

**Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

***Выпуск 91
Май 2021***

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл. №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2021

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

**УПРАВЛЕНИЕ
БОЛЬШИМИ
СИСТЕМАМИ**

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 91

Москва – 2021

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Кузнецов О.П., Кульба В.В., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: член-корр. РАН Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Калимулина Э.Ю. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИПМ РАН), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), Галаев А.А. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук: Зоркальцев В.И. (ИСЭМ СО РАН), проф. Калашников А.О. (ИПУ РАН), проф. Калянов Г.Н. (ГУ ВШЭ), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ключков В.В. (ИПУ РАН), д-р техн. наук Коргин Н.А. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук: проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (МФТИ), д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р биол. наук проф. Михальский А.И., д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н. (ИПС РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Орлов А.И. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), проф. Райгородский А.М. (МГУ), проф. Савватеев А.В. (РЭШ), д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), Совлуков А.С. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ), проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Арзамас – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – академик РАН Бычков И.В., д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в интернете: ubs.mtas.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

Математическая теория управления

Белов М.В., Новиков Д.А.

*Классификация математических моделей
деятельности.....* 5

Анализ и синтез систем управления

Белов И.Р.

*Анизотропный анализ линейных дискретных
нестационарных систем с мультипликативными
шумами.....* 38

Управление в социально-экономических системах

Бурков В.Н., Буркова И.В., Щепкин А.В.

Условие прибыльности в модели Леонтьева 78

Акинфиев В.К.

*Модели пространственного развития
инфраструктурных систем* 96

Управление подвижными объектами и навигация

Панкратов Ф.С., Малахов И.М.

*Актуальные и перспективные способы построения
беспроводных гидроакустических сетей доступа* 120

КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Белов М. В.¹

(Сколтех, Москва)

Новиков Д. А.²

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

В рамках системной модели деятельности предложена минимальная полная совокупность описывающих ее измеримых факторов: действие, результат деятельности (состояние предмета деятельности), внутреннее состояние субъекта деятельности, его опыт и используемые ресурсы. Введена система классификаций математических моделей деятельности, учитывающих различные комбинации данных факторов. Рассмотрена общая модель, описывающая взаимосвязь между ними. Показано, что частными случаями общей модели являются известные базовые для теории управления организационными системами модели принятия решений, модели освоения индивидуального и коллективного опыта, а также модели совместной динамики поведенческих и психических компонент деятельности.

Ключевые слова: деятельность, технология, опыт, модель деятельности.

1. Введение

Деятельность (activity) – активное взаимодействие человека с окружающей действительностью, в ходе которого человек выступает как *субъект*, целенаправленно воздействующий на *предмет* [14]. Деятельность – форма активности (*активность* – всеобщая характеристика живых существ, их собственная динамика как источник преобразования или поддержания ими жизненно важных связей с окружающим миром) человека, направленная на познание, преобразование окружающего мира, себя и условий своего существования.

Под *элементарной* понимают такую деятельность, цели, технологии и результат которой не имеют собственной внутренней структуры. В случае элементарной деятельности нет

¹ Михаил Валентинович Белов, д.т.н. (mbelov59@mail.ru).

² Дмитрий Александрович Новиков, чл.-корр. РАН (novikov@ipu.ru).

необходимости рассматривать субъект и предмет вместе с собственно деятельностью – они играют роль понятного контекста (в течение периода деятельности эволюционирует только предмет в соответствии с используемой субъектом технологией).

В противоположность этому деятельность, не являющуюся элементарной, в [3] было предложено называть комплексной. То есть *комплексная деятельность* (КД) – деятельность, обладающая нетривиальной внутренней структурой, с множественными и/или изменяющимися целями, субъектом, технологией, ролью предмета в его целевом контексте.

В монографии [3] в рамках разработки *методологии комплексной деятельности* (МКД) было введено понятие *структурного элемента деятельности* (СЭД) – см. рис. 1, включающего, помимо деятельности (2), ее субъект (1) и предмет (3).

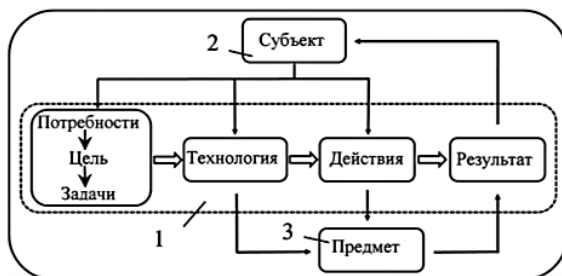


Рис. 1. Структурный элемент деятельности [3]

В [18] предложена *системная структура деятельности* (см. рис. 2), которая позволяет выделить следующие группы внутренних компонент деятельности: психические, процессуальные и поведенческие.

Процессуальные компоненты деятельности:

потребность → мотив → цель → задачи → технология →
→ действие → результат → рефлексия/оценка.

Поведенческие компоненты деятельности: действие, состояние предмета деятельности/результат.

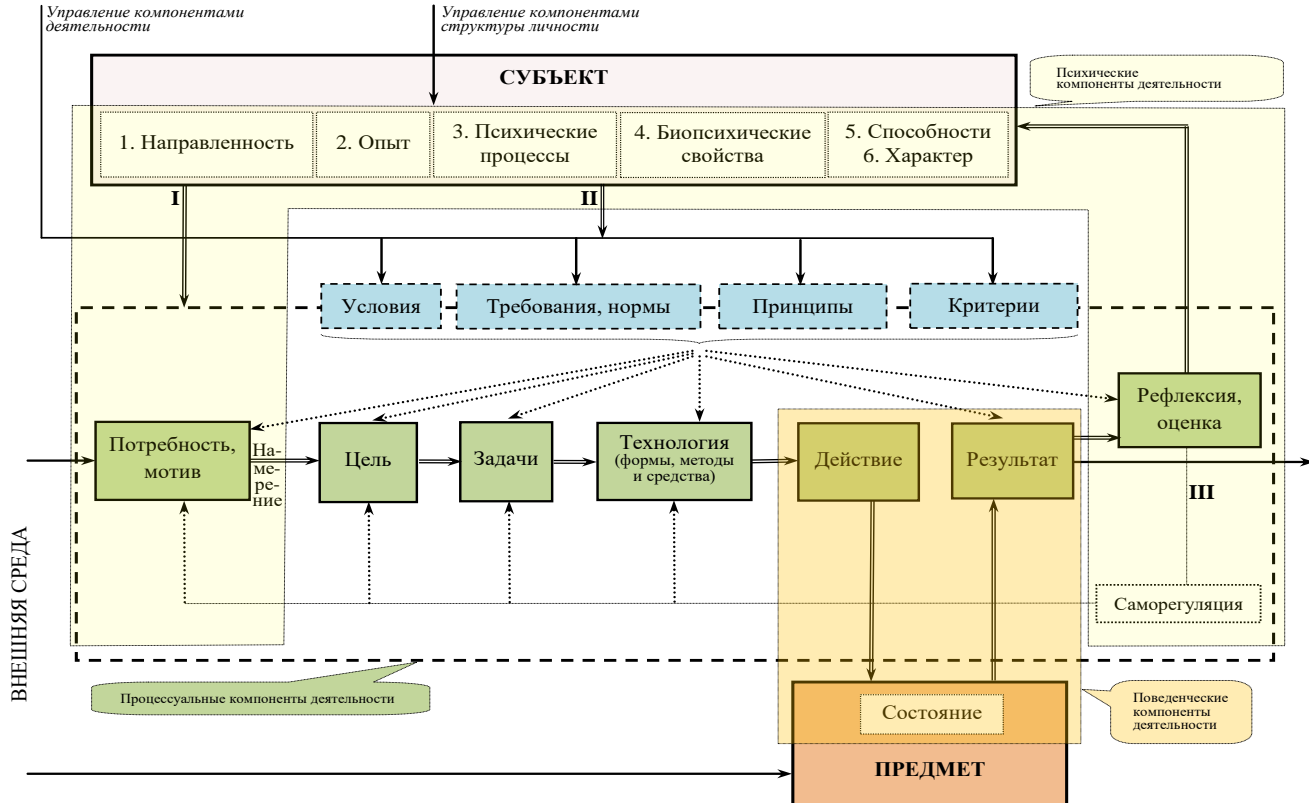


Рис. 2. Системная структура деятельности [18]

Внешние компоненты деятельности: критерии, нормы, принципы, требования, условия.

Ключевой компонент любой деятельности – *технологии* (в соответствии с [6, 14], технология – система условий, критериев, форм, методов и средств последовательного достижения поставленной цели), которые являются операциональным отражением проверенного массовой практикой и систематизированного опыта практической деятельности.

Под *опытом* понимают [19, 20]:

1) совокупность практически усвоенных знаний, навыков, умений и привычек (индивидуальный опыт);

2) отражение в человеческом сознании объективного мира, общественной практики, направленной на изменение мира (и общественно-исторический опыт, и индивидуальный опыт каждого отдельного человека).

В зависимости от способов и средств фиксации и трансляции опыта (или даже шире – в случае индивида – компонентов психики, если относить к широко трактуемому опыту представления, убеждения, отношения, мировоззрение личности и др.) можно различать [5]:

– *эксплицитно транслируемый опыт* (explicit experience; формой передачи которого, как правило, является текст; пример – знания, технологии);

– *имплицитно транслируемый опыт* (tacit experience, tacit knowledge; который передается, как правило, в невербализуемых и нетекстуальных формах; пример – убеждения, мировоззрение);

– *нетранслируемые компоненты*, которые, может быть, и транслируются «биологически» (пример – биопсихические свойства личности; специфика физиологии индивидов, обусловленная климатом, ландшафтом и образом жизни), но настолько медленно, что в рамках настоящего рассмотрения могут считаться неизменными.

Задача настоящей работы заключается в том, чтобы предложить минимальную «эмпирически полную» совокупность измеримых факторов, описывающих деятельность, ввести систему классификаций математических моделей деятельности, учитывающих различные комбинации этих факторов (раздел 2),

а также разработать общую модель, описывающую взаимосвязь между ними (раздел 3). Раздел 4 содержит несколько примеров, иллюстрирующих общую модель.

2. Классификация математических моделей деятельности

Будем описывать деятельность в следующем *пространстве состояний*:

- 1) действие (y);
- 2) результат деятельности / состояние предмета деятельности (z);
- 3) внутреннее состояние субъекта деятельности (тип) (r);
- 4) опыт (v);
- 5) ресурсы (d);

Компонентами модели КД также являются:

- предпочтения субъекта;
- множества допустимых значений параметров модели;
- технологическая функция (отображение множеств допустимых действий субъекта, результатов деятельности его предшественников в технологической сети и значений факторов неопределенности во множество допустимых результатов его деятельности – см. ниже);
- факторы неопределенности (ФН) (ω) и информация о них.

Субъект деятельности, следуя традициям теории активных систем (ТАС) [8, 9, 24] и теории управления организационными системами (ТУОС) [17], далее будем называть *активным элементом* (АЭ), подчеркивая тем самым его ключевое свойство – активность. Системы, включающие хотя бы одного АЭ, будем называть *активными системами* (АС).

Соответствие между компонентами деятельности и элементами математических моделей КД АС устанавливается таблицей 1.

Перечисленные выше пять элементов пространства состояний позволяют рассмотреть $2^5 - 1 = 31$ класс нетривиальных моделей (см. таблицу 2): 5 элементарных (включающих какой-либо один элемент) моделей; 10 моделей, учитывающих пару элементов; 10 моделей, учитывающих одновременно три эле-

мента; 5 моделей, учитывающих одновременно четыре элемента; и одну полную модель – учитывающую все пять элементов.

Таблица 1. Компоненты деятельности и элементы математических моделей

Компонент деятельности	Элемент модели
компоненты структуры личности	внутреннее состояние (тип), опыт
критерии, нормы, принципы, требования, условия	ресурсы, множества допустимых значений параметров модели, технологическая функция, факторы неопределенности, предпочтения субъекта
потребность	внутреннее состояние предпочтения
мотив	
цель	
задачи	предпочтения действие
технология	опыт
действие	действие
результат	результат
рефлексия/оценка	внутреннее состояние предпочтения

В силу семантики элементов модели, не все комбинации логически непротиворечивы. Так, например, действие является необходимым для достижения результата. Поэтому модели, в которых не учитываются действия, но учитывается результат деятельности, можно считать эквивалентными моделям с учитываемым действием, тождественно совпадающим с результатом, – соответствующие строки в таблице 2 помечены серым цветом. Символ «???» в таблице 2 условно обозначает, что данный класс моделей слабо исследован или вообще почти не изучен.

Между пятью факторами – элементами пространства состояний, описывающего деятельность, – возможны 10 попарных¹ связей (см. их номера на рис. 3). Рассмотрим их кратко.

1. «Действие – ресурсы». Возможность осуществления действия может требовать тех или иных ресурсов (например, имеющееся у АЭ количество ресурса может ограничивать его множество допустимых действий – см. М9). С другой стороны, действие может быть направлено на изменение состава и/или количества ресурсов.

2. «Действие – опыт». Опыт, во многом детерминирующий технологию деятельности, соответственно детерминирует и возможные/необходимые действия. С другой стороны, действие может заключаться в формировании и/или освоении нового опыта – см. [5] и М17.

3. «Действие – состояние (внутреннее)». Внутреннее состояние АЭ во многом определяет его предпочтения (например, функцию полезности или целевую функцию), в том числе на множестве допустимых действий. С другой стороны, выбор того или иного действия АЭ может приводить к изменениям его внутреннего состояния – см. примеры в [16].

4. «Действие – результат». Действие АЭ, при заданной технологической функции совместно с реализациями ФН и результатами деятельности других АЭ, определяет результат деятельности АЭ – см. [2, 7] и М6. С другой стороны, отличие наблюдаемого результата от ожидаемого может побуждать АЭ к новым действиям.

¹ Несмотря на «причинно-следственную» природу, многие рассматриваемые связи двунаправленны (определяют пару отношений, реализуемых, быть может, в различные моменты времени). Кроме того, помимо попарного взаимодействия возможны и более сложные виды взаимовлияния факторов (см. таблицу 2 с перечислением 31 класса моделей).

Таблица 2. Классы математических моделей КД и смежные области знаний

№ модели	Учитываемые элементы	Области исследований
M1	Действие	Теория принятия решений, теория игр, ТАС [8, 9, 24], ТУОС [17], экспериментальная экономика.
M2	Результат	= M1, дифференциальные уравнения, в том числе описывающие процессы конкуренции, естественного отбора и др.
M3	Тип/внутреннее состояние	Модели динамики внутренних состояний субъектов (модели социальных сетей [26], модели конформного поведения [25] и др. – см. обзоры в [16, 22]; модели динамики представлений и отношений в математической психологии [27, 28, 32]).
M4	Опыт	Модели научения в математической психологии (см. обзоры в [6, 30]), теории человеческого капитала [23], ТУОС и МКД [5].
M5	Ресурсы	Модели распределения пассивных ресурсов в исследовании операций и математической экономике. Модели динамики количественных факторов в социологии, демографии, экологии и биологии.
M6	Действие + Результат	Теория контрактов [29, 31], ТУОС, календарно-сетевое планирование и управление (КСПУ) [1, 10], модели технологий, теория организация производства, теория автоматического управления [21, 22].
M7	Действие + Тип	ТАС (механизмы с сообщением информации и выбором действий [8, 24]), ТУОС (совместная динамика психических и поведенческих компонент деятельности [16]).
M8	Действие + Опыт	Модели совместного научения группы субъектов [5, 15], оптимизации научения [5, 6].
M9	Действие + Ресурсы	Исследование операций, теория игр, ТУОС [15].
M10	Результат + Тип	= M7
M11	Результат + Опыт	= M8
M12	Результат + Ресурсы	= M9
M13	Тип + Опыт	Модели совместного научения группы субъектов, оптимизации научения с учетом индивидуальных особенностей [5].

№ модели	Учитываемые элементы	Области исследований
M14	Тип + Ресурсы	= M5
M15	Опыт + Ресурсы	= M21
M16	Действие + Результат + Тип	Теория контрактов, ТУОС (модели с внешней и внутренней неопределенностью), ТУОС (совместная динамика психических и поведенческих компонент деятельности [16]).
M17	Действие + Результат + Опыт	Модели научения в процессе деятельности [5, 15].
M18	Действие + Результат + Ресурсы	Теория контрактов, ТУОС, экономика и организация производства.
M19	Действие + Тип + Опыт	???
M20	Действие + Тип + Ресурсы	Исследование операций, ТУОС, ???
M21	Действие + Опыт + Ресурсы	???
M22	Результат + Тип + Опыт	= M19
M23	Результат + Тип + Ресурсы	= M20
M24	Результат + Опыт + Ресурсы	= M21
M25	Тип + Опыт + Ресурсы	= M29 (за исключением моделей конкуренции в биологических системах – см. обзоры, например, в [12, 13]).
M26	Действие + Результат + Тип + + Опыт	???
M27	Действие + Результат + Тип + + Ресурсы	???
M28	Действие + Результат + Опыт + + Ресурсы	???
M29	Действие + Тип + Опыт + Ресурсы	???
M30	Результат + Тип + Опыт + Ресурсы	= M29
M31	Действие + Результат + Тип + Опыт + Ресурсы	См. раздел 3 ниже.

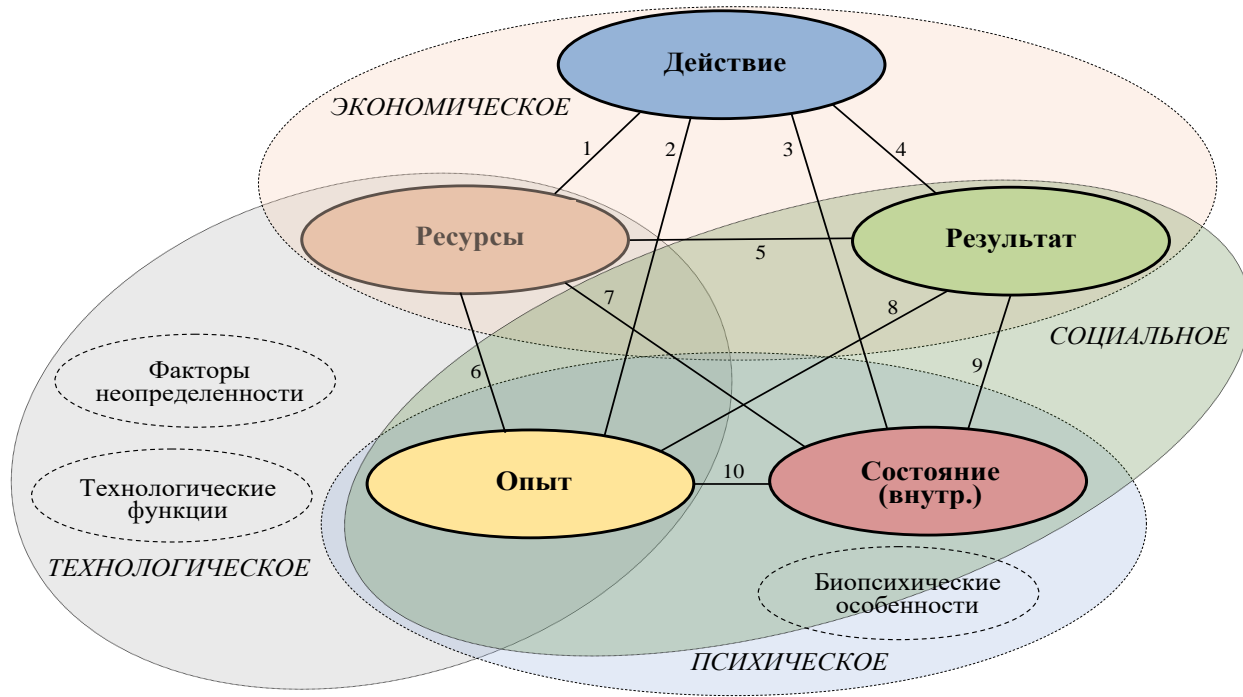


Рис. 3. Параметры моделей деятельности и связи между ними

5. «Ресурсы – результат». Как и по отношению к действию, возможность достижения требуемого (целевого) результата может требовать тех или иных ресурсов (например, имеющееся у АЭ количество ресурса может ограничивать его множество достижимых результатов – см. М9). Соотношение между достигнутыми результатами, целью деятельности и требуемыми ресурсами характеризует эффективность деятельности – см. [3]. С другой стороны, результат может заключаться в изменении состава и/или количества ресурсов.

6. «Ресурсы – опыт». Приобретение/освоение опыта может требовать соответствующих ресурсов. С другой стороны, наличие опыта позволяет более эффективно конкурировать за ресурсы (см. [5]) или расходовать их.

7. «Ресурсы – состояние (внутреннее)». Состояние определяет отношение АЭ к наличию или отсутствию ресурсов. Можно предположить, что имеющееся у АЭ количество ресурсов влияет на его внутреннее состояние. Подробных математических моделей, отражающих взаимосвязь между этими факторами, на сегодняшний день практически не известно.

8. «Результат – опыт». Как и по отношению к действию, опыт, во многом детерминирующий технологию деятельности, соответственно детерминирует и результаты деятельности. С другой стороны, результат деятельности может заключаться в формировании и/или освоении нового опыта – см. [5] и М17.

9. «Результат – состояние (внутреннее)». Внутреннее состояние АЭ во многом определяет его предпочтения (например, функцию полезности или целевую функцию), в том числе на множестве возможных результатов деятельности. С другой стороны, получение АЭ того или иного результата может приводить к изменениям его внутреннего состояния – см. примеры в [16].

10. «Опыт – состояние (внутреннее)». Фактически речь идет о взаимосвязи эксплицитно и имплицитно транслируемого опыта. Глубоких и содержательно интерпретируемых математических моделей, отражающих взаимосвязь между этими факторами, на сегодняшний день практически не известно (некоторые эффекты отражены в М13).

Перейдем к рассмотрению общей модели деятельности (МЗ1).

3. Общая модель деятельности

Расширим модель многоэлементной динамической активной системы с неопределённостью, описанную в [2, 5, 7]: введём в нее, во-первых, понятие *опыта* как характеристики активного элемента, определяющей его возможность выполнять комплексную деятельность (КД); во-вторых, *пассивные элементы* (ПЭ), играющие роль ресурсов, состояния АЭ и/или предмета КД (состояние предмета КД характеризует ее результат). То есть, с одной стороны, от характеристик опыта АЭ и свойств ПЭ зависит результат комплексной деятельности АЭ, с другой – результат КД АЭ заключается, в том числе, в изменении его опыта и характеристик ПЭ.

3.1. СОСТАВ И ПОРЯДОК ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ

Рассмотрим функционирование *активной системы* (АС), состоящей из конечного числа n *активных элементов* (АЭ – элементов активной системы, которые могут быть индивидами, или также АС) и конечного числа «*пассивных*» *элементов* (ПЭ) – вещественных, информационных, финансовых и других объектов, не обладающих свойством активного выбора.

Предположим, что в процессе функционирования системы активные элементы реализуют активный выбор – выбирают свои *действия* (частный случай выбора – невыполнение действий), после чего под влиянием *факторов неопределённости* (ФН) реализуется *результат* деятельности АЭ. Будем считать, что множество возможных действий каждого из АЭ конечно¹, а результат деятельности АЭ зависит в общем случае от его действия, реализовавшихся значений ФН, характеристик *опыта* АЭ и свойств ПЭ, а также от действий и опыта других АЭ. Резуль-

¹ Отказ от предположения о конечности множеств возможных действий АЭ приведет к замене в выражениях для общей модели АС сумм на интегрирование по соответствующей мере.

татом деятельности АЭ являются, в том числе, изменения опыта и характеристик ПЭ.

Функционирование АС будем рассматривать в дискретном времени, обозначая номер периода t и начиная их отсчёт с периода $t = 1$.

Примем следующий базовый порядок функционирования АС в каждом периоде (рис. 4):

1. В начале каждого периода t каждый АЭ выбирает своё действие в текущем периоде независимо от других АЭ, не зная выбора других АЭ.

2. Факторы неопределённости принимают текущие значения и становятся известны АЭ.

3. Формируются результаты деятельности АЭ, что отражается в изменениях характеристик опыта и характеристик ПЭ (состояние АЭ, характеристики ресурсов и результат деятельности – состояние предмета этой деятельности) на конец периода. Полученные результаты зависят от характеристик опыта и характеристик ПЭ на начало периода, выбранных действий и значений ФН.

4. Осуществляется переход к следующему периоду $t + 1$.

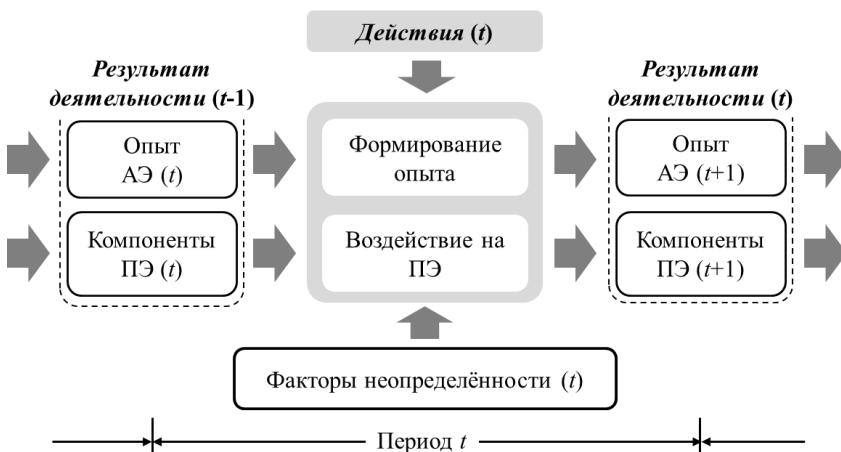


Рис. 4. Функционирование АС

Для каждого АЭ заданы: функция полезности в каждом периоде, зависящая в общем случае от: действий АЭ, характеристик опыта и ПЭ на начало периода, значений ФН; а также целевая функция на рассматриваемом временном горизонте, как композиция функций полезности соответствующих периодов. Принимая решение, активные элементы стремятся максимизировать свои целевые функции.

Конкретные предположения или ограничения относительно информированности АЭ на момент принятия ими решений будут рассмотрены в соответствующих частных задачах.

3.2. НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ

Будем считать, что в каждом периоде каждый из АЭ встречается с одним из конечного числа K возможных значений ФН. В общем случае состояния ФН, наблюдаемые разными АЭ, отличаются друг от друга. Введём понятие *комплексного состояния ФН*, которое будем характеризовать совокупностью всех состояний ФН, с которыми сталкиваются все АЭ в периоде t .

Комплексное состояние ФН представим вектором $\omega^T(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_i(t), \dots, \omega_{nK}(t))$ с бинарными элементами, значения которых формируются по следующему правилу. Пусть в текущем периоде t ФН для i -го АЭ приняли состояние $k(i)$, тогда единичные значения примут элементы $\omega_j(t)$, с номерами $K(i-1) + k(i)$, $i = 1, \dots, n$, остальные элементы примут нулевые значения. То есть вектор $\omega(t)$ сформирован из n блоков по K элементов, и каждый блок отражает состояние ФН, с которым столкнулся конкретный АЭ: единичное значение принял элемент $\omega_j(t)$, порядковый номер которого в блоке, соответствующем данному АЭ, равен номеру состояния ФН, остальные элементы в блоке равны нулю. Очевидно, вектор $\omega(t)$ может принимать одно из K^n значений, а также обладает свойствами

$$\sum_{l=1}^{nK} \omega_l(t) = n \text{ и } \sum_{l=(i-1)K}^{iK} \omega_l(t) = 1, i = 1, \dots, n.$$

Через Ω будем обозначать множество возможных значений комплексных ФН (оно, очевидно, состоит из K^n элементов). Векторы – элементы множества Ω – будем обозначать через ω и считать, что текущее состояние $\omega(t)$ наступает независимо

от предыдущих и все вероятности $\{p_{\omega}(t)\}$ наступления состояний ω являются общим знанием среди АЭ, очевидно $\sum_{\omega \in \Omega} p_{\omega}(t) = 1$

Частным является случай, когда состояния ФН, наблюдаемые каждым из АЭ, независимы друг от друга; обозначим $p_{ik}(t)$ вероятность наблюдения i -м АЭ k -го состояния ФН

$$\left(\sum_{k=1}^K p_{ik}(t) \equiv 1, i = 1, \dots, n \right), \text{ тогда } p_{\omega}(t) = \prod_{i=1}^n p_{ik(i)}(t).$$

3.3. ОПЫТ АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ПАССИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Пусть каждый АЭ в каждом периоде может выбрать и выполнить один из J элементов КД, для каждого из которых существует известная АЭ *технология* (система условий, критериев, форм, методов и средств последовательного достижения поставленной цели [3, 6, 14]).

Опыт i -го АЭ на момент окончания t -го периода будем характеризовать упорядоченным набором величин, элементами которого являются бинарные переменные $v_{ijk}(t)$, характеризующие создание и/или освоение i -м АЭ технологии j -го элемента КД при k -м состоянии ФН. Опыт всех АЭ будем описывать набором величин $v(t) = \{v_{ijk}(t); i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K\}$, элементы которого будем помечать тройным индексом и считать, что $v_{ijk}(t)$ принимает значение 1, если к началу t -го периода i -й АЭ создал и/или освоил технологию j -го элемента КД при k -м состоянии ФН, в противном случае $v_{ijk}(t) = 0$. Будем обозначать V – множество возможных наборов $v(t)$ (очевидно, V состоит из 2^{nJK} элементов). Все возможные наборы из nJK бинарных величин (все возможные 2^{nJK} сочетания из 0 и 1), составляющие множество V , будем обозначать как v , их элементы – как v_{ijk} , $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K$. Также обозначим $q_{ijk}(t) = \Pr(v_{ijk}(t) = 1) = E[v_{ijk}(t)]$ и $q(t) = \{q_{ijk}(t); i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K\}$. Тогда апостериори *опыт всех АЭ* в целом будем характеризовать *опытом* каждого из них – набором $v(t)$, а оценку характеристик возможного будущего опыта – набором $q(t)$.

Аналогично, *характеристики всех ПЭ* будем описывать вектором $\rho^T(t) = (\rho_1(t), \rho_2(t), \dots, \rho_M(t))$ размерности M , на элементы которого не накладываем ограничений, а оценку будущих характеристик – распределением вероятностей состояний всех ПЭ к началу периода t будем описывать $q^*(s, t) = \Pr(\rho(t) \in s)$, где s – некоторое подмножество множества допустимых значений вектора $\rho(t)$.

3.4. АКТИВНЫЙ ВЫБОР

Будем считать, что перед началом каждого периода i -й АЭ реализует *активный выбор*: выбирает действие – номер элемента КД, который он будет выполнять, и, возможно, некоторые параметры заданной технологии в течение очередного периода. Выбор действия $y_i(t)$ осуществляется из множества допустимых действий

$$A_i(\{y(\cdot), \omega(\cdot) \mid 0; t-1\}, \{v(\cdot), \rho(\cdot) \mid 0; t\}, t) : y_i(t) \in A_i(\cdot),$$

зависящего от времени и предыдущих значений действий $y(\cdot)$, опыта $v(\cdot)$, характеристик ПЭ $\rho(\cdot)$ и ФН $\omega(\cdot)$. Здесь и ниже с помощью нотации $\{x(\cdot) \mid t_1; t_2\}$ будем обозначать упорядоченный набор значений одной или нескольких величин $x(\cdot)$, возможно, векторных, в течение промежутка периодов с номерами от t_1 до t_2 , включая граничные периоды.

Пока не вводим никаких допущений относительно природы элементов множеств $A_i(\cdot)$.

Обозначим номер выбранного элемента КД как $j(y_i(t))$, вектор всех выбранных действий – через $y^T(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ и множество всех векторов – через $A(\{y(\cdot), \omega(\cdot) \mid 0; t-1\}, \{\rho(\cdot), r(\cdot) \mid 0; t\}, t)$, т.е. $y(t) \in A(\{y(\cdot), \omega(\cdot) \mid 0; t-1\}, \{v(\cdot), \rho(\cdot) \mid 0; t\}, t)$ и $A(\cdot) = A_1(\cdot) \times A_2(\cdot) \times \dots \times A_n(\cdot)$.

Пусть АЭ с номером i обладает функцией полезности $\varphi_i(y(t), v(t), \rho(\cdot), \omega(t), t)$, принимающей неотрицательные значения, распределением дальновидностей $\delta_i(t)$ и целевой функцией

$$(1) \Phi_i(\{y(\cdot), v(\cdot), \rho(\cdot), \omega(\cdot) \mid 0; t\}) = \sum_{\tau=1}^t \delta_i(\tau) \varphi_i(y(\tau), \rho(\tau), v(\tau), \omega(\tau), \tau).$$

Предполагаем, что, выбирая $y_i(t)$, АЭ стремится максимизировать значение $\Phi_i(\cdot)$ – своей целевой функции (1), учитывая при этом (в рамках своей информированности) свои текущие

действия и опыт, текущее состояние ПЭ, информацию о свойствах ФН, о выборе действий и об опыте других АЭ.

Выбор $y_i(t)$ происходит в условиях неопределённости, которая должна быть устранена. В данной работе для устранения неопределённости при принятии решений используем метод вычисления ожидаемой полезности, однако полученные результаты могут быть основаны и на иных методах, например, гарантированного результата, с соответствующими корректировками формальных соотношений.

Как было отмечено выше, конкретные предположения или ограничения относительно информированности АЭ на момент принятия ими решений рассматриваются в соответствующих частных задачах.

Частным случаем решения любого из АЭ является отказ от участия в АС в данном периоде выбор действия $y_i(t) = y^0$, в этом случае $\varphi_i(y^0, v(t), \rho(t), \omega(t), t)$ соответствует *резервной полезности*, зависящей от времени и предыдущих значений действий $y(\cdot)$, опыта $v(\cdot)$, характеристик ПЭ $\rho(\cdot)$ и ФН $\omega(\cdot)$, аналогично множеству возможных действий.

При всех остальных решениях $y_i(t) \neq y^0$ АЭ выполняет $j(y_i(t))$ -й элемент КД, следуя технологии.

3.5. ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ АЭ

После выбора действия в периоде t i -й АЭ сталкивается с k -м состоянием ФН, т.е. $\omega_l(t) = 1$, и между l и парой $\langle i; k \rangle$ существует взаимно однозначное соответствие $l = (i - 1)K + k$ (по определению вектора $\omega(t)$).

