

**Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

***Выпуск 93
Сентябрь 2021***

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл. №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2021

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

**УПРАВЛЕНИЕ
БОЛЬШИМИ
СИСТЕМАМИ**

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 93

Москва – 2021

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Кузнецов О.П., Кульба В.В., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: член-корр. РАН Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Калимулина Э.Ю. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИПМ РАН), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), Галаев А.А. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук: Зоркальцев В.И. (ИСЭМ СО РАН), проф. Калашников А.О. (ИПУ РАН), проф. Калянов Г.Н. (ГУ ВШЭ), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ключков В.В. (ИПУ РАН), д-р техн. наук Коргин Н.А. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук: проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (МФТИ), д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р биол. наук проф. Михальский А.И., д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н. (ИПС РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Орлов А.И. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), проф. Райгородский А.М. (МГУ), проф. Савватеев А.В. (РЭШ), д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), Совлуков А.С. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ), проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Арзамас – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – академик РАН Бычков И.В., д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в интернете: ubs.mtas.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

Сетевые модели в управлении

Чаплинская Н.В.

Исследование эргодических неоднородных ресурсных сетей с «жадными» вершинами..... 5

Управление в социально-экономических системах

Чеботарев П.Ю., Максимов В.М.

Двухкомпонентное общество в модели ViSE: зависимость динамики от уровня кооперации и порога голосования 51

Гребенюк Г.Г., Крыгин А.А., Серeda Л.А.

Модели, методы и практические рекомендации по оптимизации энергопотребления в домохозяйствах 89

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭРГОДИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНЫХ РЕСУРСНЫХ СЕТЕЙ С «ЖАДНЫМИ» ВЕРШИНАМИ

Чаплинская Н. В.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассмотрена модификация графовой пороговой динамической модели «ресурсная сеть» – «ресурсная сеть с жадными вершинами». На каждом такте дискретного времени вершины графа передают друг другу ресурс по ребрам с ограниченными пропускными способностями, причем сначала передают имеющийся ресурс в собственные петли, а затем остаток ресурса распределяют в исходящие ребра по правилам стандартной ресурсной сети (пропорционально пропускным способностям с учетом их ограничения). Рассмотрена топология эргодической неоднородной ресурсной сети с «жадными» вершинами – сеть описывается сильно связным ориентированным графом. Показано, что при значениях суммарного ресурса, не превосходящих суммы пропускных способностей всех петель, сеть с «жадными» вершинами останавливается, что невозможно для стандартной эргодической ресурсной сети и обуславливается наличием модифицированных петель; исследуется характер остановки сети. Для значений суммарного ресурса, превышающих суммы пропускных способностей всех петель, доказываемся, что с определенного момента времени сеть будет функционировать эквивалентно соответствующей стандартной ресурсной сети.

Ключевые слова: графовая динамическая пороговая модель, ресурсная сеть, модель «жадных» вершин, топология эргодических неоднородных сетей.

1. Введение

Сетевые ресурсные модели в настоящее время находят применение во многих областях жизнедеятельности человека. Например, в 2020 году в [18] была разработана концептуальная и графоаналитическая модель ресурсного обеспечения сетевой организационной структуры на примере холдинга «РЖД», а уже в 2021 году в [9] на ее основе был представлен алгоритм закупочной деятельности, позволяющий описывать и математически

¹ Надежда Васильевна Чаплинская, математик (nadya1462@gmail.com).

формализовывать бизнес-процессы холдинга «РЖД».

Настоящая работа является продолжением исследований процессов функционирования ресурсной сети – модели замкнутой системы: ресурс в сети не поступает извне и не расходуется. В [14] эта модель использовалась для моделирования распространения загрязнений в водной среде.

Ресурсная сеть – графовая динамическая потоковая модель замкнутой системы, в которой ресурс в дискретном времени перераспределяется между вершинами, – была предложена впервые в 2009 году в [16]. Свое дальнейшее развитие модель получила в [12, 15].

Ресурсная сеть описывается ориентированным графом, ребра которого имеют веса, называемые пропускными способностями. Ресурс в сети распределяется между вершинами в соответствии с двумя правилами с пороговым переключением, которое происходит в зависимости от количества ресурса в вершинах и от величины пропускных способностей исходящих из них ребер.

В [12] для данной модели были получены результаты, позволяющие определить предельное состояние сети любой топологии с любым значением суммарного ресурса и любым его начальным распределением между вершинами. Было доказано, что для ресурсной сети любой топологии, кроме поглощающей, существует и единственно пороговое значение суммарного ресурса, разделяющее зоны различного поведения сети. В [12] также были предложены формулы, позволяющие найти это пороговое значение для непоглощающих ресурсных сетей.

При суммарном ресурсе, не превосходящем порогового значения (*малый* суммарный ресурс), динамика сети описывается моделью рассеяния на графах [20, 21]. Модели рассеяния для графов с постоянной топологией описываются однородными цепями Маркова, которые широко используются в различных предметных областях, например, при решении задач о нахождении консенсуса в многоагентных системах [5, 6], решении задач о нахождении количественной оценки различных видов риска и их влияния на финансовое состояние предприятия [11], в социаль-

ных сетях [8] и т.д.

При суммарном ресурсе выше порогового значения (*большой* суммарный ресурс) динамика сети описывается неоднородной цепью Маркова. В [12] для случая большого ресурса были обнаружены вершины-аттракторы – вершины, накапливающие в себе излишки ресурса.

Были рассмотрены и некоторые модификации модели ресурсной сети. Модификация в виде вершин с органиченной емкостью была представлена в монографии [15]. В [17] описываются динамические ресурсные сети. Рассмотрены ресурсные сети на графах с нестандартной достижимостью [10]: в работах [1] и [2] с вентильной и с магнитной достижимостью соответственно. В [3] были предложены двухресурсные сети и исследована топология полных однородных несимметричных двусторонних ресурсных сетей с петлями. В качестве продолжения этой работы в [4] были рассмотрены двухресурсные сети с магнитной достижимостью.

Настоящая работа посвящена еще одной модификации модели – ресурсная сеть с «жадными» вершинами. Отличие этой модели заключается в том, что каждая вершина передает ресурс сначала в собственную петлю и только затем остаток ресурса распределяет в смежные вершины по исходящим ребрам.

Модель с данной модификацией была впервые введена в 2021 году в [13]. В статье [13], а затем и в ее продолжении [19] была исследована топология полных однородных ресурсных сетей с «жадными» вершинами. Настоящая работа рассматривает общий случай – неоднородные ресурсные сети с ограничением на топологию в виде эргодичности сети (сеть описывается сильно связным ориентированным графом).

