ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛНЫХ ОДНОРОДНЫХ РЕСУРСНЫХ СЕТЕЙ С «ЖАДНЫМИ» ВЕРШИНАМИ: ЗОНА «ДОСТАТОЧНОГО БОЛЬШОГО» РЕСУРСА

Чаплинская Н. В.[1]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

«Ресурсная сеть с жадными вершинами» – модификация графовой динамической модели «ресурсная сеть». На каждом такте дискретного времени вершины графа передают друг другу ресурс по ребрам с ограниченной пропускной способностью, причем сначала передают имеющийся ресурс себе в петлю, а затем оставшийся ресурс, если он имеется, распределяют по исходящим ребрам по правилам «стандартной» ресурсной сети. Это два правила с пороговым переключением: если вершина имеет ресурс, превышающий суммарную пропускную способность всех ее исходящих ребер, она передает в каждое исходящее ребро полную его пропускную способность, в противном случае отдает весь свой ресурс, распределяя его пропорционально пропускным способностям исходящих ребер. Рассмотрен частный случай: полная однородная ресурсная сеть с «жадными» вершинами. Для сети такого вида существуют два пороговых значения суммарного ресурса, разделяющих зоны различного поведения сети: первое разделяет зоны «недостаточного» и «достаточного» ресурса, второе – зоны «достаточного малого» и «достаточного большого» ресурса. В данной статье исследована последняя зона – зона «достаточного большого» ресурса: описан процесс функционирования сети, найдено предельное состояние сети.

Ключевые слова: графовая динамическая пороговая модель, ресурсная сеть, модель «жадных» вершин, зона «достаточного большого» ресурса.

1. Введение

Ресурсной сетью называют графовую динамическую потоковую модель замкнутой системы, в которой ресурс в дискретном времени перераспределяется между вершинами, не поступая извне и не расходуясь. Эта модель была предложена впервые в 2009 году в [13], а свое дальнейшее развитие получила в [10, 12]. Ресурсная сеть описывается ориентированным взвешенным графом. Веса ребер называются пропускными способностями. Модель характеризуется двумя правилами распределения

[1] *Надежда Васильевна Чаплинская, техник* (*nadya1462@gmail.com*).

ресурса между вершинами. Выбор правила определяется пороговым переключением, которое происходит в зависимости от количества ресурса в вершине и от пропускных способностей ребер, выходящих из этой вершины.

В [10] для данной модели были получены результаты, позволяющие для сети любой топологии с любым значением суммарного ресурса и любым его начальным распределением между вершинами определить предельный поток и предельное состояние сети. В [10] также была определена формула, позволяющая для такой произвольной сети найти пороговое значение суммарного ресурса, разделяющее зоны различного поведения сети.

При *малом ресурсе*, т.е. при суммарном ресурсе, не превосходящем порогового значения, динамика сети описывается моделью рассеяния на графах [15, 16]. Для графов, имеющих постоянную топологию, модели рассеяния, в свою очередь, описываются однородными цепями Маркова, которые широко используются при моделировании процессов из различных предметных областей, например, при решении задач о нахождении консенсуса в многоагентных системах [5, 6], решении задач о нахождении количественной оценки различных видов риска и их влияния на финансовое состояние предприятия [9], в социальных сетях [7] и т.д.

При *большом ресурсе*, т.е. при суммарном ресурсе выше порогового значения, динамика сети описывается неоднородной цепью Маркова. В [10] для случая большого ресурса были обнаружены вершины, накапливающие излишки ресурса, – вершины-аттракторы.

С момента появления ресурсной сети в 2009 году в [13], были рассмотрены некоторые модификации этой модели. Была представлена модель с ограничениями на ёмкость вершин (монография [12]). Были предложены и описаны ресурсные сети на графах с нестандартной достижимостью (см. [8]): в работе [1] – с вентильной достижимостью, в работе [2] – с магнитной достижимостью. В [3] были введены двухресурсные сети и рассмотрена топология полных однородных несимметричных двусторонних ресурсных сетей с петлями. В продолжение этой работы в [4] были рассмотрены двухресурсные сети с магнитной достижимостью. В [14] были описаны динамические ресурсные сети.