Предположим, что состояние ПЭ эволюционирует под воздействием выполнения КД каждым из АЭ в зависимости от состояния ПЭ $\rho(t)$, выбранных действий $y(t)$, опыта $v(t)$ и значений ФН $\omega(t)$, и эта зависимость описывается *агрегированной технологической функцией всей АС* $R(\cdot)$:

$$(2) \quad \rho(t + 1) = R(\rho(t), y(t), v(t), \omega(t), t) = \\ = (R_1(\cdot), \dots, R_m(\rho(t), y(t), v(t), \omega(t), t), \dots, R_M(\cdot))^T,$$

где $R_m(\rho(t), y(t), v(t), \omega(t), t)$ – известные функции.

То есть $\rho(t + 1)$, образно говоря, является «результатом КД всех АЭ в течение периода t ».

Обозначим множество возможных значений вектора $\rho(t)$ после каждого периода t через $\Xi(t)$.

Вектор-функция $R(\cdot)$ задаёт отображение $\Xi(t) \times A(\cdot) \times V \times \Omega \rightarrow \Xi(t+1)$, тогда для каждого значения вектора $\rho(t+1)$ существует его прообраз на $\Xi(t) \times A(\cdot) \times V \times \Omega$ – произведении множеств возможных значений аргументов вектор-функции $R(\cdot)$, будем обозначать прообраз как $R^{-1}(\cdot)$, т.е.

$$(3) \quad R^{-1}(\rho, t+1) = \{s \in \Xi(t), y \in A(\cdot), v \in V, \omega \in \Omega / R(s, y, v, \omega, t) = \rho\}.$$

На основании введённых выше вероятностных моделей ФН и выполнения КД, а также модели динамики ПЭ (2)–(3), запишем рекуррентное соотношение для распределения вероятностей состояний ПЭ:

$$(4) \quad q^*(s, t+1) = \sum_{\{\rho; y(t); v; \omega\} \in R^{-1}(s, t+1)} p_\omega(t) \pi(v, q(t)) q^*(\rho, t) = \\ = Q^*(y(t), q(t), q^*(\rho, t)),$$

где суммирование выполняется по прообразу s – всем наборам $\{\rho; y(t); v; \omega\} \in R^{-1}(s, t+1)$, $\pi(v, q)$ – вероятность того, что бинарный набор примет значение v , когда вероятности освоения равны q , и

$$\pi(v, q) = \prod_{\substack{\alpha=1\dots n; \beta=1\dots J; \\ \gamma=1\dots K}} (v_{\alpha\beta\gamma} q_{\alpha\beta\gamma} + (1-v_{\alpha\beta\gamma})(1-q_{\alpha\beta\gamma})).$$

Фактически (4) определяет оператор $Q^*(\cdot)$, переводящий распределение $q^*(\rho, t)$ в $q^*(s, t+1)$, параметрами которого являются выбор АЭ $y(t)$ и их опыт $q(t)$, т.е. $q^*(s, t+1) = Q^*(y(t), q(t), q^*(\rho, t), t)$.

Задаваемая таким образом закономерность эволюции ПЭ содержательно отражает и расходование ресурсов, и их создание/накопление, и другие эффекты, в том числе их уничтожение, если моделируется конфликт АЭ.

3.6. ФОРМИРОВАНИЕ ОПЫТА – СОЗДАНИЕ И ОСВОЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЙ

Предположим, что одновременно и независимо (в вероятностном смысле) от успешности выполнения КД в течение периода t каждый i -й АЭ формирует опыт – создаёт/осваивает или утрачивает/забывает технологии, при различных значениях ФН.

Освоение и забывание технологий различных элементов КД происходит независимо (в вероятностном смысле) и друг от друга, и от успешности выполнения КД:

- для технологии любого j -го элемента КД, неосвоенного при k -м значении ФН ($v_{ijk}(t) = 0$) происходит освоение ($v_{ijk}(t + 1) = 1$) с вероятностью $0 \leq w_{ijk}(y(t), \rho(t), \{v(\cdot) | t - \tau; t\}, \omega(t)) \leq 1$, зависящей в общем случае от действий АЭ, состояния ПЭ, от времени и от текущего $v(t)$ и τ предыдущих состояний опыта АЭ, а с вероятностью $1 - w_{ijk}(\cdot)$ освоение не происходит ($v_{ijk}(t + 1) = 0$);

- для технологии любого j -го элемента КД, освоенного при k -м значении ФН ($v_{ijk}(t) = 1$), происходит забывание ($v_{ijk}(t + 1) = 0$) с вероятностью $0 \leq u_{ijk}(y(t), \rho(t), \{v(\cdot) | t - \tau; t\}, \omega(t)) \leq 1$, зависящей в общем случае от действий АЭ, состояния ПЭ, от времени и от текущего $v(t)$ и τ предыдущих состояний опыта АЭ, а с вероятностью $1 - u_{ijk}(\cdot)$ забывание не происходит ($v_{ijk}(t + 1) = 1$).

Семантика рассматриваемой модели отражает возможность освоения активным элементом технологии, передачи опыта от одних элементов другим, забывание и/или устаревание опыта, в том числе благодаря эволюции внешней среды и повторной адаптации АС к изменениям внешней среды.

При этом процесс освоения – забывания технологии для каждого состояния ФН каждым АЭ предполагается бинарным (состояния = <освоено | не освоено>) и случайным, что отражает неопределённость процесса освоения – забывания. Сами факты освоения – забывания для разных АЭ и разных состояний ФН происходят независимо друг от друга. Предполагается, что в течение одного периода не может происходить более одного события – освоения или забывания. Вместе с тем зависимости вероятностей освоения и забывания от текущих и предыдущих характеристик опыта всех АЭ в составе АС позволяют отражать достаточно сложные закономерности поведения АС. Например, наблюдая одно состояние ФН, АЭ может в общем случае освоить (за счет передачи ему опыта другими АЭ) технологию деятельности, соответствующую другому состоянию ФН.

Запишем уравнения эволюции $q_{ijk}(\cdot)$ вероятностей освоения и математических ожиданий уровней освоения опыта/технологии, используя формулу полной вероятности:

$$\begin{aligned} q_{ijk}(t+1) &= \Pr(v_{ijk}(t+1) = 1 \mid v_{ijk}(t) = 0) \Pr(v_{ijk}(t) = 0) + \Pr(v_{ijk}(t+1) = \\ &= 1 \mid v_{ijk}(t) = 1) \Pr(v_{ijk}(t) = 1) = \\ &= W_{ijk}(y(t), q(t)) (1 - q_{ijk}(t)) + (1 - U_{ijk}(y(t), q(t))) q_{ijk}(t) = \\ &= W_{ijk}(y(t), q(t)) + [1 - W_{ijk}(y(t), q(t)) - U_{ijk}(y(t), q(t))] q_{ijk}(t), \end{aligned}$$

где функции $W_{ijk}(\cdot)$ и $U_{ijk}(\cdot)$ имеют смысл вероятностей $w_{ijk}(\cdot)$ освоения и $u_{ijk}(\cdot)$ забывания, усреднённых по состояниям ФН с учётом их вероятностей $p_{\omega}(t)$ и вероятностей состояний АЭ и ПЭ в текущий и предыдущие периоды, т.е.

$$(5) \quad q_{ijk}(t+1) = W_{ijk}(y(t), q(t)) + [1 - W_{ijk}(y(t), q(t)) - U_{ijk}(y(t), q(t))] q_{ijk}(t),$$

или в разностной форме

$$\Delta q_{ijk}(t+1) = W_{ijk}(y(t), q(t)) - [W_{ijk}(y(t), q(t)) + U_{ijk}(y(t), q(t))] q_{ijk}(t),$$

где

$$(6) \quad \begin{aligned} W_{ijk}(y(t), q(t)) &= \\ &= \sum_{\substack{z(\cdot), \dots, (t-\tau) \in X \\ z_{ijk}(t)=0}} \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{\rho \in \Xi(t)} w_{ijk}(y(t), \rho, \{z(\cdot)/t-\tau; t\}, \omega) q^*(\rho, t) p_{\omega}(t) \pi(\{z(\cdot), q(\cdot)/t-\tau; t\}, \langle ijkt \rangle^-), \end{aligned}$$

$$(7) \quad \begin{aligned} U_{ijk}(y(t), q(t)) &= \\ &= \sum_{\substack{z(\cdot), \dots, (t-\tau) \in X \\ z_{ijk}(t)=1}} \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{\rho \in \Xi(t)} u_{ijk}(y(t), \rho, \{z(\cdot)/t-\tau; t\}, \omega) q^*(\rho, t) p_{\omega}(t) \pi(\{z(\cdot), q(\cdot)/t-\tau; t\}, \langle ijkt \rangle^-), \end{aligned}$$

где $\pi(\{z(\cdot), q(\cdot)/t-\tau; t\}, \langle ijkt \rangle^-)$ – условные вероятности того, что наборы бинарных элементов после периодов $\{t-\tau; t\}$ принимали значения $z(\cdot)$ а вероятности освоения были равны $q(\cdot)$ при условии, что элемент $z_{ijk}(t)$ после t -го периода принял конкретное известное значение. Вероятности $\pi(\cdot)$ вычисляются по формуле (8), где произведение берётся по всем кортежам $\langle \alpha; \beta; \gamma; s \rangle$ кроме кортежа $\langle \alpha; \beta; \gamma; s \rangle = \langle i; j; k; t \rangle$.

$$(8) \quad \begin{aligned} \pi(\{z(\cdot), q(\cdot)/t-\tau; t\}, \langle ijkt \rangle^-) &= \\ &= \prod_{\substack{\alpha=1 \dots N(t); \beta=1 \dots I; \\ \gamma=1 \dots K; s=t-\tau \dots t \\ \langle \alpha; \beta; \gamma; s \rangle \neq \langle i; j; k; t \rangle}} (z_{\alpha\beta\gamma}(s) q_{\alpha\beta\gamma}(s) + (1 - z_{\alpha\beta\gamma}(s)) (1 - q_{\alpha\beta\gamma}(s))). \end{aligned}$$

Таким образом, выражения (5)–(8) определяют оператор $Q(\cdot)$, переводящий характеристики опыта $q(t)$ в $q(t+1)$, параметрами которого являются выбранные действия АЭ $y(t)$ и распределение характеристик ПЭ $q(t)$, т.е. $q(t+1) = Q(y(t), q(t), q^*(\rho, t))$.

Объединяя (4) и (5)–(8), будем говорить, что $Q^*(\cdot)$ и $Q(\cdot)$ совместно задают оператор $\{Q^*(y(t), q(t), q^*(\rho, t), t), Q(y(t), q(t), q^*(\rho, t), t)\}$, характеризующий эволюцию АС в терминах опыта и действий активных элементов, а также характеристик пассивных элементов.

3.7. ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Соотношения (4)–(8) описывают эволюцию распределений вероятностей характеристик опыта активных элементов и характеристик пассивных элементов в зависимости от принимаемых каждым активным элементом решений (выбираемых действий) $y(t)$. Целевые функции каждого АЭ на множестве возможных действий АЭ и характеристик ПЭ заданы (1). Это позволяет рекуррентно вычислять математические ожидания целевых функций (1) каждого из АЭ при заданных начальных значениях v_0 и ρ_0 процессов $v(t)$ и $\rho(t)$ (или их начальных распределениях вероятностей $q(0)$ и $q^*(r, 0)$):

$$(9) \quad \Phi_i^*({y(\cdot)} | 1; t) = E\{\Phi_i({y(\cdot), v(\cdot), \rho(\cdot), \omega(\cdot)} | 1; t)\} = \\ \sum_{\tau=1}^t \delta_i(\tau) E[\varphi_i(y(\tau), v(\tau), \rho(\tau), \omega(\tau), \tau)],$$

где

$$E[\varphi_i(y(\tau), v(\tau), \rho(\tau), \omega(\tau), \tau)] = \\ = \sum_{v \in V; \rho \in \Xi(\tau); \omega \in \Omega} \varphi_i(y(\tau), v, \rho, \omega, \tau) p_\omega(\tau) q^*(\rho, \tau) \pi(v, q(\tau)),$$

а распределение $q^*(s, t)$ и вероятности освоения $q_j(t)$ описываются (4) и (5).

Соотношения (9) (вместе с (4)–(8)) позволяют формулировать и решать в различных постановках многошаговую задачу следующего вида:

$$(10) \quad \Phi_i^*({y(\cdot)} | 1; t) = \\ = \sum_{\tau=1}^t \delta_i(\tau) \sum_{v \in V; \rho \in \Xi(\tau); \omega \in \Omega} \varphi_i(y(\tau), v, \rho, \omega, \tau) p_\omega(\tau) q^*(\rho, \tau) \pi(v, q(\tau)) \rightarrow \max_{\{y(\cdot)/1;t\}}$$

при

$$q(t+1) = Q(y(t), q(t), q^*(\rho, t)); \\ q^*(s, t+1) = Q^*(y(t), q(t), q^*(\rho, t)).$$

Задача (10) является многокритериальной ($i = 1, \dots, n$), поэтому необходимо доопределить, что понимается под её реше-

нием. Возможны различные варианты – поиск Парето-оптимальной траектории действий АЭ, нахождение равновесия их игры того или иного типа и т.д. Некоторые из этих вариантов рассматриваются ниже.

Частным случаем общей модели является ситуация, когда в качестве вектора характеристик ПЭ ρ берется вектор (z, r, d) , компонентами которого являются результат деятельности z , состояние АЭ r и характеристики ресурсов d . Опять же, частным случаем будут уравнения динамики этих факторов (ср. с выражением (2)):

$$(11) z(t + 1) = R_z(y(t), v(t), z(t), r(t), d(t), \omega(t), t),$$

$$(12) r(t + 1) = R_r(y(t), v(t), z(t), r(t), d(t), \omega(t), t),$$

$$(13) d(t + 1) = R_d(y(t), v(t), z(t), r(t), d(t), \omega(t), t).$$

Рис. 4 при этом примет вид, приведенный на рис. 5.

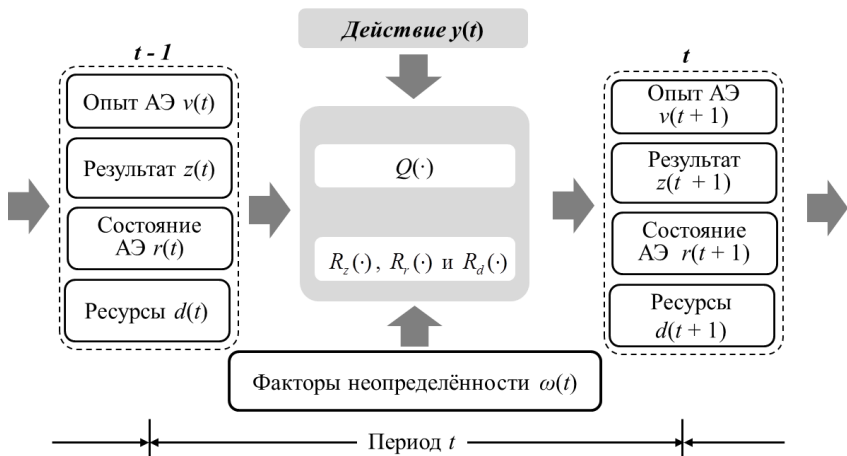


Рис. 5. Функционирование АС в терминах факторов рис. 3

Конкретные модели КД различаются: видом целевых функций и моделей опыта АЭ, а также конкретизацией компонентов $R_z(\cdot)$, $R_r(\cdot)$ и $R_d(\cdot)$ технологической функции, фигурирующих в выражениях (11)–(13).

Описанная в настоящем разделе модель является максимально общей (МЗ1 в соответствии с таблицей 2), т.е. содержит минимум предположений минимум, но и не позволяет получить

аналитических и/или конструктивных выводов. Но зато все остальные 30 моделей (см. таблицу 2) являются ее частными случаями. Многие из этих моделей рассматриваются в книге [4].

Рассмотрим несколько примеров, соответствующих, с одной стороны, модели М1, а с другой – многим распространённым в теории игр, теории принятия решений и ТУОС моделям.

4. Примеры

Пример 1 (СЭД с одним недалновидным субъектом).

Используя введённый выше формализм, опишем реализацию жизненного цикла структурного элемента КД (СЭД), представленного в разделе 5.2 и таблице 10 работы [3].

Рассмотрим активную систему, состоящую из единственного АЭ ($n = 1$), играющего роль *субъекта КД* (в рамках данного примера индекс, указывающий номер АЭ, будем опускать, если это не приводит к неоднозначности).

АЭ может выбирать и выполнять один из J элементов КД, для каждого из которых существует известная АЭ *технология*. Будем считать, что АЭ *недалновиден*, т.е. его распределение дальновидностей имеет вид $\delta(1) = 1$ и $\delta(t) = 0 \forall t > 1$, соответственно его целевая функция равна

$$\Phi^*(y(t)) = E\{\Phi(y(t), v(t), \rho(t), \omega(t))\} = E\{\varphi(y(t), v(t), \rho(t), \omega(t), t)\}.$$

Опишем выбор и реализацию КД в произвольном периоде t .

Пусть после предыдущего периода $t - 1$ характеристики ПЭ и опыт АЭ приняли значения $\rho_0 = \rho(t - 1)$ и $v_0 = v(t - 1)$ соответственно.

Предположим, что АЭ как субъект будущей КД зафиксировал спрос и осознал потребность (стадия I таблицы 10 [3]). Формализуем осознанную потребность и сформулированные *цели* как индикаторную функцию $\psi(\rho_0, y, v_0, \omega_0, t, \Psi)$, принимающую значение 1, если $R(\rho, y, v, \omega, t) \in \Psi$, и значение 0, если $R(\rho, y, v, \omega, t) \notin \Psi$, где Ψ – некоторое *целевое множество* Ψ значений характеристик ПЭ. В частном случае – если единственной целью АЭ является максимизация полезности – можно выбрать $\Psi = \Xi(t)$.

Тогда целеполагание и структурирование целей и задач, а также формирование технологии (стадии II и III таблицы 10 работы [3]) будут заключаться в выборе действия $y(t)$, которое наиболее выгодно АЭ – максимизирует его целевую функцию (совпадающую с функцией полезности в одношаговой задаче) на целевом множестве. Действие $y(t)$ является решением относительно y оптимизационной задачи

$$(14) \quad y(t) = \arg \max_{y \in A} \left\{ \sum_{\omega \in \Omega} \varphi(y, v_0, \rho_0, \omega, t) \psi(\rho_0, y, v_0, \omega, t, \Psi) p_{\omega}(t) \right\}.$$

Выбор действия (14) и реализация значения ФН приводит к результату $\rho(t)$, что соответствует стадии IV таблицы 10 [3].

Стадия V – Оценивание результата и рефлексия, таблицы 10 [3] – заключается в сопоставлении и анализе $y(t)$, $\rho(t)$ и Ψ .

В частном случае, когда неопределённость отсутствует и значение ω_0 ФН в следующем периоде известно, результат КД детерминирован действием, а цель сводится к максимизации функции полезности, получаем следующую простейшую модель рационального поведения:

$$(15) \quad y(t) = \arg \max_{y \in A} \{ \varphi(y, v_0, \rho_0, \omega_0, t, \Psi) \psi(\rho_0, y, v_0, \omega_0, t, \Psi) \}.$$

Пример 2 (игра в нормальной форме). Покажем, что игра в нормальной форме является частным случаем описанной выше общей модели функционирования активной системы.

Рассмотрим АС, состоящую из n АЭ, которые могут выбирать и выполнять один из J элементов КД, для каждого из которых существует известная АЭ технология. Предположим, что АЭ осуществляют выбор своих действий однократно, одновременно и независимо друг от друга.

Будем считать, что все АЭ недальновидны, тогда их целевые функции в периоде t равны

$$\begin{aligned} \Phi_i^*(y(t)) &= E[\Phi_i(y(t), v(t), \rho(t), \omega(t))] = \\ &= E[\varphi_i(y(t), v(t), \rho(t), \omega(t), t)], i \in N. \end{aligned}$$

Пусть после очередного периода $t - 1$ характеристики ПЭ и опыт АЭ приняли значения $\rho_0 = \rho(t - 1)$ и $v_0 = v(t - 1)$ соответственно, а значение ω_0 ФН в периоде t известно.

Предположим, что каждый из АЭ зафиксировал спрос и осознал потребность в результатах КД, отражённые, как и в предыдущем примере, индикаторными функциями предпо-

чтения $\psi_i(\rho_0, y, v_0, \omega_0, t, \Psi_i)$, тогда целевые функции АЭ примут вид $\varphi_i(y, v_0, \rho_0, \omega_0, t) \psi_i(\rho_0, y, v_0, \omega_0, t, \Psi_i)$.

Таким образом, в периоде t имеем:

- множество игроков (активных элементов) $N = \{1, \dots, n\}$;
- множества их допустимых действий $y_i \in A_i, i \in N$;
- целевые функции игроков

$$\varphi_i(y, v_0, \rho_0, \omega_0, t) \psi_i(\rho_0, y, v_0, \omega_0, t, \Psi_i), i \in N.$$

Данная совокупность (совместно с предположением, что она является общим знанием среди игроков – АЭ) задаёт *игру в нормальной форме*, разыгрываемую недальновидными АЭ в периоде t . Далее на основе этой игры в нормальной форме можно конструировать соответствующие повторяющиеся и динамические игры. •

Пример 3 (иерархическая игра Γ_1). Трансформируем игру в нормальной форме в *иерархическую игру* типа Γ_1 [11]: пусть в активная система из примера 2 состоит из двух АЭ. Активный элемент с номером 1 будем называть *центром*, с номером 2 – агентом, АС функционирует в течение двух последовательных периодов. Кроме того, множество возможных действий агента в первом периоде состоит из единственного элемента – действия, которое условно назовём «ожидание», обозначим такое множество $A^w = \{y^w\}$, а множество возможных действий центра во втором периоде также имеет вид A^w , центр и агент знают это условие. Распределение дальновидностей агента и центра одинаковы и равны $\delta(1) = 0, \delta(2) = 1$ и $\delta(t) = 0 \forall t > 2$.

АС функционирует следующим образом:

- в первом периоде центр выбирает некоторое действие $y_1 \in A_1$ по своему усмотрению, действие агента безальтернативно и равно y^w , характеристики ПЭ изменяются как $\rho(t) = R(\rho_0, (y_1; y^w), v_0, \omega_0 t)$;

- во втором периоде действие центра детерминировано y^w , а агент выбирает некоторое выгодное для себя действие $y_2 \in A_2$, что позволяет записать выражение для целевых функций агента и центра

$$\Phi^*_i(\{y(\cdot) \mid 1; 2\}) = \varphi_i((y^w; y_2), v_0, R(\rho_0, (y_1; y^w), v_0, \omega_0 t), \omega_0, t).$$

Данная совокупность (совместно с предположением, что она является общим знанием среди игроков – АЭ) задаёт *иерархическую игру* типа Γ_1 . •

Пример 4 (иерархическая игра Γ_2). Построим теперь *иерархическую игру* типа Γ_2 , как гарантирующую управляющему органу максимальный выигрыш среди всех иерархических игр [11]. Пусть в АС из примера 3 игра развивается в течение трёх периодов, множества возможных действий агента в первом и третьем периодах, а центра во втором равны A^w , центр и агент знают это условие, их распределения дальновидностей одинаковы и равны $\delta(1) = 0, \delta(2) = 0, \delta(3) = 1$ и $\delta(t) = 0 \forall t > 3$.

АС функционирует следующим образом:

- в первом периоде центр формирует стратегию – функцию $\sigma_1(y_2), \sigma_1(\cdot): A_2 \rightarrow A_1$, отображающую множество допустимых действий агента во множество допустимых действий центра, действие агента безальтернативно и равно y^w , выбор стратегии, как и действие y^w , никак не сказываются на характеристиках ПЭ, поэтому они не изменяются;

- во втором периоде действие центра детерминировано y^w , а агент выбирает некоторое выгодное для себя действие $y_2 \in A_2$, характеристики ПЭ изменяются согласно $\rho(t+1) = R(\rho_0, (y^w; y_2), v_0, \omega_0 t)$;

- в третьем периоде действие центра задано функцией $\sigma_1(y_2)$, а действие агента – y^w , что позволяет записать выражение для целевых функций агента и центра $\Phi^*_i(\{y(\cdot) \mid 1; 3\}) = \varphi_i((\sigma_1(y_2); y^w), v_0, R(\rho_0, (y^w; y_2), v_0, \omega_0 t), \omega_0, t)$.

Данная совокупность (совместно с предположением, что она является общим знанием среди игроков – АЭ) задаёт *иерархическую игру* типа Γ_2 . •

Пример 5 (совокупность СЭДов с многими субъектами).

Комплексная деятельность, её субъект, технология и предмет, как правило, характеризуются иерархическими, фрактальными отношениями между элементами. Представленная выше общая модель АС в силу минимальности предположения о свойствах введённых функций, множеств их значений и множеств аргументов позволяет учесть фрактальность/иерархии КД.

Следуя идеям [2, 7] и опираясь на рассмотренные выше примеры иерархических игр, рассмотрим АС из примеров 2–4, на множестве АЭ которой задано несколько многоуровневых иерархий активных подсистем – АС, включающих АЭ и ПЭ. Предполагаем, каждая из иерархий

- является многоэлементной АС, с одним центром, с ограничениями на совместную КД в форме технологии КД, динамическая [2];
- выполняет КД и накапливает опыт и делает это статистически независимо от других;
- связана с другими иерархиями через единую совокупность ПЭ (см. рис. 6).

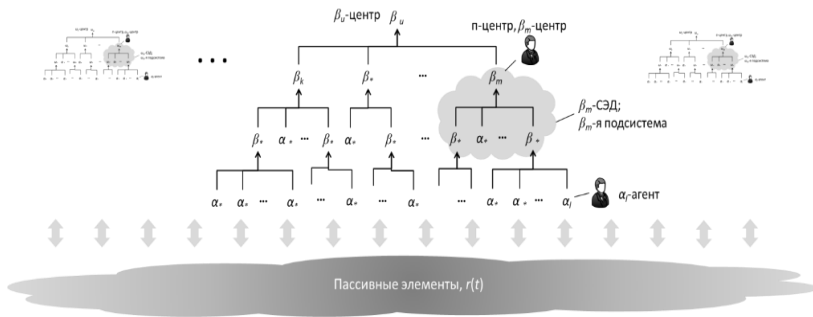


Рис. 6. Иерархии целей и активных элементов (агентов и промежуточных центров)

Иерархическая структура такой многоуровневой АС [2] задаётся иерархиями целей комплексной деятельности, осуществляемой АС (см. рис. 6). Некоторые из целей КД не допускают или не требуют дальнейшей декомпозиции, обозначим их множество как $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, $l \geq 2$. Такие цели α_i достигаются элементарными операциями, активные элементы (АЭ), реализующие элементарные операции, будем называть агентами (ссылаясь на конкретный экземпляр как на α_i -агент). Для достижения всех остальных целей (их множество будем обозначать $B = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$, $m \geq 2$) формируются СЭДы, представляемые также в форме АС. Субъектов СЭДов, выступающих в роли

центров таких АС (β_i -подсистем), будем называть, следуя [2], промежуточными центрами, п-центрами или β_i -центрами. Согласно МКД агенты выполняют собственно целевую комплексную деятельность, в то время как п-центры осуществляют управление (включая организацию) КД – формируют СЭДы и реализуют их жизненные циклы, следуя «универсальному алгоритму управления» – процессной модели (раздел 2.1 работы [3]).

Примеры 3 и 4 могут быть распространены на данную АС следующим образом.

Пусть D максимальная глубина всех иерархий в АС (максимальная по всем α_i -агентам длина пути от вершины, соответствующей α_i -агенту, до корневой вершины, в примере 2 $D = 0$, в примерах 3 и 4 $D = 1$). Реализации иерархической игры типа Γ_1 , пример 3, отвечает следующее функционирование АС:

- в первых D периодах п-центры последовательно, начиная с вышестоящих, выбирают действия $y_{\beta_i} \in A_{\beta_i}$ в цикле по d от 0 до $D - 1$ поочередно, причём делают это те β_i -центры, длина пути от которых до корня иерархии равна d , действия агентов и остальных п-центров безальтернативны и равны y^w ;

- в $(D + 1)$ -м периоде действия всех п-центров детерминированы y^w , а агенты выбирают некоторые выгодные для себя действия $y_{\alpha_i} \in A_{\alpha_i}$, что позволяет записать выражение для целевых функций агентов и п-центров аналогично примеру 3.

Примеру 4 (иерархическая игра типа Γ_2) соответствует следующий механизм:

- в первых D периодах п-центры последовательно, начиная с вышестоящих, формируют стратегии в цикле по d от 0 до $D - 1$: поочередно формирует стратегии – функции, отображающие множество допустимых действий подчинённых им агентов и п-центров во множество допустимых действий β_i -центров, причём делают это только п-центры, длина пути от которых до корня иерархии равна d , действия агентов и остальных п-центров безальтернативны и равны y^w ;

- в $(D + 1)$ -м периоде действия всех п-центров детерминированы y^w , а агента выбирают некоторые выгодные для себя действия $y_2 \in A_2$;

- в периодах с $D + 2$ по $2D + 1$ в цикле по d , меняющегося от $D - 1$ до 0 , действия п-центров, расстояние которых до корневых вершин иерархий равно d , задано выбранными ранее стратегиями, а действие агентов и остальных п-центров – y^w , что позволяет записать выражение для целевых функций агентов и п-центров аналогично примеру 4. •

Таким образом, общая модель деятельности включает как частные случаи базовые модели принятия решений и теории игр, правда, быть может, делая это несколько более громоздко, чем последние. Но зато она позволяет охватить и разнообразное множество других явлений и эффектов – см. основывающиеся на ней модели деятельности в [4].

5. Заключение

Общая модель деятельности, рассмотренная в третьем разделе, охватывает описание совместной деятельности нескольких АЭ. Параметрами этой модели являются:

- множество АЭ N ;
- множества $\{A_i\}$ допустимых действий АЭ, $i \in N$;
- распределение $p_\omega(t)$ вероятностей комплексных факторов неопределенности;
- функции полезности АЭ $\{\varphi_i(y(t), v(t), \rho(t), \omega(t), t), i \in N\}$ и распределения $\{\delta_i(t), i \in N\}$ их дальновидностей;
- технологические функции $\{R_m(\rho(t), y(t), v(t), \omega(t), t), m = 1, \dots, M\}$.

«Входами» базовой модели являются:

- начальный момент времени t^0 (выше он для простоты считался нулевым);
- продолжительность (число периодов) функционирования T ;
- начальные значения характеристик опыта $v(t^0)$ активных элементов;
- начальные значения характеристик $r(t^0)$ пассивных элементов.

«Выходами» базовой модели являются уравнения динамики:

- характеристик пассивных элементов (2)–(4), (11)–(13);
- характеристик опыта (5)–(8) активных элементов;
- действий активных элементов (10).

Базовая модель охватывает как частные случаи:

- модель простейшего структурного элемента деятельности [3], состоящего из единственной элементарной операции;
- принятие индивидуальных решений в условиях вероятностной неопределенности (см. пример 1);
- теоретико-игровое некооперативное взаимодействие АЭ (см. пример 2);
- модели формирования и освоения опыта (см. статью [5]);
- модели совместной динамики внешних и внутренних компонент деятельности (см. статью [16]).

Перспективным направлением дальнейших исследований представляется построение и систематическое исследование моделей М1–М30 (см. таблицу 2), часть из которых рассмотрена в [4].

Литература

1. БАРКАЛОВ С.А., ВОРОПАЕВ В.И., СЕКЛЕТОВА Г.И. и др. *Математические основы управления проектами* / Под ред. В.Н. Буркова. – М.: Высшая школа, 2005. – 423 с.
2. БЕЛОВ М.В. *Согласованное управление многоэлементными динамическими организационными системами* // Проблемы управления. – 2020. – Ч. 1.: №1. – С. 39–47; Ч. 2: №2. – С. 36–46.
3. БЕЛОВ М.В., НОВИКОВ Д.А. *Методология комплексной деятельности*. – М.: Ленанд, 2018. – 320 с.
4. БЕЛОВ М.В., НОВИКОВ Д.А. *Модели деятельности*. – М.: Ленанд, 2021.
5. БЕЛОВ М.В., НОВИКОВ Д.А. *Модели опыта* // Проблемы управления. – 2021. – №1. – С. 43–60.
6. БЕЛОВ М.В., НОВИКОВ Д.А. *Модели технологий*. – М.: Ленанд, 2018. – 157 с.
7. БЕЛОВ М.В., НОВИКОВ Д.А. *Управление жизненными циклами организационно-технических систем*. – М.: Ленанд, 2020. – 384 с.

8. БУРКОВ В.Н. *Основы математической теории активных систем.* – М.: Наука, 1977. – 255 с.
9. БУРКОВ В.Н., КОНДРАТЬЕВ В.В. *Механизмы функционирования организационных систем.* – М.: Наука, 1981. – 384 с.
10. БУРКОВ В.Н., ГОРГИДЗЕ И.А., ЛОВЕЦКИЙ С.Е. *Прикладные задачи теории графов.* – Тбилиси: ВЦ АН ГССР, 1974. – 232 с.
11. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с противоположными интересами.* – М.: Наука, 1976. – 327 с.
12. ГОРБАНЬ А.Н., ХЛЕБОПРОС Р.Г. *Демон Дарвина. Идея оптимальности и естественный отбор.* – М.: Физматлит, 1988. – 208 с.
13. ЕМЕЛЬЯНОВ В.В., КУРЕЙЧИК В.В., КУРЕЙЧИК В.М. *Теория и практика эволюционного моделирования.* – М.: Физматлит, 2003. – 432 с.
14. НОВИКОВ А.М., НОВИКОВ Д.А. *Методология.* – М.: СИНТЕГ, 2007. – 668 с.
15. НОВИКОВ Д.А. *Математические модели формирования и функционирования команд.* – М.: Физматлит, 2012. – 186 с.
16. НОВИКОВ Д.А. *Модели динамики психических и поведенческих компонент деятельности в коллективном принятии решений // Управление большими системами.* – 2020. – №85. – С. 206–237.
17. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами.* 3-е изд. – М.: Физматлит, 2012. – 604 с.
18. НОВИКОВ Д.А. *Управление, деятельность, личность.* – М.: ИПУ РАН, 2020. – 80 с.
19. ОЖЕГОВ С.И. *Словарь русского языка.* 23-е изд. – М.: Русский язык, 1991. – 917 с.
20. ПЛАТОНОВ К.К. *Краткий словарь системы психологических понятий.* – М.: Высшая школа, 1984. – 174 с.
21. ПОЛЯК Б.Т., РАПОПОРТ Л.Б., ХЛЕБНИКОВ М.В. *Математическая теория автоматического управления.* – М.: Ленанд, 2019. – 504 с.
22. *Теория управления (дополнительные главы).* – М.: Ленанд, 2019. – 552 с.