2. Ресурсные сети – основные понятия

Ресурсная сеть – это динамическая потоковая модель замкнутой системы, описываемая связным ориентированным графом $G = (V, E)$ с вершинами $v_i \in V$ и ребрами $e_{ij} = (v_i, v_j) \in E$; $|V| = n$.

Ребра графа имеют неотрицательные веса r_{ij} , обозначаемые их *пропускные способности*. Топология сети однозначным образом определяется *матрицей пропускных способностей* $R = (r_{ij})_{n \times n}$. Сумма i -го столбца $r_i^{in} = \sum_{j=1}^n r_{ji}$ и i -й строки $r_i^{out} = \sum_{j=1}^n r_{ij}$ матрицы R – входная и выходная пропускные способности вершины v_i соответственно.

Вершинам графа приписываются неотрицательные числа $q_i(t)$, изменяющиеся в дискретном времени. Говорят, что на такте t вершина v_i содержит $q_i(t)$ *ресурса*. Емкость вершин не ограничена. Суммарный ресурс, циркулирующий по сети, обозначают W : $\forall t \sum_{i=1}^n q_i(t) = W$.

Состоянием $Q(t)$ сети в момент времени t называется вектор $Q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$, элементами которого являются значения ресурсов в вершинах в момент времени t . Состояние $Q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ называется *предельным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует t_ε такое, что для всех $t > t_\varepsilon$ $|q_i^* - q_i(t)| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \dots, n$.

На каждом такте вершины сети передают имеющийся в них ресурс по исходящим ребрам смежным вершинам. В стандартной ресурсной сети в момент времени t вершина v_i отдает в ребро e_{ij} , соединяющее ее с вершиной v_j :

- r_{ij} единиц ресурса, если $q_i(t) > r_i^{out}$ (правило 1);
- $\frac{r_{ij}}{r_i^{out}} q_i(t)$ единиц ресурса, если $q_i(t) \leq r_i^{out}$ (правило 2).

Правило 1 работает тогда, когда вершина содержит ресурса больше, чем может отдать. В этом случае по каждому исходящему ребру передается ресурс, равный пропускной способности этого ребра, а всего вершина отдаст $r_i^{out} = \sum_{j=1}^n r_{ij}$ ресурса. Иначе работает правило 2: вершина отдает весь имеющийся ресурс, и последний распределяется пропорционально пропускным способностям исходящих ребер.

Важной характеристикой ресурсной сети является *пороговое*

значение ресурса T – значение суммарного ресурса сети, разделяющее зоны ее различного поведения. В [12] доказано, что в любой стандартной ресурсной сети, кроме поглощающей, пороговое значение T существует и единственно: при $W \leq T$ все вершины с определенного момента времени функционируют по правилу 2 (зона *малого* ресурса), при $W > T$ с определенного момента времени хотя бы одна вершина функционирует по правилу 1 (зона *большого* ресурса). В [12] также предложены формулы, позволяющие найти значение T для всех классов стандартных ресурсных сетей, в которых оно существует.

3. Ресурсные сети с «жадными» вершинами

Модель ресурсной сети с «жадными» вершинами была предложена и формально описана в [13]. Напомним основные определения и свойства данной модели.

Рассматривается ресурсная сеть с наличием хотя бы одной петли. Правила ее функционирования следующие.

Вершина v_i , имеющая петлю, на такте t отдает:

- r_{ii} ресурса в петлю, если $q_i(t) > r_{ii}$, и оставшийся ресурс $\Delta q_i(t) = q_i(t) - r_{ii}$ распределяет в исходящие ребра по правилам стандартной ресурсной сети;

- $q_i(t)$ ресурса в петлю, если $q_i(t) \leq r_{ii}$ (весь имеющийся ресурс уходит в петлю).

Вершина, не имеющая петлю, распределяет свой ресурс по правилам стандартной ресурсной сети.

Иначе говоря, все вершины с петлями являются «запасливыми» (или «жадными»), так как передают имеющийся ресурс в первую очередь себе в петлю и уже затем распределяют остатки по исходящим ребрам смежным вершинам. Для такой модели возможна ситуация, когда весь ресурс сети будет циркулировать лишь по петлям вершин, не перераспределяясь между вершинами, т.е. сеть как бы «останавливается» в своем функционировании.

Определение 1. Будем говорить, что сеть остановилась на

такте t , если $\forall i = \overline{1, n} \ q_i(t) \leq r_{ii}$.

Остановка сети есть частный случай ее стабилизации, невозможный в стандартных эргодических сетях.

Определение 2. Вершина v_i – насыщенная в момент времени t , если $q_i(t) \geq r_{ii}$; перенасыщенная, если $q_i(t) > r_{ii}$, и ненасыщенная, если $q_i(t) < r_{ii}$.

В [13] доказывается свойство насыщенных вершин, согласно которому вершина, насыщенная в момент времени t , в момент времени $t + 1$ также останется насыщенной.

Для перенасыщенной вершины вводится важное понятие *свободного ресурса*.

Определение 3. Свободный ресурс перенасыщенной вершины v_i – это ресурс, не задействованный ее петлей: $\Delta q_i(t) = q_i(t) - r_{ii}$.

Суммарный свободный ресурс в сети на такте t – сумма свободных ресурсов всех перенасыщенных вершин сети на такте t . Обозначается $\Delta Q(t)$.

В ресурсной сети с «жадными» вершинами именно свободный ресурс перемещается по ребрам. Поэтому остановка сети эквивалентна отсутствию в сети свободного ресурса.

4. Эргодические неоднородные сети с «жадными» вершинами

Будем рассматривать неоднородные ресурсные сети с «жадными» вершинами с ограничением на топологию в виде эргодичности – т.е. сеть описывается сильно связным ориентированным графом.

Замечание 1. В дальнейших рассуждениях все вершины, не имеющие петли, мы будем относить к насыщенным.

4.1. ДИНАМИКА СВОБОДНОГО РЕСУРСА СЕТИ

Прежде чем рассматривать зоны различного поведения эргодической неоднородной сети с «жадными» вершинами, определим характер перемещения её свободного ресурса.

Ресурс ненасыщенной вершины неубывает с течением времени, так как все свои «накопления» вершина передает только себе в петлю. То есть часть свободного ресурса сети, поступившая в ненасыщенную вершину, будет поглощена ею и не вернется циркулировать по сети. Это значит, что суммарный свободный ресурс в сети уменьшается всякий раз, когда ненасыщенные вершины получают какое-либо количества ресурса от перенасыщенных вершин.