Настоящая статья является продолжением работы [11], в которой была рассмотрена еще одна модификация ресурсных сетей – ресурсная сеть с «жадными» вершинами. Отличие этой модели заключается в том, что каждая вершина передает ресурс сначала в свою петлю (если она есть) и только затем остатки распределяет в другие вершины. Рассматривается частный случай: полная однородная сеть с петлями. Для этого случая были найдены два пороговых значения суммарного ресурса, разделяющих зоны различного поведения сети: первое разделяет зоны «недостаточного» и «достаточного» ресурса, второе – зоны «достаточного малого» и «достаточного большого» ресурса. В [11] были исследованы зоны «недостаточного» и «достаточного малого» ресурса. В настоящей статье исследуется зона «достаточного большого» ресурса.

2. Ресурсные сети – основные понятия

Ресурсная сеть с «жадными» вершинами есть модификация обычной ресурсной сети, наследущая все ее базовые понятия. Приведем основные определения «стандартной» ресурсной сети, а также опишем процесс ее функционирования.

Ресурсная сеть – это связный ориентированный граф $G=(V,E)$ с вершинами $v_i \in V$, $|V| = n$, ребрам $e_{ij} = (v_i, v_j) \in E$ которого приписаны неотрицательные веса r_{ij}, обозначающие *пропускные способности* этих ребер. Матрицу $R = (r_{ij})_{n\times n}$ называют *матрицей пропускных способностей*.

Вершинам графа приписаны *ресурсы* $q_i(t)$ – неотрицательные числа, изменяющиеся в дискретном времени t. Каждая вершина может хранить неограниченное количество ресурса. Вектор $Q(t) = (q_1(t),\ ...,\ q_n(t))$, элементами которого являются значения ресурсов в вершинах в момент времени t, называется *состоянием* $Q(t)$ сети в момент времени t.

Состояние $Q^* = (q_1^*, ..., q_n^*)$ называется *предельным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует t_ε такое, что для всех $t > t_\varepsilon$ $|q_i^* - q_i(t)| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

В сети выполняется *закон сохранения ресурса*: $\forall t \sum\limits_{i=1}^{n} q_i(t) = W$, где W – это суммарный ресурс всех вершин сети.

$r_i^{in} = \sum\limits_{j=1}^{n} r_{ji}$ и $r_i^{out} = \sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}$ – входная и выходная пропускные способности вершины соответственно.

В каждый момент времени все вершины сети v_i, $i = 1, \ldots, n$, передают имеющийся в них ресурс по выходящим ребрам. Правила передачи ресурса в сети *стандартной модели* следующие: в момент t вершина v_i отдает в ребро e_{ij}, соединяющее ее с вершиной v_j

- r_{ij} единиц ресурса, если $q_i(t) > r_i^{out}$ (правило 1);
- $\frac{r_{ij}}{r_i^{out}} q_i(t)$ единиц ресурса, если $q_i(t) \leqslant r_i^{out}$ (правило 2).

Таким образом, правило 1 применяется тогда, когда вершина содержит ресурса больше, чем может отдать по исходящим ребрам. В этом случае по каждому ребру отдается ресурс, равный пропускной способности этого ребра. Всего вершина отдаст $r_i^{out} = \sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}$ ресурса. Если условие применения правила 1 не выполняется, т.е. если в вершине недостаточно ресурса для передачи полной пропускной способности по каждому ребру, то работает правило 2. В этом случае весь свой имеющийся ресурс вершина распределяет пропорционально пропускным способностям ребер. При $q_i(t) = r_i^{out}$ применение правил 1 и 2 дает одинаковые результаты.

Для каждого момента времени t множество вершин, функционирующих по правилу 1, будем называть *зоной* $Z^+(t)$, по правилу 2 – *зоной* $Z^-(t)$.

Вершины, имеющие ресурс, отдают его одновременно на каждом такте. Ресурс, выходящий из вершины v_i по ребру e_{ij} в момент t, приходит в вершину v_j в момент $t+1$. Между моментами t и $t+1$ ресурс находится в ребре e_{ij}. Этот ресурс называется *потоком* $f_{ij}(t)$. Величина $f_i^{out}(t) = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t)$ – ресурс, выходящий из вершины v_i в момент t. Величина $f_j^{in}(t+1) = \sum_{i=1}^{n} f_{ij}(t)$ – ресурс, входящий в вершину v_j в момент $t+1$.

Пороговое значение ресурса T – важная характеристика «стандартной» ресурсной сети. T разделяет зоны различного поведения сети: при $W \leqslant T$, начиная с некоторого момента времени t', все вершины переходят в зону $Z^-(t)$; при $W > T$, начиная с некоторого момента времени t'', зона $Z^+(t)$ не будет пуста и станет постоянной по мощности. В [10] доказано, что в любой сети, кроме поглощающей, пороговое значение ресурса T существует и единственно. В [10] также предложены формулы, которые позволяют определить значение T для любого класса сетей (кроме поглощающей).