23. BECKER G. *Human Capital: A Theoretical and Empirical Analysis with Special Reference to Education*. 3rd ed. – Chicago and London: The University of Chicago Press, 1993. – 412 p.
24. BURKOV V. et al. *Mechanism Design and Management: Mathematical Methods for Smart Organizations*. – New York: Nova Science Publishers, 2013. – 163 p.
25. BREER V., NOVIKOV D., ROGATKIN A. *Mob Control: Models of Threshold Collective Behavior*. – Heidelberg: Springer, 2017. – 159 p.
26. CHKHARTISHVILI A., GUBANOV D., NOVIKOV D. *Social Networks: Models of Information Influence, Control and Confrontation*. – Heidelberg: Springer, 2019. – 194 p.
27. FEIST J., FEIST G. *Theories of Personality*. 9th ed. – N.Y.: McGraw-Hill Education, 2017. – 672 p.
28. HUNTER J., DANES J., COHEN S. *Mathematical Models of Attitude Change*. – Orlando: Academic Press, 1984. – 339 p.
29. LAFFONT G., MARTIMORT D. *The Theory of Incentives: The Principal-Agent Model*. – Princeton: Princeton University Press, 2001. – 421 p.
30. NOVIKOV D. *Regularities of Iterative Learning*. – Moscow: ICS RAS, 2019. – 67 p.
31. SALANIE B. *The Economics of Contracts*. – Cambridge: MIT Press, 2005. – 224 p.
32. SCHULTZ D., SCHULTZ S. *Theories of Personality*. 11th ed. – Boston: Cengage Learning, 2016. – 512 p.

CLASSIFICATION OF MATHEMATICAL MODELS OF ACTIVITY

Mikhail Belov, SkolThech, Moscow, Doctor of Science (mbelov59@mail.ru).

Dmitry Novikov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (novikov@ipu.ru).

Abstract: Within the framework of the systemic model of activity, the minimum complete set of measurable factors describing it is proposed: action, result of activity (state of the subject of activity), internal state of the subject of activity, his experience and resources used. A system of classifications of mathematical models of activity, taking into account various combinations of these factors, has been intro-

duced. A general model describing the relationship between them is considered. It is shown that particular cases of the general model are the well-known decision-making models, models of mastering individual and collective experience, as well as models of joint dynamics of behavioral and mental components of activity, which are basic for the theory of management of organizational systems.

Keywords: activity, technology, experience, model of activity.

УДК 519.21;519.714.3;681.518

ББК 22.18

DOI: 10.25728/ubs.2021.91.1

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким.*

Поступила в редакцию 16.05.2021.

Опубликована 31.05.2021.

АНИЗОТРОПИЙНЫЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ¹

Белов И. Р.²

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

В 90-е годы прошлого века была введена анизотропийная теория управления, методы которой используются при решении задач управления и фильтрации для линейных систем с детерминированными матрицами, на вход которых подаются случайные возмущения с неизвестными точно статистическими характеристиками. В данной теории введено понятие анизотропии как меры отклонения распределения случайного вектора от стандартного гауссовского распределения. В данной работе представлены решения задач анизотропийного анализа для частного случая линейных дискретных систем со стохастическими матрицами, а именно систем с мультипликативными шумами. Рассмотрены задачи вычисления анизотропийной нормы в пространстве состояний и формулировки условий ограниченности анизотропийной нормы сверху заданной величиной для таких систем на конечном интервале времени. Условия ограниченности анизотропийной нормы представлены в двух вариациях: в терминах разностных уравнений Риккати и в терминах неравенства Риккати. Последний вариант условий ограниченности может быть преобразован в систему линейных матричных неравенств. Полученные результаты анизотропийного анализа позволяют решать задачи субоптимального управления и фильтрации для подобных систем. Для демонстрации применения этих результатов в работе приведен численный пример решения задач анизотропийного анализа для линейной дискретной нестационарной системы с мультипликативными шумами, описывающей продольное движение самолета в режиме посадки.

Ключевые слова: линейные дискретные нестационарные системы, случайные возмущения, мультипликативные шумы, норма, анизотропия, разностное уравнение Риккати, неравенство Риккати.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №19-31-90060. Автор признателен А.Ю. Кустову, А.В. Юрченкову и В.Н. Тимину за ценное обсуждение содержания статьи.

² Иван Романович Белов, аспирант (ivanb1993@mail.ru).

1. Введение

Большой научный интерес с прошлого века по настоящее время представляют стохастические системы и соответствующие им задачи анализа и синтеза. Это связано с тем, что широкий класс реальных технических объектов с хорошей точностью описывается математическими моделями в виде линейных и нелинейных систем с элементами случайной природы. Решение задач управления и фильтрации для стохастических систем общего вида является крайне трудоемким, и универсальных методов решения на данный момент не существует. Чаще всего вводятся определенные допущения о структуре стохастической системы. Одним из известных частных случаев таких допущений являются системы с мультипликативными шумами [18, 33, 34]. Подобные системы достаточно эффективно описывают динамику различных процессов в физике, биологии, экономике и многих других сферах. Уже выпущено множество статей на темы задач робастного управления [17], оценивания состояния системы [27], линейного квадратичного управления [14] и многие других для систем с мультипликативными шумами.

Чаще всего предполагается, что мультипликативные шумы внутри системы обладают известными статистическими моментами, т.е. являются статистически определенными. Но сказать то же самое о свойствах внешних возмущений чаще всего не представляется возможным. Если внешние возмущения являются случайными и их статистические моменты неизвестны, то они могут оказать большое влияние на качество работы рассматриваемой системы. Для описания качества работы системы используются определенные функционалы, которые называют критериями качества. Одним из наиболее известных критериев является среднеквадратичный коэффициент усиления. Он описывает в терминах норм входа и выхода системы ее реакцию на входное возмущение. Если входное возмущение является случайным, то нормы входа и выхода системы определяются их первыми и вторыми статистическими моментами. Значение ВКУ варьиру-

ется в зависимости от свойств входного возмущения и соответственно разделяются типы задач анализа и методы их решения. К примеру, в задачах \mathcal{H}_2 -теории [7, 8, 12, 29] вводится предположение, что входное возмущение рассматриваемой системы является гауссовским белым шумом. Также предполагается, что точно известны параметры модели исследуемого объекта, т.е. матрицы линейной системы объекта являются детерминированными. Подобные предположения о свойствах возмущения являются достаточно строгими и редко оказываются абсолютно верными. Отсюда очевиден основной недостаток \mathcal{H}_2 -теории – отсутствие робастности. Другим известным классом задач анализа являются задачи \mathcal{H}_∞ -теории [9–11, 19, 23, 41]. При постановке подобных задач действует предположение о наихудшем сценарии входного возмущения, которое обеспечивает максимальное значение SKU системы. При использовании данного подхода математически конструируется наихудший формирующий фильтр, выходом которого является входное возмущение исходной системы. Используя подход \mathcal{H}_∞ -теории, можно определить отклик системы на наихудшее из возможных возмущений с ограниченной энергией. Однако подобное предположение также редко оказывается верным и его использование не всегда целесообразно.

У подходов \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -теорий есть свои существенные недостатки. Поэтому существует целый ряд работ, посвященных поиску новых подходов к решению задач анализа и синтеза для систем с неопределенным внешним возмущением. Одним из примеров является цикл работ по анизотропийной теории [2, 3, 13, 31, 37, 38], которая была представлена в 90-е годы прошлого века. Основой данной теории являются введенные понятия анизотропии случайного вектора, средней анизотропии последовательности векторов и анизотропийной нормы системы. Анизотропию случайного вектора можно рассматривать как меру отклонения распределения данного вектора от стандартного гауссовского распределения. Это позволяет описывать случайные векторы с неизвестными статистическими характеристиками с помощью одной величины. Методы анизотропийной теории

использовались при решении задач управления и фильтрации для линейных систем непрерывного и дискретного времени, с постоянными и переменными матрицами. В [35] приведено решение задачи оптимальной анизотропийной фильтрации в случае линейной дискретной нестационарной системы на конечном интервале времени в терминах разностного уравнения Риккати с дополнительным условием в виде алгебраического уравнения специального вида. В [26] приведена формулировка леммы об ограниченности анизотропийной нормы для линейных нестационарных систем. Задача субоптимальной анизотропийной фильтрации для линейных нестационарных систем с неслучайными матрицами была решена в [6]. Полученные результаты анизотропийного анализа и синтеза используются при решении задач управления и фильтрации для других классов линейных систем, ранее не рассмотренных в рамках данной теории.

Также существуют и другие способы описания статистических неопределенностей в самой системе и внешних возмущениях, поступающих на вход системы. К примеру, в [39] неопределенность случайного возмущения характеризуется с помощью условной относительной энтропии, а устойчивость системы к таким возмущениям характеризуется индексом робастности. Помимо анизотропии, неопределенности могут быть описаны с помощью политопов [20, 40]. Также при решении задач анализа и стабилизации систем с неопределенностями используется лемма Питерсона [24, 28, 30].

Поскольку методы анизотропийной теории являются обобщением методов \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -теорий и они менее подвержены недостаткам данных теорий, задачи анизотропийного анализа и синтеза для систем с мультипликативными шумами представляют большой интерес и результаты их решения могут иметь большое теоретическое и практическое значение. Но прежде чем приступать к задачам синтеза, необходимо определить алгоритм вычисления самой анизотропийной нормы для таких систем в пространстве состояний и условия ее ограниченности в терминах уравнений и неравенств Риккати. Подобные задачи относят-

ся к анизотропийному анализу и именно им посвящена данная работа.

2. Предварительные сведения

Перед описанием класса рассматриваемых систем введем необходимые обозначения. Пусть \mathbb{R}^n – множество n -мерных векторов с элементами из \mathbb{R} ; $\mathbb{R}^{n \times m}$ – множество $(n \times m)$ -мерных матриц с элементами из \mathbb{R} ; \mathbb{L}_2^n – множество \mathbb{R}^n -значных интегрируемых с квадратом случайных векторов; $\mathbb{L}_2^{n \times m}$ – множество $\mathbb{R}^{n \times m}$ -значных интегрируемых с квадратом случайных матриц; $\mathbf{E}(x)$ – математическое ожидание случайной величины x . В выкладках статьи будут использоваться следующие матричные и векторные нормы:

$$1) \|x\|_2 = \sqrt{\mathbf{E}(x^\top x)} \text{ – норма случайного вектора } x \text{ из } \mathbb{L}_2^n;$$

$$2) \|X\|_2 = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{E}(X^\top X))} \text{ – 2-норма случайной матрицы } X \text{ из } \mathbb{L}_2^{n \times m};$$

$$3) \|X\|_\infty = \sqrt{\max_i (\lambda_i(\mathbf{E}(X^\top X)))} \text{ – } \infty\text{-норма случайной матрицы } X \text{ из } \mathbb{L}_2^{n \times m}, \text{ где } \lambda_i(\mathbf{E}(X^\top X)) \text{ – собственные значения матрицы } \mathbf{E}(X^\top X).$$

$$4) \Phi_M(X) \text{ – блочно-диагональная матрица из } M \text{ матриц } X.$$

Далее приведено описание объекта исследования данной работы и основные понятия анизотропийной теории, используемые в рассматриваемых задачах анизотропийного анализа.

2.1. Системы с мультипликативными шумами

В данной работе рассматриваются линейные дискретные нестационарные системы на конечном интервале времени $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ с реализацией в пространстве состояний вида

$$(1) \quad T_{zw} \sim \begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)w(k), \\ z(k) = C(k)x(k) + D(k)w(k), \end{cases}$$

где $x(k) \in \mathbb{L}_2^{n_x}$ – вектор состояния системы с начальным условием $x(0) = 0$; $w(k) \in \mathbb{L}_2^{m_w}$ – вектор входного внешнего возмущения системы; $z(k) \in \mathbb{L}_2^{p_z}$ – вектор оцениваемого выхода. Матрицы системы $A(k), B(k), C(k), D(k)$ являются случайными

матрицами специального вида

$$A(k) = A_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{1i}(k) A_i(k) \in \mathbb{L}_2^{n_x \times n_x},$$

$$B(k) = B_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{2i}(k) B_i(k) \in \mathbb{L}_2^{n_x \times m_w},$$

$$C(k) = C_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{3i}(k) C_i(k) \in \mathbb{L}_2^{p_z \times n_x},$$

$$D(k) = D_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{4i}(k) D_i(k) \in \mathbb{L}_2^{p_z \times m_w},$$

где $\xi_{ji}(k)$ при всех $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ и $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ являются независимыми в совокупности по i, j, k скалярными случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Стоит отметить, что $\xi_{ji}(k)$ также являются независимыми со случайным возмущением $w(t)$ при любых k и t .

Поскольку система (1) имеет нулевое начальное состояние и рассматривается на конечном интервале времени $k \in \{0, 1, \dots, N\}$, ее также можно описать с помощью вход-выходного соотношения вида

$$(2) \quad Z_{0:N} = F_{0:N} W_{0:N},$$

где $Z_{0:N} = (z^\top(0), \dots, z^\top(N))^\top \in \mathbb{L}_2^{p_z(N+1)}$ – последовательность выходных сигналов системы, $W_{0:N} = (w^\top(0), \dots, w^\top(N))^\top \in \mathbb{L}_2^{m_w(N+1)}$ – последовательность входных сигналов системы. Для сокращения записи дальнейших выкладок введем обозначения $l_z = p_z(N+1)$, $l_w = m_w(N+1)$. Матрица связи в $Z_{0:N} = F_{0:N} W_{0:N}$ имеет вид $F_{0:N} = \text{block}_{0 \leq k, \kappa \leq N} (f(k, \kappa))$, где

$$(3) \quad f(k, \kappa) = \begin{cases} C(k)T(k, \kappa+1)B(\kappa), & \text{если } k > \kappa, \\ D(k), & \text{если } k = \kappa, \\ 0, & \text{если } k < \kappa. \end{cases}$$

Матрица перехода $T(k, \kappa)$ для $k > \kappa$ удовлетворяет рекуррентной формуле $T(k, \kappa) = A(k-1)T(k-1, \kappa) = T(k, \kappa+1)A(\kappa)$ при граничном условии $T(k, k) = I_{n_x}$. Стоит отметить, что случайная матрица $F_{0:N}$ и случайный вектор $W_{0:N}$ являются независимыми в силу независимости случайных величин $\xi_{ji}(k)$ и $w(k)$. Поскольку рассматриваемая система (1) полностью описывается соотношением (2) на конечном временном интервале, нормы этой системы эквивалентны соответствующим нормам матрицы $F_{0:N}$, т.е. аналогом \mathcal{H}_2 -нормы системы является 2-норма матрицы $F_{0:N}$, которая определяется по формуле

$$\|T_{zw}\|_2 = \|F_{0:N}\|_2 = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}])}.$$

Меру отклика системы T_{zw} на входной вектор $W_{0:N}$ можно описать с помощью среднеквадратичного коэффициента усиления (СКУ), который определяется по формуле

$$(4) \quad \mathbf{Q}(F_{0:N}, W_{0:N}) = \frac{\|Z_{0:N}\|_2}{\|W_{0:N}\|_2}.$$

С учетом независимости $F_{0:N}$ и $W_{0:N}$ среднеквадратичный коэффициент усиления можно записать следующим образом:

$$(5) \quad \mathbf{Q}(F_{0:N}, W_{0:N}) = \sqrt{\frac{\text{tr}(\Lambda\Sigma)}{\text{tr}(\Sigma)}},$$

где $\Lambda = \mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}] \in \mathbb{R}^{l_w \times l_w}$, $\Sigma = \mathbf{E}[W_{0:N} W_{0:N}^\top] \in \mathbb{R}^{l_w \times l_w}$. Аналогом \mathcal{H}_∞ -нормы системы T_{zw} является ∞ -норма матрицы $F_{0:N}$, которая равна максимальному сингулярному числу матрицы $F_{0:N}$ и определяется выражением

$$(6) \quad \|T_{zw}\|_\infty = \sigma_{\max}(F_{0:N}) = \max_i \sqrt{\lambda_i(\mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}])}.$$

Стоит отметить, что значение ∞ -нормы матрицы $F_{0:N}$ системы T_{zw} равно супремуму СКУ по всем векторам $W_{0:N} \in \mathbb{L}_2^{l_w}$. Далее кратко изложены теоретические аспекты анизотропийной теории, необходимые для понимания сути рассматриваемых в работе задач анизотропийного анализа.

2.2. Анизотропия случайного вектора

При создании анизотропийной теории использовались теоретические понятия из таких областей математики, как теория вероятности и теория информации. К примеру, понятие анизотропии случайного вектора основано на определениях относительной энтропии или расстояния Кульбака – Лейблера и дифференциальной энтропии. В [35] определение сформулировано следующим образом.

Определение 1. Анизотропией $\mathbf{A}(W)$ m -мерного случайного вектора W называется неотрицательная величина, определённая по формуле

$$(7) \quad \mathbf{A}(W) = \min_{\lambda > 0} \mathbf{D}(f \| p_{m,\lambda}) = \frac{m}{2} \ln \left(\frac{2\pi e}{m} \|W\|^2 \right) - \mathbf{h}(W),$$

где $\mathbf{D}(f \| p_{m,\lambda})$ – относительная энтропия (расстояние Кульбака – Лейблера) функции плотности распределения вероятности f вектора W относительно функции плотности гауссовского распределения $p_{m,\lambda}$ с нулевым математическим ожиданием и скалярной ковариационной матрицей λI_m , $\lambda > 0$; $\mathbf{h}(W) = - \int_{\mathbb{R}^m} f(w) \ln f(w) dw$ – дифференциальная энтропия W .

По формуле вычисления анизотропии видно, что ее значение определяется функцией распределения f случайного вектора W и его первыми двумя статистическими моментами, причем последнее слагаемое $h(W)$ определяется только функцией распределения. Важно отметить следующие свойства анизотропии:

Лемма 1. [1] Анизотропия $\mathbf{A}(W)$ случайного вектора $W \in \mathbb{L}_2^m$ обладает следующими свойствами:

а) для любой положительно определенной матрицы $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$, являющейся ковариационной матрицей случайного вектора W , минимум анизотропии $\mathbf{A}(W)$ вычисляется по формуле

$$(8) \quad \min \left\{ \mathbf{A}(W) : W \in \mathbb{L}_2^m, \mathbf{E}[WW^\top] = \Sigma \right\} = -\frac{m}{2} \ln \det \frac{m\Sigma}{\text{tr}(\Sigma)},$$

причем минимум достигается только на гауссовском векторе W

с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей Σ ;

б) для любого вектора $W \in \mathbb{L}_2^m$ анизотропия $\mathbf{A}(W)$ является неотрицательной величиной. Нулевое значение анизотропии соответствует гауссовскому случайному вектору W с нулевым математическим ожиданием и скалярной ковариационной матрицей λI_m .

Из второго пункта данной леммы видно, что случай нулевой анизотропии соответствует задачам \mathcal{H}_2 -теории, для которых действует предположение о входном возмущении в виде гауссовского белого шума. С помощью понятия анизотропии случайного вектора можно описать множество входных случайных возмущений системы (1). Далее будем предполагать, что на вход системы поступают случайные возмущения, последовательность которых описывается вектором $W_{0:N}$ с ограниченной анизотропией $\mathbf{A}(W_{0:N})$. В следующем подразделе перейдем к понятию анизотропийной нормы системы.

2.3. Анизотропийная норма системы

Упомянутое в конце предыдущего подраздела множество случайных векторов с ограниченной сверху анизотропией обозначим следующим образом:

$$\mathbb{W}_a = \{W \in \mathbb{L}_2^m : \mathbf{A}(W) \leq a\},$$

где $a \geq 0$ – заданная неотрицательная величина. На основании определений среднеквадратичного коэффициента усиления $\mathbf{Q}(F_{0:N}, W_{0:N})$ и понятия анизотропии случайного вектора $\mathbf{A}(W_{0:N})$ приведем определение анизотропийной нормы.

Определение 2. Анизотропийной нормой матрицы $F_{0:N}$ называется неотрицательная величина вида

$$(9) \quad \|F\|_a = \sup_{W_{0:N} \in \mathbb{W}_a} \mathbf{Q}(F_{0:N}, W_{0:N}).$$

Как упоминалось ранее, система (1) полностью описывается соотношением (2) и нормы системы эквивалентны соответствующим нормам матрицы $F_{0:N}$. Следовательно, анизотропий-

ная норма системы (1) совпадает с анизотропийной нормой матрицы $F_{0:N}$. Стоит отметить, что анизотропийная норма является неубывающей функцией от a и ее значение лежит в интервале между масштабированной 2-нормой и ∞ -нормой системы, т.е. справедливы следующие неравенства:

$$(10) \quad \frac{\|T_{zw}\|_2}{\sqrt{l_w}} = \|T_{zw}\|_0 \leq \|T_{zw}\|_a,$$

$$(11) \quad \|T_{zw}\|_a < \lim_{a \rightarrow +\infty} \|T_{zw}\|_a = \|T_{zw}\|_\infty.$$

При этом для рассматриваемой системы должно выполняться условие

$$\|T_{zw}\|_2 / \sqrt{l_w} < \|T_{zw}\|_\infty.$$

Данное неравенство нарушается только в том случае, когда матрица $F_{0:N}^\top F_{0:N}$ имеет вид $F_{0:N}^\top F_{0:N} = \lambda l_w$ для некоторого $\lambda \geq 0$. Если данное условие выполняется при $\lambda = 1$, то систему называют изометричной.

Из определения анизотропийной нормы видно, что для ее вычисления необходимо определить наихудшее входное возмущение $W_{0:N} \in \mathbb{W}_a$, при котором достигается супремум среднеквадратичного коэффициента усиления. Поскольку $W_{0:N}$ является случайным вектором, для его определения необходимо получить его функцию распределения и первые два статистических момента. Вычисление анизотропийной нормы в пространстве состояний является целью первой задачи анизотропийного анализа. Вторая задача анализа заключается в формулировке условий ограниченности анизотропийной нормы системы (1) заданным числом $\gamma \geq 0$ при заданном параметре $a \geq 0$. Постановке и решению этих задач посвящены разделы 2 и 3 данной работы.

2.4. Критерий изометричности системы

При доказательстве теоремы о вычислении анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами, которое приведено в разделе 3, используется критерий изометричности системы. Поскольку изначально в формулировке критерия изометричности система подразумевается не стохастической, для рассматриваемого случая системы с мультипликативными шумами

необходимо вывести необходимые и достаточные условия изометричности в терминах матриц системы. Для того чтобы привести формулировку критерия изометричности системы в терминах ее матриц, необходимо ввести вспомогательные матрицы. На основании выражения элементов матрицы $\mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}]$ определим матрицы $P(k)$ и $Q(k)$ на интервале $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ следующим образом:

$$(12) \quad P(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{E}[T(k, j+1)] \cdot \mathbf{E}[B(j)] \cdot \mathbf{E}[B^\top(j)] \cdot \mathbf{E}[T^\top(k, j+1)],$$

$$(13) \quad Q(k) = \sum_{j=k}^N \mathbf{E}[T^\top(j, k) \cdot \mathbf{E}[C^\top(j)C(j)] \cdot T(j, k)],$$

где $T(k, \kappa)$ – матрица перехода, удовлетворяющая выражению $T(k, \kappa) = A(k-1)T(k-1, \kappa) = T(k, \kappa+1)A(\kappa)$. Матрицы $P(k)$ и $Q(k)$ удовлетворяют рекуррентным формулам

$$(14) \quad P(k+1) = \mathbf{E}[A(k)] \cdot P(k) \cdot \mathbf{E}[A^\top(k)] + \mathbf{E}[B(k)] \cdot \mathbf{E}[B^\top(k)],$$

$$(15) \quad Q(k) = \mathbf{E}[A^\top(k)Q(k+1)A(k)] + \mathbf{E}[C^\top(k)C(k)],$$

где $P(0) = 0$, $Q(N+1) = 0$. Запишем по аналогии с критерием для детерминированного случая [36] критерий изометричности для линейных дискретных нестационарных систем с мультипликативными шумами на конечном временном интервале $k \in \{0, 1, \dots, N\}$:

Лемма 2 (Критерий изометричности). *Линейная дискретная нестационарная система с мультипликативными шумами вида (18) является изометричной тогда и только тогда, когда при всех $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ матрицы системы удовлетворяют уравнениям*

$$(16) \quad \sum_{i=0}^M \left[B_i^\top(k)Q(k+1)B_i(k) + D_i^\top(k)D_i(k) \right] = I_{m_w},$$

$$(17) \quad P(k) \left[A_0^\top(k)Q(k+1)B_0(k) + C_0^\top(k)D_0(k) \right] = 0,$$

где матрицы $P(k)$ и $Q(k)$ определяются выражениями (14)–(15).

3. Постановка задачи

Рассмотрим линейную дискретную нестационарную систему с мультипликативными шумами вида

$$(18) \quad T_{zw} \sim \begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)w(k), \\ z(k) = C(k)x(k) + D(k)w(k), \end{cases}$$

на конечном временном интервале $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ с начальным состоянием $x(0) = 0$. Здесь $x(k) \in \mathbb{L}_2^{n_x}$ – вектор состояния системы, $w(k) \in \mathbb{L}_2^{m_w}$ – вектор входного возмущения, а $z(k) \in \mathbb{L}_2^{p_z}$ – вектор оцениваемого выхода системы. Матрицы системы $A(k), B(k), C(k), D(k)$ являются случайными матрицами специального вида

$$\begin{aligned} A(k) &= A_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{1i}(k)A_i(k), B(k) = B_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{2i}(k)B_i(k), \\ C(k) &= C_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{3i}(k)C_i(k), D(k) = D_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{4i}(k)D_i(k), \end{aligned}$$

где $\xi_{ji}(k) \in \mathbb{L}_2^1$ для всех $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ и k являются независимыми в совокупности по i, j, k скалярными случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Матрицы $A_i(k), B_i(k), C_i(k)$ и $D_i(k)$ при всех значениях $i \in \{0, 1, \dots, M\}$ и $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ являются детерминированными вещественными матрицами соответствующих размерностей. Также случайные величины $\xi_{ji}(k)$ являются независимыми со входным случайным возмущением $w(k)$. Последовательность значений входного сигнала $w(k)$ системы (18) в виде вектора $W_{0:N}$ удовлетворяет условию $A(W_{0:N}) \leq a$, где параметр $a \geq 0$ является заданным числом. Также задано некоторое неотрицательное число $\gamma \geq 0$.

Для системы (18) ставятся две задачи анизотропийного анализа:

Задача 1. *Задана линейная дискретная нестационарная система T_{zw} с реализацией (18) на конечном интервале времени*

$k \in \{0, 1, \dots, N\}$. На вход системы подаются случайные возмущения, описываемые вектором $W_{0:N}$ и обладающие ограниченной анизотропией $\mathbf{A}(W_{0:N}) \leq a$, где $a \geq 0$ является заданной величиной. Необходимо вычислить в терминах пространства состояний анизотропийную норму $|||T_{zw}|||_a$ системы.

Решением данной задачи является формула вычисления анизотропийной нормы системы (18) в терминах ее матриц. Полученное решение данной задачи используется при рассмотрении второй задачи анизотропийного анализа с приведенной ниже формулировкой.

Задача 2. Заданы линейная дискретная нестационарная система T_{zw} с реализацией (18) на конечном интервале времени $k \in \{0, 1, \dots, N\}$, значение параметра $a \geq 0$ и величина $\gamma \geq 0$. На вход системы (18) подается возмущение в виде последовательности случайных векторов, описываемой вектором $W_{0:N}$, который удовлетворяет условию $\mathbf{A}(W_{0:N}) \leq a$. Необходимо сформулировать условия ограниченности анизотропийной нормы системы T_{zw} заданным числом γ в терминах матриц данной системы, т.е. привести условия справедливости неравенства

$$(19) \quad |||T_{zw}|||_a \leq \gamma.$$

Решением данной задачи является система условий в терминах матриц системы, при выполнении которых справедливо неравенство (19). В случае систем с детерминированными матрицами эти условия представляют собой разностное уравнение Риккати и алгебраическое неравенство специального вида. Также условия ограниченности анизотропийной нормы могут быть представлены в терминах неравенства Риккати и в терминах линейных матричных неравенств. Эти варианты решения второй задачи анизотропийного анализа также рассмотрены в данной работе.

4. Решение задачи

В данном разделе представлены решения двух поставленных задач анизотропийного анализа для линейных дискретных нестационарных систем с мультипликативными шумами на конечном

интервале времени. В первом подразделе представлен вывод выражения для ковариационной матрицы наихудшего входного возмущения $W_{0:N}^*$ и теорема о вычислении анизотропийной нормы в терминах разностных уравнений Риккати. Во втором подразделе приведены критерий и достаточные условия ограниченности анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами в терминах разностных уравнений и неравенства Риккати соответственно.

4.1. Вычисление анизотропийной нормы

Исходя из определения анизотропийной нормы системы, для ее вычисления необходимо определить функцию распределения и первые два статистических момента наихудшего возмущения $W_{0:N}^*$, при котором достигается супремум в (9). Значение анизотропии вектора $W_{0:N}^*$ определяется этими характеристиками, причем только от распределения зависит исключительно слагаемое $-h(W_{0:N})$. Поэтому задача поиска экстремума анизотропии разбивается на два этапа: поиск оптимальной функции распределения при фиксированных моментах и поиск оптимальных моментов при найденной функции распределения. Исходя из п.2 леммы 1 (свойства анизотропии) и принципа максимальной энтропии оптимальным является гауссовское распределение с нулевым средним и некоторой ковариационной матрицей Σ , подлежащей определению. Гауссовский случайный вектор $W_{0:N}$ с нулевым средним и некоторой ковариационной матрицей может быть представлен в виде выхода некоторого фильтра T_{wv} с передаточной матрицей $G_{0:N}$, на вход которого подается гауссовский случайный вектор $V_{0:N}$ с нулевым математическим ожиданием и единичной ковариационной матрицей.

Множество формирующих фильтров, выходами которых являются случайные векторы $W_{0:N} \in \mathbb{W}_a$, обозначим \mathcal{G}_a . Задачу определения ковариационной матрицы наихудшего сигнала $W_{0:N}^*$ можно свести к задаче нахождения формирующего фильтра T_{wv} , генерирующего этот наихудший сигнал. Данный формирующий фильтр можно описать с помощью вход-выходного соотношения $W_{0:N}^* = G_{0:N} V_{0:N}$, где $G_{0:N}$ – передаточная матрица формирую-

щего фильтра T_{wv} . Сформулируем задачу поиска матрицы $G_{0:N}$ наилучшего формирующего фильтра.

Задача. Найти передаточную матрицу $G_{0:N}$ формирующего фильтра $T_{wv} \in G_a$, при которой достигается супремум следующего выражения

$$(20) \quad |||F|||_a = \sup_{G_{0:N} \in G_a} \frac{\|F_{0:N}G_{0:N}\|_2}{\|G_{0:N}\|_2}.$$

Решение. Правую часть выражения (20) можно переписать следующим образом:

$$(21) \quad \frac{\|F_{0:N}G_{0:N}\|_2}{\|G_{0:N}\|_2} = \sqrt{\frac{\text{tr}(\Lambda\Sigma)}{\text{tr}(\Sigma)}},$$

где $\Lambda = \mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}]$, $\Sigma = G_{0:N}G_{0:N}^\top$. Запишем математически условия, накладываемые на матрицу $G_{0:N}$:

$$(22) \quad W_{0:N} = G_{0:N}V_{0:N}, \quad \mathbf{A}(W_{0:N}) \leq a, \quad \text{tr}(\Sigma) = 1.$$

Из свойства анизотропии (8) следует, что функционал анизотропии $\mathbf{A}(W_{0:N})$ удовлетворяет условию

$$(23) \quad \mathbf{A}(W_{0:N}) \geq -\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{l_w \Sigma}{\text{tr}(\Sigma)} \right) = -\frac{1}{2} \ln \det (l_w \Pi),$$

где $\Pi = \frac{\Sigma}{\text{tr}(\Sigma)}$. Таким образом, исходная задача поиска наилучшего формирующего фильтра с матрицей $G_{0:N}$ сводится к задаче поиска экстремума функционала

$$(24) \quad J(\Pi) = \text{tr}(\Lambda\Pi) \rightarrow \max,$$

при условиях

$$(25) \quad \text{tr}(\Pi) = 1, \quad -\frac{1}{2} \ln \det (l_w \Pi) \leq a.$$

Видно, что на искомую точку экстремума функционала Π введены сразу два типа ограничений: в виде равенства и неравенства. Следовательно, для решения данной задачи воспользуемся теоремой Куна – Такера [22]. Выпишем функцию Лагранжа $L(\Pi)$ для функционала (24) и условий (25):

$$(26) \quad L(\Pi) = \text{tr}(\Lambda\Pi) + \lambda_1(1 - \text{tr}(\Pi)) + \lambda_2\left(-\frac{1}{2} \ln \det(m\Pi) - a\right),$$

где λ_1, λ_2 – множители Лагранжа. Необходимым условием экстремума функционала (24) является равенство нулю производной $dL(\Pi)$ функции Лагранжа в точке экстремума Π^* . Поскольку

$\mathcal{L}(\Pi)$ является функцией матричного аргумента, для определения производной $dL(\Pi)$ воспользуемся производной Фреше:

$$(27) \quad dL(\Pi)[\Delta] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L(\Pi + \varepsilon\Delta) - L(\Pi)}{\varepsilon}.$$

Производная $dL(\Pi)[\Delta]$, определяемая выражением (27), должна быть равна нулю при любом значении Δ . Определив из данного условия матрицу Π и множители Лагранжа λ_1, λ_2 , получаем искомую ковариационную матрицу Σ следующего вида:

$$(28) \quad \Sigma(q) = (I - q\Lambda)^{-1},$$

где параметр q определяется из уравнения

$$(29) \quad -\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{m\Sigma(q)}{\text{tr}(\Sigma(q))} \right) = a.$$

Таким образом, математически описана связь матрицы $F_{0:N}$ системы и ковариационной матрицы Σ выходного сигнала наилучшего фильтра. Параметр q принимает значения от 0 до $\|F_{0:N}\|_{\infty}^{-2}$. Формулы для анизотропии $\mathbf{A}(W_{0:N})$ и анизотропийной нормы $\|T_{zw}\|_a$ можно переписать в терминах функции $\Sigma(q)$ следующим образом:

$$(30) \quad \mathbf{A}(W) = -\frac{1}{2} \ln \det \frac{l_w \Sigma(q)}{\text{tr}(\Sigma(q))},$$

$$(31) \quad \|T_{zw}\|_a = \sqrt{\frac{\text{tr}(\Lambda \Sigma(q))}{\text{tr}(\Sigma(q))}}.$$

Введем вспомогательные функции

$$(32) \quad \mathcal{A}(q) = \frac{l_w}{2} (\ln \Phi(q) - \Psi(q)),$$

$$(33) \quad \mathcal{N}(q) = \sqrt{\frac{1}{q} \left(1 - \frac{1}{\Phi(q)} \right)},$$

где

$$\Phi(q) = \frac{1}{l_w} \text{tr} \Sigma(q), \quad \Psi(q) = \frac{1}{l_w} \ln \det \Sigma(q).$$

Получаем, что анизотропийная норма системы вычисляется по формуле $\|T_{zw}\|_a = \mathcal{N}(\mathcal{A}^{-1}(a))$, где $\mathcal{A}^{-1}(a)$ соответствует значению $q \in [0; \|T_{zw}\|_{\infty}^{-2})$, такому что $\mathcal{A}(q) = a$. Полученные выражения позволяют вычислить анизотропийную норму в частотной области.