Эргодичность сети – в частности существование пути от перенасыщенной вершины к ненасыщенной – позволяет нам предположить, что свободный ресурс сети будет уменьшаться с течением времени, перетекая из перенасыщенных вершин в ненасыщенные и поглощаясь последними. Попробуем проанализировать динамику уменьшения свободного ресурса в сети, оценив количество ресурса, поглощаемого за определенный временной интервал.

Пусть в момент времени t_0 в сети имеется $k_0 = k(t_0)$ перенасыщенных вершин и $l_0 = l(t_0)$ ненасыщенных вершин, причем $k_0, l_0 > 0$. Рассмотрим распределение свободного ресурса $\Delta q_i(t_0)$ некоторой перенасыщенной вершины $v_i, i = \{1, \dots, k_0\}$.

Обозначим ρ_{ij} относительную пропускную способность ребра e_{ij} :

$$\rho_{ij} = \frac{r_{ij}}{r_i^{out}}, \quad 0 \leq \rho_{ij} \leq 1.$$

Соответственно, матрица $R' = (\rho_{ij})_{i,j=1}^n$ – матрица относительных пропускных способностей сети (стохастическая матрица).

Введя величину $\delta_i > 0$,

$$\delta_i = \delta_i(t_0) = \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_i(t_0) \right\},$$

где $r_{\min} = \min_{\alpha, \beta} \{r_{\alpha\beta} \neq 0\}$ и $\rho_{\min} = \min_{\alpha, \beta} \{\rho_{\alpha\beta} \neq 0\}$, приведем несколько вспомогательных утверждений.

Утверждение 1. Ресурс, переданный на такте t_0 от перенасыщенной вершины v_i смежной с ней вершине v_{i+1} , можно оценить снизу значением δ_i .

Утверждение 2. За количество тактов, не превосходящее $n - 1$, перенасыщенная вершина v_i передаст ближайшей ненасыщенной вершине v_j не менее $\rho_{\min}^{n-2} \delta_i$ ресурса.

Утверждение 3. Пусть в момент времени t_0 вершина v_i является перенасыщенной. За временной интервал $l_0(n - 1)$ свободный ресурс сети уменьшится не менее чем на $\rho_{\min}^{l_0(n-1)-1} \delta_i$, при условии, что к концу интервала в сети осталась хотя бы одна ненасыщенная вершина.

Доказательства приведенных утверждений представлены в Приложении.

Применим последнее утверждение к перенасыщенной в момент времени t_0 вершине v_i , имеющей наибольший свободный ресурс среди всех вершин сети, т.е. $\Delta q_i(t_0) = \max_{\alpha} \Delta q_{\alpha}(t_0)$. Тогда для свободного ресурса этой вершины справедливо неравенство

$$\Delta q_i(t_0) \geq \frac{\Delta Q(t_0)}{k_0},$$

и величину δ_i можно оценить снизу следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_i &= \delta_i(t_0) = \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_i(t_0) \right\} \geq \\ &\geq \min \left\{ r_{\min}, \frac{\rho_{\min}}{k_0} \Delta Q(t_0) \right\} > 0. \end{aligned}$$

Вместе с тем оценим сверху полученный временной интервал:

$$l_0(n - 1) < n(n - 1) = \tau.$$

Момент времени t_0 был выбран произвольно, поэтому все приведенные в доказательстве выкладки можно повторить для следующих $\tau = n(n - 1)$ тактов, определив $k_1 = k(t_1)$, $l_1 = l(t_1)$ на такте $t_1 = t_0 + \tau$.

Таким образом, на основе приведенных рассуждений формулируется следующая лемма.

Лемма 1. За i -й временной интервал длительностью $\tau = n(n - 1)$ тактов, начиная с момента времени t_i , свободный ресурс сети будет уменьшаться не менее чем на некоторую

величину $\Lambda_i > 0$, вычисляемую по формуле

$$\Lambda_i = \rho_{\min}^{l(t_i)(n-1)-1} \min \left\{ r_{\min}, \frac{\rho_{\min}}{k(t_i)} \Delta Q(t_i) \right\},$$

если на начало интервала в сети есть хотя бы одна перенасыщенная вершина, а на конец интервала в сети осталась хотя бы одна ненасыщенная вершина.

В сущности, сформулированная лемма дает оценку скорости убывания свободного ресурса как функции ее величины. В последующих разделах мы будем применять полученную формулу, исследуя поведение ресурсной сети при различных величинах суммарного ресурса.

4.2. ПОРОГОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СУММАРНОГО РЕСУРСА

В ресурсных сетях с «жадными» вершинами существуют два пороговых значения T_1 и T_2 суммарного ресурса, разделяющих зоны различного поведения сети. Этим зонам были даны названия: порог T_1 разделяет зоны недостаточного и достаточного ресурса, порог T_2 – зоны достаточного малого и достаточного большого ресурса.

Напомним: «недостаточность» ресурса означает, что сеть остановится (за конечное число тактов или асимптотически). «Достаточность» ресурса в свою очередь влечет за собой постоянное существование хотя бы одной перенасыщенной вершины – т.е. остановка сети невозможна. При малом достаточном ресурсе, начиная с определенного момента времени, все вершины на каждом такте отдадут весь свой ресурс, т.е. функционируют по правилу 2, а при большом одна или несколько вершин накапливают в себе ресурс и, таким образом, функционируют по правилу 1.

Для топологии полных однородных сетей было показано, что первое пороговое значение суммарного ресурса равно сумме пропускных способностей всех петель сети, а второе совпадает с пороговым значением стандартной полной однородной ресурсной сети: $T_1 = rn$, $T_2 = T = rn^2$. Аналогичным образом определяются и пороговые значения неоднородной эргодической сети.

Будем полагать, что для некоторых начальных состояний и топологий первое пороговое значение суммарного ресурса $T_1 = \sum_{i=1}^n r_{ii}$. В следующем разделе будет доказано, что это значение единственно для любых начальных состояний и топологий неоднородной эргодической сети.

В разделе 4.4 мы покажем, что второе пороговое значение T_2 совпадает с пороговым значением стандартной ресурсной сети соответствующей топологии.

4.3. НЕДОСТАТОЧНЫЙ РЕСУРС

Зона недостаточного ресурса накладывает на суммарный ресурс следующее ограничение: $W \leq T_1 = \sum_{i=1}^n r_{ii}$.