3. Модель сети с «жадными» вершинами

3.1. ОПИСАНИЕ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Модель сети с «жадными» вершинами была предложена и формально описана в [11]. Напомним основные понятия и особенности поведения данной модели.

Рассматривается ресурсная сеть с наличием хотя бы одной петли. Ее функционирование определяется следующим образом:

Вершина v_i, имеющая петлю, на такте t отдает:

• r_{ii} ресурса в петлю, если $q_i(t) > r_{ii}$, и оставшийся ресурс $\Delta q_i(t) = q_i(t) - r_{ii}$ распределяет между другими вершинами по правилам стандартной ресурсной сети,

• $q_i(t)$ ресурса в петлю, если $q_i(t) \leqslant r_{ii}$ (весь имеющийся ресурс уходит в петлю).

Вершина, не имеющая петлю, отдает ресурс другим вершинам по правилам стандартной ресурсной сети.

Другими словами, все вершины с петлями являются «запасливыми» (или «жадными»): они передают имеющийся ресурс в первую очередь себе в петлю и уже затем распределяют остатки (если они есть) между другими вершинами.

Будем говорить, что сеть с «жадными» вершинами *остановилась* на такте t, если $\forall i = \overline{1,n}\ q_i(t) \leqslant r_{ii}$. Это означает, что если количество ресурса во всех вершинах не превосходит пропускных способностей петель, то ресурс не перераспределяется между вершинами. Остановка сети является частным случаем ее стабилизации.

Вершина v_i называется *насыщенной* в момент времени t, если $q_i(t) \geqslant r_{ii}$, и *ненасыщенной*, если $q_i(t) < r_{ii}$. В [11] доказано, что вершина, насыщенная в момент времени t, в момент времени $t+1$ также останется насыщенной.

Ограничение на топологию сетей: исследуются полные однородные ресурсные сети с «жадными» вершинами. Ресурсная сеть называется *полной*, если $r_{ij} \neq 0\ \forall i,j = \overline{1,n}$. *Однородность* сети означает, что $r_{ij} = r\ \forall i,j = \overline{1,n}$.

3.2. ПОРОГОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ РЕСУРСА

В [11] было показано, что для полных однородных ресурсных сетей с «жадными» вершинами существуют два пороговых значения суммарного ресурса $T_1 = rn$ и $T_2 = rn^2$, разделяющих зоны различного поведения сети (рис. 1). T_1 разделяет зоны «недостаточного» и «достаточного» ресурса. Зона «достаточного» ресурса в свою очередь делится порогом T_2 на зоны «достаточного малого» и «достаточного большого» ресурса.

Для зоны «недостаточного» ресурса было доказано, что сеть останавливается (за конечное число тактов или асимптотически, в зависимости от начального состояния сети).

В зоне «достаточного» ресурса сеть никогда не останавливается. При этом за конечное число тактов все вершины сети становятся насыщенными, и с момента их насыщения сеть функционирует эквивалентно стандартной полной однородной ресурсной сети без петель.

«Достаточный» ресурс, по аналогии со стандартной сетью, делится порогом $T_2 = rn^2$ на «малый» ($T_1 < W \leqslant T_2$) и «большой» ресурс ($W > T_2$). Для зоны «достаточного малого» ресурса была доказана стабилизация сети и найдено ее предельное состояние.

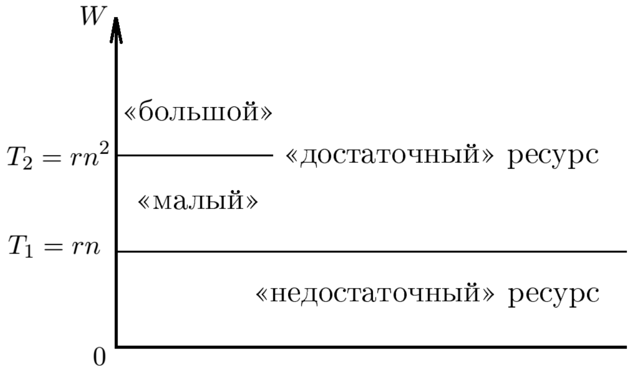

Рис. 1. Схема пороговых значений суммарного ресурса в сети с «жадными» вершинами

3.3. «ДОСТАТОЧНЫЙ БОЛЬШОЙ» РЕСУРС

Рассмотрим функционирование сети при $W > T_2 = rn^2$.