Для получения формулы нормы в пространстве состояний необходимо определить реализацию в пространстве состояний наихудшего фильтра T_{ww} , формирующего наихудшее возмущение $W_{0:N}^*$ с ковариационной матрицей Σ вида (28). Зная вид ковариационной матрицы $\Sigma(q)$ наихудшего фильтра, можно найти передаточную матрицу $G_{0:N}$ наихудшего фильтра T_{ww} из выражения (34)

$$G_{0:N}G_{0:N}^\top = (I_{l_w} - q\Lambda)^{-1}.$$

Распишем (34) с учетом $\Lambda = \mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}]$:

$$(35) \quad G_{0:N}^{-\top}G_{0:N}^{-1} + q\mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}] = \mathbf{E} \left[[\sqrt{q}F_{0:N}^\top G_{0:N}^{-\top}] \begin{bmatrix} \sqrt{q}F_{0:N} \\ G_{0:N}^{-1} \end{bmatrix} \right] = I_{l_w}.$$

Введя матрицу $\Theta_{0:N} = \begin{bmatrix} \sqrt{q}F_{0:N} \\ G_{0:N}^{-1} \end{bmatrix}$, имеем

$$(36) \quad \mathbf{E}[\Theta_{0:N}^\top \Theta_{0:N}] = I_{l_w}.$$

Матрице $\Theta_{0:N}$ можно поставить в соответствие линейную систему с одним входным сигналом w и двумя выходами – оцениваемый выход z исходной системы и гауссовский белый шум v на входе формирующего фильтра. Из (36) видно, что система с матрицей $\Theta_{0:N}$ является изометричной. Следовательно, матрицы этой системы удовлетворяют критерию изометричности, формулировка которого приведена в разделе 2. Но для его применения необходимо выбрать конфигурацию системы искомого наихудшего фильтра T_{ww} . Здесь используется предположение, что для формирования наихудшего возмущения для системы (18) необходимо иметь полную информацию о состоянии системы. Изначально функция распределения наихудшего возмущения может быть не определена точно, но при известных первых двух статистических моментах его можно заменить с точностью до этих двух моментов гауссовским возмущением с теми же характеристиками. А любое гауссовское возмущение с известными моментами можно представить в виде выхода некоторой линейной системы, на вход которой подается гауссовский белый шум. На основании приведенных рассуждений предполагаем, что наихуд-

ший формирующий фильтр является линейной системой вида

$$(37) \quad T_{wv} \sim \begin{cases} x(k+1) = (\mathbf{E}[A(k)] + \mathbf{E}[B(k)]L(k))x(k) \\ \quad + \mathbf{E}[B(k)]S^{1/2}(k)v(k), \\ w(k) = L(k)x(k) + S^{1/2}(k)v(k), \end{cases}$$

где $x(k) \in \mathbb{L}_2^{n_x}$ – вектор некоторой оценки состояния исходной системы с начальным состоянием $x(0) = 0$, $v(k) \in \mathbb{L}_2^{m_w}$ – входное возмущение в виде гауссовского вектора с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей, матрицы $L(k)$, $S(k)$ – детерминированные матрицы фильтра соответствующих размерностей. Применив критерий изометричности к системе с передаточной матрицей $\Theta_{0:N}$, получим выражения для матриц фильтра $S(k)$ и $L(k)$:

$$\begin{aligned} S(k) &= (I_{m_w} - \sum_{i=0}^M (qD_i^\top(k)D_i(k) + B_i^\top(k)R_1(k+1)B_i(k)) \\ &\quad - B_0^\top R_2(k+1)B_0)^{-1}, \\ L(k) &= S(k)(B_0^\top(k)(R_1(k+1) + R_2(k+1))A_0(k) + qD_0^\top(k)C_0(k)), \end{aligned}$$

которые определяются в терминах решения разностного уравнения Риккати в обратном времени:

$$\begin{aligned} R_1(k) &= \sum_{i=0}^M A_i^\top(k)R_1(k+1)A_i(k) + q \sum_{i=0}^M C_i^\top(k)C_i(k), \\ R_2(k) &= A_0^\top(k)R_2(k+1)A_0(k) + L^\top(k)S^{-1}(k)L(k) \end{aligned}$$

с граничным условием $R_1(N+1) = 0$, $R_2(N+1) = 0$. Из определения анизотропийной нормы следует, что для ее вычисления еще необходимо определить выражение $\|G_{0:N}\|_2^2 = \text{tr}(G_{0:N}G_{0:N}^\top)$ в пространстве состояний. Исходя из вида фильтра (37) получим

$$\text{tr}(G_{0:N}G_{0:N}^\top) = \sum_{k=0}^N \text{tr}(L(k)\Upsilon(k)L^\top(k) + S(k)),$$

где матрицы $\Upsilon(k)$ удовлетворяют разностному уравнению Ляпунова

$$\begin{aligned} \Upsilon(k+1) &= (A_0(k) + B_0(k)L(k))\Upsilon(k)(A_0(k) + B_0(k)L(k))^\top \\ &\quad + B_0(k)S(k)B_0^\top(k) \end{aligned}$$

с начальным условием $\Upsilon(0) = 0$. В силу структуры формирующего фильтра (37) вспомогательные функции $\Phi(q)$ и $\Psi(q)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi(q) &= \frac{1}{l_w} \text{tr} \Sigma(q) = \frac{1}{l_w} \sum_{k=0}^N \text{tr}(L(k)\Upsilon(k)L^\top(k) + S(k)), \\ \Psi(q) &= \frac{1}{l_w} \ln \det \Sigma(q) = \frac{1}{l_w} \sum_{i=0}^N \ln \det(S(k)). \end{aligned}$$

Полученные результаты решения задачи вычисления анизотропной нормы запишем в виде теоремы.

Теорема 1. *Дана линейная дискретная нестационарная система с мультипликативными шумами T_{zw} вида (18) на конечном интервале $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ и задано значение параметра $a \geq 0$. На вход системы подается случайное возмущение, описываемое вектором $W_{0:N}$ с ограниченной анизотропией $\mathbf{A}(W_{0:N}) \leq a$. При сделанных допущениях анизотропная норма системы T_{zw} вычисляется по формуле $\|T_{zw}\|_a = \mathcal{N}(\mathcal{A}^{-1}(a))$, где $\mathcal{A}^{-1}(a)$ соответствует значению $q \in [0; \|T_{zw}\|_\infty^{-2})$, такому что $\mathcal{A}(q) = a$. Функции $\mathcal{N}(q)$ и $\mathcal{A}(q)$ определены следующим образом:*

$$(38) \quad \mathcal{N}(q) = \sqrt{\frac{\Phi(q) - 1}{q\Phi(q)}}, \quad \mathcal{A}(q) = \frac{l_w}{2} (\ln \Phi(q) - \Psi(q)),$$

где функции $\Phi(q)$ и $\Psi(q)$ имеют вид

$$(39) \quad \Phi(q) = \frac{1}{l_w} \sum_{k=0}^N \text{tr} \left(S(k) + L(k)\Upsilon(k)L^\top(k) \right),$$

$$(40) \quad \Psi(q) = \frac{1}{l_w} \sum_{k=0}^N \ln \det S(k).$$

Матрицы $S(k)$ и $L(k)$ определены в терминах решения разностного уравнения Риккати в обратном времени

$$(41) \quad R_1(k) = \sum_{i=0}^M \left(A_i^\top(k) R_1(k+1) A_i(k) + q C_i^\top(k) C_i(k) \right),$$

$$(42) \quad R_2(k) = A_0^\top(k) R_2(k+1) A_0(k) + L^\top(k) S^{-1}(k) L(k),$$

(43)

$$S(k) = \left(I_{m_w} - \sum_{i=0}^M \left(q D_i^\top(k) D_i(k) + B_i^\top(k) R_1(k+1) B_i(k) \right) - B_0^\top(k) R_2(k+1) B_0(k) \right)^{-1},$$

$$(44) \quad L(k) = S(k) \left(q D_0^\top(k) C_0(k) + B_0^\top(k) R_1(k+1) A_0(k) + B_0^\top(k) R_2(k+1) A_0(k) \right).$$

Матрицы $\Upsilon(k)$ удовлетворяют рекуррентной формуле

$$(45) \quad \begin{aligned} \Upsilon(k+1) = & (A_0^\top(k) + L^\top(k) B_0^\top(k)) \Upsilon(k) (A_0^\top(k) + \\ & + L^\top(k) B_0^\top(k))^\top + B_0(k) S(k) B_0^\top(k). \end{aligned}$$

Для уравнений (88), (89) и (45) заданы следующие граничные и начальные условия: $R_1(N+1) = 0$, $R_2(N+1) = 0$, $\Upsilon(0) = 0$.

Основным отличием данной теоремы от ее аналога для систем с детерминированными матрицами заключается в том, что в случае систем с мультипликативными шумами для вычисления анизотропийной нормы необходимо решить два разностных уравнения Риккати вместо одного. Получив решение первой задачи анизотропийного анализа, можно приступать к решению задачи формулировки условий ограниченности анизотропийной нормы.

4.2. Условия ограниченности анизотропийной нормы

Зная формулу вычисления анизотропийной нормы системы в терминах разностных уравнений Риккати, можно, к примеру, определить параметры оптимального фильтра, обеспечивающего минимум анизотропийной нормы системы в ошибках фильтрации. Но стоит отметить, что решение оптимальной задачи является достаточно консервативным и полученный фильтр или ре-

гулятор минимизирует значение анизотропийной нормы только для определенной конфигурации исходной системы. Если конфигурация с течением времени поменяется, то значение анизотропийной нормы уже не будет минимальным. Поэтому существуют задачи субоптимальных управления и фильтрации, целью в которых является синтез регулятора или фильтра, обеспечивающего ограниченность анизотропийной нормы системы, замкнутой регулятором, или в ошибках фильтрации, сверху заданным неотрицательным числом. Для решения таких задач необходимо решить вторую задачу анизотропийного анализа, которая заключается в формулировке условий ограниченности анизотропийной нормы системы в терминах ее матриц. Поскольку уже была получена формула вычисления самой анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами, необходимо в терминах матриц системы и решения разностных уравнений Риккати (88)–(89) определить условие, при выполнении которых справедливо неравенство

$$\|T_{zw}\|_a \leq \gamma$$

для заданных a и γ . Вывод этого условия производится по аналогии с доказательством аналогичной теоремы в [26]. Преобразуем вспомогательную функцию $\mathcal{A}(q)$, введенную в (32), следующим образом:

$$(46) \quad \mathcal{A}(q) = \mathfrak{A}(q, \mathcal{N}(q)),$$

где

$$(47) \quad \mathfrak{A}(q, \gamma) = \frac{1}{2} \ln \det(I_{l_z} - q \mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}]) - \frac{l_w}{2} \ln(1 - q\gamma^2).$$

Очевидно, что функции $\mathcal{A}(q)$ и $\mathfrak{A}(q, \gamma)$ пересекаются в точке, в которой выполняется $\mathcal{N}(q) = \gamma$, т.е. при $q = \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$. Поскольку $\mathcal{N}(q)$ является строго монотонной функцией, при $q < \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$ выполняется $\mathcal{N}(q) < \gamma$ и соответственно $\mathcal{A}(q) < \mathfrak{A}(q, \gamma)$, а при $q > \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$ наоборот. Определив производную функции $\mathfrak{A}(q, \gamma)$ по аргументу q , получаем, что она равна нулю как раз в точке $q = \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$, положительна при $q < \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$ и отрицательна при $q > \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$. Получаем, что в точке $q = \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$ функция $\mathfrak{A}(q, \gamma)$ достигает максимального значения.

Стоит отметить, что неравенство $\|T_{zw}\|_a \leq \gamma$ эквивалентно неравенству

$$\mathcal{A}(\mathcal{N}^{-1}(\gamma)) \geq a.$$

Этот факт вытекает из свойств анизотропийной нормы. Она является монотонно возрастающей функцией по аргументу a . Поэтому значение этой нормы при параметре $a = a_0$ меньше γ тогда и только тогда, когда значение параметра a такое, что $\|T_{zw}\|_a = \gamma$, больше значения a_0 . А неравенство $\mathcal{A}(\mathcal{N}^{-1}(\gamma)) \geq a$ эквивалентно существованию $q \in [0, \|T_{zw}\|_\infty^2)$ такого, что $\mathfrak{A}(q, \gamma) \geq a$. Таким образом,

$$(48) \quad \|F_{0:N}\|_a \leq \gamma \iff \mathfrak{A}(q, \gamma) \geq a \text{ для некоторого } q.$$

Это означает, что анизотропийная норма системы T_{zw} ограничена сверху величиной γ тогда и только тогда, когда выполняется условие $\mathfrak{A}(q, \gamma) \geq a$. Распишем это условие с учетом вида функции $\mathfrak{A}(q, \gamma)$:

$$(49) \quad \frac{1}{2} \ln \det(I_{l_w} - q\mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}]) - \frac{l_w}{2} \ln(1 - q\gamma^2) \geq a.$$

Далее необходимо записать условие (49) в терминах матриц системы и наилучшего фильтра. Для этого необходимо воспользоваться равенством

$$\det(I_{l_w} - q\mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}]) = \det(I_{l_z} - q\mathbf{E}[F_{0:N} F_{0:N}^\top])$$

и ввести матрицу $H_{0:N}$, которая удовлетворяет условию

$$(50) \quad \det(I_{l_z} - q\mathbf{E}[F_{0:N} F_{0:N}^\top]) = H_{0:N} H_{0:N}^\top$$

и соответствует линейной системе, имеющей вид

$$H_{0:N} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}[A(k)] & L(k)S^{-1/2}(k) \\ \hline \mathbf{E}[C(k)] & S^{1/2}(k) \end{array} \right].$$

Матрица $H_{0:N}$ является блочной нижнетреугольной матрицей с блоками $S^{1/2}(0), \dots, S^{1/2}(N)$ на диагонали. Следовательно, можно преобразовать первое слагаемое левой части неравенства (49) следующим образом:

$$(51) \quad \ln \det(I_{l_w} - q\mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}]) = \sum_{k=0}^N \ln \det S(k).$$

С учетом (51) неравенство (49) имеет вид

$$(52) \quad \sum_{k=0}^N \ln \det S(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2).$$

Получаем, что выполнение условия $\|T_{zw}\|_a \leq \gamma$ эквивалентно выполнению неравенства (52), которое будем называть неравенством специального вида. Запишем полученные результаты решения задачи анизотропийного анализа в следующей теореме.

Теорема 2. *Дана линейная дискретная нестационарная система T_{zw} с мультипликативными шумами вида (18). Также известны значение параметра $a \geq 0$ и величина $\gamma \geq 0$. Анизотропийная норма данной системы удовлетворяет неравенству $\|T_{zw}\|_a \leq \gamma$ тогда и только тогда, когда существует такое значение $q \geq 0$, что для матриц $R_1(k) \succ 0$, $R_2(k) \succ 0$ при всех $k \in \{0, 1, \dots, N\}$, являющихся решением разностного уравнения Риккати*

$$(53) \quad R_1(k) = \sum_{k=0}^M A_i^\top(k) R_1(k+1) A_i(k) + q \sum_{k=0}^M C_i^\top(k) C_i(k),$$

$$(54) \quad R_2(k) = A_0^\top(k) R_2(k+1) A_0(k) + L^\top(k) S^{-1}(k) L(k),$$

$$(55) \quad S(k) = (I_{m_w} - \sum_{k=0}^M (q D_i^\top(k) D_i(k) + B_i^\top(k) R_1(k+1) B_i(k)) - B_0^\top(k) R_2(k+1) B_0(k))^{-1}$$

$$(56) \quad L(k) = S(k) (B_0^\top(k) R_1(k+1) A_0(k) + B_0^\top(k) R_2(k+1) A_0(k) + q D_0^\top(k) C_0(k))$$

с граничными условиями $R_1(N+1) = 0$, $R_2(N+1) = 0$, матрицы $S(k)$ являются положительно определенными матрицами и удовлетворяют неравенству специального вида

$$(57) \quad \sum_{k=0}^N \ln \det S(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2).$$

Обратим внимание, что приведенные в теореме условия являются необходимыми и достаточными условиями ограниченности анизотропийной нормы системы. Однако для проверки этих

условий необходимо получить весь набор матриц $S(k)$ в терминах решений разностных уравнений Риккати. Полученный набор матриц $S(k)$ может не удовлетворять условию специального вида и таким образом не быть решением всей системы неравенств. Очевидно, что нужно искать способ одновременного решения и уравнений Риккати, и неравенства (57). Тут стоит отметить, что у данной теоремы есть альтернативная формулировка в терминах неравенства Риккати. Ее основным преимуществом является возможность последующего преобразования неравенства Риккати в линейное матричное неравенство, что позволяет решать задачи выпуклой оптимизации. Также линейные матричные неравенства решаются одновременно с неравенством специального вида, что позволяет получить решение, удовлетворяющее всем условиям и из существования такого решения будет следовать ограниченность анизотропийной нормы.

Для перехода от разностных уравнений Риккати к неравенству в первую очередь необходимо объединить уравнения (53), (54) в одно уравнение. Для этого введем новую переменную $R(k) = R_1(k) + R_2(k)$. В терминах новой переменной $R(k)$ разностные уравнения Риккати принимают следующий вид:

$$(58) \quad R(k) = \sum_{i=0}^M A_i^\top(k) R(k+1) A_i(k) + \sum_{i=0}^M q C_i^\top(k) C_i(k) + \\ + A_0^\top(k) R(k+1) A_0(k) + L^\top(k) S^{-1}(k) L(k) - Q_1,$$

где $Q_1 = \sum_{i=0}^M (A_i^\top(k) R_2(k+1) A_i(k) + A_0^\top(k) R_1(k+1) A_0(k))$, а матрицы $S(k)$ и $L(k)$ принимают следующий вид:

$$(59) \quad S(k) = (I - B_0^\top(k) R(k+1) B_0(k) - \sum_{i=0}^M q D_i^\top(k) D_i(k) + \\ + B_0^\top(k) R_1(k+1) B_0(k) -$$

$$(60) \quad L(k) = S(k) (B_0^\top(k) R(k+1) A_0(k) + q D_0^\top(k) C_0(k)) - \\ - \sum_{i=0}^M (B_i^\top(k) (R(k+1) - R_2(k+1)) B_i(k)),$$

Получаем разностное уравнение Риккати вида

$$(61) \quad R(k) = \sum_{i=0}^M A_i^\top(k)R(k+1)A_i(k) + \sum_{i=0}^M qC_i^\top(k)C_i(k) + \\ + A_0^\top(k)R(k+1)A_0(k) + L^\top(k)S^{-1}(k)L(k) + Q_2(k),$$

$$(62) \quad S(k) = (I - B_0^\top(k)R(k+1)B_0(k) - \sum_{i=0}^M qD_i^\top(k)D_i(k) - \\ - \sum_{i=0}^M (B_i^\top(k)(R(k+1) - R_2(k+1))B_i(k)) + \\ + B_0^\top(k)R_1(k+1)B_0(k),$$

$$(63) \quad L(k) = S(k)(B_0^\top(k)R(k+1)A_0(k) + qD_0^\top(k)C_0(k)),$$

где $Q_2(k) = -\sum_{i=0}^M A_i^\top(k)R_2(k+1)A_i(k) - A_0^\top(k)R_1(k+1)A_0(k)$.

Для решения уравнения $R(k)$ задано граничное условие $R(N+1) = 0$. Поскольку слагаемые $-Q_2(k)$, $\sum_{i=0}^M B_i^\top(k)R_2(k+1)B_i(k)$, $B_0^\top(k)R_1(k+1)B_0(k)$ и $B_0^\top(k)R_1(k+1)B_0(k)$ являются неотрицательно определенными матрицами, то можно воспользоваться свойством монотонности решения разностного уравнения Риккати [15, 16] для перехода к неравенству Риккати. Введем новую матричную переменную $\mathcal{R}(k) = \mathcal{R}(k)^\top \succ 0$, которая удовлетворяет условию $\mathcal{R}(k) \succ R(k)$ при всех $k \in \{0, 1, \dots, N\}$. С учетом свойства монотонности решения уравнения Риккати получаем неравенство вида

$$(64) \quad \mathcal{R}(k) \succ A_0^\top(k)\mathcal{R}(k+1)A_0(k) + \sum_{i=1}^M A_i^\top(k)\mathcal{R}(k+1)A_i(k) + \\ + q \sum_{i=0}^M C_i^\top(k)C_i(k) + \mathcal{L}^\top(k)S^{-1}(k)\mathcal{L}(k),$$

(65)

$$S(k) = \left(I_{m_w} - \sum_{i=0}^M \left(qD_i^\top(k)D_i(k) + B_i^\top(k)\mathcal{R}(k+1)B_i(k) \right) \right)^{-1},$$

$$(66) \quad \mathcal{L}(k) = \mathcal{S}(k) \left(B_0^\top(k) \mathcal{R}(k+1) A_0(k) + q D_0^\top(k) C_0(k) \right),$$

с граничным условием $\mathcal{R}(N+1) = 0$. Из условия $\mathcal{R}(k) \succ R(k)$ следует $\mathcal{S}^{-1}(k) \prec S^{-1}(k)$, поэтому имеет место неравенство специального вида

$$(67) \quad \sum_{k=0}^N \ln \det \mathcal{S}^{-1}(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2).$$

Если у полученных неравенств (64)–(67) имеется решение $\mathcal{R}(k) = \mathcal{R}(k)^\top \succ 0$, то в силу свойства монотонности решения уравнения Риккати существует и решение исходных уравнений Риккати. Следовательно, существование решения неравенства Риккати, удовлетворяющего неравенству специального вида, является достаточным условием ограниченности анизотропийной нормы.

Теорема 3. *Дана линейная дискретная нестационарная система T_{zw} с мультипликативными шумами вида (18) на конечном интервале времени $k \in \{0, 1, \dots, N\}$. Также заданы скалярные величины $a \geq 0$ и $\gamma \geq 0$. Анизотропийная норма системы удовлетворяет условию $\|T_{zw}\|_a \leq \gamma$, если существуют значение параметра $q \in [0; \|T_{zw}\|_\infty^{-2}]$ и семейство матриц $\mathcal{R}(k) \succ 0$ при $k \in \{0, 1, \dots, N\}$, которые удовлетворяют рекуррентному неравенству Риккати в обратном времени*

$$(68) \quad \mathcal{R}(k) \succ A_0^\top(k) \mathcal{R}(k+1) A_0(k) + \sum_{i=1}^M A_i^\top(k) \mathcal{R}(k+1) A_i(k) + q \sum_{i=0}^M C_i^\top(k) C_i(k) + \mathcal{L}^\top(k) \mathcal{S}^{-1}(k) \mathcal{L}(k)$$

с граничным условием $\mathcal{R}(N+1) = 0$, где

$$(69)$$

$$\mathcal{S}(k) = \left(I_{m_w} - q \sum_{i=0}^M D_i^\top(k) D_i(k) - \sum_{i=0}^M B_i^\top(k) \mathcal{R}(k+1) B_i(k) \right)^{-1},$$

$$(70) \quad \mathcal{L}(k) = \mathcal{S}(k) \left(B_0^\top(k) \mathcal{R}(k+1) A_0(k) + q D_0^\top(k) C_0(k) \right),$$

Матрицы $\mathcal{S}(k)$ при всех $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ являются положительно определенными матрицами, удовлетворяющими неравенству

$$(71) \quad \sum_{k=0}^N \ln \det \mathcal{S}^{-1}(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2).$$

Полученное неравенство Риккати можно преобразовать к виду линейного матричного неравенства с помощью известной леммы Шура. Перед этим необходимо разделить обе части неравенства (68) на параметр $q > 0$ и ввести замену переменных

$$\eta = q^{-1}, \quad \mathcal{P}(k) = \eta \mathcal{R}(k).$$

Для сокращения записи опустим аргументы k матриц неравенства, а $\mathcal{P}(k+1)$ обозначим как $\widehat{\mathcal{P}}$. Применяв замену переменных к (68), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \succ & \sum_{i=0}^M A_i^\top \widehat{\mathcal{P}} A_i + \sum_{i=0}^M C_i^\top C_i + (A_0^\top \widehat{\mathcal{P}} B_0 + C_0^\top D_0) \cdot \\ & \cdot (\eta I_{m_w} - \sum_{i=0}^M (D_i^\top D_i + B_i^\top \widehat{\mathcal{P}} B_i)) (B_0^\top \widehat{\mathcal{P}} A_0 + D_0^\top C_0), \end{aligned}$$

Перенесем все слагаемые неравенства в левую часть и воспользуемся леммой Шура. В результате получим

$$(72) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{P} - \sum_{i=0}^M (A_i^\top \widehat{\mathcal{P}} A_i + C_i^\top C_i) & A_0^\top \widehat{\mathcal{P}} B_0 + C_0^\top D_0 \\ B_0^\top \widehat{\mathcal{P}} A_0 + D_0^\top C_0 & \eta I_{m_w} - \sum_{i=0}^M (D_i^\top D_i + B_i^\top \widehat{\mathcal{P}} B_i) \end{bmatrix} \succ 0.$$

Для дальнейших преобразований введем вспомогательную матрицу $\Theta(k) \succ 0$, удовлетворяющую неравенству

$$(73) \quad \eta \Theta^{-1} \prec \eta I_{m_w} - \left(\sum_{i=0}^M \mathcal{D}_i^\top \mathcal{D}_i + \sum_{i=0}^M \mathcal{B}_i^\top \widehat{\mathcal{P}} \mathcal{B}_i \right).$$

Это неравенство эквивалентно условию $\Theta^{-1}(k) \prec \mathcal{S}^{-1}(k)$. Получается, что после решения неравенств и вычисления набора матриц $\Theta(k)$ необходимо обращать каждую из них и проверять

выполнение неравенства (73). Подобные процедуры могут привести к значительному увеличению погрешности вычислений, поэтому введем дополнительную замену переменных следующего вида:

$$(74) \quad \Psi(k) = \eta \Theta^{-1}(k).$$

Для сокращения записи матричных неравенств введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} A_{ex}(k) &= [A_1^\top \quad \dots \quad A_M^\top]^\top, \\ B_{ex}(k) &= [B_0^\top \quad \dots \quad B_M^\top]^\top, \\ C_{ex}(k) &= [C_1^\top \quad \dots \quad C_M^\top]^\top, \\ D_{ex}(k) &= [D_0^\top \quad \dots \quad D_M^\top]^\top. \end{aligned}$$

Также введем матричную функцию $\Phi_M(X)$, равную диагональной матрице из M блоков X . С учетом введенных замен переменных и обозначений неравенства (72), (73) принимают следующий вид:

$$(75) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{P} & 0 \\ 0 & \eta I_{m_w} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ A_{ex} & 0 \\ C_{ex} & D_{ex} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Phi_{M+1}(\hat{\mathcal{P}}) & 0 \\ 0 & I_{p_z(M+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ A_{ex} & 0 \\ C_{ex} & D_{ex} \end{bmatrix} \succ 0.$$

$$(76) \quad \eta I_{m_w} - \Psi - \sum_{i=0}^M (D_i^\top D_i + B_i^\top \hat{\mathcal{P}} B_i) \succ 0.$$

Применив лемму Шура к неравенствам (75),(76), получим матричные неравенства вида

$$(77) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{P} & * & * & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * & * & * \\ A_0 & B_0 & \hat{\mathcal{P}}^{-1} & * & * & * \\ A_{ex} & 0 & 0 & \Phi_M(\hat{\mathcal{P}}^{-1}) & * & * \\ C_0 & D_0 & 0 & 0 & I_{p_z} & * \\ C_{ex} & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p_z M} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$(78) \quad \begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi & * & * & * & * \\ B_{ex} & \Phi_{M+1}(\hat{\mathcal{P}}^{-1}) & * & * & * \\ D_{ex} & 0 & \dots & 0 & I_{p_z(M+1)} \end{bmatrix} \succ 0,$$

Полученные неравенства не являются линейными из-за обратных матриц $\widehat{\mathcal{P}}^{-1}$ на главных диагоналях. В целях устранения этих компонент умножим неравенства слева и справа на блочно-диагональные матрицы U_1 и U_2 соответственно. Матрицы U_1 и U_2 имеют вид

$$(79) \quad U_1 = \text{blockdiag}(I_{2n_x}, I_{m_w}, \underbrace{\widehat{\mathcal{P}}, \dots, \widehat{\mathcal{P}}}_{M+1 \text{ блоков}}, I_{p_z(M+1)}),$$

$$(80) \quad U_2 = \text{blockdiag}(I_{2n_x}, \underbrace{\widehat{\mathcal{P}}, \dots, \widehat{\mathcal{P}}}_{M+1 \text{ блоков}}, I_{p_z(M+1)}).$$

В результате проведенных конгруэнтных преобразований получаем

$$(81) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{P} & * & * & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * & * & * \\ \widehat{\mathcal{P}}A_0 & \widehat{\mathcal{P}}B_0 & \widehat{\mathcal{P}} & * & * & * \\ \widehat{\mathcal{P}}A_{ex} & 0 & 0 & \Phi_M(\widehat{\mathcal{P}}) & * & * \\ C_0 & D_0 & 0 & 0 & I_{p_z} & * \\ C_{ex} & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p_z M} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$(82) \quad \begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi(k) & * & * & * \\ \mathcal{P}B_{ex}(k) & \Phi_{M+1}(\mathcal{P}(k+1)) & * & * \\ D_{ex}^\top(k) & 0 & 0 & I_{p_z(M+1)} \end{bmatrix} \succ 0,$$

Стоит отметить, что при $k = N$ линейные матричные неравенства имеют вид

$$(83) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{P}(N) & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * \\ C_0(N) & D_0(N) & I_{p_z} & * \\ C_{ex}(N) & 0 & 0 & I_{p_z M} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$(84) \quad \begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi(N) & * \\ D(N) & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0,$$

Решение данных неравенств в виде наборов матриц $\mathcal{P}(k)$, $\Psi(k)$ и скаляра η должно удовлетворять неравенству специального вида

$$(85) \quad \sum_{k=0}^N \ln \det \Psi(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2).$$

Таким образом, получаем условия ограниченности анизотропийной нормы системы (18) в терминах решений ЛМН и неравенства специального вида. Если у данных неравенств при заданных a и γ существует решение в виде наборов матриц $\mathcal{P}(k)$, $\Psi(k)$ и скаляра η , то условие $\|T_{zw}\|_a \leq \gamma$ выполняется. Использование полученных результатов решения задач анизотропийного анализа для систем с мультипликативными шумами продемонстрировано с помощью численного примера в следующем разделе.