Утверждение 4. При $W \leq \sum_{i=1}^n r_{ii}$ суммарный свободный ресурс сети стремится к нулю с течением времени.

Доказательство утверждения представлено в Приложении.

Зная специфику поведения свободного ресурса в сети, попробуем сделать некоторые выводы о ее предельном состоянии.

Насыщенная вершина v_i ненасыщенной стать не может, поэтому ее предельное состояние будет не меньше, чем пропускная способность петли: $q_i^* \geq r_{ii}$. При этом, по утверждению 4, ни одна вершина, в том числе и вершина v_i , в предельном состоянии не будет иметь свободного ресурса: $q_i^* \leq r_{ii}$. Отсюда вытекает следующее следствие.

Следствие 1. При $W \leq \sum_{i=1}^n r_{ii}$ предельное состояние любой вершины, ставшей в какой-то момент насыщенной, будет равно пропускной способности её петли.

Для полных однородных сетей модели «жадных» вершин известны начальные состояния, при которых сеть останавливается за конечное число тактов, и начальные состояния, при которых сеть функционирует бесконечно и останавливается в пределе (см. утв. 3, 6 в [13]). Для общего случая неоднородных сетей характер остановки будет зависеть не только от вектора начального рас-

пределения ресурса в сети, но и от ее топологии (матрицы пропускных способностей). Введем понятие перенасыщенного цикла и с его помощью попробуем исследовать этот вопрос.

Определение 4. Перенасыщенным циклом будем называть цикл из двух и более насыщенных вершин, среди которых хотя бы одна является перенасыщенной.

Теорема 1. (Достаточное условие бесконечного функционирования сети и ее остановки в пределе.) Если в начальный момент времени существует такое k , $1 < k < n$, что вершины v_1, \dots, v_k образуют перенасыщенный цикл, то сеть будет функционировать бесконечно, останавливаясь в пределе.

Доказательство теоремы представлено в Приложении.

Замечание 2. Полные однородные сети являются частным случаем неоднородных сетей. Поэтому достаточное условие бесконечного функционирования полной однородной сети с «жадными» вершинами, приведенное в [13] (утв. 4), есть частный случай доказанной выше теоремы. Перенасыщенный цикл полной однородной сети – две (или более) насыщенные вершины, хотя бы одна из которых является перенасыщенной.

Теорема 2. (Критерий бесконечного функционирования сети.) Для того чтобы сеть функционировала бесконечно необходимо и достаточно, чтобы в какой-то момент времени в ней образовался перенасыщенный цикл.

Доказательство см. в Приложении.

Итак, возникновение в сети перенасыщенного цикла, определяет характер остановки сети при недостаточном ресурсе. Остается понять, возможно ли предсказать факт возникновения перенасыщенного цикла по начальным данным.

Недостаточным ресурсом цикла будем называть сумму ресурсов, которых в данный момент времени не хватает вершинам, образующих этот цикл, до насыщения.

Теорема 3. (Достаточное условие остановки сети по начальным данным.) Если в начальный момент времени недостаточный ресурс каждого цикла больше, чем суммарный свободный ресурс сети, то сеть остановится.

Доказательство основывается на том, что свободного ресурса не хватит, чтобы насытить все ненасыщенные вершины цикла, а значит, такой цикл никогда не станет перенасыщенным.

Далее приведем алгоритм, однозначно определяющий характер остановки сети (остановка за конечное число тактов или в пределе) по вектору начальных состояний вершин и по матрице пропускных способностей сети.

В основе алгоритма лежит следующий подход. Рассматриваем подсеть исходной сети, построенную исключением исходящих ребер у вершин, в данный момент времени не являющихся перенасыщенными. Функционирование такой подсети будет полностью эквивалентно функционированию исходной сети в предположении, что эти вершины никогда не смогут перенасытиться. Определяем, имеет ли построенная подсеть перенасыщенный цикл. В случае наличия перенасыщенного цикла получим остановку сети в пределе. В случае отсутствия проверяем гипотезу о том, что ни одна из искомым вершин не перенасытится. Если гипотеза подтвердилась, то построенная подсеть полностью описывает перемещение ресурса по сети и, ввиду отсутствия в ней перенасыщенного цикла, получим остановку сети за конечное число тактов. Эту подсеть будем называть *активной подсетью* исходной сети. Если же гипотеза не подтвердилась, учитываем вершины, ставшие перенасыщенными: возвращаем исходящие из них ребра и вновь предполагаем, что построенная таким образом подсеть является активной подсетью исходной сети.

Заметим, что активная подсеть – в сущности подсеть, описываемая предельным графом возможных путей распространения свободного ресурса (предельный = больше не будет эволюционировать), введенном в доказательстве теоремы 2 (за исключением петель).

Алгоритм определения характера остановки сети при недостаточном ресурсе.

Строим первое приближение активной подсети по матрице пропускных способностей исходной сети и по вектору начальных состояний вершин (убираем все исходящие ребра у вершин, не

являющихся перенасыщенными).

1. Алгоритмом Демукрона определяем, имеет ли граф рассматриваемой подсети, потенциально являющейся активной подсетью, контур. Если имеет, то исходная сеть содержит перенасыщенный цикл и, следовательно, остановится в пределе. Выход. Иначе граф рассматриваемой подсети связный бесконтурный, и в результате топологической сортировки получаем количество уровней ν вершин графа.

2. Определяем вектор конечного состояния подсети по формуле

$$Q^* = (Q(0) - R_{diag})(\tilde{R}')^{\nu-1} + R_{diag}, \quad R_{diag} = (r_{11}, \dots, r_{nn}),$$

где \tilde{R}' – стохастическая матрица рассматриваемой подсети с удаленными петлями у вершин, не являющихся стоковыми, а ν – количество уровней вершин графа, определенное в предыдущем пункте.

3. Если ни одна из стоковых вершин не перенасытилась, то рассматриваемая подсеть – активная подсеть и, в силу отсутствия перенасыщенного цикла, сеть остановится за конечное число тактов. Выход. Иначе восстанавливаем исходящие из перенасытившихся вершин ребра и тем самым обновляем подсеть. Переходим к п.1.

Алгоритм позволяет за конечное и относительно небольшое количество итераций определить характер останова сети без ее моделирования, которое может быть очень затратным, особенно на больших сетях или на сетях с маленькими пропускными способностями ребер.

Покажем, что формула, приведенная в пункте 2 алгоритма, действительно определяет вектор конечного состояния подсети, описываемой топологически отсортированным графом с количеством уровней ν .