«Большой ресурс» означает, что при любом начальном состоянии $Q(0)$ в любой момент времени зона $Z^+(t)$ будет непуста.

***Утверждение* 1.** *При большом суммарном ресурсе* $W > T_2$ *ненасыщенные вершины насыщаются за 1 такт.*

Доказательство. В сети есть хотя бы одна вершина из зоны Z^+, а, значит, ненасыщенная вершина получит ресурса не меньше r. Таким образом, на такте $t + 1$ она будет иметь ресурс размером не меньше r, т.е. станет насыщенной.

Учитывая утверждение 1, далее будем рассматривать сеть с уже насыщенными вершинами.

Количество вершин из зоны $Z^+(t)$ обозначим k_t. Пусть на такте $t = 0$ вершины пронумерованы по убыванию имеющегося в них ресурса. То есть в зоне $Z^+(0)$ находятся вершины v_i, $i = \overline{1, k_0}$, в зоне $Z^-(0)$ – вершины $v_i,\ i = \overline{k_0 + 1, n}$:

$$q_1(0) \geqslant ... \geqslant q_{k_0}(0) > rn \geqslant q_{k_0+1}(0) \geqslant q_n(0).$$

Введем понятие *дефицита* зоны $Z^-(t)$: $D(t) = \sum\limits_{v_i \in Z^-(t)} (rn - q_i(t))$. То есть дефицит $D(t)$ – это ресурс, которого зоне $Z^-(t)$ не хватает до $rn(n-k_t)$.

Утверждение 2. *При большом суммарном ресурсе $W > T_2$ на любом такте t суммарные выходные (входные) потоки всех вершин из зоны $Z^+(t)$ совпадают.*

Доказательство. Вершина из зоны $Z^+(t)$ отдает полную пропускную способность r по всем ребрам. Тогда суммарный выходной поток каждой из таких вершин v_i равен

$$f_i^{out}(t) = rn.$$

Суммарный входной поток одной вершины v_i из зоны $Z^+(t)$ складывается из ресурса, отданного ей на такте t всеми вершинами из зоны Z^+, и всеми вершинами из зоны Z^-:

$$f_i^{in}(t+1) = rk_t + \sum_{j \in A_t} f_j^{out}(t).$$

То есть получаем не зависящие от i значения $f_i^{out}(t)$ и $f_i^{in}(t+1)$ для всех вершин v_i из зоны $Z^+(t)$.

Из доказательства следует, что ресурс в каждой вершине из зоны $Z^+(t)$ либо сохраняется, либо уменьшается на одну и ту же величину ($f_i^{in}(t+1) \leqslant f_i^{out}(t)$). При этом в начальный момент времени вершины были расположены в порядке убывания имеющегося в них ресурса, значит, переход в зону Z^- может осуществляться только начиная с наименее наполненной вершины – т.е. с v_{k_0}. Учитывая, что вершины, попавшие в зону Z^-, покинуть эту зону не могут, формулируем следующее следствие из утверждения 2.

Следствие 1. *На каждом такте вершины из зоны Z^+ теряют одинаковое количество ресурса, таким образом оставаясь упорядоченными по убыванию.*

В случае когда все вершины находятся в зоне $Z^+(t)$, т.е. $k_t = n$, формулы из доказательства утверждения 2 переписываются следующим образом:

$$\forall i = \overline{1,n} : f_i^{out}(t) = rn,\ f_i^{in}(t+1) = rn.$$

Получив, что суммарные входной и выходной потоки каждой вершины одинаковы и равны rn, формулируем второе следствие.

Следствие 2. *Если все вершины находятся в зоне $Z^+(t)$, то состояние $Q(t)$ устойчиво.*

Пусть мощность зоны $Z^+(t)$ постоянна, т.е. $\forall t\ k_t = k$. Такая ситуация имеет место при выполнении неравенства $q_k(0) - rn > \dfrac{D(0)}{k}$, иными словами, если «профицит» самой последней вершины v_k (вершины с наименьшим начальным ресурсом) из зоны $Z^+(0)$ больше $\dfrac{D(0)}{k}$. Действительно, суммарный ресурс, который отдадут вершины из зоны $Z^+(0)$, не может превышать $D(0)$, так как зона $Z^-(0)$ не может получить ресурса больше, чем $D(0)$.