5. Пример

Рассмотрим линейную дискретную нестационарную систему с мультипликативными шумами на конечном интервале времени, описывающую движение самолета в режиме посадки по заданной траектории при наличии внешнего воздействия в виде ветра. Подробное описание этой модели приведено в [5]. Линейная дискретная система имеет реализацию в пространстве состояний вида

$$(86) \quad T_{zu} \sim \begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B_w(k)w(k) + B_u(k)u(k), \\ z(k) = C_z(k)x(k) + D_{zw}(k)w(k) + D_{zu}(k)u(k), \end{cases}$$

с измеряемым выходом

$$y(k) = \lambda(k)C_y(k)x(k) + D_{yw}(k)w(k),$$

где

$$\begin{aligned} x(k) &= [\Delta V(k) \quad \Delta\theta(k) \quad \Delta\omega_z(k) \quad \Delta\vartheta(k) \quad \Delta h(k) \quad \Delta T(k)]^\top, \\ w(k) &= [w_y(k) \quad \dot{w}_x(k) \quad \dot{w}_y(k) \quad n_{y_1}(k) \quad n_{y_2}(k)]^\top, \\ u(k) &= [\Delta\vartheta_{cy}(k) \quad \Delta\delta_t(k)]^\top, \\ z(k) &= [\Delta V(k) \quad \Delta h(k) \quad \Delta\vartheta_{cy}(k) \quad \Delta\delta_t(k)]^\top, \\ y(k) &= [\Delta V(k) + n_{y_1}(k) \quad \Delta h(k) + n_{y_2}(k)]^\top, \end{aligned}$$

где $V(k)$ – воздушная скорость; $T(k)$ – сила тяги двигателей; $\theta(k)$ – угол наклона траектории; $\omega_z(k)$ – угловая скорость тангажа; $\vartheta(k)$ – угол тангажа; $h(k)$ – высота центра масс самолета; $\theta_{cy}(k)$ – управление обобщенными рулями высоты; $\delta_t(k)$ –

управление сектором газа; $w_x(k)$, $w_y(k)$ – горизонтальная и вертикальная составляющие скорости ветра; $n_{y_1}(k)$, $n_{y_2}(k)$ – шумы измерений. Матрицы модели (86) имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0,9994 & -0,0008 & 0 & -0,0009 & 0 & 0,0009 \\ 0,0022 & 0,9938 & 0,0011 & 0,0072 & 0 & 0 \\ 0,0001 & 0,0052 & 0,9842 & -0,0154 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0099 & 0,9999 & 0 & 0 \\ -0,0005 & 0,0124 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9960 \end{bmatrix},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,0012 & 0 \\ 0,0117 & 0 \\ 0,0001 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,004 \end{bmatrix},$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 & -0,0100 & 0,0005 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0004 & -0,0080 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{zu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D_{yw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Важно отметить, что в отличие из изначальной версии системы (86), представленной в [5], в данной работе предполагается, что в датчиках возможны случайные сбои, вследствие которых данные об определенных параметрах состояния самолета не поступают на пульт управления. В системе (86) сбой моделируется

с помощью случайной величины $\lambda(k)$, имеющей распределение Бернулли и принимающей значения 1 с вероятностью p (стабильная работа датчика) и 0 с вероятностью $1 - p$ (сбой в датчике). Подобные системы являются известным частным случаем систем с мультипликативными шумами. Для стабилизации нулевого положения системы (86) используется статический \mathcal{H}_∞ -регулятор вида $u(k) = K_\infty y(k)$. Матрица регулятора имеет вид [32]

$$K_\infty = \begin{pmatrix} -0,2051 & -0,1793 \\ -0,2716 & -0,0181 \end{pmatrix}.$$

Для системы (86), замкнутой \mathcal{H}_∞ -регулятором, решим описанные ранее задачи анизотропийного анализа. Пусть система T_{yw} рассматривается на конечном интервале времени $k \in \{0, 1, \dots, 100\}$ и задано значение вероятности стабильной работы датчиков $p = 0,95$. Масштабированная \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -нормы системы равны

$$(87) \quad \frac{\|T_{yw}\|_2}{\sqrt{l_w}} = 0,1858; \quad \|T_{yw}\|_\infty = 1,5483.$$

Используя теорему 1, вычислим значения анизотропийной нормы системы при нескольких значениях параметра a (таблица 1).

Таблица 1. Результаты вычисления анизотропийной нормы

a	0,01	1	20	50	100
$\ T_{zw}\ _a$	0,1876	0,2094	0,3700	0,5193	0,6875

Видно, что значение нормы увеличивается по мере увеличения a , что соответствует определению анизотропийной нормы. При $a \rightarrow \infty$ значение анизотропийной нормы $\|T_{zw}\|_a$ должно стремиться к значению \mathcal{H}_∞ -нормы данной системы. На рис. 1 представлен график зависимости анизотропийной нормы от параметра a .

Видно, что при достаточно больших значениях a анизотропийная норма стабилизируется на уровне $\|T_{zw}\|_a \approx 1,536$. Стоит отметить, что нормы рассматриваемой системы различаются при

разных значениях вероятности p . Построим зависимость анизотропийной нормы от p при фиксированных $a = 100$ и $N = 100$ (рис. 2).

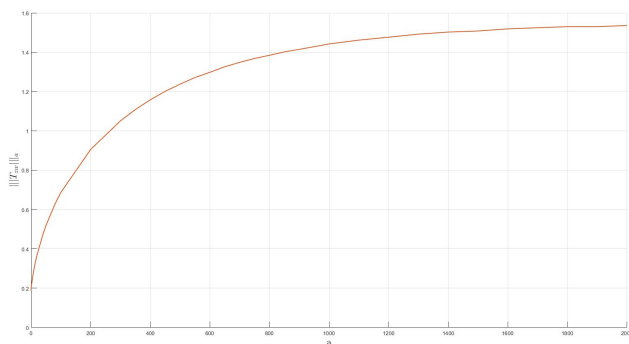


Рис. 1. Зависимость $\|T_{yw}\|_a(a)$

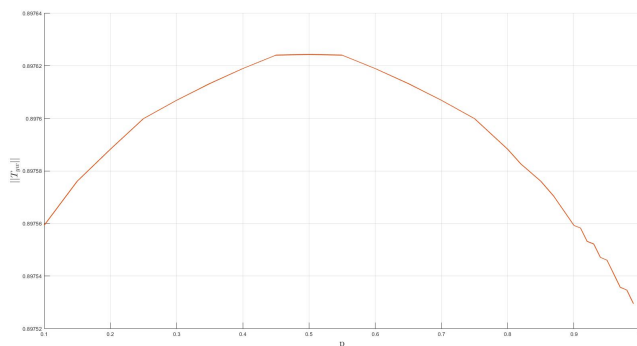


Рис. 2. Зависимость $\|T_{yw}\|_a(p)$ при $a = 100$; $N = 100$

Видно, что динамика изменения анизотропийной нормы в зависимости от значения p совпадает с динамикой изменения дисперсии случайной величины $\lambda(k)$, равной $\sqrt{p(1-p)}$. Это связано с тем, что анизотропийная норма системы вычисляется в терминах решения разностного уравнения Риккати, которое для данной системы имеет вид

$$(88) \quad R_1(k) = \sum_{i=0}^M \left(A_i^\top(k) R_1(k+1) A_i(k) + q \sqrt{p(1-p)} C_i^\top(k) C_i(k) \right),$$

$$(89) \quad R_2(k) = A_0^\top(k) R_2(k+1) A_0(k) + L^\top(k) S^{-1}(k) L(k),$$

$$(90) \quad S(k) = \left(I_{m_w} - \sum_{i=0}^M \left(q D_i^\top(k) D_i(k) + B_i^\top(k) R_1(k+1) B_i(k) \right) - B_0^\top(k) R_2(k+1) B_0(k) \right)^{-1},$$

$$(91) \quad L(k) = S(k) \left(q D_0^\top(k) C_0(k) + B_0^\top(k) R_1(k+1) A_0(k) + B_0^\top(k) R_2(k+1) A_0(k) \right).$$

В соответствии со свойством монотонности решения уравнения Риккати, при увеличении правой части уравнения увеличивается и решение $R_1(k)$, $R_2(k)$. Получаем, что при $p = \frac{1}{2}$ анизотропийная норма принимает максимальное значение и при решении задачи субоптимальной фильтрации имеет смысл предполагать значение вероятности сбоя $p = \frac{1}{2}$, если она изначально не известна. В таком случае фильтр будет обеспечивать ограниченность нормы, наихудшей с точки зрения вероятности сбоя, и для других случаев он также будет эффективен.

Далее рассмотрим вторую задачу анизотропийного анализа, заключающуюся в проверке условий ограниченности анизотропийной нормы сверху заданным значением $\gamma > 0$. Для этого реализуем с помощью пакета Yalmip Matlab toolbox [25] решение системы ЛМН (81)–(84) и неравенства специального вида (85). Если существует решение ЛМН в виде матриц $P(k)$ и $\Psi(k)$, удовлетворяющих неравенству (85), то условие $\|T_{zw}\|_a \leq \gamma$ выполняется для данных a и γ . В таблице 2 представлены результаты решения этой задачи при разных значениях γ .

Таблица 2. Результаты проверки ограниченности анизотропийной нормы

γ	0,7	0,9	2	5	10
Решение	Нет	Есть	Есть	Есть	Есть

Поскольку при $a = 100$, $N = 100$ и $p = 0,95$ анизотропийная норма равна $\|T_{zw}\|_a = 0,8975$, то при $\gamma < 0,8975$ решение у системы ЛМН и неравенства специального вида должно отсутствовать, что и можно наблюдать из численных результатов решения задачи. В рассматриваемом случае все матрицы системы фиксированы и потому возможно только проверить выполнение условия ограниченности анизотропийной нормы для данной системы. Если применить эти условия ограниченности для системы с неизвестными матрицами, например системы в ошибках фильтрации с неизвестными матрицами фильтра, то можно из данных условий получить соответствующие наборы матриц фильтра, при которых анизотропийная норма этой системы ограничена сверху заданным γ . Данный подход используется при решении задач субоптимальной анизотропийной фильтрации.

6. Заключение

В данной работе представлены методы решения задач анизотропийного анализа для линейных дискретных нестационарных систем с мультипликативными шумами. В качестве решения задачи вычисления анизотропийной нормы представлена формула вычисления этой нормы в пространстве состояний. Эта формула программно реализована в численном примере и результаты вычислений представлены в соответствующем разделе работы. Итогом решения задачи формулировки условий ограниченности анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами являются критерий ограниченности анизотропийной нормы в терминах разностных уравнений Риккати, а также достаточные условия ограниченности анизотропийной нормы в терминах неравенства Риккати и в терминах линейных матричных неравенств. Решение этих ЛМН численно реализовано и результаты проверки ограниченности анизотропийной нормы конкретной системы с мультипликативными шумами представлены в данной работе. Полученные результаты решения задач анизотропийного анализа позволяют решать задачи оптимальной и субоптимальной фильтрации для систем с мультипликативными шумами, а также задачи управления.

Литература

1. ВЛАДИМИРОВ И.Г., ДАЙМОНД Ф., КЛОЕДЕН П.Е. *Анизотропийный анализ робастного качества линейных дискретных нестационарных систем на конечном временном интервале* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №8. – С. 92–111.
2. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. *Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем* // Доклады Академии наук. – Т. 342(1995). – С. 583–585.
3. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. *Асимптотика анизотропийной нормы линейных стационарных систем* // Автоматика и телемеханика. – 1999. – №3. – С. 78–87.
4. ПОЛЯК Б.Т., ЩЕРБАКОВ П.С. *Робастная устойчивость и управление*. – М.:Наука, 2002. – 303 с.
5. ТИМИН В.Н., КУРДЮКОВ А.П. *Синтез робастной системы управления на режиме посадки самолета в условиях сдвига ветра* // Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1993. – №6. – С. 200–208.
6. ТИМИН В.Н., КУРДЮКОВ А.П. *Субоптимальная анизотропийная фильтрация на конечном горизонте* // Автоматика и телемеханика. – 2016. – №1. – С. 5–29.
7. ANDERSON B.D.O., MOORE J.B. *Optimal Filtering*. – New Jersey: Prentice Hall, 1979.
8. BARBOSA KARINA A., DE SOUZA C.E., TROFINO ALEXANDRE. *Robust \mathcal{H}_2 -Filter Design Via Parameter-Dependent Lyapunov Functions* // IFAC Proceedings Volumes. – 2002. – Vol. 35(1). – P. 371–376.
9. BERNSTEIN D.S., HADDAD W.H. *Steady-state Kalman filtering with an \mathcal{H}_∞ -error bound* // Syst. Contr. Lett. – 1989. – Vol. 12. – P. 9–16.
10. CHEN T., FRANCIS B. *Design of multirate filter banks by \mathcal{H}_∞ -optimization* // IEEE Trans. Signal Processing. – December,

1995. – Vol. 43. – P. 2822–2830.
11. DE SOUZA C.E., SHAKED U., FU M. *Robust \mathcal{H}_∞ -filtering for continuous time varying uncertain systems with deterministic input signal* // IEEE Trans. Signal Processing. – March, 1995. – Vol. 43. – P. 709–719.
 12. DE SOUZA C.E., XIE L. *Robust \mathcal{H}_2 -filtering, Control and Dynamic Systems* // Academic Press. – 1994. – Vol.65. – P. 323–377.
 13. DIAMOND P., VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P., SEMYONOV A.V. *Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems* // Int. J. Control. – 2001. – Vol. 74, No. 1. – P. 28–42.
 14. DOMBROVSKII V.V., LYASHENKO E.A. *A Linear Quadratic Control for Discrete Systems with Random Parameters and Multiplicative Noise and Its Application to Investment Portfolio Optimization* // Aut. and Rem. Control. – 2003. – Vol. 64, Iss. 10. – P. 1558–1570.
 15. FREILING G., IONESCU V. *Monotonicity and convexity properties of matrix Riccati equations* // IMA Journal of Mathematical Control and Information. – March, 2001.
 16. FREILING G., IONESCU V. *Time-varying discrete Riccati equation: some monotonicity results* // Linear Algebra and its Applications. –1999. – Vol. 286. – P. 135–148.
 17. GERSHON E., SHAKED U. *Robust Norm-bounded \mathcal{H}_∞ -Control and Estimation of retarded State-multiplicative Discrete-time Systems* // 24th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED). – 2016.
 18. GERSHON E., SHAKED U., YAESH I. *\mathcal{H}_∞ -control and filtering of discrete-time stochastic systems with multiplicative noise* // Automatica. – 2001. – Vol. 37. – P. 409–417.
 19. GRIMBLE M.J., SAYED A.E. *Solution of the \mathcal{H}_∞ -optimal linear filtering problem for discrete-time systems* // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing. – July, 1990. – Vol. 38. – P. 1092–1104.
 20. HE YONG, WANG QING-GUO, ZHENG WEI-XING *Global*

- robust stability for delayed neural networks with polytopic type uncertainties* // Chaos, Solitons & Fractals. – 2005. – Vol. 26, Iss. 5. – P. 1349–1354.
21. KALMAN R.E. *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems* // ASME Transactions. – 1960. – Vol. 82, part D (Journal of Basic Engineering). – P. 35–45.
 22. KARUSH W. *Minima of Functions of Several Variables With Inequalities As Side Conditions*. – 1939.
 23. KHARGONEKAR P.P., PETERSEN I.R., ZHOU K. *Robust stabilization and \mathcal{H}_∞ -optimal control*. – 1987.
 24. KHLEBNIKOV M.V., SHCHERBAKOV P.S. *Petersen's lemma on matrix uncertainty and its generalization* // Autom. Remote Control. – 2008. – Vol. 69, No. 11. – P. 1932–1945.
 25. LOFBERG J. *YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in Matlab*. // Proc. CACSD Conference, Taipei, Taiwan, 2004. – URL: <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/>.
 26. MAXIMOV E.A., KURDYUKOV A.P., VLADIMIROV I.G. *Anisotropic Norm Bounded Real Lemma for Linear Time-Varying System* // Proc. 18th IFAC World Congr., Milano, 2011. – P. 4701–4706.
 27. PAKSHIN P.V. *State estimation and control design for digital linear systems with multiplicative noises* // Aut. and Rem. Control. – 1978. – Vol. 39, Iss. 4. – P. 526–636.
 28. PETERSEN I.R. *A stabilization algorithm for a class of uncertain systems* // Syst. Control Lett. – 1987. – Vol. 8. – P. 351–357.
 29. PETERSEN I.R., MCFARLANE D.C. *Robust state estimation for uncertain systems* // Proc. 30th IEEE Conference Decision and Control, Brighton, UK, 1991. – P. 2630–2631.
 30. POLYAK B.T., KHLEBNIKOV M.V., SHCHERBAKOV P.S. *Linear Matrix Inequalities in Control Systems with Uncertainty* // Automation and Remote Control. – 2021. – Vol. 82. – P. 1–40.
 31. SEMYONOV A.V., VLADIMIROV I.G., KURDYUKOV A.P. *Stochastic approach to \mathcal{H}_∞ optimization* // Proc. 33rd IEEE

- Conf. Decision and Control. – 1994. – Vol. 3. – P. 2249–2250.
32. TCHAIKOVSKY M.M. *Static output feedback anisotropic controller design by LMI-based approach: General and special cases* // Proc. 2012 American Control Conf., Montreal, Canada, June 27–29, 2012.
 33. TODOROV E. *Stochastic optimal control and estimation methods adapted to the noise characteristics of the sensorimotor system* // Neural Comput. – 2005. – Vol. 17. – P. 1084–1108.
 34. TODOROV E., LI WEIWEI *Optimal control methods suitable for biomechanical systems.* // Proc. of the 25th Annual Int. Conf. of the IEEE Engineering in Biology and Medicine Society, Mexico, 2003. – P. 1758–1761.
 35. VLADIMIROV I.G., DIAMOND P. *Robust Filtering in Finite Horizon Linear Discrete Time Varying Systems by Minimum Anisotropic Norm Criterion* // CADSMAP Res. Report 01-05. 2001 [completed in 2001].
 36. VLADIMIROV I.G., DIAMOND P., KLOEDEN P. *Anisotropy-based robust performance of finite horizon linear discrete time varying systems.* – 2001.
 37. VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P., SEMYONOV A.V. *On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems* // Proc. 13 IFAC World Congress, 1996. – P. 179–184.
 38. VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P., SEMYONOV A.V. *State-space solution to anisotropy-based stochastic \mathcal{H}_∞ -optimization problem* // Proc. 13 IFAC World Congress, 1996. – P. 427–432.
 39. VLADIMIROV I.G., PETERSEN I.R. *State Distributions and Minimum Relative Entropy Noise Sequences in Uncertain Stochastic Systems: The Discrete-Time Case* // SIAM Journal on Control and Optimization. – 2015. – Vol. 53. – P. 1107–1153.
 40. VLASSIS N., JUNGERS R. *Polytopic uncertainty for linear systems: New and old complexity results* // Systems & Control Letters. – 2014. – Vol. 67. – P. 9–13.

41. ZHOU K., KHARGONEKAR P.P. *An algebraic Riccati equation approach to \mathcal{H}_∞ -optimization* // Syst. Contr. Lett. – 1988. – Vol. 11. – P. 85–92.

ANISOTROPY-BASED ANALYSIS OF LINEAR DISCRETE TIME VARYING SYSTEMS WITH MULTIPLICATIVE NOISES

Ivan Belov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, postgraduate (ivanb1993@mail.ru).

Abstract: In the 90s of the last century the anisotropy-based control theory was introduced. Its techniques are used in control and filtration problems for linear systems with nonrandom matrices and input random disturbances with unknown statistic characteristics. The concept of anisotropy of random vector as measure of deviation of the vector probabilities distribution law from standard Gauss distribution was introduced in the theory. The paper demonstrates the solutions of anisotropy-based analysis problems for the linear discrete systems with multiplicative noises. The problems of anisotropic norm calculation and formulation of anisotropic norm boundness conditions are considered for such systems on the finite horizon. The anisotropic norm boundness conditions are presented in two forms: the Riccati difference equations and the Riccati inequality. The obtained anisotropy-based analysis results allow to solve control and filtration problems for multiplicative noise systems.

Keywords: linear discrete time varying systems, random disturbances, multiplicative noises, norm, anisotropy, Riccati difference equation, Riccati inequality.

УДК 681.518.22; 681.514; 681.516.75

ББК 32.965.4; 32.965.6

DOI: 10.25728/ubs.2021.91.2

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Э.Ю. Калимулиной.

Поступила в редакцию 16.04.2021.

Дата опубликования 31.05.2021.

УСЛОВИЕ ПРИБЫЛЬНОСТИ В МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА

Бурков В. Н.¹, Буркова И. В.², Щепкин А. В.³

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассматривается модель межотраслевого баланса Леонтьева, в которой каждая отрасль поставляет свою продукцию другим отраслям и, соответственно, приобретает у них продукцию. В случае, когда заданы прибыли отраслей и затраты на выпуск продукции, модель, двойственная к модели Леонтьева, позволяет рассчитать равновесные цены. В работе предполагается, что цену на продукцию и затраты на производство устанавливают сами отрасли. Для установленных отраслями цен возникает задача исследования их влияния на сохранение межотраслевого баланса. Если считать, что отрасли – это монополисты, которые пользуясь своим монопольным положением стремятся увеличить свою прибыль за счет увеличения цены на свою продукцию, то возникает задача определения условий прибыльности, т.е. определения такого множества цен на продукцию отраслей, при которых все отрасли получают прибыль. Предполагая, что влиять на цены монополиста государство не может, предлагаются меры воздействия на монополистов со стороны государства путем введения ограничений на их рентабельность или же при помощи противозатратного налогового механизма. Оценивается эффективность этих мер. Для предложенных мер воздействия на монополистов определены условия сохранения межотраслевого баланса и условия прибыльности.

Ключевые слова: затраты, цены, прибыль, рентабельность, межотраслевой баланс, противозатратный механизм.

1. Введение

В работе [8] группой авторов во главе с В.В. Леонтьевым при исследовании структуры американской экономики была предложена модель межотраслевого баланса по схеме «затраты – выпуск». Анализ модели «затраты – выпуск» направлен на поиск связи уровня производства в каждой отрасли народного хозяйства с уровнями производства в других отраслях. Основ-

¹ Владимир Николаевич Бурков, д.т.н., профессор (vlab17@bk.ru).

² Ирина Владимировна Буркова, д.т.н., доцент (irbur27@gmail.com).

³ Александр Васильевич Щепкин, д.т.н., профессор (av_shch@mail.ru).

ным объектом анализа модели межотраслевого баланса является матрица, элементы которой представляют собой «технические коэффициенты», позволяющие в простейшей линейной форме представить зависимость между затратами и выпусками различных отраслей народного хозяйства. Учитывая, что продукция, выпускаемая разными отраслями, имеет разные измерения, при анализе модели межотраслевого баланса часто рассматривается лишь стоимостной баланс. Но при этом не уточняется, в каких ценах анализируется межотраслевой баланс. Очевидно, что если учитывается себестоимость производства, будет получен один результат, если же учитываются цены реализации продукции, то результат может быть иной. Кроме того, учет цены реализации продукции дает возможность анализировать и возможность получения прибыли в отрасли. А если отрасль рассматривается как монополист, то возникает задача определения условий, обеспечивающих прибыльность в модели Леонтьева и влияния на монополиста с целью ограничения его цен реализации. Отметим здесь, что исследования, связанные с применением модели Леонтьева, проводятся и за рубежом [11–13]

2. Модель Леонтьева

В модели рассматриваются n отраслей промышленности, каждая из которых производит свою продукцию. Обозначим через x_i – валовой выпуск продукции отрасли i . Продукция i -й отрасли потребляется в самой отрасли и во всех других отраслях экономики, часть продукции потребляется вне сферы материального производства и называется конечным продуктом. Обозначим через x_{ij} величину продукта, произведенного в i -й отрасли и потребляемого в j -й отрасли, а y_i – величину конечного продукта i -й отрасли. В этом случае соотношение и производства и потребления продукции i -й отрасли может быть записано в виде

$$(1) \quad x_i = x_{i1} + x_{i2} + x_{in} + y_i, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, для всех отраслей экономики региона получаем систему уравнений

Фактически здесь получена балансовая модель, двойственная к модели Леонтьева, которая получила название «модель равновесных цен» [10]. Во многих случаях при рассмотрении модели равновесных цен в K включаются прибыль и налоги. Для того чтобы уравнение (7) имело неотрицательное решение, матрица A^T также должна быть продуктивна. Из одного из критериев продуктивности [10] следует, что неотрицательная квадратная матрица продуктивна тогда и только тогда, когда ее число Фробениуса меньше единицы. А так как собственные числа у матриц A и A^T совпадают [2], то совпадают и числа Фробениуса матриц A и A^T , что и означает, что A^T также продуктивна.

Балансовая модель (15), двойственная к модели Леонтьева, рассматривается в [1, 6, 10] как модель, предназначенная для определения равновесных цен отраслей на выпускаемую продукцию. При этом считается, что k_i , $i = 1, \dots, n$, заданы и в них входит часть добавленной стоимости, которая идет на выплату зарплаты, а также прибыль и налоги. То есть прибыль просто задается, но при этом не учитывается тот факт, что отрасли-монополисты стремятся увеличить свою прибыль.

Для $n = 2$ из (11) следует $c_1 - k_1 - c_1 a_{11} - c_2 a_{21} > 0$ и $c_2 - k_2 - c_1 a_{12} - c_2 a_{22} > 0$, или

$$(16) \quad \begin{cases} c_1 > \frac{a_{21}}{1-a_{11}} c_2 + \frac{k_1}{1-a_{11}}, \\ c_2 > \frac{a_{12}}{1-a_{22}} c_1 + \frac{k_2}{1-a_{22}}. \end{cases}$$

Множество цен агентов, которые обеспечивают им получение прибыли, будем называть областью прибыльности. На рис. 1 область прибыльности заштрихована мелкой клеткой.

Из этого рисунка видно, что для получения прибыли у первого агента цена должна быть не меньше, чем

$$(17) \quad c_1 = \frac{a_{21} k_2 + (1 - a_{22}) k_1}{(1 - a_{22})(1 - a_{11}) - a_{12} a_{21}}.$$

Соответственно, у второго агента цена должна быть не меньше, чем

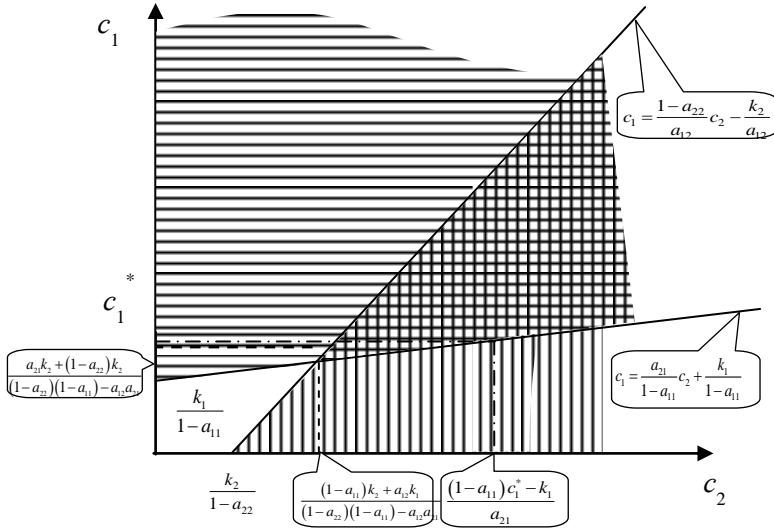


Рис. 1. Область прибыльности

$$(18) \quad c_2 = \frac{(1-a_{11})k_2 + a_{12}k_1}{(1-a_{22})(1-a_{11}) - a_{12}a_{21}}.$$

Очевидно, что при фиксированной цене первого агента, например, $c_1 = c_1^*$, увеличение цены второго агента c_2 ведет к увеличению прибыли второго агента. Но из рис. 1 видно, что если

$$(19) \quad c_2 > \frac{(1-a_{11})c_1^* - k_1}{a_{21}},$$

то первому агенту становится невыгодно выпускать продукцию по цене c_1^* . И это подталкивает его на увеличение цены. Таким образом, из (10) видно, что формируются своеобразные «качели»: увеличение цены одним агентом и, соответственно, увеличение его прибыли приводит к уменьшению прибыли остальных агентов, что подталкивает их увеличивать свои цены. Здесь следует отметить, что такие «качели» действительно могут вызвать рост цен, когда агенты продают свою продукцию друг другу. В то же время нетрудно видеть, что рост цен может привести к тому, что конечный продукт не найдет своего потребителя

и взаимные закупки агентов потеряют смысл. Для каждого агента определим лимитную цену L_i , $i = 1, \dots, n$, при которой весь конечный продукт реализуется. На рис. 2, для двух агентов с лимитными ценами L_1 и L_2 видно, как может измениться область прибыльности. В то же время отметим, если лимитная цена первого агента равна L_1^* , то ему не выгодно будет увеличивать свою цену до максимального значения, так как при этом второе неравенство (8) для $c_1 = L_1^*$ и $c_2 = L_2$ не выполняется. Подобная ситуация представлена на рис. 2, где легко видеть, что для получения прибыли первый агент вынужден реализовывать свою продукцию ниже лимитной цены.

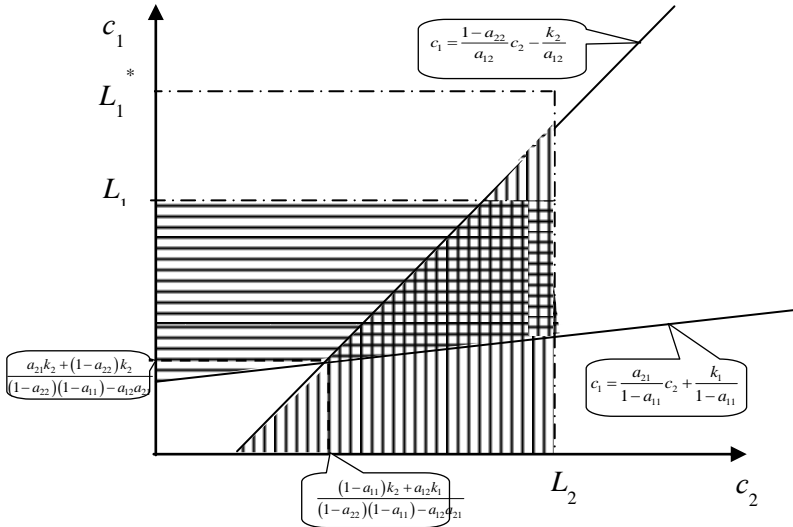


Рис. 2. Область прибыльности при введении лимитных цен

В дальнейшем рассматривается случай, когда в k_i , $i = 1, \dots, n$, прибыль и налоги не входят, обозначим через μ ставку налога на прибыль. Тогда чистая прибыль от единицы выпущенной продукции (прибыль за вычетом налога на прибыль) i -го агента будет определяться как

$$(20) \quad p_i = (1 - \mu) \left(c_i - k_i - \sum_{j=1}^n c_j a_{ji} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Очевидно, что при этом у агентов остается заинтересованность завышать цены на свою продукцию.

4. Ограничение на рентабельность в модели Леонтьева

Для противодействия росту цен может быть использовано ограничение на рентабельность. Легко видеть, что рентабельность i -го агента определяется как

$$(21) \quad \rho_i = \frac{Q_i}{z_i} - 1 = \frac{c_i x_i (1 - a_{ii})}{\left(k_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j a_{ji} \right) x_i} - 1 = \frac{c_i (1 - a_{ii})}{k_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j a_{ji}} - 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Будем считать, что для всех агентов задано ограничение на рентабельность $\rho_i \leq \theta$. Тогда

$$(22) \quad \frac{c_i (1 - a_{ii})}{k_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j a_{ji}} - 1 \leq \theta, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Появление дополнительных ограничений на цену приводит к сокращению множества цен, обеспечивающих получение агентами прибыли. Действительно, для $n = 2$ из (22) можем записать

$$(23) \quad \begin{cases} c_1 \leq \frac{1 + \theta}{1 - a_{11}} a_{21} c_2 + \frac{1 + \theta}{1 - a_{11}} k_1, \\ c_1 \geq \frac{1 - a_{22}}{(1 + \theta) a_{12}} c_2 - \frac{k_2}{a_{12}}. \end{cases}$$

На рис. 3 изображена область прибыльности при фиксированных значениях k_1 и k_2 и ограничении на максимальную рентабельность агентов (штриховка крупной клеткой).

Сравнивая рис. 2 и рис. 3 легко видеть, что область прибыльности при введении ограничения на максимальную рентабельность агентов сократилась.

Перепишем (21) в виде

$$(24) \quad c_i = \frac{1 + \rho_i}{1 - a_{ii}} k_i + \frac{1 + \rho_i}{1 - a_{ii}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j a_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

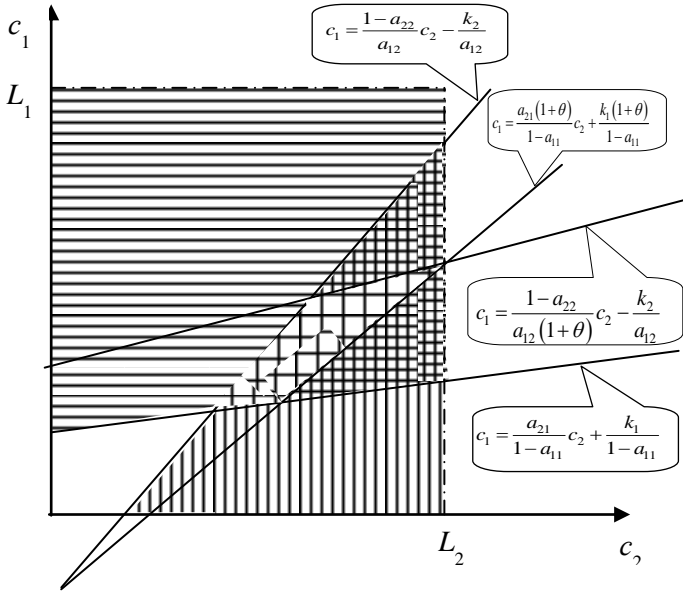


Рис. 3. Область прибыльности при введении ограничения на максимальную рентабельность

Учитывая, что $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j a_{ji} = \sum_{j=1}^n c_j a_{ji} - c_i a_{ii}$, то для максимальной

рентабельности θ из (24) легко получить

$$(25) \quad c_i = \frac{1 + \theta}{1 + a_{ii}\theta} \sum_{j=1}^n c_j a_{ji} + \frac{1 + \theta}{1 + a_{ii}\theta} k_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Обозначим матрицу

$$(26) E' = \begin{pmatrix} \frac{1+\theta}{1+\theta a_{11}} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1+\theta}{1+\theta a_{22}} a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1+\theta}{1+\theta a_{nn}} a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теперь можем записать матричное уравнение

$$(27) C = E'A^T C + E'K.$$

Для того чтобы это матричное уравнение имело неотрицательное решение, матрица $E'A^T$ должна быть продуктивной.

Для $n = 2$ имеем

$$(28) \begin{cases} \frac{1-a_{11}}{1+\theta} c_1 - c_2 a_{21} = k_1, \\ -c_1 a_{12} + \frac{1-a_{22}}{1+\theta} c_2 = k_2. \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид

$$(29) \begin{cases} c_1 = \frac{(1-a_{22})k_1 + a_{21}(1+\theta)k_2}{(1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}(1+\theta)^2} (1+\theta), \\ c_2 = \frac{a_{12}(1+\theta)k_1 + (1-a_{11})k_2}{(1-a_{22})(1-a_{11}) - a_{21}a_{12}(1+\theta)^2} (1+\theta). \end{cases}$$

В данном случае требование продуктивности накладывает дополнительные ограничения. Действительно, из (29) следует, что система (28) имеет неотрицательные решения, когда справедливо неравенство

$$(30) \theta < \sqrt{\frac{(1-a_{11})(1-a_{22})}{a_{12}a_{21}}} - 1.$$

Это неравенство означает, что задавать произвольно максимальную рентабельность нельзя и для обеспечения продуктивности матрицы $E'A^T$ значение θ должно быть рассчитано с учетом значений «технических коэффициентов».

