процесс $(X_n^\mu)_{n\in\mathbb{Z}}$ имеет единственную инвариантную меру π.

В разделе 3 мы проиллюстрируем, что данная оценка может быть лучше, чем оценка для одношагового перехода.

3. Примеры

3.1. ПРИМЕР НЕЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА, $\alpha > 0, \lambda > \alpha$

Рассмотрим однородную нелинейную цепь Маркова в дискретном времени X_n^μ с пространством состояний $(E, \mathcal{E}) = \big(\{1,2,3,4\}, 2^{\{1,2,3,4\}}\big)$, начальным распределением μ_0 и матрицей переходных вероятностей $P_{\mu_0}(i,j)$, заданной следующим образом:

$$\mu_0 = \big(\mu(\{1\}) \quad \mu(\{2\}) \quad \mu(\{3\}) \quad \mu(\{4\})\big)$$

$$P_{\mu_0}(i,j) = \begin{pmatrix} 0{,}001 + \gamma\mu(\{1\}) & 0{,}001 + \gamma\mu(\{1\}) & 0{,}499 - \gamma\mu(\{1\}) & 0{,}499 - \gamma\mu(\{1\}) \\ 0{,}499 & 0{,}499 & 0{,}001 & 0{,}001 \\ 0{,}499 & 0{,}001 & 0{,}499 & 0{,}001 \\ 0{,}001 & 0{,}499 & 0{,}001 & 0{,}499 \end{pmatrix},$$

где $0 < \gamma < 0{,}25$.

Можем заметить, что для заданного процесса условия (1) и (2) гарантируют сходимость к инвариантной мере только в случае $\gamma \leqslant 0{,}004$, поскольку $\alpha = 0{,}004$ и $\lambda = \gamma$.

Оценим соответствующую матрицу переходных вероятностей за два шага $P_{\mu_2}(i,j)$. Обозначим в элементах матрицы $\mu_i = \mu(\{i\})$ для краткости, а также $\xi(\mu,\gamma) = (\mu_1(\gamma\mu_1+$

$+0{,}001) + 0{,}499\mu_2 + 0{,}499\mu_3 + 0{,}001\mu_4)$ и $\zeta(\mu,\gamma,x) = (\gamma\mu_1 + +0{,}001)\,(\gamma\xi(\mu,\gamma) + x)$ и $\delta(\gamma,\mu,x,y) = y\gamma\mu_1 + \zeta(\gamma,\mu,x)$, тогда переходное ядро за два шага имеет вид

$$P_{\mu_2}(i,j) = \begin{pmatrix} \delta(\gamma,\mu,0{,}001,-0{,}001) + 0{,}249999 & \delta(\gamma,\mu,0{,}001,-0{,}001) + 0{,}249999 & \ldots \\ 0{,}499\gamma\xi(\mu,\gamma) + 0{,}25 & 0{,}499\gamma\xi(\mu,\gamma) + 0{,}25 & \ldots \\ 0{,}499\gamma\xi(\mu,\gamma) + 0{,}25 & 0{,}499\gamma\xi(\mu,\gamma) + 0{,}001996 & \ldots \\ 0{,}001\gamma\xi(\mu,\gamma) + 0{,}25 & 0{,}001\gamma\xi(\mu,\gamma) + 0{,}498004 & \ldots \end{pmatrix.}$$

$$\begin{pmatrix.} \ldots & \delta(\gamma,\mu,-0{,}499,-0{,}499) + 0{,}249501 & \delta(\gamma,\mu,-0{,}499,-0{,}499) + 0{,}249501 \\ \ldots & -0{,}499\gamma\xi(\mu,\gamma) + 0{,}25 & -0{,}499\gamma\xi(\mu,\gamma) + 0{,}25 \\ \ldots & -0{,}499\gamma\xi(\mu,\gamma) + 0{,}498004 & -0{,}499\gamma\xi(\mu,\gamma) + 0{,}25 \\ \ldots & -0{,}001\gamma\xi(\mu,\gamma) + 0{,}001996 & -0{,}001\gamma\xi(\mu,\gamma) + 0{,}25 \end{pmatrix}$$

В этом случае $\alpha_2 = 0{,}503992$, а $\lambda_2 \leqslant \gamma$. Потому имеем $\lambda_2 < \alpha_2$, что приводит к экспоненциальной сходимости процесса.

3.2. ПРИМЕР НЕЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА, $\alpha = 0, \lambda > \alpha$

Покажем, что данный результат может быть использован в случаях, когда оценка за один шаг неприменима, и, в то же время, невыполнение условий [1] не препятствует экспоненциальной сходимости для некоторых нелинейных марковских цепей. Рассмотрим следующую дискретную нелинейную Марковскую цепь X_n^μ с пространством состояний $(E,\mathcal{E}) = \big(\{1,2,3,4\}, 2^{\{1,2,3,4\}}\big)$, начальным распределением μ_0 и матрицей переходных вероятностей $P_{\mu_0}(i,j)$, заданной следующим образом:

$$\mu_0 = \begin{pmatrix} \mu(\{1\}) & \mu(\{2\}) & \mu(\{3\}) & \mu(\{4\}) \end{pmatrix},$$

$$P_{\mu_0}(i,j) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma\mu(\{1\}) & 0{,}5 - \gamma\mu(\{1\}) & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix},$$

где $0 < \gamma < 0{,}5$.