Пусть в отсортированном графе сети n_i – количество вершин, принадлежащих уровням $N_0, \dots, N_i, i = \overline{0, \nu - 1}$. Пусть вершины сети пронумерованы по увеличению номеров своих уровней. Так как ребра отсортированного графа, выходящие из

вершин текущего уровня, могут входить только в вершины следующих уровней, то в сети не существует ребер e_{ij} , где $i > j$, и матрица пропускных способностей сети R верхнетреугольная. Также ребрами не связаны и вершины, принадлежащие одному уровню.

Все вершины последнего уровня отсортированного графа сети стоковые. При этом стоковые вершины могут оказаться еще и на любом другом уровне. В матрице R строки, соответствующие исходящим ребрам стоковых вершин, нулевые, за исключением диагональных элементов. То есть матрица R выглядит следующим образом:

$$R = \begin{pmatrix} D_0 & R_{01} & R_{02} & \dots & R_{0\nu-1} \\ O & D_1 & R_{12} & \dots & R_{1\nu-1} \\ O & O & D_2 & \dots & R_{2\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots & D_{\nu-1} \end{pmatrix},$$

где матрицы R_{ij} , $i < j$, следует интерпретировать как матрицы пропускных способностей ребер, выходящих из вершин уровня N_i и входящих в вершины уровня N_j . Матрицы D_i диагональные: элементы диагонали матрицы D_i – это пропускные способности петель вершин уровня N_i .

Утверждение 5. Пусть сеть описывается топологически отсортированным графом с количеством уровней ν . Для любого $k = \overline{0, \nu - 1}$ конечное состояние всех вершин уровней N_i , $i = \overline{0, k - 1}$, и всех стоковых вершин уровня N_k определяется формулой

$$Q(t_k) = (Q(0) - R_{diag})(\tilde{R}')^k + R_{diag}, \quad R_{diag} = (r_{11}, \dots, r_{nn}),$$

где \tilde{R}' – стохастическая матрица сети с удаленными петлями у вершин, не являющихся стоковыми.

Доказательство утверждения осуществляется методом математической индукции и представлено в Приложении.

Замечание 3. Приведенный алгоритм однозначным образом находит конечное состояние сети в случае ее остановки за конеч-

ное число тактов по формуле:

$$Q^* = (Q(0) - R_{diag})(\tilde{R}^*)^{\nu^* - 1} + R_{diag}, \quad R_{diag} = (r_{11}, \dots, r_{nn}),$$

где \tilde{R}^* – стохастическая матрица подсети заключительной итерации алгоритма (активной подсети) с удаленными петлями у вершин, не являющихся стоковыми, ν^* – число уровней вершин соответствующего этой подсети графа.

Пример. Рассмотрим сеть, представленную на рис. 1.

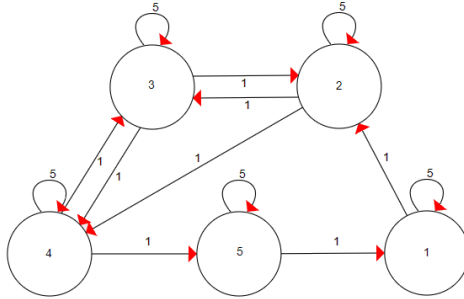


Рис. 1. Неоднородная ресурсная сеть с пятью «жадными вершинами»

Соответствующая матрица пропускных способностей:

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad R_{diag} = (r_{11}, \dots, r_{nn}) = (5, 5, 5, 5, 5).$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^n r_{ii} = 25.$$

Случай 1. $Q(0) = (8, 4, 4, 4, 0)$, $W = 20 \leq T_1 = 25$.

Начальное состояние сети удовлетворяет зоне недостаточного ресурса, значит, сеть остановится: за конечное число тактов

или в пределе. Определим характер остановки сети с помощью алгоритма. Покажем результаты основных этапов.

В начальный момент сеть имеет одну перенасыщенную вершину v_1 . Для построения первого приближения активной подсети удаляем все ребра, исходящие из остальных вершин сети:

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Первая итерация.

1. Граф подсети не имеет контуров (рис. 2). Количество уровней топологически отсортированного графа $\nu = 2$: $v_1 \in N_0$, $v_2 \in N_1$.

2. Определяем ресурс, который в пределе дойдет до стоковых вершин. Не является стоковой вершина v_1 – для построения матрицы \tilde{R} убираем ее петлю.

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q^* = (Q(0) - R_{diag})\tilde{R}' + R_{diag},$$

$$Q^* = (5, 7, 4, 4, 0).$$

3. $q_2^* = 7 > r_{22} = 5 > 0 \Rightarrow$ стоковая вершина v_2 перенасытилась. Обновляем подсеть, возвращая этой вершине исходящие ребра:

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

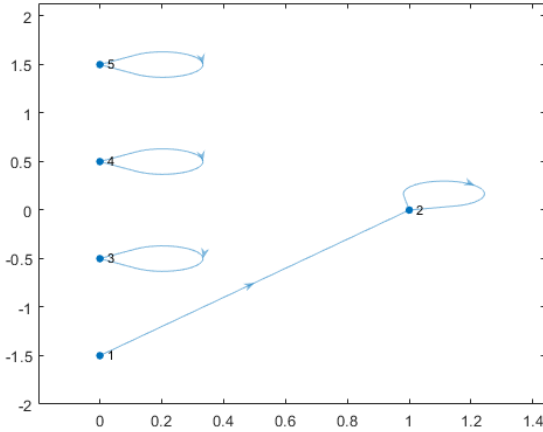


Рис. 2. Подсеть сети с начальным состоянием $Q(0) = (8, 4, 4, 4, 0)$ на 1-й итерации

Вторая итерация.

1. Граф подсети не имеет контуров (рис. 3). Количество уровней топологически отсортированного графа $\nu = 3$: $v_1 \in N_0$, $v_2 \in N_1$, $v_3, v_4 \in N_2$.

2. Определяем ресурс, который в пределе дойдет до стоковых вершин. Не являются стоковыми вершины v_1, v_2 – для построения матрицы \tilde{R} убираем их петли.

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q^* = (Q(0) - R_{diag})(\tilde{R}')^2 + R_{diag},$$

$$Q^* = (5, 5, 5, 5, 0).$$

3. $q_3^* = r_{33} = 5$, $q_4^* = r_{44} = 5 \Rightarrow$ ни одна из стоковых вершин не перенасытилась. Рассматриваемая подсеть является активной подсетью. Ввиду отсутствия перенасыщенных

циклов, сеть остановится за конечное число тактов с состоянием $Q^* = (5, 5, 5, 5, 0)$. Выход.