Чистая прибыль агентов равна

$$(31) \begin{cases} p_1 = (1 - \mu)\theta(1 - a_{11}) \frac{(1 - a_{22})k_1 + a_{21}(1 + \theta)k_2}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - (1 + \theta)^2 a_{12}a_{21}} x_1, \\ p_2 = (1 - \mu)\theta(1 - a_{22}) \frac{a_{12}k_1 + (1 - a_{11})k_2}{(1 - a_{22})(1 - a_{11}) - a_{21}a_{12}(1 + \theta)^2} x_2. \end{cases}$$

Вышеприведенные рассуждения и, соответственно, множество цен, обеспечивающее получение прибыли при введении ограничения на рентабельность осуществлялись при предположении, что коэффициенты затрат агентов не менялись. В то же время из (27) и, соответственно, из (29) следует, что при увеличении коэффициентов затрат $\{k_i\}$ увеличиваются компоненты вектора K' , а при неизменной матрице $E'A^T$ это приводит к увеличению компонентов вектора C .

В свою очередь, из (31) видно, что чем выше коэффициенты затрат k_1 и k_2 , тем выше чистая прибыль агентов. Таким образом, оставаясь в рамках ограничений на рентабельность, у агентов для увеличения своей прибыли появляется заинтересованность увеличивать цену на продукцию и искусственно «накручивать» затраты на ее выпуск.

5. Применение механизма противозатратности в модели Леонтьева

Исследование противозатратных механизмов [3, 4, 9] показало, что с целью формирования заинтересованности у агентов снижать цену выпускаемой продукции можно использовать механизм увеличения ставки налогообложения при увеличении цены.

В рассматриваемой модели для достижения этой цели определим переменную ставку налога на прибыль $\hat{\mu}_i$ в соответствии с процедурой

$$(32) \hat{\mu}_i = \mu_0 \frac{\left[c_i(1 - a_{ii}) - k_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j a_{ji} \right]}{L_i(1 - a_{ii}) - k_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j a_{ji}},$$

где μ_0 – фиксированная ставка налога, v – настроечный коэффициент. Фактически здесь переменная ставка налога $\hat{\mu}_i$ – это произведение фиксированной ставки налога и отношения дохода i -го агента от выпуска единицы продукции к возможному доходу при реализации продукции по лимитной цене.

В этом случае чистую прибыль агента (20) можно переписать в виде

$$(33) p_i = c_i(1 - a_{ii}) - k_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j a_{ji} - \frac{\mu_0 v \left(c_i(1 - a_{ii}) - k_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j a_{ji} \right)^2}{L_i(1 - a_{ii}) - k_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j a_{ji}},$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Оптимальное значение цены, обеспечивающей получение максимальной чистой прибыли, можно найти из условия $\partial p_i / \partial c_i = 0$. Решая соответствующие уравнения, получаем

$$(34) c_i = \frac{1}{2\mu_0 v} \left[L_i + \frac{2\mu_0 v - 1}{1 - a_{ii}} \left(k_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j a_{ji} \right) \right], i = 1, 2, \dots, n.$$

Чистая прибыль i -го агента при этой цене определяется как

$$(35) p_i = \frac{1}{4\mu_0 v} \left[(1 - a_{ii}) L_i - \left(k_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j a_{ji} \right) \right], i = 1, 2, \dots, n.$$

Из (35) видно, что увеличение собственных затрат i -го агента (коэффициента k_i) приводит к уменьшению его чистой прибыли.

Введение переменной ставки налога на прибыль приводит к дополнительным ограничениям на цены, которые изменяют множество цен, обеспечивающих получение агентам прибыли. Действительно, для чистой прибыли (33) к неравенству (11) добавляется неравенство

$$(36) \quad c_i \leq \frac{1}{\mu_0 v} \left(L_i + \frac{\mu_0 v - 1}{1 - a_{ii}} k_i \right) + \frac{\mu_0 v - 1}{\mu_0 v (1 - a_{ii})} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j a_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Для $n = 2$ из условия (11) имеем

$$(37) \quad \begin{cases} c_1 \geq c_2 \frac{a_{21}}{1 - a_{11}} + \frac{k_1}{1 - a_{11}}, \\ c_1 \leq c_2 \frac{1 - a_{22}}{a_{12}} - \frac{k_2}{a_{12}}. \end{cases}$$

Соответственно, из (36) следует

$$(38) \quad \begin{cases} c_1 \leq \frac{1}{\mu_0 v} \left(L_i + \frac{\mu_0 v - 1}{1 - a_{ii}} k_i \right) + \frac{\mu_0 v - 1}{\mu_0 v (1 - a_{ii})} a_{21} c_2, \\ c_1 \geq \frac{1 - a_{11}}{(\mu_0 v - 1) a_{12}} \mu_0 v c_2 - \frac{1}{a_{12}} \left(\frac{1 - a_{11}}{\mu_0 v - 1} L_2 - k_2 \right). \end{cases}$$

Несложно показать, что можно подобрать такие значения μ_0 и v , которые обеспечивают противозатратность и не сокращают область прибыльности, которая представлена на рис. 2,

Обозначим матрицы

$$(39) \quad E'' = \begin{pmatrix} \frac{2\mu_0 v - 1}{2\mu_0 v - a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{2\mu_0 v - 1}{2\mu_0 v - a_{22}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{2\mu_0 v - 1}{2\mu_0 v - a_{nn}} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \frac{(1 - a_{11})L_1 + (2\mu_0 v - 1)k_1}{2\mu_0 v - a_{11}} \\ \frac{(1 - a_{22})L_2 + (2\mu_0 v - 1)k_2}{2\mu_0 v - a_{22}} \\ \dots \\ \frac{(1 - a_{nn})L_n + (2\mu_0 v - 1)k_n}{2\mu_0 v - a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Тогда (34) можно переписать в виде матричного уравнения

$$(40) \quad C = E'' A^T C + H.$$

Для того чтобы это матричное уравнение имело неотрицательное решение, матрица $E''A^T$ должна быть продуктивной.

Систему уравнений (34) для $n = 2$ можно записать в виде

$$(41) \quad \begin{cases} c_1 - \frac{v+1}{1-a_{11}} c_2 a_{21} = \frac{k_1}{2(1-a_{11})}, \\ c_2 - \frac{v+1}{1-a_{22}} c_1 a_{12} = \frac{k_2}{2(1-a_{22})}. \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид

$$(42) \quad \begin{cases} c_1 = \left[\left(L_1 + \frac{2\mu_0 v - 1}{1-a_{11}} k_1 \right) + \frac{a_{21}(2\mu_0 v - 1)}{2\mu_0 v(1-a_{11})} \left(L_2 + \frac{2\mu_0 v - 1}{1-a_{22}} k_2 \right) \right] V, \\ c_2 = \left[\left(L_2 + \frac{2\mu_0 v - 1}{1-a_{22}} k_2 \right) + \frac{a_{12}(2\mu_0 v - 1)}{2\mu_0 v(1-a_{22})} \left(L_1 + \frac{2\mu_0 v - 1}{1-a_{11}} k_1 \right) \right] V. \end{cases}$$

$$\text{Здесь } V = \frac{2\mu_0 v(1-a_{11})(1-a_{22})}{4(\mu_0 v)^2(1-a_{11})(1-a_{22}) - (2\mu_0 v - 1)^2 a_{12} a_{21}}.$$

Отсюда видно, что для обеспечения продуктивности должно выполняться условие $4(\mu_0 v)^2(1-a_{11})(1-a_{22}) - (2\mu_0 v - 1)^2 a_{12} a_{21} > 0$. Так как матрица A продуктивна, то для обеспечения продуктивности при применении притивозатратного налогового механизма достаточно выбрать $v > 0$.

6. Заключение

Анализ модели межотраслевого баланса Леонтьева с учетом действий агентов-монополистов, направленных на увеличение прибыли, показал, что в первую очередь необходимо получить условия, обеспечивающие прибыльность модели Леонтьева. Фактически это означает определение множества цен, устанавливаемых агентами на свою продукцию, при которых они получают прибыль, – область прибыльности. Показано, что стремление к увеличению прибыли одним агентом приводит к увеличению цены, что влечет уменьшение прибыли остальных агентов. А это, в свою очередь, подталкивает их увеличивать свои цены. Введение ограничения на рентабельность агентов приводит к тому, что область прибыльности сокращается. Однако в этом

случае для увеличения своей прибыли агенты увеличивают свои цены и свои затраты на выпуск продукции. Замена ограничения на рентабельность на переменную ставку налога позволяет изменить эту тенденцию и при этом проявляется эффект противозатратности – агенты не заинтересованы увеличивать цены и затраты на выпуск продукции.

Литература

1. АЛЛЕН Р. *Математическая экономия* – М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. – 668 с.
2. БЕЛЛИМАН Р. *Введение в теорию матриц* – М.: Изд-во Мир, 1969. – 368 с.
3. БУРКОВ В.Н., ДАНЕВ Б., ЕНАЛБЕЕВ А.К. и др. *Большие системы: моделирование организационных механизмов.* – М.: Наука, 1989. – 246 с.
4. БУРКОВ В.Н., КАШЕНКОВ А.Р. *Противозатратные механизмы управления научными исследованиями и разработками* // В кн. «Совершенствование организационно-экономического механизма управления деятельностью научно-исследовательских и проектно-конструкторских учреждений». – М.: МДНТП, 1988. – С. 45.
5. *Высшая математика для экономистов: учебник для студентов, обучающихся по экономическим специальностям* / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 479 с.
6. ГЕЙЛ Д. *Теория линейных экономических моделей* – М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. – 418 с.
7. ЛЕОНТЬЕВ В. *Экономическое эссе. теории, исследования, факты и политика.* – М.: Политиздат, 1990. – 415 с.
8. ЛЕОНТЬЕВ В., ЧЕНЕРИ Х.В., КЛАРК П.Г. и др. *Исследование структуры американской экономики. теоретический и эмпирический анализ по схеме затраты – выпуск.* – М.: Государственное статистическое издательство, 1958. – 641 с.
9. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами.* – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2012. – 604 с.

10. СОЛОДОВНИКОВ А.С., БАБАЙЦЕВ В.А., БРАИЛОВ А.В., ШАНДРА И.Г. *Математика в экономике / Учебник. Ч. 1. Линейная алгебра, Аналитическая геометрия и линейное программирование.* – М.: Финансы и статистика, 2013. – 384 с.
11. DIETZENBACHER E., LAHR M.L. *Wassily Leontief and input-output economics.* – Cambridge University Press, 2004. – 396 p.
12. TANAKA F.J.M. *Applications of Leontief's Input-Output Analysis in Our Economy // Faculty of Economics Journal University of Nagasaki.* – 2011. – Vol. 45, No. 1. – P. 29–96.
13. YONG L.C. *The control of Leontief model on industry manufacturing process // Advanced Materials Research.* – 2011. – Vol. 187. – P. 287–290.

PROFITABILITY CONDITION IN THE LEONTIEF MODEL

Vladimir Burkov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (vlab17@bk.ru).

Irina Burkova, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, assistant professor (irbur27@gmail.com).

Alexander Shchepkin, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (av_shch@mail.ru).

Abstract: We consider a model input-output model of Leontief, in which each industry supplies its products to other industries and, accordingly, purchases products from them. In the case where the profit of the industries and the costs of output are given, the model dual to the model of Leontief allows us to calculate the equilibrium prices. The paper assumes that the price of products and production costs are set by the industries themselves. For the prices set by the industries, the task is to study their impact on the preservation of the interindustry balance. If we assume that industries are monopolists who, taking advantage of their monopoly position, seek to increase their profits by increasing the price of their products, then the problem arises of determining the conditions of profitability, that is, determining such a set of prices for the products of industries in which all industries make a profit. Assuming that the state cannot influence the prices of the monopolist, measures are proposed to influence the monopolists by the state by imposing restrictions on their profitability or by using cost-saving mechanism. The effectiveness of these measures is evaluated. For the proposed measures to influence monopolies, the conditions for maintaining the interindustry balance and the conditions for profitability are determined.

Keywords: costs, prices, profit, profitability, interindustry balance, cost-saving mechanism.

УДК 519.7

ББК 22.18

DOI: 10.25728/ubs.2021.91.3

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Ф.И. Ерешко.*

Поступила в редакцию 04.03.2021.

Опубликована 31.05.2021.

МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАЗВИТИЯ ИНФРАСТРУКТУРНЫХ СИСТЕМ

Акинфиев В. К.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассмотрены постановки и методы решения задач пространственного развития инфраструктурных производственно-транспортных систем. Задача формулируется и изучается в двух вариантах. В первом варианте рассматривается система, состоящая из координирующего органа и элементов производственно-транспортной системы (ПТС). В состав ПТС входят некоторый набор производственных элементов (предприятий) и транспортная инфраструктура, которая связывает производственные элементы с узлами потребления (рынками). В этом случае задача выбора инвестиционной программы развития инфраструктурной системы формулируется в терминах задачи оптимизации с непрерывными и целочисленными переменными. Во втором варианте предполагается, что координация в системе отсутствует, и согласование инвестиционных программ развитие элементов ПТС реализуется через рыночные механизмы. Предложена постановка задачи, которая формулируется в виде совокупности взаимосвязанных нелинейных задач оптимизации со связанными переменными. Для выбора стратегического поведения компаний предлагаются методы сведения исходной задачи к решению смешанной задачи дополнителности (MCP), а также методы, развитые для решения задач программирования с равновесными ограничениями (MPEC). Обсуждаются перспективы и направления использования предложенных подходов к решению прикладных задач пространственного развития инфраструктурных систем.

Ключевые слова: производственно-транспортные системы, математическая модель, рыночное ценообразование.

1. Введение

В работе рассматривается задача выбора инвестиционных решений при формировании программ пространственного развития инфраструктурных производственно-транспортных систем. Важность исследований этих вопросов определяется современным состоянием экономики России и перспективами ее дальнейшего развития. Правительством России в 2018 году

¹ Валерий Константинович Акинфиев, д.т.н., в.н.с. (akinf@ipu.ru).

принята стратегия пространственного развития страны на период до 2025 года. Цели Стратегии – обеспечение устойчивого и сбалансированного пространственного развития России, ускорение темпов экономического роста и технологического развития, обеспечение национальной безопасности.

Возможности для расширения производственной деятельности будут создаваться за счет развития инфраструктуры (производственной и транспортной), что предполагает строительство новых объектов и модернизацию существующих. Современный уровень развития инфраструктуры России – объективное ограничение для выхода на более высокую траекторию динамики экономического роста. Для обеспечения максимального влияния на экономический рост необходимо взаимосвязанное принятие решения о создании и размещении объектов производственной, транспортной и социальной инфраструктуры.

В этой связи возрастает роль разработки и принятия научно обоснованных решений на основе использования современных математических моделей и методов поддержки разработки и реализации программ. В данной работе мы рассматриваем важный класс инфраструктурных систем, а именно крупномасштабные производственно-транспортные системы (ПТС).

Крупномасштабные производственно-транспортные системы (ПТС) включают совокупность элементов (производственных и транспортных), взаимосвязанных между собой. Рассмотрим основные элементы таких систем на примере электроэнергетических систем и систем газоснабжения. В первом примере производственные элементы – это генерирующие компании, включающие совокупность действующих и строящихся электростанций; транспортные элементы – это магистральные линии электропередач (ЛЭП). Во втором примере производственные элементы – это газодобывающие компании, включающие совокупность предприятий по разработке и эксплуатации газовых месторождений, узлы потребления газа (крупные города, регионы), и связывающая их сеть газопроводов, которая является совокупностью транспортных элементов системы.

Задача оптимизации программ развития крупномасштабных ПТС состоит в согласованном выборе оптимальных вариантов

развития производственных и транспортных элементов системы (распределение инвестиций, определение очередности строительства новых предприятий и транспортных элементов), определении моментов ввода мощностей с учетом динамики изменения спроса на продукцию в узлах потребления, возможностей строительных организаций и ограничений на технологию строительства. Кроме того, требуется определить транспортные потоки в системе и их изменение во времени.

В [1] были предложены подходы к построению инвестиционных моделей планирования развития крупномасштабных систем. В данной работе мы развиваем эти подходы для оптимизации программ развития крупномасштабных ПТС. Особенность рассматриваемого класса задач состоит в том, что при моделировании необходимо учитывать динамику инвестиций для каждого отдельного элемента, так как время создания элемента может быть достаточно велико.

При построении данного типа моделей предполагается, что часть параметров модели (динамика спроса на продукцию в узлах потребления, объемы ресурсов, выделенных на развитие) задается координирующим органом, а варианты развития производственных элементов задают сами компании. Предложенный способ формализации предусматривает построение динамической модели одно- или многопродуктовой производственно-транспортной системы, которая включает непрерывные и целочисленные переменные (раздел 2).

Следует заметить, что в рассмотренном выше подходе элементы ПТС не рассматривались как самостоятельные хозяйствующие субъекты, которые максимизируют каждый свою целевую функцию. Учет при моделировании данного аспекта является также важным, и здесь с успехом могут быть использованы методы принятия решений в условиях многоуровневой координации с учетом активности предприятий, которые разработаны в рамках теории активных систем [5, 6].

В разделе 3 рассмотрены модели оптимизации пространственного развития ПТС с учетом факторов конкуренции и рыночного ценообразования. В этом случае предполагается, что координация в системе отсутствует и согласование инвестици-

онных программ развитие элементов ПТС реализуется через рыночные механизмы.

В работе задача выбора стратегического поведения производственных и транспортных элементов ПТС на конкурентных рынках формулируется как совокупность взаимосвязанных нелинейных задач оптимизации со связанными переменными. Для их решения предложено использовать методы сведения исходной задачи к решению смешанной задачи дополнителности (МСП). В случае рынка с асимметрией для решения исходной задачи предлагается использовать методы математического программирования с равновесными ограничениями (МРЕС)

В заключение обсуждаются проблемы сочетания этих методов и области их практического применения.

2. Модель оптимизация пространственного развития ПТС

Рассмотрим производственно-транспортную систему, которая включает множество узлов потребления, множество производственных элементов (предприятий), производящих однородную продукцию, и транспортную сеть, соединяющую производственные элементы и узлы потребления. Для каждого производственного и транспортного элемента задается множество вариантов развития, которые отличаются графиком ввода мощностей и необходимых для их реализации инвестиций, распределенных во времени.

Заметим, что процесс развития элементов ПТС может включать нескольких очередей или этапов, после завершения строительства которых достигается прирост уровня производства (например, получение электроэнергии после пуска одного из энергоблоков электростанции). Условия строительства объектов в различных элементах системы зависят от климатической зоны, удаленности от сырьевой базы, обеспеченности трудовыми ресурсами и т.д.

Задача оптимизация пространственного развития ПТС в этом случае состоит в поиске оптимального варианта ввода мощностей и графика строительства производственных

и транспортных элементов системы, которые позволяли бы удовлетворить заданную потребность в продукции в узлах потребления ПТС с минимальными затратами с учетом ресурсных, технологических и иных ограничений на строительство.

Обозначим через R_{im} объем инвестиций в развитие производственного элемента i в m -й период его развития ($m = 1, \dots, M_i$), а соответствующий уровень прироста производства равен C_{im} .

Введем переменные $z_{it} = 1$, если i -й производственный элемент начинает строиться в t -й период времени, $z_{it} = 0$ в противном случае, $t = 1, \dots, T$.

Тогда суммарный прирост производства продукции по всей совокупности производственных элементов в j -м узле потребления (регионе) в t -й период составит

$$(1) \quad C_{jt} = \sum_{i \in I_j} \sum_{m=1}^{M_i} C_{it} z_{i(t-m+1)}, \quad \forall j \in J, t = 1, \dots, T.$$

Инвестиции на достижение уровня производства C_{jt} в j -м узле потребления в t -й период равны

$$(2) \quad R_{jt} = \sum_{i \in I_j} \sum_{m=1}^{M_i} R_{it} z_{i(t-m+1)}, \quad \forall j \in J, t = 1, \dots, T.$$

Пусть P_{jt} – заданный прирост потребления продукции в j -м узле потребления в t -й период планирования. Тогда суммарный прирост производства по всем производственным элементам системы должен быть не ниже суммарного прироста потребления в системе:

$$(3) \quad \sum_{j \in J} C_{jt} \geq \sum_{j \in J} P_{jt}.$$

Пусть D_{jt} – разность между производством и потреблением продукции в j -м узле потребления в период t , тогда

$$D_{jt} = D_{jt}^0 + C_{jt} - P_{jt}, \quad \forall j \in J, t = 1, \dots, T,$$

где D_{jt}^0 – разность между производством и потреблением продукции в j -м элементе ПТС в начальный период планирования.

Возникающий в процессе развития в некоторых узлах системы дефицит продукции должен покрываться за счет ее

транспортировки из узлов с избытком производства. Для этого необходимо одновременно развивать транспортные элементы системы, увеличивая при этом связность регионов и пропускную способность транспортной сети. Характер и темпы развития производственных элементов системы существенным образом зависят от развития ее транспортной сети и динамики изменения транспортных потоков. Это влияние в основном осуществляется через общие ресурсные ограничения на развитие системы.

Введем переменные $x_{(jj')t} \geq 0$ – поток продукта по транспортному элементу jj' в t -й период планирования; $z_{(jj')t}^1$, если между элементами j и j' в t период планирования начато строительство транспортного элемента 1-го типа, и $z_{(jj')t}^1$ в противном случае.

С использованием введенных переменных условие удовлетворения потребности в j -м узле в t -й период планирования (балансные соотношения) запишется в виде

$$(4) \quad \sum_{(jj') \in \theta_j'} x_{(jj')t} - \sum_{(jj') \in \theta_j''} x_{(jj')t} = D_{jt}, \quad \forall j \in J, t = 1, \dots, T,$$

где θ_j' – подмножество θ , для всех элементов которого вторым индексом в паре (jj') является индекс j ; θ_j'' – подмножество θ , для всех элементов которого первым индексом в паре (jj') является индекс j .

Обозначим через $S_{(jj')t}^1$ пропускную способность транспортного элемента (jj') 1-го типа. Тогда ограничение на величину потока продукта между двумя узлами потребления (jj') в каждый период планирования имеет вид:

$$(5) \quad \sum_{l=1}^{L_{(jj')}} \sum_{m=1}^{t-M_{(jj')}^l} S_{(jj')}^l z_{(jj')m}^l \geq x_{(jj')t} + x_{(jj')t}, \quad \forall (jj') \in \theta, t = 1, \dots, T.$$

Обозначим R_t – суммарные ресурсы, выделенные на развитие сети транспортных элементов в t -й период планирования; $R_{(jj')m}^1$ – затраты ресурсов на строительство участка сети 1-го типа между узлами j и j' в m -й период строительства; $M_{(jj')}^1$ – продолжительность строительства 1-го типа транспортного элемен-

та между элементами j и j' . Ограничение на потребление ресурсов в t -й период записывается следующим образом:

$$(6) \quad \sum_{(jj') \in \theta} \sum_{l=1}^{L_{(jj')}} \sum_{m=1}^{M_{(jj')}^l} R_{(jj')m}^l z_{(jj')t-m+1}^l \leq R_t, \quad \forall t = 1, \dots, T,$$

где $L_{(jj')t}^l = \min \{ M_{(jj')}^l, t \}$.

В качестве критерия оптимальности решения задач используются полные приведенные капитальные и эксплуатационные затраты на развитие и функционирование системы. Пусть $Q_{(jj')t}$ – удельные эксплуатационные затраты на транспортировку продукта между элементами j и j' в t -й период планирования, $K_{(jj')t}^1$ – капитальные затраты на создание транспортного элемента 1-го типа между элементами j и j' , K_{ijt} – капитальные затраты на создание i -го производственного объекта в j -м узле. Величины $K_{(jj')t}^1$ и K_{ijt} вычисляются при условии, что строительство соответствующего элемента системы начато в k -й период планирования, что позволяет учесть разновременность капитальных вложений на развитие системы.

Задача оптимального развития ПТС сводится к поиску значений переменных z_{it} , $x_{(jj')t}$ и $z_{(jj')t}^1$, доставляющих минимум целевой функции

$$(7) \quad \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T K_{ijt} z_{it} + \sum_{t=1}^T \left(\sum_{(jj') \in \theta} Q_{(jj')t} x_{(jj')t} + \sum_{(jj') \in \theta} \sum_{l=1}^{L_{(jj')}} K_{(jj')t}^l z_{(jj')t}^l \right) \rightarrow \min$$

при выполнении ограничений (1)–(6).

Для решения задач оптимизации пространственного развития крупномасштабных ПТС разработан комплекс моделей, в основу которого положена инвестиционная модель (1)–(7). В качестве расчетного блока используется стандартное математическое обеспечение для решения смешанных целочисленных задач линейного программирования (MILP). Параметры алгоритма поиска (точность вычисления оценок, величина отсечки, глубина просмотра и др.) задаются в зависимости от характера решаемой задачи и ее размерности. Разработанные в рамках данного подхода модели были использованы для решения задач оптимизации программ строительства и ввода мощностей ком-

плекса тепловых и атомных электростанций с учетом развития магистральных линий электропередач.

3. Модели оптимизации пространственного развития ПТС с учетом фактора рыночного ценообразования.

3.1. ЗАДАЧА ВЫБОРА СТРАТЕГИИ ПОВЕДЕНИЯ КОМПАНИЙ НА КОНКУРЕНТНЫХ РЫНКАХ

В данном разделе мы будем рассматривать ПТС, в которой производственные элементы (компании) в состоянии влиять на параметры рынка, в частности на цену продукции. Эта ситуация характерна для рынков олигополии. В таких системах, как правило, отсутствует координация. Предполагается, что компании принимают инвестиционные решения по развитию производства и, соответственно, увеличению предложения продукции в узлах потребления независимо друг от друга и их выбор влияет на соотношение спроса и предложения на рынках и, соответственно, на рыночную цену выпускаемой ими продукции. Каждая компания стремится выбрать такую инвестиционную стратегию, которая обеспечит ей максимальный выигрыш в соответствии с заданным критерием.

Следует отметить, что основным побудительным мотивом выбора компаниями той или иной инвестиционной стратегии является прогнозируемая динамика рыночного спроса на продукцию в узлах ПТС. При растущем рынке компании инвестируют, как правило, в развитие производственных мощностей и расширение производства. В противном случае более эффективной является инвестиционная стратегия, направленная на модернизацию существующего производства и сокращение производственных издержек [2, 3].

Различным аспектам олигополистического поведения посвящено большое количество как зарубежной, так и российской литературы, включая исследование классических моделей (Курно, Бертран и др.). Как правило, в этих работах анализируются рыночные стратегии компаний, которые состоят либо в выборе объема производства (поставок продукции на рынок), либо

в выборе цены поставки продукции. В этих работах мощность производства компании считается заданной и выступает в качестве ограничения на выбор объема производства. В последние годы появились работы, в которых мощность производства также рассматривается в качестве управляемой переменной задачи. При этом приращение мощности производства, необходимое для производства оптимальных объемов предложения продукции на рынок, определяется выбором инвестиционных стратегий компании [7, 11, 14, 17]. Исследуемая в работе задача лежит в русле данного научного направления и развивает методы анализа рыночных стратегий компаний в области инвестиционных решений, направленных на повышение их конкурентных преимуществ (увеличение производственных мощностей и сокращения производственных издержек).

Задача выбора стратегического поведения компаний на конкурентных пространственных рынках формулируется как совокупность взаимосвязанных нелинейных задач оптимизации со связанными переменными. При этом общее решение должно удовлетворять условиям равновесия на рынке. Рассмотрены два варианта структуры рынка: рынок Курно (раздел 3.2) и рынок с асимметрией (рынок Штакельберга) (раздел 3.4).

3.2. МОДЕЛЬ

Рассмотрим производственно-транспортную систему, которая включает несколько локальных рынков потребления ($j = 1, \dots, J$), географически разделенных между собой, и N независимых компаний ($j = 1, \dots, N$), производящих продукцию и поставляющих ее на рынки (рис. 1). В задаче необходимо учитывать пространственную структуру рынков, т.е. регионы спроса и предложения географически могут быть разделены, а участники рынка несут транспортные расходы, зависящие от расстояния и способа доставки продукции.

Мы рассматриваем задачу в динамической постановке. Прогнозный горизонт равен T периодам, $t = 1, \dots, T$. Пусть D_{jt} – рыночный спрос на продукцию на рынке j , P_{jt} – рыночная цена в период t , S_{jt} – суммарное предложение (объем поставок продукции) со стороны компаний-производителей на рынок j .

Рыночная цена продукции P_{jt} на каждом локальном рынке описывается обратной функцией спроса $P_{jt} = a_{jt} - b_{jt}S_{jt}$, где a_{jt} и b_{jt} являются функциями, описывающими особенности каждого рынка и изменение его емкости во времени. В данной модели предполагается, что спрос на продукцию со стороны потребителей D_{jt} зависит от ее рыночной цены, которая определяется предложением продукции со стороны компаний-производителей S_{jt} .

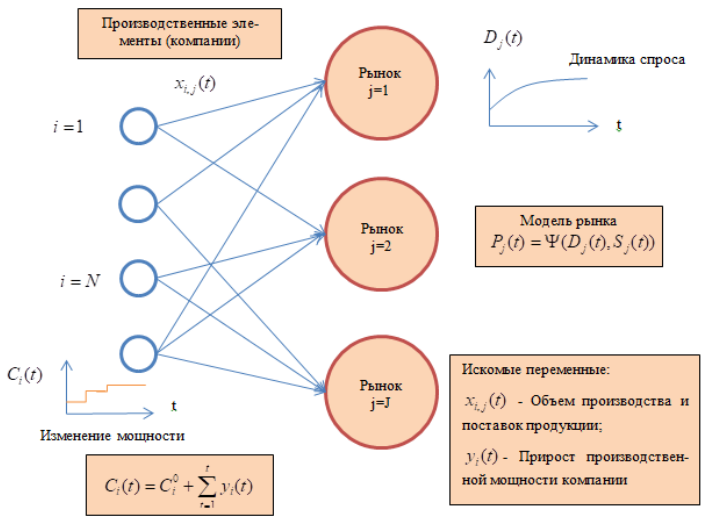


Рис. 1. Схема взаимосвязи параметров модели

Искомые переменные: x_{ijt} – объем поставок (производство) продукции компанией i на рынок j . Тогда суммарный объем поставок на рынок $S_{jt} = x_{ijt} + x_{-ijt}$, где x_{-ijt} – суммарный объем поставок другими компаниями.

Производственные и транспортные издержки компании C_{it} зависят от общего объема производства продукции и объема ее поставки на рынки и равны $C_{it} = \sum_{j=1}^J x_{ijt} \cdot c_{ijt} + c_{ii} \cdot \sum_{j=1}^J x_{ijt}$, где c_{ii} – удельные производственные издержки, а c_{ijt} – удельные транспортные издержки.

Заметим, что в формуле рыночной цены $P_{jt} = a_{jt} - b_{jt}S_{jt}$ функция a_{jt} задает изменение потенциальной емкости рынка во времени, а b_{jt} – показатель эластичности цены по отношению к общему предложению продукции на рынке. Для простоты в дальнейшем будем рассматривать рынки, у которых a_{jt} является линейной функцией времени с коэффициентом λ_j , а b_{jt} является константой, a_{j0} – начальная емкость рынка. Тогда $P_{jt} = (a_{j0} + \lambda_j t) - b_{jt}S_{jt}$.

Максимальный объем производства и поставок продукции компании i ограничены технологической мощностью производства предприятий, входящих в компанию. Для увеличения производства и поставок продукции и покрытия растущей емкости рынков компаниям необходимо инвестировать в развитие своих производственных мощностей в соответствии с некоторой инвестиционной стратегией, которая является также искомой переменной задачи.

Инвестиционная стратегия: y_{it} – прирост производственной мощности компании i в период t , связанный с инвестициями в расширение производства. Тогда $I_{it} = k_i y_{i,t+\tau_i}$ объем инвестиций в период t , необходимый для увеличения мощности производства, где τ_i – временной лаг между периодом инвестирования и периодом прироста мощности производства.

Каждая компания стремится максимизировать свой суммарный чистый денежный поток за прогнозный период $t = 1, \dots, T$, который равен чистой прибыли, полученной за этот период, за вычетом средств, направленных на инвестиции. Задача выбора искомых переменных стратегического поведения компании i сводится к поиску решения следующей задачи оптимизации:

$$(8) \max_{x_{jt}, y_{it}} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J ((a_{jt} - b_j \cdot (x_{ijt} + x_{-ijt})) \cdot x_{ijt} - c_{ijt} \cdot x_{ijt} - c_{it} \cdot \sum_{j=1}^J x_{ijt} - k_i \cdot y_{i,t+\tau_i}),$$

$$(9) \sum_{j=1}^J x_{ijt} \leq C_{i0} + \sum_{t=1}^t y_{it} \quad \forall t,$$

$$(10) y_{it} \leq y_{it}^{\max} \quad \forall t,$$

$$(11) x_{ijt} \geq 0, y_{it} \geq 0 \quad \forall t \text{ и } j,$$

где C_{it} – мощность производства на начало прогнозного периода. Неравенство (9) задает технологическое ограничение на объем поставки (производства) продукции, а неравенство (10) – на прирост мощности производства. Здесь y_{it}^{max} – максимально технологически возможный прирост мощности производства в период t .

Особенность задачи (8)–(11) состоит в том, что целевая функция (8) для компании i зависит не только выбора «своих» переменных, но и от независимого выбора искомым переменных другими компаниями-конкурентами.

Совместное решение задач (8)–(11) для всех компаний сводится к игре, в которой выбор искомым переменных должен удовлетворять некоторым условиям равновесия. Для поиска рыночного равновесия используется концепция равновесия Нэша. Решение называется равновесным, если ни одна из компаний не может увеличить выигрыш (8), изменив свое решение в одностороннем порядке, не вызвав при этом реакцию других игроков. Проблема поиска равновесных точек Нэша в такой постановке сводится к совместному решению совокупности нелинейных задач оптимизации (8)–(11), которая относится к классу задач математического программирования с равновесными ограничениями (МРЕС) [19].