Можем заметить, что для заданного процесса условия (1) и (2) не гарантируют сходимости к инвариантной мере, так как $\lambda > \alpha$, поскольку $\alpha = 0$ и $\lambda = \gamma$.

Однако, если рассмотреть соответствующую матрицу переходных вероятностей за два шага $Q_{\mu_0}(i,j)$,

$$Q_{\mu_0}(i,j) =$$
$$\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}5\gamma\mu_1 + 0{,}25 & -0{,}5\gamma\mu_1 + 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25\gamma\,(\mu_2 + \mu_3) + 0{,}25 & -0{,}25\gamma\,(\mu_2 + \mu_3) + 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25\gamma\,(\mu_2 + \mu_3) & -0{,}25\gamma\,(\mu_2 + \mu_3) + 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0 & 0{,}25 \end{pmatrix},$$

можно получить иной результат. Имеем $\lambda_2 < \alpha_2$, поскольку $\lambda_2 = \gamma/2$, в то время как α_2 достигает минимального значения для пары состояний $\{3, 4\}$ со значением в интервале $[0{,}5; 0{,}5 + 0{,}25\gamma]$. Таким образом, предлагаемая оценка может гарантировать экспоненциальную сходимость в некоторых случаях, когда существующий результат [1] не работает.

4. Заключение

В статье предложена улучшенная оценка скорости сходимости однородных нелинейных цепей Маркова с дискретным временем путём обобщения существующих результатов о сходимости и получения оценки за несколько шагов. Эта оценка приводит к лучшей сходимости и даже может быть применима в случаях, когда оценка, сделанная за один шаг, не может гарантировать сходимости. В последнем разделе работы приводится пример однородной нелинейной цепи Маркова с конечным пространством состояний и дискретным временем, которая иллюстрирует этот результат. Кроме того, этот пример показывает, что невыполнение условий сходимости, предложенных в [1], не препятствует существованию единственной инвариантной меры и экспоненциальной сходимости для однородных нелинейных цепей Маркова в дискретном времени.

Литература

1. БУТКОВСКИЙ О.А. *Об эргодических свойствах нелинейных марковских цепей и стохастических уравнений Маккина–Власова* // Теория вероятностей и ее применения. – 2013. –Т. 58, №4. – С. 782–794.
2. БУТКОВСКИЙ О.А. *Предельные теоремы для марковских процессов* : Дис. – Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (МГУ). Механико-математический факультет, 2013.

3. IOSIFESCU M., GRIGORESCU S. *Dependence with complete connections and its applications* // Cambridge Tracts in Mathematics. – Cambridge University Press, Cambridge, 1990. – Vol. 96.
4. KEANE M. *Strongly mixing g-measures* // Inventiones Mathematicae. – 1972. – Vol. 16, No. 4. – P. 309–324.
5. KOLOKOLTSOV V.N. *Nonlinear Markov processes and kinetic equations* // Cambridge Tracts in Mathematics. – Cambridge University Press, Cambridge, 2010. – Vol. 182.
6. MCKEAN H.P. *A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations* // Proc. of the National Academy of Sciences of the United States of America. – 1966. – Vol. 56. – P. 1907–1911.
7. ONICESCU O., MIHOC G. *Sur les chaînes de variables statistiques*. // Bull. Sci. Math. – 1935. – Vol. 59, No. 2. – P. 174–192.
8. SZNITMAN A.-S. *Topics in propagation of chaos* // École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX.—1989. – Lecture Notes in Math. – Springer, Berlin, 1991. – Vol. 1464. – P. 165–251.
9. VERETENNIKOV A.YU. *Ergodic Markov processes and Poisson equations (lecture notes)* // Modern problems of stochastic analysis and statistics. – 2017. – Vol. 208. – P. 457–511.

ON RATE OF CONVERGENCE ESTIMATES FOR HOMOGENEOUS DISCRETE-TIME NONLINEAR MARKOV CHAINS

Aleksandr Shchegolev, National Research University Higher School of Economics, Moscow, postgraduate student (ashchegolev@hse.ru).

Abstract: The paper studies an improved estimate for the rate of convergence for nonlinear homogeneous discrete-time Markov chains. These processes are nonlinear in terms of the distribution law. Hence, the transition kernels are dependent on the current probability distributions of the process apart from being dependent on the current state. Such processes often act as limits for large-scale systems of dependent Markov chains with interaction. The paper generalizes the convergence results by taking the estimate over two steps. Such an approach keeps the existence and uniqueness results under assumptions that are analogical to the one-step result. It is shown that such an approach may lead to a better rate of convergence. Several examples provided illustrating the fact that the suggested estimate may have a better rate of convergence than the original one. Also, it is shown that the new estimate may even be applicable in some cases when the conditions of the result on one step cannot guarantee any convergence. Finally, these examples depict that the original conditions may not be an obstacle for the convergence of nonlinear Markov chains.

Keywords: nonlinear Markov chains, ergodicity, rate of convergence.

УДК 519.2
ББК 22.171
DOI: 10.25728/ubs.2021.90.2

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Э.Ю. Калимулиной.

Поступила в редакцию 19.03.2021.
Дата опубликования 31.03.2021.