Утверждение 3. *При большом суммарном ресурсе $W > T_2$, если выполняется неравенство $q_k(0) - \dfrac{D(0)}{k} > rn$, то предельное состояние сети имеет вид:*

$$Q^* = \left(q_1(0) - \frac{D(0)}{k},\ \ldots,\ q_k(0) - \frac{D(0)}{k},\ rn,\ \ldots,\ rn\right).$$

Доказательство см. в приложении.

Рассмотрим теперь общий случай: k_t непостоянно. Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что вершины из зоны Z^+, начиная с наименее наполненной v_{k_0}, могут перейти в зону Z^-. Таким образом, мощность зоны Z^+ невозрастает с течением времени.

Случай постоянной мощности рассмотрен в утверждении 3. Если же мощность уменьшается, то в некоторый момент времени t' этот процесс закончится, так как зона Z^+ при $W > T_2$ не может быть пуста. Тогда для любого $t \geqslant t'$ имеем $l > 0$ вершин в зоне $Z^+(t)$ и $n - l$ вершин в зоне $Z^-(t)$. То есть начиная с момента времени t' мощность зоны $Z^+(t')$ является постоянной. Таким образом, условия утверждения 3 для $k = l$ и t' выполняются и сеть будет иметь следующее предельное состояние:

$$Q^* = \left(q_1(t') - \frac{D(t')}{l},\ ...,\ q_l(t') - \frac{D(t')}{l},\ rn,\ ...,\ rn\right).$$

Остается только найти состояния вершин зоны $Z^+(t')$ ($q_i(t'),\ i = \overline{1,l}$) и дефицит $D(t')$.

Используя утверждение 2, заключаем, что все вершины из зоны $Z^+(t)$ на каждом такте t отдают одинаковое количество ресурса зоне $Z^-(t)$, а значит, состояние каждой вершины v_j, $j = \overline{1,l}$, к моменту времени t' суммарно уменьшилось на определенную величину δ, т.е.

$$\forall j = \overline{1,l}:\ q_j(t') = q_j(0) - \delta.$$

По закону сохранения ресурса в сети, суммарное количество ресурса в вершинах $v_i,\ i = \overline{l+1,n}$, к моменту времени t' увеличилось ровно на столько, сколько потеряли вершины $v_j,\ j = \overline{1,l}$:

$$\sum_{i=l+1}^{n} q_i(t') = \sum_{i=l+1}^{n} q_i(0) + \delta l.$$

Тогда

$$D(t') = \sum_{i=l+1}^{n} (rn - q_i(t')) = \sum_{i=l+1}^{n} (rn - q_i(0)) - \delta l,$$

а предельное состояние вершин $v_j,\ j = \overline{1,l}$, выглядит следующим образом:

$$\forall j = \overline{1,l}:\ q_j^* = q_j(t') - \frac{D(t')}{l} = q_j(0) - \frac{1}{l}\sum_{i=l+1}^{n} (rn - q_i(0)).$$

Итак,

$$\forall j = \overline{1,l}:\ q_j^* = q_j(0) - \frac{w}{l},\ w = \sum_{i=l+1}^{n} (rn - q_i(0)).$$

Здесь l – наибольшее целое число, для которого выполняется неравенство $q_l^* > rn$.

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *При большом суммарном ресурсе $W > T_2$ предельное состояние сети существует и равно*

$$Q^* = \Big(q_1(0) - \frac{w}{l},\ ...,\ q_l(0) - \frac{w}{l},\ rn,\ ...,\ rn\Big),$$

где $w = \sum\limits_{i=l+1}^{n}(rn - q_i(0))$, а l – наибольшее целое число, для которого выполняется неравенство

$$q_l(0) - \frac{1}{l}\sum_{i=l+1}^{n}(rn - q_i(0)) > rn.$$

***Замечание* 1.** Для случая постоянной мощности зоны Z^+ (т.е. $\forall t\ \ k_t = k$ и, следовательно, $k^* = l = k$) имеем $w = \sum\limits_{i=k+1}^{n}(rn - q_i(0)) = D(0)$. Поэтому утверждение 3 есть частный случай теоремы.

Пример 1. Рассмотрим полную однородную ресурсную сеть с пятью «жадными» вершинами и единичной пропускной способностью (рис. 2).

Начальное состояние подобрано таким образом, чтобы все вершины были уже насыщенными:

$$Q(0) = (14,\ 12,\ 7,\ 2,\ 1).$$

Суммарный ресурс W=36 удовлетворяет условию W>rn^2=25 зоны «достаточного большого» ресурса. Для нахождения предельного состояния сети воспользуемся полученной выше теоремой.