3.2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Опишем сначала общий подход к решению задач данного типа [15, 19]. Предположим, что есть N игроков ($i = 1, \dots, N$), каждый из которых пытается оптимизировать свое решение, например, максимизировать прибыль или минимизировать затраты. Пусть игрок i управляет переменными x_i в векторе x , тогда задача игрока i формулируется следующим образом:

$$(12) \max_{x_i} f_i(x),$$

$$(13) g_i(x_i) \leq 0: \lambda_i,$$

$$(14) -x_i \leq 0: \beta_i,$$

где $x_i \in R^n$ – вектор переменных решения, $f_i: R^n \rightarrow R$ – целевая функция; ограничение (13) определяет $g_i: R^{n_i} \rightarrow R^{m_i}$ и связан-

ную с ним двойственную переменную $\lambda_i \in R^{m_i}$. Ограничение (14) налагает условие неотрицательности $x_i \in R^n$, с ним связана двойственная переменная $\beta_i \in R^{n_i}$. Мы предполагаем, что целевая функция (12) зависит от вектора $x_i \in R^n$, который включает вектор решений $x_i \in R^n$, а также векторы решений других игроков, т.е. $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$.

Предполагаем, что функции $f_i(x)$ и $g_i(x)$ непрерывно дифференцируемы, тогда мы можем написать условия Каруша – Куна – Таккера (ККТ) [15], связанные с задачей (12)–(14):

$$(15) \nabla_{x_i} f_i(x) + \lambda_i^T \nabla_{x_i} g_i(x_i) - \beta_i = 0,$$

$$(16) 0 \leq -g_i(x_i) \perp \lambda_i \geq 0,$$

$$(17) 0 \leq x_i \perp \beta_i \geq 0,$$

где под записью \perp понимается условие дополняющей нежёсткости, которое означает, что по крайней мере одно из неравенств в каждой строке условий ККТ должно быть выполнено как равенство, λ_{i_i} и β_i являются множителями Лагранжа.

Уравнение (15) получается в результате дифференцирования функции Лагранжа для задачи (12)–(14) по $x_i \in R^n$. Ограничения (16) и (17) являются условиями дополнителности, полученными из ограничений (13) и (14) соответственно. Задача (15)–(17) может быть классифицирована как смешанная задача дополнителности (МСП), поскольку включает в себя условия равенства и дополнителности, ограничения (15) и (16)–(17) соответственно.

Мы можем объединить уравнения (15) и (17), чтобы исключить двойственную переменную β_i , тогда задача (15)–(17) запишется в более компактной форме:

$$(18) 0 \leq x_i \perp \nabla_{x_i} f_i(x) + \lambda_i^T \nabla_{x_i} g_i(x_i) \geq 0,$$

$$(19) 0 \leq -g_i(x_i) \perp \lambda_i \geq 0.$$

Важно отметить, что если $f_i(x)$ и $g_i(x)$ выпуклые функции и задача (12)–(14) удовлетворяет стандартным условиям регулярности [19], то условия ККТ (18)–(19) являются необходимыми и достаточными условиями оптимальности, так что решение си-

стема (18)–(19) эквивалентно решению оптимизационной задачи (12)–(14).

Рассмотрим теоретико-игровую структуру, в которой все игроки $i = 1, \dots, N$ стремятся одновременно максимизировать свои целевые функции, решая задачи оптимизации (12)–(14). Обратите внимание, что эти задачи взаимосвязаны, поскольку выбор стратегии каждым игроком x_i влияет на целевые функции других игроков $f_i(x)$. В этом случае равновесие Нэша определяется как набор стратегий x_i , гарантирующих, что ни один игрок не сможет улучшить свою целевую функцию, изменив свою стратегию в одностороннем порядке. Следовательно, равновесие Нэша можно идентифицировать как совместное решение систем (18)–(19) для всех игроков одновременно. Общая схема решения для N игроков применительно к задаче (8)–(11) приведена на рис. 2.

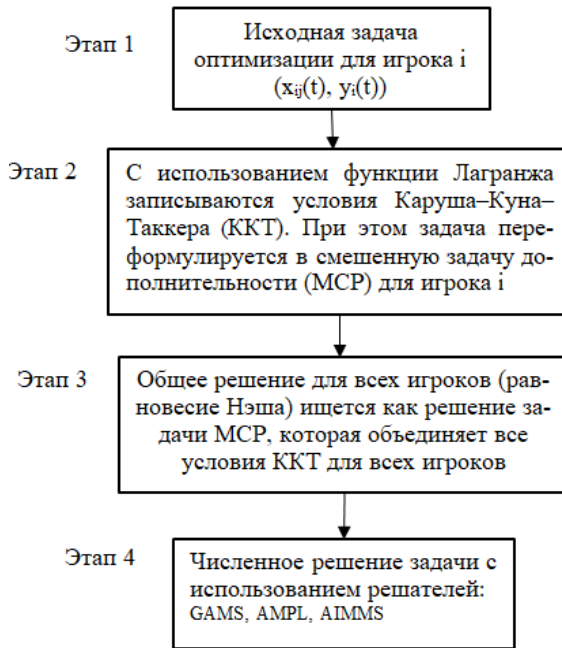


Рис. 2. Общая схема решения

Используем данные результаты для решения задачи (8)–(11). В частности, задача (8)–(11) для каждого игрока (компании) $i = 1, \dots, N$ представляет собой квадратичную задачу оптимизации. Вместо прямого использования целевой функции (1) в данном случае используется метод сведения задачи к смешанной задаче дополнительности (MCP), которая состоит из условий первого порядка для максимизации суммарного денежного потока каждой компании. Как было показано, любое решение указанной выше задачи оптимизации должно удовлетворять условиям ККТ, записанным для каждой переменной.

Назовем условия ККТ для переменных x_{it} краткосрочными, а для переменных y_t – долгосрочными. В искомой точке равновесия Нэша все условия ККТ должны выполняться одновременно. В данном случае существование и единственность решения гарантируется благодаря выпуклости целевых функций и ограничений задачи. Таким образом, полученные ККТ-условия необходимы и достаточны для существования решения. Запишем эти условия.

Краткосрочные условия ККТ должны выполняться для всех i, t :

$$0 \leq c_i - (a_{jt} - b_j \cdot (x_{ijt} + x_{-ijt})) + \lambda_{it} \perp x_{ijt} \geq 0,$$

$$0 \leq C_{i0} + y_t - x_{ijt} \perp \lambda_{it} \geq 0.$$

Долгосрочные условия ККТ должны выполняться для всех i :

$$0 \leq k_i - \sum_{t \in T} \lambda_{it} + \theta_i \perp y_i \geq 0,$$

$$0 \leq y_i^{\max} - y_i \perp \theta_i \geq 0.$$

Здесь λ_{it} и θ_i являются множителями Лагранжа.

Чтобы решить исходную задачу (8)–(11), необходимо объединить все выписанные условия ККТ в одной MCP. Ее решение может быть получено, например, с использованием пакета PATH Solver, входящего в систему моделирования GAMS [9]. Алгоритмы решения задач в PATH Solver основаны на обобщении классического метода Ньютона и его модификациях.

В рассмотренной игре компании-игроки одновременно принимают решение об уровне своих инвестиций и уровне про-

изводства (статическая игра Курно). Более сложная игра моделирует рынок, который характеризуется асимметрией, т.е. компании обладают не одинаковой рыночной властью (лидеры и последователи). При этом решения об инвестициях и поставках принимаются последовательно (игра Штакельберга): в первом этапе лидеры пробно фиксируют инвестиции в развитие своих мощностей, и далее на основе этой информации свои решения выбирают последователи. На втором этапе лидеры, обладая информацией о реакции последователей на возможные решения лидеров, выбирают свою инвестиционную стратегию и уровни производства и поставок продукции на рынки. Формализация и методы решения задачи для рынка с асимметрией рассмотрены в следующем разделе.

3.3. РЫНОК С АСИММЕТРИЕЙ

Рассмотрим задачу в условиях, когда рынок обладает свойством ассиметрии. Предполагается, что все игроки (компании) разделены на две группы: первая группа – это компании-олигополисты, которые обладают существенной рыночной властью $i \in M_l$. Назовем их лидерами. В другую группу входят компании, не обладающие такими свойствами, назовем их последователями $i \in M_f$. Терминология заимствована из классической игры Штакельберга. Далее используются обозначения, введенные в предыдущем разделе.

Игра состоит из двух этапов: На первом этапе компании-лидеры фиксируют свою инвестиционную стратегию ($y_i, i \in M_l$) и решают задачу выбора уровней выпуска и поставки продукции на рынки ($x_{ijt}, \forall t, j, i \in M_l$). Тогда для заданного инвестиционного вектора (y_i, y_{-i}) задача выбора уровня производства и поставки продукции для компании-лидера i имеет вид

$$(20) \max_{x_{ijt}, i \in M_l} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J ((a_{jt} - b_j \cdot (x_{ijt} + X_{-ijt} + X_{Fjt})) \cdot x_{ijt} - c_{ijt} \cdot x_{ijt} - c_{it} \cdot \sum_{j=1}^J x_{ijt}),$$

$$(21) \sum_{j=1}^J x_{ijt} \leq C_{i0} + \sum_{t=1}^t y_{it} \quad \forall t, i \in M_l,$$

$$(22) y_{it} \leq y_{it}^{\max} \quad \forall t, i \in M_l,$$

$$(23) \quad x_{ijt} \geq 0, \quad y_{it} \geq 0 \quad \forall t, i \in M_l.$$

$$\text{Здесь } X_{-ijt} = \sum_{i \in M_l \setminus i} x_{ijt} \text{ и } X_{Fjt} = \sum_{i \in M_f} x_{ijt}.$$

Заметим, что компания-лидер i выбирает уровень производства и поставок продукции, учитывая возможные решения других лидеров и последователей (дополнительный игрок F). Здесь мы используем технику сведения исходной задачи (20)–(23) к решению задачи МСР, описанной в предыдущем разделе. Соответствующие условия ККТ для этой задачи записываются следующим образом:

$$0 \leq c_{it} - (a_{jt} - b_j \cdot (x_{ijt} + x_{-ijt} + x_{Fjt})) + b_j \cdot x_{ijt} + \lambda_{it} \perp x_{ijt} \geq 0, \forall t, i \in M_l,$$

$$0 \leq C_{i0} + y_i - \sum_{j=1}^J x_{ijt} \perp \lambda_{it} \geq 0, \forall t, i \in M_l.$$

И далее для данного инвестиционного вектора (y_i, y_{-i}) компании-последователи $i \in M_f$ решают следующую задачу:

$$(24) \quad \max_{x_{ijt}, y_{it}, i \in M_f} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J ((a_{jt} - b_j \cdot (x_{ijt} + X_{Fjt})) \cdot x_{ijt} - c_{ijt} \cdot x_{ijt} - c_{it} \cdot \sum_{j=1}^J x_{ijt} - k_i \cdot y_{i,t+\tau_i}),$$

$$(25) \quad \sum_{j=1}^J x_{ijt} \leq C_{i0} + \sum_{t=1}^t y_{it} \quad \forall t, i \in M_f,$$

$$(26) \quad \sum_{j=1}^J x_{ijt} \leq C_{i0} + \sum_{t=1}^t y_{it} \quad \forall t, i \in M_f,$$

$$(27) \quad x_{ijt} \geq 0, \quad y_{it} \geq 0 \quad \forall t, i \in M_f.$$

То есть компания-последователь $i \in M_f$ принимает решения об инвестициях и поставках продукции, учитывая возможные решения других компаний-последователей. Предполагается, что компании-последователи не учитывают свое влияние на цену. Соответствующие краткосрочные и долгосрочные условия ККТ для этой задачи записываются следующим образом:

$$0 \leq c_i - (a_{jt} - b_j \cdot (x_{ijt} + x_{-ijt})) + \lambda_{it} \perp x_{ijt} \geq 0, \forall i \in M_f, j, t,$$

$$0 \leq C_{i0} + y_i - \sum_{j \in J} x_{ijt} \perp \lambda_{it} \geq 0, \forall i \in M_f, t,$$

$$0 \leq k_i - \sum_{t \in T} \lambda_{it} + \theta_i^{\max, f} \perp y_i \geq 0, \forall i \in M_f,$$

$$0 \leq y_i^{\max} - y_i \perp \theta_i^{\max, f} \geq 0, \forall i \in M_f.$$

В равновесии условия ККТ компаний-последователей и лидеров должны выполняться одновременно. Пусть $\bar{x}_{ijt}(y_l, y_{-l})$ обозначает краткосрочное рыночное равновесие для заданного инвестиционного вектора (y_i, y_{-i}) .

На втором этапе, основываясь на соотношениях, полученных на первом этапе игры, лидеры окончательно определяют наилучший вариант инвестиций и уровень производства и поставок продукции. Задача для лидера $i \in M_l$ определяется как

$$\begin{aligned} \max_{x_{ijt}, i \in M_l} & \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J ((a_{jt} - b_j \cdot (x_{ijt} + X_{-ijt} + X_{Fjt})) \cdot x_{ijt} - c_{ijt} \cdot x_{ijt} - c_{it} \cdot \sum_{j=1}^J x_{ijt}), \\ y_{it} & \leq y_{it}^{\max} \quad \forall i \in M_l, \\ y_{it} & \geq 0 \quad \forall i \in M_l \end{aligned}$$

При этом компания-лидер выбирает такую инвестиционную стратегию (уровень инвестиций), которая максимизирует его прибыль, учитывая при этом возможные инвестиционные стратегии других ведущих производителей и ранее полученные условия для решения задачи поиска краткосрочного равновесия. Объединяя краткосрочную и долгосрочную задачу, мы получим формулировку задачи для лидера $i \in M_l$ в форме задачи математического программирования с равновесными ограничениями (МРЕС). Назовем ее МРЕС_i:

Долгосрочная проблема для лидеров $i \in M_l$ определяется как

$$\begin{aligned} \max_{x_{ijt}, i \in M_l} & \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J ((a_{jt} - b_j \cdot (x_{ijt} + X_{-ijt} + X_{Fjt})) \cdot x_{ijt} - c_{ijt} \cdot x_{ijt} - c_{it} \cdot \sum_{j=1}^J x_{ijt}) \\ y_{it} & \leq y_{it}^{\max} \quad \forall i \in M_l, \\ y_{it} & \geq 0 \quad \forall i \in M_l, \\ 0 & \leq c_i - (a_{jt} - b_j \cdot (x_{ijt} + x_{-ijt})) + \lambda_{it} \perp x_{ijt} \geq 0, \forall i \in M_f, j, t, \\ 0 & \leq C_{i0} + y_i - \sum_{j \in J} x_{ijt} \perp \lambda_{it} \geq 0, \forall i \in M_f, t, \end{aligned}$$

$$0 \leq k_i - \sum_{t \in T} \lambda_{it} + \theta_i^{\max, f} \perp y_i \geq 0, \forall i \in M_f,$$

$$0 \leq y_i^{\max} - y_i \perp \theta_i^{\max, f} \geq 0, \forall i \in M_f.$$

Инвестиционная стратегия $(\bar{y}_l, \bar{y}_{-l})$ является равновесной, если для всех $i \in M_l$ \bar{y}_i является решением задачи $MPEC_i$ при заданных \bar{y}_{-l} . Следовательно, проблема нахождения общего равновесного решения задаче сводится к задаче поиска равновесия с равновесными ограничениями (ЕРЕС)) [11–13]. В общем случае существование и единственность ее решения обычно нетривиальны и зависят от параметров модели. Методы ее решения реализуется с использованием подхода диагонализации и сведения ее к решению серии задач математического программирования с равновесными ограничениями (МРЕС) [13–15, 19]. Ее решение может быть получено, например, с использованием пакета PATH Solver, входящего в систему моделирования GAMS [9].

4. Заключение

В работе рассмотрены постановки и методы решения задач пространственного развития инфраструктурных производственно-транспортных систем. Задача формулируется и изучается в двух вариантах. В первом варианте задача выбора инвестиционной программы развития инфраструктурной системы формулируется в терминах задачи оптимизации с непрерывными и целочисленными переменными. Во втором варианте задача выбора стратегического поведения компаний на пространственных рынках, которая включают выбор инвестиций в расширение мощности производства, а также выбор объемов производства продукции и выбор поставок ее различные рынки формулируется как совокупность взаимосвязанных нелинейных задач оптимизации со связанными переменными. Для ее решения предлагается использовать методы решения задач смешенной дополнителности (МСП) и задач математического программирования с равновесными ограничениями (МРЕС).

Модели дополненности часто используются для представления равновесия, поскольку они дают возможность рассматривать одновременно задачи оптимизации нескольких взаимодействующих игроков. Различные предположения о конкурентном поведении или типах взаимодействий приводят к разным модельным структурам. Таким образом, моделирование дополненности достаточно универсально и может охватывать многие аспекты теории игр, оптимизации, экономики и инженерии.

Следует отметить, что данный подход к решению задач поиска рыночного равновесия в задаче выбора стратегического поведения компаний оказался весьма плодотворным и породил разработку разнообразных новых методов и их применения к решению ряда прикладных задач. Особенно популярна данная задача для моделирования либерализованных рынков электроэнергии, глобальных рынков нефти, природного газа, металлургического угля и др. [4, 11, 12, 17].

Несмотря на несомненные преимущества, практическое применение данного подхода к моделированию и оптимизации стратегического поведения компаний сталкивается с рядом вычислительных проблем. Как правило, подобные задачи не являются выпуклыми и поэтому стандартные методы решения задач в форме МСР и МРЕС не гарантирует нахождения точного решения. В этом случае часто приходится использовать приближенные методы. Один из них сводится к процедурам поиска равновесия на дискретном множестве инвестиционных решений компаний [16]. Другой метод решения основан на переформулировании задачи МРЕС в виде смешанной целочисленной задачи линейного программирования (MILP) [12, 13, 17], которая может быть решена существующими пакетами оптимизации.

В целом следует отметить, что постановка задачи выбора стратегического поведения компаний на конкурентных рынках в виде задач оптимизации предполагает ряд предположений, которые могут исказить реальную картину поведения компаний на рынке. Прежде всего предполагается, что игроки обладают идеальной дальновидностью. Они могут предвидеть рыночные шоки, такие как срыв поставок или неожиданное падение спро-

са. Еще одним важным фактором является использование модели рыночного спроса. Так, например, моделирование олигополии Курно и Штакельберга требует линейной модели функции спроса, что не всегда соответствует реальным рынкам.

В этой связи интересен подход, связанный с совместное использование методов многоагентного имитационного моделирования и теории игр [2–4, 8, 10, 18]. Данный метод позволяет получить приближенное решение задачи, так как при построении модели используются эвристические принципы и алгоритмы поведения агентов. Рассмотренный подход также находит применение при решении большого количества практических задач, в том числе для выбора стратегии развития производственных мощностей компаний на отраслевых пространственных рынках.

Литература

1. АКИНФИЕВ В.К., КАРИБСКИЙ А.В., ЦВИРКУН А.Д. *Инвестиционные модели планирования развития крупномасштабных систем* // Автоматика и телемеханика. – 1980. – №3. – С. 123–134.
2. АКИНФИЕВ В.К. *Моделирование инвестиционных стратегий компаний в условиях неопределенности* // Управление большими системами. – 2016. – Вып. 61. – С. 136 – 167.
3. АКИНФИЕВ В.К. *Два подхода к решению динамической задачи расширения мощности производства на рынке олигополии* // Управление большими системами. – 2019. – Вып. 79. – С. 65–85.
4. АКИНФИЕВ В.К. *Модель конкуренции между нефтедобывающими компаниями с традиционным и нетрадиционным способом добычи* // Управление большими системами. – 2017. – Вып. 67. – С. 52–80.
5. БУРКОВ В.Н., КОРГИН Н.А., НОВИКОВ Д.А. *Введение в теорию управления организационными системами: учебник*. – М.: Либроком, 2014. – 264 с.

6. БУРКОВ В.Н., КОРГИН Н.А. *Модели, методы и механизмы управления и принятия решений в организационных системах: учебное пособие.* – М.: Академия ИБС: МФТИ, 2009. – 224 с.
7. AKINFIEV V.K. *Dynamic Capacity Expansion Problem in Competitive Markets* // Proc. of the 12th Int. Conf. "Management of Large-Scale System Development" (MLSD). – Moscow: IEEE, 2019.
8. BOTTERUD A., MAHALIK M.R., VESELKA T.D. *Multi-Agent Simulation of Generation Expansion in Electricity Markets* // Intern. Journal of Innovations in Energy Systems and Power. – 2009. – Vol. 4, No. 1. – P. 36–43.
9. FERRIS M., MUNSON T.S. *Complementarity Problems in GAMS and the PATH Solver* // Journal of Economic Dynamics and Control. – 2000. – Vol. 24, Iss. 2. – P. 165–188.
10. PRAÇA C., RAMOS Z., CORDEIRO M.A. *New agent-based framework for the simulation of electricity markets* // Proc. IEEE/WIC Int. Conf. Intelligent Agent Technology. – 2003. – P. 469–473.
11. GABRIEL S.A., CONEJO, A.J., FULLER, J.D., HOBBS, B.F., RUIZ, C. *Complementarity Modeling in Energy Markets* // International Series in Operations Research & Management Science. 2012. - P. 630
12. GABRIEL S.A., KIET S., ZHUANG J. *A mixed complementarity-based equilibrium model of natural gas markets* // Operations Research. – 2005. – Vol. 53 (5). – P. 799–818.
13. KOČVARA M., OTRATA J.V. *Optimization problems with equilibrium constraints and their numerical solution* // Mathematical programming. – 2004. – No. 1. – P. 119–149.
14. LORENCZIKA ST., MALISCHEK R., TRÜBY J. *Modeling Strategic Investment Decisions in Spatial Markets* // EWI Working Paper. – 2014. – No 14. – P. 20.
15. RUIZ C. et al. *A tutorial review of complementarity models for decision-making in energy markets* // EURO Journal on Decision Processes. – 2014. – Vol. 2, No. 1–2. – P. 91–120.

16. SAGRATELLA S. *Computing all solutions of Nash equilibrium problems with discrete strategy sets* // SIAM Journal on Optimization. – 2016. – Vol. 26, Iss. 4. – P. 2190–2218.
17. WOGRIN S. et al. *Open versus closed loop capacity equilibria in electricity markets under perfect and oligopolistic competition* // Mathematical Programming. – 2013. – Vol. 140(2). – P. 295–322.
18. YU N., LIU C., PRICE J. *Evaluation of market rules using a multi-agent system method* // IEEE Trans. on Power Systems. – 2010. – Vol. 25, Iss. 1. – P. 470–479.
19. ZHI-QUAN LUO, JONG-SHI PANG, RALPH D. *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*. – Cambridge University Press, 1996.

MODELS OF SPATIAL DEVELOPMENT OF INFRASTRUCTURE SYSTEMS

Valerij Akinfiyev, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (akinf@ipu.ru).

Abstract: We present formulation and methods for solving the problem of spatial development production and transport systems (PTS). The problem is being studied in two versions. In the first version, the PTS include a coordinating unit and a set of production units (enterprises) and transport infrastructure that connects production units with regions (markets) of consumption. In this case, the problem of choosing an investment program for the development of PTS is formulated as an optimization problem with continuous and integer variables. In the second version, we assume that the coordination of investment programs for the development of PTS units is carried out using market mechanisms. The problem statement is proposed, which is formulated as a set of interrelated nonlinear optimization problems with coupled variables. To select the strategic behavior of companies, methods are proposed for reducing the original problem to solving the mixed complementarity problem (MCP), as well as methods developed for solving programming problems with equilibrium constraints (MPEC). The prospects and directions of using the proposed methods for solving applied problems of spatial development of infrastructural systems are discussed.

Keywords: production and transport systems, mathematical model, market pricing.

УДК 338.2

ББК 65.050

DOI: 10.25728/ubs.2021.91.4

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Р.М. Нижегородцевым.*

Поступила в редакцию 23.03.2021.

Опубликована 31.05.2021.

АКТУАЛЬНЫЕ И ПЕРСПЕКТИВНЫЕ СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ БЕСПРОВОДНЫХ ГИДРОАКУСТИ- ЧЕСКИХ СЕТЕЙ ДОСТУПА

Панкратов Ф. С.¹, Малахов И. М.²
(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Большая задержка распространения сигналов, сильное влияние отражённых сигналов и, как следствие, высокая вероятность ошибки и низкая скорость передачи данных являются отличительными чертами подводных акустических сетей связи. В таких условиях для построения беспроводной подводной сети доступа необходима разработка специальных протоколов управления доступом к среде, так как многие современные сетевые протоколы, разработанные для наземных сетей радиосвязи, в подводной среде имеют чрезвычайно низкую эффективность. В статье проведен обзор актуальных и перспективных способов построения беспроводных подводных сетей доступа в подводной акустической связи. Проанализированы протоколы управления доступом к среде на основе расписания и на основе конкуренции, подходящие для организации подводной гидроакустической сети. Приведено описание протокола ALOHA и его модификаций (ALOHA-CA и ALOHA-AN), протоколов с механизмом определения несущей FAMA и Slotted FAMA, улучшенного протокола MACAW, протоколов UW-MAC и Tone Lohi. Выбор протокола для использования его в рамках развёртываемой сети является важной задачей при проектировании сети. В статье приводится сравнение протоколов и указывается, в каких системах можно было бы применить эти протоколы. В конце работы приводится анализ возможных сценариев применения различных протоколов в подводной акустической связи и идеи для дополнительных исследований в рамках работ по разработке протоколов управления доступом к среде.

Ключевые слова: подводная акустическая связь, гидроакустическая связь, протоколы управления доступом к среде, Slotted FAMA, UW-MAC, Tone Lohi.

1. Введение

Задача обеспечения передачи цифровой информации в подводной среде с каждым годом становится всё более актуальной.

¹ Филипп Сергеевич Панкратов, аспирант (alphalionbyte@hotmail.com).

² Илья Михайлович Малахов, аспирант (froztgal@gmail.com).

Сети подводной акустической связи (underwater acoustic, UWA) имеют много особенностей, отличающих их от сетей пакетной радиосвязи. Основными отличительными характеристиками гидроакустического канала являются большая задержка распространения сигналов в совокупности с постоянно меняющейся многолучевостью и малой полосой пропускания, обусловленными низкой скоростью звука в подводной среде, сильно зависящей от глубины [1].

Ввиду специфических условий распространения акустических сигналов под водой, протоколы доступа к среде, разработанные для наземных радиоканалов, либо неприменимы, либо имеют чрезвычайно низкую эффективность. Поэтому для построения эффективных подводных акустических систем проектировщикам сетей и сетевых протоколов приходится учитывать обозначенные выше специфические условия и разрабатывать специализированные протоколы управления доступом к среде (Medium Access Control, MAC).

Главная задача протоколов доступа в сети заключается в обеспечении стабильного функционирования беспроводной сети, включающей несколько сетевых узлов, разделяющих одну среду для передачи, а также в обеспечении эффективного использования ресурса общего канала за счет минимизации негативного эффекта от коллизий (конфликтов передачи) [2]. Дополнительно к этому они позволяют обеспечить минимизацию энергии, необходимой для передачи сообщений, что важно для многих систем связи, особенно для сетей датчиков с автономным (батарейным) питанием.

Применение современных протоколов MAC в подводной среде позволяет развёртывать большие сенсорные сети (сети датчиков) [29]. Эти сети могут использоваться для сбора данных об океане, состоянии инфраструктуры под водой, климатических изменениях, уровнях загрязнения водной среды, а также в системах уведомления о стихийных бедствиях и для помощи при разведке минеральных ресурсов.

С другой стороны, во многих гидроакустических системах задача организации эффективного доступа к среде является большим вызовом [19, 21, 23]. В связи с этим повышение эф-

фективности протоколов доступа и разработка специализированных протоколов доступа сегодня является одной из наиболее актуальных задач в области гидроакустической связи.

Для исследования новых механизмов в протоколах доступа к среде необходим сравнительный анализ существующих протоколов и проблем, которые неизбежно возникнут при разработке данных протоколов для подводной среды. В данной статье приведен обзор и анализ эффективности различных протоколов доступа к среде в подводных гидроакустических сетях, а также приводятся возможные направления будущих исследований.

2. Протоколы управления доступом к среде

Как было отмечено выше, основной проблемой являются конфликты передачи, которые приводят к снижению скорости, а также к дополнительному расходу энергии автономными подводными аппаратами ввиду необходимости неоднократной повторной передачи для гарантированной доставки сообщений.

Для решения этой проблемы существуют протоколы управления доступом к среде. По принципу работы их можно разделить на две основные группы: протоколы на основе конкуренции и протоколы на основе расписания. В протоколах на основе конкуренции для нескольких узлов сети используется один канал связи, выделяемый по запросу, тогда как в протоколах на основе расписания доступ к каналу выделяется только на один сетевой узел и на конкретно отведённый промежуток времени.

В первом случае попытка доступа к среде связи часто может привести к коллизиям, однако назначение таких протоколов не исключит их возникновения, но минимизирует их вероятность. В протоколах на основе расписания принцип организации доступа состоит в предварительном выделении ресурсов конкретному пользователю согласно определённому правилу [35].

Частотный ресурс в среде подводной акустической связи ограничен, и протоколы доступа к среде должны рационально использовать этот ресурс для организации связи. Вследствие низкой скорости распространения сигналов в акустической сре-

де коллизии возникают гораздо чаще, чем в радиочастотной среде. Применение специальных механизмов доступа к среде позволяет повысить пропускную способность сети и снизить энергозатраты, а дополнительно – свести к минимуму возможность перехвата и несанкционированного управления трафиком [32].

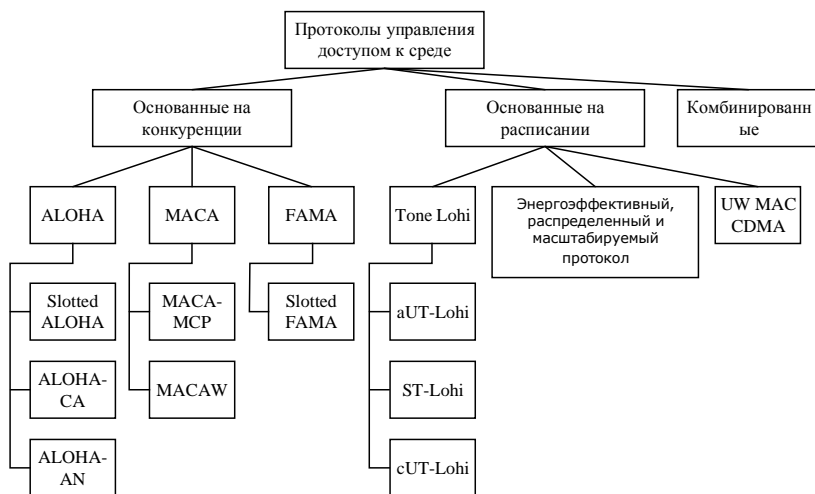


Рис 1. Структурная схема протоколов управления доступом к среде

Для передачи информации в подводной среде используются акустические волны, в связи с чем при разработке протоколов MAC должен быть рассмотрен ряд проблем, таких как длительная задержка распространения сигналов, ограниченная полоса пропускания, многолучевое распространение, замирания и, как следствие, сравнительно большая частота ошибок. Также немаловажным является тот факт, что зачастую (особенно в сетях подводных датчиков) вычислительный ресурс также ограничен. Таким образом, протоколы MAC, применяемые в наземных сетях, будут работать неэффективно. В работе [25] авторами проведён большой сравнительный анализ алгоритмов и протоколов MAC в подводной среде в современных реалиях. Также автора-

ми предложены механизмы для увеличения пропускной способности подводной сети, выведенные математическим анализом.

3. Протоколы на основе протокола ALOHA

Среди протоколов доступа к среде существует семейство протоколов, основанных на протоколе ALOHA. Протокол ALOHA построен по принципу конкурентного доступа к среде. В изначальной реализации протокола отсутствуют механизмы предотвращения конфликтов при передаче. Сетевой узел начинает передачу данных сразу, как только появится необходимость отправки сообщения. В ответ на это получатель отправляет сообщение подтверждения АСК (acknowledgment), если данные были получены без ошибок. Однако если пакет подтверждения не приходит, передача считается неуспешной и данные отправляются вновь спустя небольшой случайный промежуток времени. Это значительно увеличивает количество коллизий. Для гарантированной доставки сообщения осуществляется многократная передача одних и тех же пакетов данных. Как следствие, снижается эффективная пропускная способность сети (отношение полезного времени передачи, т.е. времени, когда канал занят непосредственно передачей полезной (не служебной) информации, к общему времени передачи). Базовый протокол ALOHA при определённых условиях обеспечивает максимальную эффективную пропускную способность не более 18% [6]. Решение проблемы коллизий было предложено в дальнейшем развитии исходного протокола ALOHA – в протоколе Slotted ALOHA [22]. В новом протоколе введено понятие тайм-слотов, а передача пакетов ограничена этими временными интервалами. Данные передаются только в начале нового тайм-слота, время и период тайм-слотов синхронизированы между сетевыми узлами. Благодаря этому удалось сократить количество коллизий, а согласно [8] общая пропускная способность протокола Slotted Aloha в два раза выше, чем у базового протокола ALOHA при тех же условиях – 36%.

В работе [33] анализируются проблемы и ограничения применимости протоколов ALOHA и Slotted ALOHA в среде под-

водной акустической связи. Там же приведён анализ применимости протоколов ALOHA и Slotted ALOHA для сети подводных акустических датчиков UWASN. Так как значительная задержка распространения акустических сигналов в подводной среде приводит к проблемам управления и синхронизации работы сетевых узлов, это сводит к минимуму достоинства протокола, такие как простота реализации, отсутствие дорогого оборудования, а также снижает пропускную способность сети [13]. В случае использования протокола Slotted ALOHA нет никакой гарантии своевременной доставки сообщений в заданные временные интервалы. В работе [5] проанализированы проблемы и предложены основные принципы моделирования протоколов управления доступом к среде на основе конкуренции. Представлена модель, позволяющая проводить анализ применения протокола ALOHA при развёртывании сети с небольшим количеством узлов. Проведённое моделирование показывает, что в случае применения протокола Slotted ALOHA в подводной связи пропускная способность сети сравнима с использованием базового протокола ALOHA при тех же условиях.