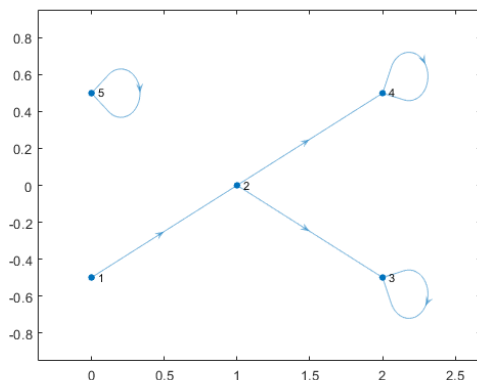


Рис. 3. Подсеть сети с начальным состоянием $Q(0) = (8, 4, 4, 4, 0)$ на 2-й итерации (активная подсеть)

Результат совпадает с результатом программной реализации функционирования сети (таблица 1). Вершина v_2 насыщается на первом такте, перенасыщается на втором. Вершины v_3, v_4 насыщаются на четвертом такте, но не перенасыщаются в дальнейшем, так как в сети больше не осталось свободного ресурса. По графику убывания свободного ресурса в сети (рис. 5) видно, что на четвертом такте произошло его зануление, т.е. сеть остановилась. Динамика распределения ресурса между вершинами наглядно представлена на гистограмме (рис. 4).

Таблица 1. Протокол работы сети с начальным состоянием $Q(0) = (8, 4, 4, 4, 0)$

t_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	8,0000	4,0000	4,0000	4,0000	0,0000
1	7,0000	5,0000	4,0000	4,0000	0,0000
2	6,0000	6,0000	4,0000	4,0000	0,0000
3	5,0000	6,0000	4,5000	4,5000	0,0000
4	5,0000	5,0000	5,0000	5,0000	0,0000

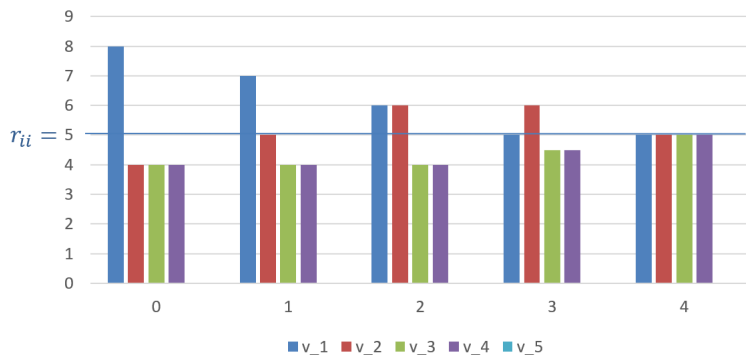


Рис. 4. Динамика ресурса в сети с начальным состоянием $Q(0) = (8, 4, 4, 4, 0)$

Случай 2. $Q(0) = (8, 8, 4, 0, 0)$, $W = 20 \leq T_1 = 25$.

Начальное состояние сети удовлетворяет зоне недостаточного ресурса, значит, сеть остановится: за конечное число тактов или в пределе. Снова применим алгоритм для определения характера остановки сети.

В начальный момент времени сеть имеет две перенасыщенные вершины v_1, v_2 . Для построения первого приближения активной подсети удаляем все ребра, исходящие из остальных вершин сети:

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Первая итерация.

1. Граф подсети не имеет контуров (рис. 6). Количество уровней топологически отсортированного графа $\nu = 3$: $v_1 \in N_0$, $v_2 \in N_1$, $v_3, v_4 \in N_2$.

2. Определяем ресурс, который в пределе дойдет до стоковых вершин. Не являются стоковыми вершины v_1, v_2 – для по-

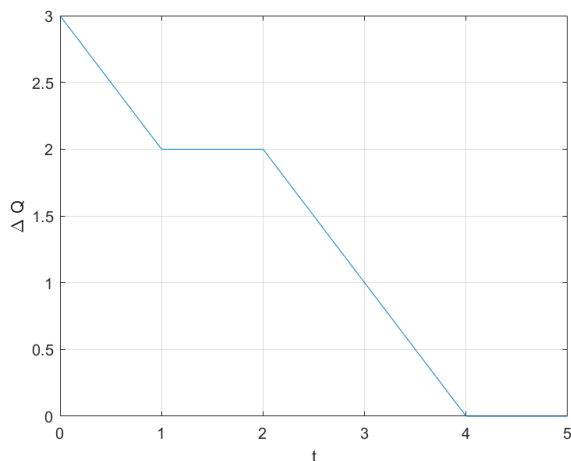


Рис. 5. График убывания свободного ресурса в сети с начальным состоянием $Q(0) = (8, 4, 4, 4, 0)$

строения матрицы \tilde{R} убираем их петли.

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q^* = (Q(0) - R_{diag})(\tilde{R}')^2 + R_{diag},$$

$$Q^* = (5, 5, 7, 3, 0).$$

3. $q_3^* = 7 > r_{33} = 5 \Rightarrow$ стоковая вершина v_3 перенасытилась. Обновляем подсеть, возвращая этой вершине исходящие ребра:

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вторая итерация.

1. Граф подсети имеет контур (рис. 7), значит, в сети появится перенасыщенный цикл. Сеть будет функционировать бесконечно и остановится в пределе. Выход.

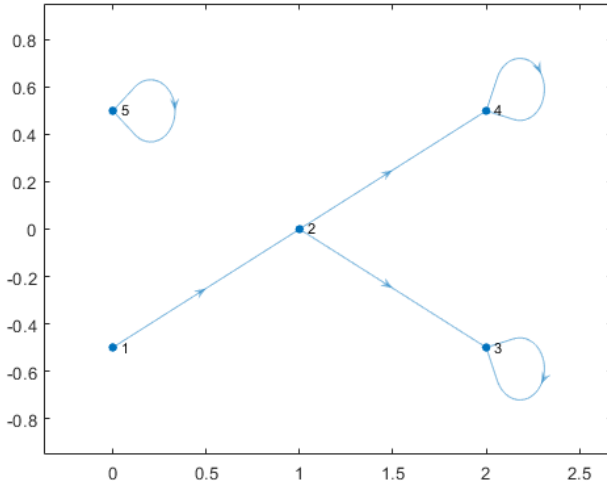


Рис. 6. Подсеть сети с начальным состоянием $Q(0) = (8, 8, 4, 0, 0)$ на 1-й итерации

Результат выполнения программной реализации функционирования сети представлен таблицей 2. Вершина v_2 и перенасыщенная на втором такте вершина v_3 не только отдадут ресурс ненасыщенной вершине v_4 , за счет чего свободный ресурс сети уменьшается, но и обмениваются ресурсом между собой, что создает затухающие колебания ресурса в этих вершинах (рис. 8). Вершина v_4 так и не сможет перенасытиться и начать взаимодействовать с вершиной v_5 ввиду недостатка ресурса, поэтому последняя остается пустой и в этом случае. На рис. 9 представлено монотонное убывание свободного ресурса и стремление его к нулю – сеть функционирует бесконечно и останавливается в пределе.