Найдем l – наибольшее целое число, для которого выполняется неравенство

$$q_l(0) - \frac{1}{l}\sum_{i=l+1}^{n}(rn - q_i(0)) > rn.$$

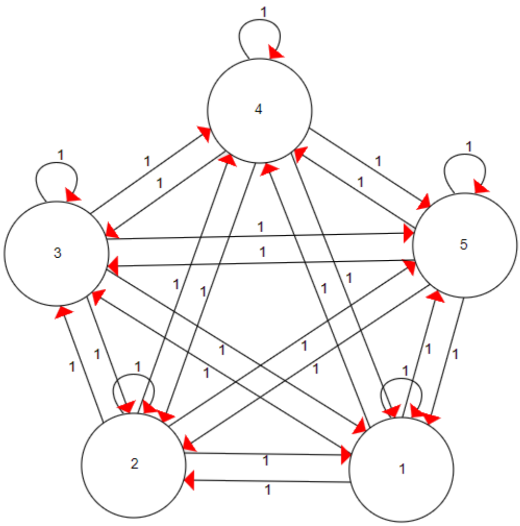

Рис. 2. Однородная ресурсная сеть с пятью «жадными» вершинами, $r = 1$

$l = 1 \Rightarrow$

$14-(5-12+5-7+5-2+5-1) = 16 > 5-$неравенство выполняется.

$l = 2 \Rightarrow$

$12-\dfrac{1}{2}(5-7+5-2+5-1) = \dfrac{19}{2} > 5-$неравенство выполняется.

$l = 3 \Rightarrow$

$7-\dfrac{1}{3}(5-2+5-1) = \dfrac{14}{3} > 5$ – неравенство не выполняется.

Получили $l = 2$, т.е. в зоне Z^{+*} будут только вершины $v_1,\ v_2$. Тогда предельное состояние сети вычисляется по формуле

$$Q^* = \left(q_1(0) - \frac{w}{2},\ q_2(0) - \frac{w}{2},\ rn,\ rn,\ rn\right).$$

Здесь $w = \sum_{i=3}^{5}(rn - q_i(0)) = 5 - 7 + 5 - 2 + 5 - 1 = 5.$

Имеем следующее предельное состояние сети:

$$Q^* = \left(11,5,\ 9,5,\ 5,\ 5,\ 5\right).$$

Протокол работы сети приведен в таблице 1, динамика ресурса – на рис. 3. •

Таблица 1. Протокол работы сети с начальным состоянием $Q(0) = (14,\ 12,\ 7,\ 2,\ 1)$

t_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	14,0000	12,0000	7,0000	2,0000	1,0000
1	12,2500	10,2500	5,2500	4,0000	4,2500
2	11,8125	9,8125	4,8125	4,8125	4,7500
3	11,6563	9,6563	4,8906	4,8906	4,9063
4	11,5781	9,5781	4,9492	4,9492	4,9453
5	11,5391	9,5391	4,9736	4,9736	4,9746
6	11,5195	9,5195	4,9871	4,9871	4,9868
7	11,5098	9,5098	4,9935	4,9935	4,9935
8	11,5049	9,5049	4,9967	4,9967	4,9967
9	11,5024	9,5024	4,9984	4,9984	4,9984
10	11,5012	9,5012	4,9992	4,9992	4,9992
11	11,5006	9,5006	4,9996	4,9996	4,9996
12	11,5003	9,5003	4,9998	4,9998	4,9998
13	11,5002	9,5002	4,9999	4,9999	4,9999
14	11,5001	9,5001	4,9999	4,9999	4,9999
15	11,5000	9,5000	5,0000	5,0000	5,0000
16	11,5000	9,5000	5,0000	5,0000	5,0000
...	...	...	...	...	...