Главная цель исследований по улучшению этого семейства протоколов – внедрение эффективных механизмов по предотвращению коллизий. Проводились исследования для реализации протоколов, основанных на протоколе ALOHA для UWASN. В результате этих исследований появились две усовершенствованные версии протокола: ALOHA with collision avoidance (ALOHA-CA) и ALOHA with avoidance notification ALOHA-AN. В работе [10] приведено описание этих версий протокола ALOHA, а также рассматривается производительность и надёжность работы протоколов на основе ALOHA в подводной среде. Протокол ALOHA-CA является более выгодным с точки зрения масштабируемости сети и простоты реализации. В данном протоколе исключается необходимость в специальных дополнительных управляющих сообщениях, а для физической реализации требуются меньшая вычислительная мощность и меньший объём быстродействующей памяти. Протокол ALOHA-AN, наоборот, требует дополнительного расхода памяти и вычислительных ресурсов, но способен обеспечивать меньшее количе-

ство коллизий в процессе передачи. Это достигается при помощи предварительной отправки дополнительных пакетов с уведомлением о передаче соседним узлам (NTF), что позволяет избежать одновременной передачи пакетов, которая могла бы привести к коллизии. Результаты моделирования, представленные в [3], показывают, что обе усовершенствованные версии теоретически могут повысить пропускную способность сети, так как снижается количество коллизий. Более того, применение протокола ALOHA-AN уменьшает количество повторных передач и связанных с ними вычислений.

В работе [17] авторами исследуется производительность и пропускная способность протоколов ALOHA в подводной среде и проводится моделирование в среде MATLAB. Авторы приходят к выводу, что скорость распространения сигнала в среде не влияет на пропускную способность протокола ALOHA. Помимо этого авторы заявляют, что протокол Slotted ALOHA чувствителен к задержке распространения сигналов и, следовательно, работает хуже в подводной среде по сравнению с Slotted ALOHA в наземных системах.

4. Протоколы на основе CSMA

Другим семейством протоколов доступа к среде являются протоколы множественного доступа с контролем несущей и обнаружением коллизий (CSMA, Carrier Sense Multiple Access). Принцип организации протоколов на основе CSMA рассмотрен в работе [28]. В протоколах CSMA, в отличие от протоколов ALOHA, учитывается текущее состояние канала в процессе передачи. В таких протоколах передача ведётся одновременно только одним сетевым узлом, а порядок следования передачи данных узлами определён специальной очередью. Перед началом передачи узел производит контроль наличия несущей в среде передачи. Этот этап называется фазой обнаружения несущей и позволяет узлу определить, ведётся ли в данный момент передача другими узлами в среде. В случае если обнаружена уже ведущаяся передача, то узел ожидает случайное время и повторяет попытку вновь. В противном случае передачу начинает сам

сетевой узел. При этом всё же существует вероятность возникновения ситуации, когда два и более узла могут одновременно начать передачу. В этом случае возникает коллизия и все передаваемые данные искажаются. Это обнаруживается узлами, так как одновременно с передачей они также прослушивают среду и сравнивают передаваемые данные с получаемыми. При обнаружении коллизии передача немедленно останавливается, а обнаружившие коллизию узлы передают в среду так называемую «преднамеренную» помеху. Эта помеха распознаётся другими узлами, и они также немедленно останавливают передачу. Каждый узел ждёт произвольное количество времени и производит попытку повторной передачи. Для подтверждения корректности передачи сообщения узел-адресат отправляет специальное сообщение подтверждения АСК (acknowledgment). Если сообщение АСК не было получено, передача считается неудачной и начинается повторная передача.

Протоколы на основе CSMA также являются протоколами на основе конкуренции. Исследование, проведённое в работе [34], выявило некоторые проблемы реализации CSMA в подводных акустических сетях связи, связанные с многолучёвостью и большими задержками распространения сигналов, несмотря на то, что оно проводилось для использования в наземных акустических сетях. Протоколы на основе CSMA позволяют снизить количество коллизий, однако подвержены проблеме «скрытого узла».

Проблема скрытого узла возникает, когда один или более узел связи не может гарантированно знать о занятости среды передачи и удалённого узла и начинает отправлять данные. Такая ситуация показана на рис. 2. Кругами на рисунке показана дальность действия передатчиков узлов А, Б и В. Узлы А и В «слышат» узел Б, но не «слышат» друг друга, и могут одновременно начать передачу, что приведёт к коллизии сигналов на приёме узла Б.

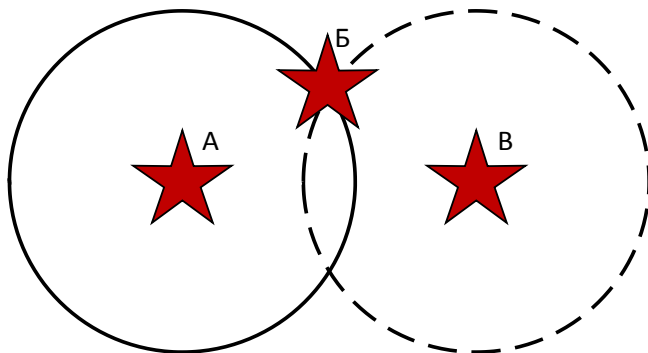


Рис. 2. Проблема скрытого узла

Также существует проблема «незащищённого узла». Эта проблема возникает, когда сетевой узел вынужден задерживать отправку своих пакетов данных из-за занятости среды другой передачей, которой в действительности он не мешает. Описанная ситуация показана на рис. 3.

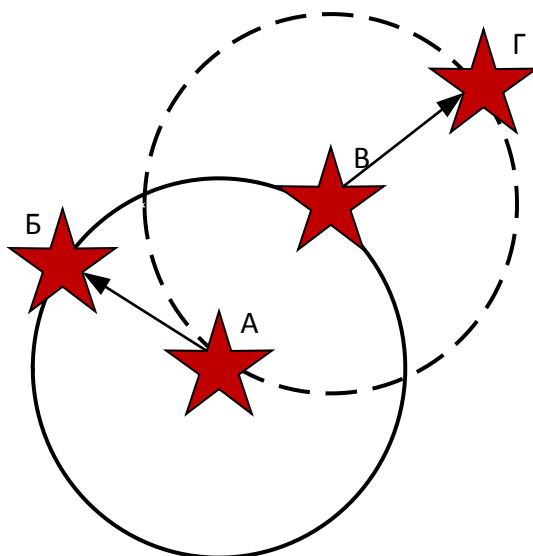


Рис. 3. Проблема незащищённого узла

Узел А отправляет данные узлу Б, а узлу В требуется отправить данные узлу Г. Кругами на рисунке показана дальность действия передатчиков узлов А и В. Передача данных узлом В никак не может помешать приёму данных узлом Б, однако узел В вынужден задерживать отправку данных, так как «слышит» передаваемый сигнал узла А.

Стабильная работа протокола CSMA сильно зависит от доступности канала узла-адресата всем прочим узлам, расположенным в его зоне приёма, так как служебное сообщение CTS (Clear To Send) должно быть принято всеми узлами. Помимо этого проблема скрытого узла не может быть решена без добавления защитного промежутка времени между сообщениями, которое зависит от максимального времени распространения сигналов в сети. В протяжённых сетях подводной связи (около 10 км для протоколов CSMA) могут возникать значительные задержки передачи информации: при максимальной скорости в 1 кбит/с и размером пакета данных 1000 бит задержка передачи информации составит примерно от 1 с до 6,7 с [27]. Из-за таких задержек канал связи будет простаивать большую часть времени, что приведет к низкой пропускной способности сети в целом.

Проблемы протокола CSMA, описанные выше, можно решить при помощи введения специального алгоритма перед передачей данных, называемого «рукопожатием». Такой алгоритм был предложен в протоколе с предотвращением конфликтов множественного доступа MACA в [16]. В начале передачи пакета данных узел отправляет служебное сообщение «запроса разрешения на отправку» RTS (Request-To-Send), в котором содержится адрес получателя. Если узел-получатель готов принять сообщение, то он отправляет широковещательное служебное сообщения подтверждения передачи CTS, в котором содержится адрес отправителя. Так как это сообщение получают все узлы в радиусе действия узла-получателя, они не начнут передачу своих сообщений, так как в данный момент среда будет занята другим узлом. Временная диаграмма процесса рукопожатия показана на рис. 4.

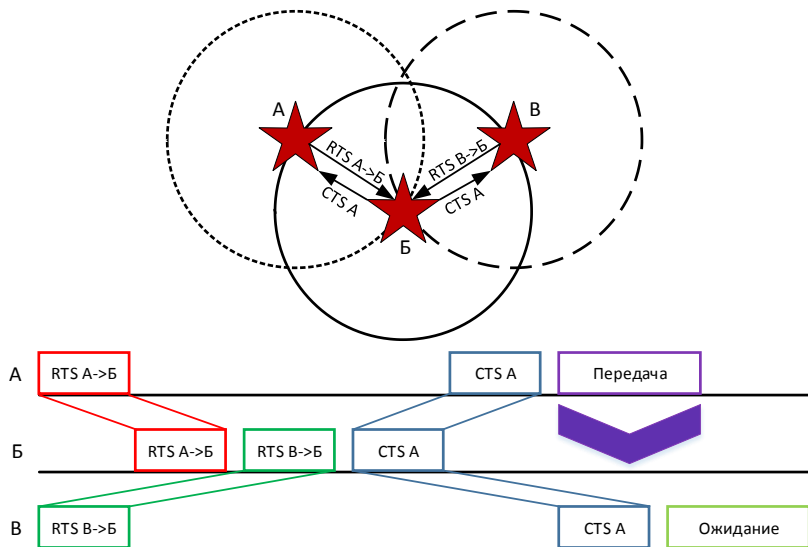


Рис. 4. Временная диаграмма процесса рукопожатия

Для того чтобы сетевые узлы, работающие по протоколу MACA, могли передавать пакеты данных, не вызывая коллизий, должны выполняться некоторые условия, описанные авторами работы [12]. Однако всё же остаётся проблема «ближнего узла», когда один узел находится значительно ближе к узлу-адресату, чем другой, и запрос от дальнего узла может помешать процессу рукопожатия у ближних узлов.

В работе [7] авторами предложен модифицированный протокол MACA – MACAW (MACA-Wireless). Основное отличие данного протокола от исходного – наличие механизма автоматического запроса повторной передачи ARQ, который позволяет повторно передавать ошибочные пакеты DATA. Дополнительно этот протокол позволяет динамически подбирать время задержки передачи для увеличения пропускной способности сети. Подробное описание работы протокола авторы приводят в работе [11]. Перед передачей данных производится соответствующий запрос (RTS). Передача (DATA) начинается после получения специального пакета разрешения передачи (CTS). Это поз-

воляет защитить пакет данных от повреждений при коллизии. В конце передачи принимающий узел отправляет подтверждающее сообщение ACK. В протоколе MACAW также существуют проблемы коллизий. Так, пакет RTS может прийти в момент передачи пакета данных DATA. Эта проблема решается при помощи так называемой серии пакетов. Тогда коллизия пакетов будет приводить к повреждению только одного пакета DATA, о чём будет сообщено в ответном пакете ACK, и ошибка будет исправлена. Увеличение числа пакетов данных в серии пакетов при использовании протокола MACAW может значительно повысить эффективность работы сети [26].

Реализация протокола в UWASN должна поддерживать одновременное получение нескольких запросов на отправку при наличии множества сетевых узлов в среде. Существуют также комбинированные версии протокола, в которых используется протокол на основе MACAW со специальным механизмом «рукопожатия», последовательности RTS – CTS – DATA – ACK и контролем несущей [26]. Дополнительные механизмы обмена информацией о местоположении между узлами, а также создания и контроля последовательной пакетной передачи позволяют выделить новый, более производительный и интеллектуальный протокол MACA-MCP. Данный протокол может применяться для создания самоорганизующейся сети с несколькими каналами связи для автономных подводных аппаратов (AUV).

5. Протокол FAMA

Так же, как и протокол MACAW, ещё одним представителем семейства протоколов с конкурентным доступом к среде является подходящий для организации сети подводной акустической связи протокол FAMA, описанный в работе [18]. В протоколе применены механизмы определения несущей, недоступные в MACA и MACAW, а также процедуры обмена информацией между двумя узлами до передачи полезной информации. Однако должны быть выполнены два условия: длина пакета RTS (продолжительность отправки и ожидания подтверждения) должна выбираться исходя из максимального времени распро-

странения сигнала в среде, а длина пакета CTS должна превышать длину пакета RTS в совокупности с удвоенным временем распространения сигнала в среде и средним временем обработки одного сообщения на оборудовании узла. Выполнение этих двух условий было заложено в основу протокола FAMA. Механизм ARQ поддерживается протоколом FAMA за счёт отправки специальных пакетов ACK или пакетов отказа подтверждения NACK.

Так как, исходя из условий, длина пакета зависит от времени распространения сигнала в среде, ввиду большой задержки распространения сигнала в подводной акустической сети (примерно 1 с на 1,5 км) длина управляющих пакетов RTS и CTS становится очень большой. Это увеличивает затраты времени и энергии для передачи в среде, но гарантирует отсутствие коллизий. Следовательно, использование протокола FAMA в исходной реализации для подводной акустической сети является неэффективным. Данная проблема решается в оптимальной версии протокола FAMA с разделением времени передачи на временные интервалы – Slotted FAMA. Принцип работы нового протокола заключается в том, что любое сообщение, как служебное, так и сообщение с полезной нагрузкой, может передаваться только в рамках свободного тайм-слота. Передача ведётся синхронно и узлы гарантированно могут знать, ведётся ли одновременная передача другими узлами в непосредственной близости с ними. Дополнительно разработчиками протокола предлагается увеличить продолжительность тайм-слота добавлением защитного времени для учёта возможных неточностей в работе часов и таймеров узлов сети.

Специально для подводной акустической сети связи в работе [14] авторами был предложен протокол M-FAMA. Протокол позволяет сетевому узлу одновременно поддерживать несколько каналов связи с другими сетевыми узлами. Благодаря использованию нескольких приемников достигается временное и пространственное разделение, что позволяет повторно использовать сетевой ресурс и эффективно предотвращать коллизии. Работа механизмов протокола направлена на достижение максимальной пропускной способности, при этом теряется возможность

максимально быстрой передачи «точка – точка» (так как протокол будет стараться дать возможность передачи всем сетевым узлам), что может мешать работе в разнонагруженной сети. Например, когда один сетевой узел передаёт сжатое видео с бортовых камер, а второй – лишь свою телеметрию. Таким образом, первому требуется значительно больший канал связи, нежели второму. Для решения этой проблемы авторами был предложен механизм полностью распределенного управления Bandwidth Balancing, при котором снижено количество передаваемых служебных данных, что гарантирует стабильность высокоскоростной передачи данных в схеме «точка – точка» в произвольных топологиях сети. Моделирование, проведённое авторами в работе, показало, что M-FAMA превосходит наиболее популярные подводные протоколы MAC при потоковой передаче. В качестве возможных дальнейших исследований авторы видят изучение динамического протокола M-FAMA, в котором будет существовать механизм быстрого переключения между различными способами составления расписания и внутренними механизмами протокола в условиях постоянно меняющейся нагрузки на сеть и топологии сети.

6. Протоколы управления доступом к среде на основе расписания

В работе [4] описан протокол ACMENet, обеспечивающий функционирование системы мониторинга прибрежной подводной среды. Акустическая коммуникационная сеть для мониторинга подводной среды в прибрежных районах (АСМЕ) – проект, в рамках которого была разработана система, способная работать в распределённых сетях подводных датчиков и автономных аппаратов. Протокол работает по принципу «ведущий – ведомый» и предназначен для сетей UWASN различных топологий малого или среднего размера. Протокол управления доступом к среде реализован на основе определённого на этапе конфигурации сети расписания, благодаря чему пакеты данных передаются от ведомых устройств к ведущим последовательно, не мешают друг другу и не вызывая коллизий. Существует так-

же возможность кластеризации сети для увеличения пропускной способности и обеспечения отказоустойчивости (например, субведущие узлы – те, что могут принять на себя роль ведущего в случае отказа основного узла, а также выполняют задачи маршрутизации и управления трафиком, – или центры кластеров, принимают и отсеивают множество служебной или необходимой только локально информации, передавая ведущему узлу только необходимые ему пакеты). Благодаря применению схемы с кодовым разделением каналов имеется возможность одновременной передачи узлами сигналов, являющихся ортогональными по отношению друг к другу. Протокол также поддерживает возможность адаптивного регулирования мощностей передатчиков, частот и скоростей модуляции на ведомых узлах. Передача завершается широковещательной рассылкой специальных управляющих пакетов для дальнейшей синхронизации и арбитража (составления расписания передачи).

По схеме с кодовым разделением каналов CDMA можно построить распределенный протокол управления доступом к среде для подводной акустической сети датчиков. Такой протокол, названный UW-MAC, был предложен в работе [30]. В основе протокола лежит принцип обратной связи между датчиками и главным узлом связи, благодаря которой появляется возможность подбирать оптимальную мощность передатчика и скорости передачи. Согласно выводам, сделанным авторами работы [30], протокол UW-MAC способен обеспечить высокую пропускную способность сети с минимальными задержками и низким энергопотреблением в условиях глубоководной связи (влияние многолучевости и переотражений невелико). В случае организации сети доступа в условиях мелководья, где влияние отражённых сигналов велико, протокол должен обеспечивать работу сети, снижая пропускную способность или увеличивая задержки.

Другой интересной разработкой является энергоэффективный протокол, разработанный для подводной акустической сети датчиков малого радиуса действия. Главная цель, стоявшая перед разработчиками этого протокола, заключалась в том, что необходимо было создать энергоэффективный протокол, обес-

печивающий стабильный доступ к среде передачи при условии малой мощности бортового передатчика и небольшого энерго-ресурса на борту. Протокол Tone Lohi, описанный в статье [30], обеспечивает выполнение этих требований благодаря механизмам резервирования каналов, гарантирующим отсутствие коллизий между сообщениями при передаче. Помимо программной реализации, протокол подразумевает наличие специального оборудования, имеющего функцию пробуждения по тональному сигналу. Таким образом достигается решение проблемы конфликтов при резервировании каналов без необходимости больших энергозатрат.

Существуют также три различные реализации данного протокола: ST-Lohi (синхронизированный T-Lohi), обеспечивающий наиболее энергоэффективную передачу (согласно моделированию, приведённому в той же работе, протоколом достигается эффективность в пределах 3% от максимального значения), aUT-Lohi (Aggressive Unsynchronized T-Lohi), позволяющий организовать максимальную из трёх реализаций пропускную способность (полезное использование канала ~ 50%), и cUT-Lohi (консервативный несинхронизированный T-Lohi), который обеспечивает наиболее надёжную передачу данных практически без потерь. Согласно выводам авторов, все три реализации позволяют эффективно использовать среду передачи, обеспечить стабильную пропускную способность и высокую энергоэффективность.

Также существует реализация энергоэффективного, распределённого и масштабируемого протокола, описанного в работе [23]. Авторы предполагают использования протокола в условиях длительных и постоянно изменяющихся задержек распространения сигнала. Область применения этого протокола – приложения, допускающие длительные задержки в передаче, например, сенсоры на трансокеанских подводных кабелях, системы экологического контроля и т.п.

Важной особенностью протоколов, основанных на расписании, является задача обеспечения функционирования сети при минимальных энергозатратах, что отличает эти протоколы от

описанных ранее протоколов с конкурентным доступом к среде передачи.

7. Комбинированное применение протоколов и их гибридные реализации

Существуют также варианты реализации множественного доступа к среде с использованием современных наработок по мобильным самоорганизующимся сетям [24]. Теоретически такой подход должен обеспечивать масштабируемость сети, а также увеличивать пропускную способность сети и эффективность её работы за счет пространственного разнесения каналов передачи и повторного использования ресурсов каждого канала. Так, общая структура сети представляет собой совокупность кластеров, передача в каждом из которых ведётся по принципу временного разделения TDMA. Между этими кластерами применяется кодовое разделение CDMA, что позволяет повторно использовать одни и те же тайм-слоты в разных и даже соседних кластерах сети. Дальнейшая масштабируемость сети достигается за счет дополнительного повторного использования кодов CDMA в достаточно разнесённых в пространстве кластерах сети.

8. Заключение

Наиболее важными показателями подводной системы связи являются отказоустойчивость, пропускная способность, максимальная дальность связи и энергетическая эффективность. В зависимости от целей и задач проектирования системы подводной связи можно применять различные протоколы для достижения наилучшей комбинации этих показателей.

Протокол UW-MAC в совокупности с кодовым разделением каналов позволяет добиться высокой пропускной способности и энергетической эффективности за счёт повторного использования каналов и временного разделения каналов. Может использоваться как в глубоководных сетях связи, так и на мелководье. Описан в работах [20] и [30].

Протокол Tone Lohi использует специальные механизмы перехода в режим энергосбережения оборудования и пробуждения/запроса сетевого ресурса специальным тональным акустическим вызовом, благодаря чему может значительно экономить энергию подводных аппаратов. Может быть применён в сетях автономных датчиков и сетях с низкими требованиями к скорости канала. В сетях с высокой нагрузкой протокол также обеспечивает хорошие показатели по отказоустойчивости и пропускной способности. Описан в работах [29] и [31].

Отдельный интерес представляет энергоэффективный, распределенный и масштабируемый протокол, описанный в работе [23]. Такой протокол может быть применён в сети с большим количеством узлов (например, десятки и сотни датчиков и стационарных автономных аппаратов). Как и протокол Tone Lohi, данный протокол позволяет выполнять перевод узлов в режим энергосбережения и их дальнейшее пробуждение, однако ввиду использования механизмов обеспечения доступа к среде, основанных на расписании, протокол обладает низкой пропускной способностью. Такой протокол может быть улучшен применением дополнительного пространственного разделения каналов, введением промежуточных таблиц маршрутизации, а также комбинированием с механизмами протокола Tone Lohi.

Протокол Slotted-FAMA обладает хорошей масштабируемостью и управляемостью. В совокупности с дополнительными механизмами, как показано в статьях [9, 15, 18], протокол может применяться в сетях, где требуется построение интеллектуальных подводных сетей связи. Большой размер сети и гибкие возможности по маршрутизации и отслеживанию состояния карты сети позволяют применять данный протокол для многих целей в подводной среде.

Улучшенный протокол MACAW с механизмами определения несущей и серией пакетов является эффективным с точки зрения масштабируемости и пропускной способности. Механизмы динамического регулирования размера пакетов и мощности передатчиков позволяют протоколу стабильно работать в быстро меняющихся условиях, например, при обследовании автономными подводными аппаратами прибрежной подводной

зоны с постоянно меняющейся глубиной. Он может применяться для создания небольших самоорганизующейся сетей для автономных подводных аппаратов. Описан в работе [26].

Модификации протокола ALOHA, ALOHA-CA и ALOHA-AN могут применяться для дальнейших исследований и разработок протоколов доступа к среде с целью улучшения характеристик. При разработке протоколов авторы сделали основной упор на снижении количества служебных сообщений, а также на увеличении энергоэффективности: пакеты данных не отправляются, если информация не занимает полностью пакет данных (установленный размер в сети, но до определённого предела) или пакет может вызвать коллизию. Описан в работах [16] и [27].

Для изучения применимости и возможностей протоколов требуются дополнительные исследования, о которых будет сказано в заключении данной работы. Подробное описание канального уровня, классификация MAC протоколов, а также обзор механизмов этих протоколов для сетей подводных акустических датчиков приведены в работе [19].

В работе [21] авторы провели реальные эксперименты в Атлантическом океане. В эксперименте развёртывалась сеть с девятью сетевыми узлами, использовалась распределённая топология сети. В этом эксперименте принимали участие три протокола доступа к среде: ALOHA, SASHA на основе квитирования и протокол конвейерной передачи на основе планирования (PTMAC). Последние два протокола выходят за рамки данной работы, но подробно рассматриваются в работе [21]. Также протоколы сравниваются и анализируются как на уровне формирования сообщений, обработки пакетной передачи, так и на уровне работы сетевых узлов (на физическом уровне). Пропускная способность сети с использованием этих трех протоколов изучается с точки зрения задержек распространения сигналов, и количества потерянных сообщений и пакетов. Результаты, приводимые авторами, показывают частоту потери пакетов и повреждения сообщений, а также асимметрию канала и сложность определения наилучшего времени ожидания и длины пакетов.

В приведённом обзоре были рассмотрены разработки протоколов управления доступом к среде и технологий для сетей подводной акустической связи. Дальнейшая работа должна быть сосредоточена на построении и улучшении интеллектуальных алгоритмов поддержания работоспособности и самоорганизации сетей. Поиска решения требуют также проблемы оптимальной длины тайм-слотов и пакетов, периода отложенной отправки и выбора протокола, обеспечивающего наилучшее соотношение пропускной способности, задержки и энергоэффективности передачи.

Литература

1. БРЕХОВСКИХ Л.М., ЛЫСАНОВ Ю.Л. *Теоретические основы акустики океана*. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1982. – 264 с.
2. ВИКУЛОВ А.С., ПАРАМОНОВ А.И. *Введение в сети WI-FI с высокой плотностью пользователей* // Информационные технологии и телекоммуникации. – 2018. – Т. 6. – С. 12–20.
3. КЕБКАЛ К.Г., КЕБКАЛ В.К., КЕБКАЛ А.Г., МИНАЕВ Д.Д., ЛЕОНЕНКОВ Р.В., КОРЫТКО А.С. *Экспериментальная оценка характеристик цифровой подводной сети на основе гидроакустических модемов с программным каркасом EviNS* // Гироскопия и навигация. – 2018. – Т. 26, ч. 3 (103). – С. 121–135.
4. ADAMS A.E., ACAR G. *An acoustic network protocol for sub-sea sensor systems* // Europe Oceans. – 2005. – Vol. 1. – P. 172–176.
5. BAE Y.H. *Modeling Timely-Delivery Ratio of Slotted Aloha With Energy Harvesting* // IEEE Communications Letters. – 2017. – Vol. 21, No. 8. – P. 1823–1826.
6. BERTSEKAS D., GALLAGER R. *Data Networks*. – NJ: Prentice Hall, 1992.
7. BHARGHAVAN V., DEMERS A., SHENKER S., ZHANG L. *MACAW: A media access protocol for wireless LANs* // Proc. of the SIGCOMM Conference, London, UK, 31 August – 2 September, 1994. – P. 212–225.

8. BURATTI C., ZANELLA A., VERDONE R. *Throughput analysis of Slotted Aloha multiple hop systems with Virtual Antenna Arrays* // Future Network & Mobile Summit. – 2010. – P. 1–8.
9. CASARI P., TOMASI B., ZORZI M. *A comparison between the Tone-Lohi and Slotted FAMA MAC protocols for underwater networks* // OCEANS'2008, Quebec City, Qc, Canada, 15–18 September 2008. – P. 1–8.
10. CHIRDCHOON N., SOH W.-S., CHUA K.C. *ALOHA-based MAC Protocols with Collision Avoidance for Underwater Acoustic Networks* // 26th IEEE Int. Conf. on Computer Communications INFOCOM-2007, 6–12 May 2007, Anchorage, Alaska, USA. – P. 2271–2275.
11. FOO K.Y., ATKINS P.R., COLLINS T., MORLEY C., DAVIES J. *A routing and channel-access approach for an ad hoc underwater acoustic network* // OCEANS'04, MTS/IEEE Techno-Ocean'04 (IEEE Cat. No.04CH37600), Kobe, Japan, 9–12 Nov. 2004. – Vol.2 – P. 789–795.
12. FULLMER C.L., GARCIA-LUNA-ACEVES J.J. *Floor acquisition multiple access (FAMA) for packet-radio networks* // SIGCOMM Computer Commun. – 1995.
13. GIBSON J.H., XIE G.G., XIAO Y., CHEN H. *Analyzing the Performance of Multi-hop Underwater Acoustic Sensor Networks* // Proc. MTS/IEEE Conference OCEANS'2007, Aberdeen, Scotland, 18–21 June 2007. –P. 1–6.
14. HAN S., NOH Y., LEE U., GERLA M. *M-FAMA: A multi-session MAC protocol for reliable underwater acoustic streams* // Proc. of the IEEE INFOCOM-2013, Turin, Italy, 14–19 April, 2013 - Turin, Italy– P. 665–673.
15. HUANG W., LIU M., ZHANG S. *A Slotted FAMA based MAC Protocol for Multi-Hop Underwater Acoustic Networks with a Multiple Reception Mechanism* // 37th Chinese Control Conference (CCC), Wuhan, China, 25–27 July, 2018, – P. 7315–7321.
16. KARN P. *MACA – A new channel access method for packet radio* // SIGCOMM computer commun. rev. 25, 4, New York, NY, USA, 4 October 1995. – P. 262–273.

17. MANDAL P., DE S., CHAKRABORTY S.S. *Characterization of Aloha in underwater wireless networks* // National Conference on Communications – 2010 (NCC-2010), Chennai, India, 29–31 January, 2010. – P. 1–5.
18. MOLINS M., STOJANOVIC M. *Slotted FAMA – A MAC Protocol for Underwater Acoustic Networks* // Proc. of the Int. Conf. on Communication, Electronics and Automation Engineering, Singapore, 16–19 May 2006. – P. 1291–1297.
19. NGUYEN H.T., SHIN SY., PARK SH. *State-of-the-Art in MAC Protocols for Underwater Acoustics Sensor Networks* / In: Emerging Directions in Embedded and Ubiquitous Computing. EUC-2007. Lecture Notes in Computer Science / Eds.: Denko M.K. et al. – 2007. – Vol. 4809. – P. 482–493.
20. POMPILI D., MELODIA T., AKYILDIZ I.F. *A Distributed CDMA Medium Access Control for Underwater Acoustic Sensor Networks* // IEEE Trans. on Wireless Communications, 8. – 2009. – Vol. 4. – P. 1899–1909.
21. PU L., LUO Y., MO H. et al. *Comparing underwater MAC protocols in real sea experiment* // Computer Communications. – 2018. – Vol. 56. – P. 1–9.
22. ROBERTS L.G. *ALOHA packet system with and without slots and capture* // ACM SIGCOM Comput. – 1975. – P. 28–42.
23. RODOPLU V., PARK M.K. *An Energy-Efficient MAC Protocol for Underwater Wireless Acoustic Networks* // IEEE Journal of Oceanic Engineering. – 2006. – Vol. 32, Iss. 3. – P. 710–720.
24. SALVA-GARAU F., STOJANOVIC M. *Multi-cluster protocol for ad hoc mobile underwater acoustic networks* // OCEANS'2003. Celebrating the Past Teaming Toward the Future (IEEE Cat. No.03CH37492), San Diego, CA, USA, 22–26 September 2003, – Vol. 1. – P. 91–98.
25. SEEMA A. *Analysis of MAC Strategies for Underwater Applications* // Springer Science. – 2015. – Vol. 82. – P. 359–376.
26. SHAHABUDEEN S., CHITRE M., MOTANI M. *A multi-channel MAC protocol for AUV networks* // OCEANS'2007 – Europe, Aberdeen, Scotland, 18–21 June 2007. – P. 60867–60876.

27. SMITH S. M., PARK J.C. *A peer-to-peer communication protocol for underwater acoustic communication* // OCEANS'97, Halifax, Nova Scotia, Canada, 6–9 October 1997. – P. 268–272.
28. SOHRABY K., MINOLI D., ZNATI T. *Wireless Sensor networks: Technology, Protocols, and Applications*. – Wiley Publication, Chichester, 2007.
29. SYED A.A., YE W., HEIDEMANN J. *T-Lohi: A New Class of MAC Protocols for Underwater Acoustic Sensor Networks* // The 27th IEEE Conf. on Computer Communications INFOCOM-2008, Phoenix, AZ, USA, 15–17 April 2008. – P. 231–235.
30. TAN H., SEAH W.K. G. *Distributed CDMA-based MAC Protocol for Underwater Sensor Networks* // 32nd IEEE Conf. on Local Computer Networks (LCN-2007), Dublin, Ireland, 15–18 October 2007. – P. 26–36.
31. VALERIO V.D.; PRESTI F.L.; PETRIOLI C.; PICARI L.; SPACCINI D. *A self-adaptive protocol stack for Underwater Wireless Sensor Networks* // OCEANS'2016, Monterey, CA, USA, 19-23 September 2016. – P. 995–1022.
32. VARGHESE J., RAO S.V. *Energy efficient exponential decision MAC for energy harvesting-wireless sensor networks* // Int. Conf. on Advances in Green Energy (ICAG), Thiruvananthapuram, India, 17–18 December 2014. – P. 239–244.
33. VIEIRA L.F.M., KONG J., LEE U., GERLA M. *Analysis of ALOHA protocols for underwater acoustic sensor networks* // The First ACM International Workshop on UnderWater Networks WUWNet, Extended abstract from WUWNet, 1-8 September 2006. – V. 6. – P. 1–13.
34. ZHANG J., HUANG Z., LIU X. *Acoustic Communication in Wireless Sensor Networks* // Department of Computer Science University of Virginia, CS651. – 2005. – P. 1–8.
35. ZHANG Y., ZHENG S., XIONG S. *A Scheduling Algorithm for TDMA-Based MAC Protocol in Wireless Sensor Networks* // First International Workshop on Education Technology and Computer Science, Wuhan, China, 7–8 March 2009. – P. 148–151.

ACTUAL AND PERSPECTIVE METHODS OF CONSTRUCTING WIRELESS ACCESS NETWORKS IN UNDERWATER ACOUSTIC COMMUNICATION

Philipp Pankratov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, postgraduate student (alphalionbyte@hotmail.com).

Ilya Malakhov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, postgraduate student (froztdgal@gmail.com).

Abstract: The large delay in the propagation of signals, the strong influence of reflected signals and, as a result, the high probability of error rate and low data transfer speed are distinctive features of underwater acoustic communication networks from packet radio networks. In such circumstances, the construction of a wireless underwater access network requires the development of special media access control protocols, since many advanced network protocols developed for terrestrial radio networks had extremely low data transmission efficiency in an underwater environment. This article provides an overview of available solutions for promising methods of building a wireless access network in underwater acoustic communication, which are schedule-based and competition-based media access protocols. The ALOHA protocol and its modifications (ALOHA-CA and ALOHA-AN), protocols with the carrier determination mechanism (FAMA and Slotted FAMA), the improved MACAW protocol, UW-MAC and Tone Lohi protocols are also described in this article. Deciding on which protocol to use within a deployable network is an important task in network design. The article provides a comparison of protocols and proposes a way of analyzing in which systems these protocols could be applied. At the end of the work, an analysis of possible scenarios for the application of various protocols in the underwater acoustic communication environment and ideas for additional research in medium access control protocols development was provided.

Keywords: underwater acoustic communication, medium access control protocols, Slotted FAMA, UW-MAC, Tone Lohi.

УДК 004.7 + 654.9

ББК 39.478

DOI: 10.25728/ubs.2021.91.5

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.*

Поступила в редакцию 02.02.2021.

Опубликована 31.05.2021.