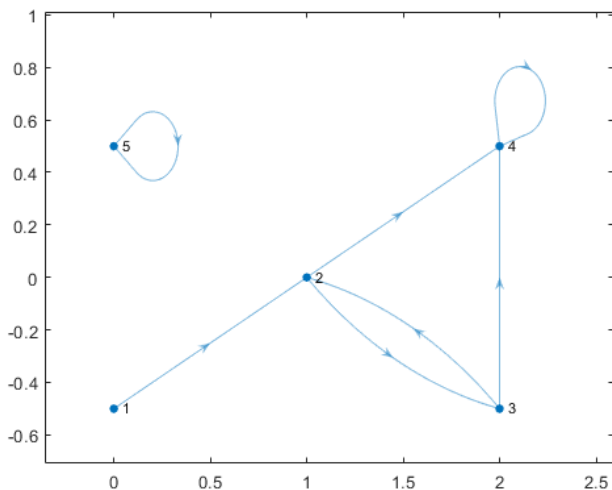


Рис. 7. Подсеть сети с начальным состоянием $Q(0) = (8, 8, 4, 0, 0)$ на 2-й итерации

Таблица 2. Протокол работы сети с начальным состоянием $Q(0) = (8, 8, 4, 0, 0)$

t_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	8,0000	8,0000	4,0000	0,0000	0,0000
1	7,0000	7,0000	5,0000	1,0000	0,0000
2	6,0000	6,0000	6,0000	2,0000	0,0000
3	5,0000	6,5000	5,5000	3,0000	0,0000
4	5,0000	5,2500	5,7500	4,0000	0,0000
5	5,0000	5,3750	5,1250	4,5000	0,0000
6	5,0000	5,0625	5,1875	4,7500	0,0000
...
17	5,0000	5,0001	5,0000	4,9999	0,0000
18	5,0000	5,0000	5,0000	4,9999	0,0000
...

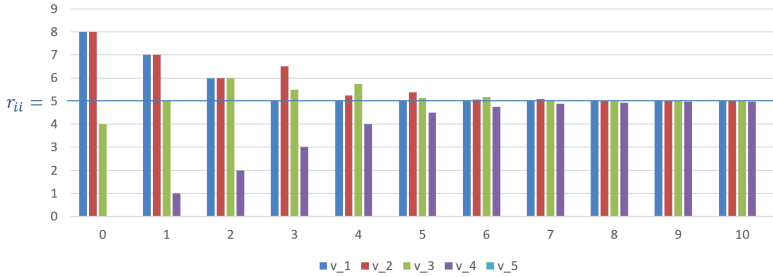


Рис. 8. Динамика ресурса в сети с начальным состоянием $Q(0) = (8, 8, 4, 0, 0)$

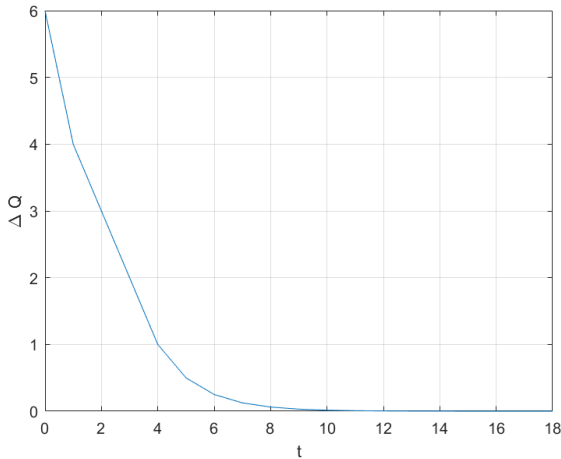


Рис. 9. График убывания свободного ресурса в сети с начальным состоянием $Q(0) = (8, 8, 4, 0, 0)$

Теорема 4. Первое пороговое значение T_1 суммарного ресурса неоднородной сети с «жадными» вершинами, отделяющее недостаточный ресурс от достаточного, единственно и равно $T_1 = \sum_{i=1}^n r_{ii}$ для любого начального состояния и любой топологии.

Доказательство. Согласно следствию 1 утверждения 4, при $W \leq \sum_{i=1}^n r_{ii}$ в пределе в сети с любым начальным состоянием и с любой топологией могут существовать только ненасыщенные вершины и насыщенные вершины с состоянием, равным пропускной способности соответствующей петли. То есть сеть остановится.

При $W > \sum_{i=1}^n r_{ii}$ сеть всегда будет иметь хотя бы одну перенасыщенную вершину. Остановка такой сети невозможна.

Таким образом, $T_1 = \sum_{i=1}^n r_{ii}$ для любого начального состояния и любой топологии.

4.4. ДОСТАТОЧНЫЙ РЕСУРС

Зона достаточного ресурса накладывает на суммарный ресурс следующее ограничение: $W > T_1 = \sum_{i=1}^n r_{ii}$.

Утверждение 6. При $W > \sum_{i=1}^n r_{ii}$ суммарный свободный ресурс сети всегда будет строго больше нуля: $\forall t \Delta Q(t) > 0$.

Доказательство утверждения следует из того, что при $W > \sum_{i=1}^n r_{ii}$ сеть всегда будет иметь хотя бы одну перенасыщенную вершину.

Как и для частного случая полных однородных сетей (утв. 7 в [13]), для общего случая неоднородных сетей зоны достаточного ресурса верна следующая теорема.

Теорема 5. При $W > \sum_{i=1}^n r_{ii}$ все «жадные» вершины эргодической сети насыщаются за конечное число тактов.

Доказательство см. в Приложении.

Пример. Рассмотрим ту же неоднородную сеть с «жадными» вершинами, что и в примере из прошлого раздела (рис. 1).

Соответствующая матрица пропускных способностей:

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^n r_{ii} = 25.$$

Пусть теперь ресурс в сети достаточный: имеем, например, следующее начальное состояние $Q(0) = (20, 10, 0, 0, 0) \Rightarrow W = 30 > T_1 = 25$. Согласно теореме 5, все «жадные» вершины сети насытятся за конечное число тактов.