4. Заключение

Рассмотрена модификация модели ресурсной сети – сеть с «жадными» вершинами. «Жадные» вершины на каждом такте сначала передают необходимое количество ресурса себе в петлю, а затем оставшийся ресурс (если он имеется) распределяют

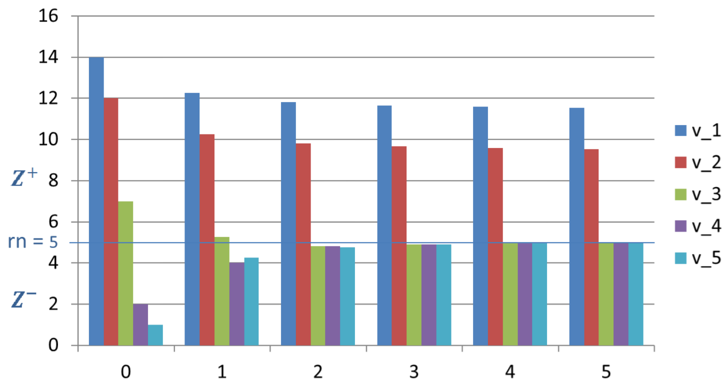

Рис. 3. Динамика ресурса в сети с начальным состоянием $Q(0) = (14,\ 12,\ 7,\ 2,\ 1)$.

в исходящие рёбра по правилам стандартной ресурсной сети. Исследование ограничено топологией полной однородной сети, т.е. сети, представленной полным графом, у которого веса ребер одинаковы.

Для такой модели известны пороговые значения $T_1 = rn$ и $T_2 = rn^2$, разграничивающие зоны различного поведения сети: зоны «недостаточного» и «достаточного» ресурса, зоны «достаточного малого» и «достаточного большого» ресурса соответственно.

В данной работе описано функционирование сети, суммарный ресурс которой находится в зоне «достаточного большого» ресурса. Доказана сходимость процесса перераспределения ресурса, найдено предельное состояние сети.

В дальнейшем планируется исследование других топологий сети модели «жадных» вершин; нахождение основных характеристик функционирования, определение условий остановки сети, получение векторов предельных состояний и потоков для разных значений суммарного ресурса и различного начального распределения этого ресурса между вершинами.

Литература

1. АБДУЛРАХМАН Х., ЕРУСАЛИМСКИЙ Я.М., СКОРОХОДОВ В.А. *Ресурсные сети с вентильной достижимостью* // Инженерный вестник Дона. – 2018. – №4. – С. 78.
2. АБДУЛРАХМАН Х., СКОРОХОДОВ В.А. *Ресурсные сети с магнитной достижимостью* // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2016. – №4. – С. 4–10.
3. АБДУЛРАХМАН Х., СКОРОХОДОВ В.А. *Полные двухресурсные сети с петлями* // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2016. – №2. – С. 10–16.
4. АБДУЛРАХМАН Х., СКОРОХОДОВ В.А. *Двухресурсные сети с магнитной достижимостью* // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2020. – №3. – С. 4–10.
5. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов)* // Управление большими системами. – 2010. – №30.1 – С. 470–505.
6. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Метод проекции в задаче о консенсусе и регуляризованный предел степеней стохастической матрицы* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №12. – С. 38–59.
7. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Социальные сети. Модели информационного влияния, управления и противоборства.* – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2010. – 228 с.
8. ЕРУСАЛИМСКИЙ Я.М., СКОРОХОДОВ В.А., КУЗЬМИНОВА М.В., ПЕТРОСЯН А.Г. *Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения.* – Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009. – 195 с.
9. ЖИГИРЬ А.А. *Методы количественной оценки экономического риска строительной организации при реализации ин-*

вестиционных проектов // ЕГИ. – 2020. – №1. – С. 106–111.

10. ЖИЛЯКОВА Л.Ю., КУЗНЕЦОВ О.П. *Теория ресурсных сетей: монография.* – М.: РИОР: ИНФРА-М, 2017. – 283 с.
11. ЖИЛЯКОВА Л.Ю., ЧАПЛИНСКАЯ Н.В. *Исследование полных однородных ресурсных сетей с «жадными» вершинами* // Управление большими системами (в печати).
12. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Ресурсные сети с ограничениями на ёмкость вершин* [Электронный ресурс]: монография. - М.: ИЦ РИОР, НИЦ ИНФРА-М, 2018. – 160 с.
13. КУЗНЕЦОВ О.П. *Однородные ресурсные сети. I. Полные графы* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №11. – С. 136–147.
14. СКОРОХОДОВ В.А., АБДУЛРАХМАН Х. *Динамические ресурсные сети. Случай малого ресурса* // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2018. – №4. – С. 186–194.
15. BLANCHARD PH., VOLCHENKOV D. *Random Walks and Diffusions on Graphs and Databases: An Introduction (Springer Series in Synergetics).* – Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. – 262Berlin – Heidelbergp.
16. MASUDA N., PORTER M.A., LAMBIOTTE R. *Random walks and diffusion on networks* // Physics Reports. – 2017. – Vol. 716–717. – P. 1–58.

Приложение

Доказательство утверждения 3.

«Профицит» вершины v_k из зоны $Z^+(0)$ превосходит величину $\dfrac{D(0)}{k}$, тогда в любой момент времени t в сети имеется ровно k вершин из зоны Z^+.

Рассмотрим разность дефицитов на тактах $t+1$ и t:

$$D(t+1) - D(t) = \sum_{i=k+1}^{n} (rn - q_i(t+1)) - \sum_{i=k+1}^{n} (rn - q_i(t)) =$$

$$= \sum_{i=k+1}^{n} q_i(t) - \sum_{i=k+1}^{n} q_i(t+1) = Q^-(t) - Q^-(t+1) =$$

$$= Q^-(t) - \Big(Q^-(t) - \sum_{i=k+1}^{n} \frac{k(q_i(t) - r)}{n-1} + kr(n-k)\Big) =$$

$$= \sum_{i=k+1}^{n} \frac{k(q_i(t) - r)}{n-1} - kr(n-k) = \frac{k}{n-1} Q^-(t) - \frac{krn(n-k)}{n-1}.$$

С другой стороны,

$$D(t) = \sum_{i=k+1}^{n} (rn - q_i(t)) = rn(n-k) - Q^-(t),$$

$$Q^-(t) = rn(n-k) - D(t).$$

Тогда имеем

$$D(t+1) - D(t) = \frac{k}{n-1}(rn(n-k) - D(t)) - \frac{krn(n-k)}{n-1},$$

$$D(t+1) = \frac{n-k-1}{n-1} D(t),$$

$$D(t) = \Big(\frac{n-k-1}{n-1}\Big)^t D(0).$$

Получили убывающую геометрическую прогрессию, а, значит,

$$\lim_{t\to\infty} D(t) = 0.$$

Таким образом, зона Z^{-*} не будет иметь дефицита, а, учитывая тот факт, что вершины не могут покидать зону $Z^-(t)$, заключаем, что в предельном состоянии все вершины $v_i,\ i = \overline{k+1, n}$, имеют rn ресурса.

Теперь найдем предельный ресурс в первых k вершинах – вершинах зоны $Z^+(t)$. По утверждению 2, выходные и входные потоки вершин зоны $Z^+(t)$ будут совпадать, значит, ресурс у этих вершин меняется одинаково. Суммарно отданный зоне $Z^-(t)$ ресурс должен быть равен дефициту. Тогда получим, что ресурс в каждой вершине зоны $Z^+(t)$ уменьшился на $\dfrac{1}{k}D(0)$.

Итого, предельное состояние сети выглядит следующим образом:

$$Q^* = \left(q_1(0) - \frac{D(0)}{k},\ \ldots,\ q_k(0) - \frac{D(0)}{k},\ rn,\ \ldots,\ rn\right).$$

RESEARCH OF COMPLETE HOMOGENEOUS "GREEDY-VERTICES" RESOURCE NETWORKS: ZONE OF "SUFFICIENT LARGE" RESOURCE

Nadezda Chaplinskaya, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, student (nadya1462@gmail.com).

Abstract: "Resource network with greedy vertices" – the modification of the graph dynamic model "resource network". At each discrete-time moment the graph vertices transfer resources to each other through the edges with limited throughput, first passing the available resource to themselves via the loop and then distributing the remaining resource (if it is available) to outgoing edges according to the "standard" resource network rules. These are two rules with threshold switching: if the vertex has resource, that exceeds the total throughput of all vertex's outgoing edges, it transfers the full throughput to each outgoing edge; otherwise, it gives away the entire available resource, distributing it in proportion to the throughputs of the outgoing edges. The particular case of a complete homogeneous resource network with "greedy" vertices is considered. For networks of such type there are two total resource thresholds, separating zones of different network behaviour: the first threshold divides the zones of "insufficient" and "sufficient" resources, the second divides the zones of "sufficient small" and "sufficient large" resources. In the article the last zone – "sufficient large" resource – is investigated: the functioning of the network is described, the asymptotic state is found.

Keywords: graph dynamic threshold model, resource net, "greedy-vertices" model, zone of "sufficient large" resource.

УДК 519.1
ББК 22.176
DOI: 10.25728/ubs.2021.90.3

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии О.П. Кузнецовым.

Поступила в редакцию 29.01.2021.
Дата опубликования 31.03.2021.