Вершины v_1 и v_2 в начальный момент времени являются перенасыщенными. Программное моделирование процесса показывает, что остальные вершины сети действительно насытятся: на шестом такте насыщаются вершины v_3 и v_4 , на шестнадцатом такте насыщается вершина v_5 (таблица 3).

Сеть имеет предельное состояние, при этом свободный ресурс в пределе остается постоянным и ненулевым ввиду сохранения суммарного ресурса в сети и постоянства ресурса в петлях (гистограмма на рис. 10, график убывания свободного ресурса на рис. 11).

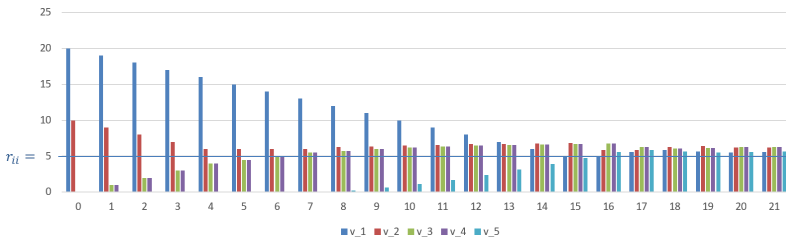


Рис. 10. Динамика ресурса в сети с начальным состоянием $Q(0) = (20, 10, 0, 0, 0)$

Таблица 3. Протокол работы сети с начальным состоянием

$$Q(0) = (20, 10, 0, 0, 0)$$

t_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	20,0000	10,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	19,0000	9,0000	1,0000	1,0000	0,0000
2	18,0000	8,0000	2,0000	2,0000	0,0000
3	17,0000	7,0000	3,0000	3,0000	0,0000
4	16,0000	6,0000	4,0000	4,0000	0,0000
5	15,0000	6,0000	4,5000	4,5000	0,0000
6	14,0000	6,0000	5,0000	5,0000	0,0000
7	13,0000	6,0000	5,5000	5,5000	0,0000
8	12,0000	6,2500	5,7500	5,7500	0,2500
9	11,0000	6,3750	6,0000	6,0000	0,6250
10	10,0000	6,5000	6,1875	6,1875	1,1250
11	9,0000	6,5938	6,3438	6,3438	1,7188
12	8,0000	6,6719	6,4688	6,4688	2,3906
13	7,0000	6,7344	6,5703	6,5703	3,1250
14	6,0000	6,7852	6,6523	6,6523	3,9102
15	5,0000	6,8262	6,7188	6,7188	4,7363
16	5,0000	5,8594	6,7725	6,7725	5,5957
17	5,5957	5,8862	6,3159	6,3159	5,8862
18	5,8862	6,2537	6,1011	6,1011	5,6580
...
34	5,6250	6,2499	6,2501	6,2501	5,6250
35	5,6250	6,2500	6,2500	6,2500	5,6250
36	5,6250	6,2500	6,2500	6,2500	5,6250
...

С момента t' насыщения последней ненасыщенной вершины сети «жадность» вершин перестает быть значимой – вершины больше не поглощают свободный ресурс, а их петли выполняют функцию хранения постоянного количества ресурса, равного пропускной способности соответствующей петли. Убрав все петли и ресурс в них, получим стандартную ресурсную сеть с нулями на главной диагонали матрицы пропускных способностей и количеством ресурса в сети $W' = W - \sum_{i=1}^n r_{ii}$. Заметим, что в об-

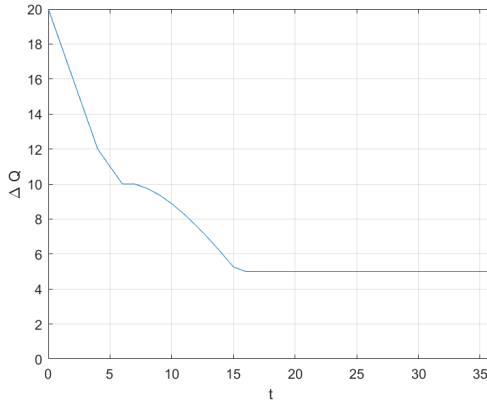


Рис. 11. График убывания свободного ресурса в сети с начальным состоянием $Q(0) = (20, 10, 0, 0, 0)$

щем случае топология полученной стандартной ресурсной сети неоднозначна: сеть может быть как регулярной, так и циклической. Эргодичность сети при этом сохранится.

Таким образом, дальнейшее функционирование сети с «жадными» вершинами эквивалентно функционированию соответствующей стандартной ресурсной сети (описана в [12]), и справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Второе пороговое значение T_2 неоднородной сети с «жадными» вершинами совпадает с пороговым значением стандартной ресурсной сети соответствующей топологии $T_2 = T$.

5. Заключение

Рассмотрена модификация модели ресурсной сети – ресурсная сеть с «жадными» вершинами. «Жадные» вершины на каждом такте сначала передают необходимое количество ресурса себе в петлю, а затем остаток ресурса распределяют в исходящие рёбра по правилам стандартной ресурсной сети. Для топологии неоднородной эргодической ресурсной сети с «жадными» верши-

нами были получены следующие результаты.

1. Найдена взаимосвязь между скоростью убывания свободного ресурса и его количеством.

2. Найдено пороговое значение суммарного ресурса $T_1 = \sum_{i=1}^n r_{ii}$, равное сумме пропускных способностей всех петель сети и разделяющее зоны различного поведения сети: зоны недостаточного и достаточного ресурса. В зоне недостаточного ресурса сеть останавливается, что невозможно в стандартной эргодической ресурсной сети и обуславливается наличием модифицированных петель.

3. Для зоны недостаточного ресурса исследован характер остановки сети: разработан алгоритм, определяющий характер остановки сети по вектору начального распределения ресурса и по матрице пропускных способностей, а также находящий конечное состояние в случае остановки сети за конечное число тактов.

4. Для зоны достаточного ресурса доказано, что с момента насыщения всех вершин сеть будет функционировать эквивалентно стандартной ресурсной сети соответствующей топологии без петель.

5. Показано, что второе пороговое значение совпадает с пороговым значением стандартной сети соответствующей топологии без петель $T_2 = T$ и разделяет зоны малого и большого достаточного ресурса.

В дальнейшем планируется определить предельные состояния сети с «жадными» вершинами в случае ее асимптотической остановки, изучить поведение эргодических сетей некоторых конкретных топологий неоднородной сети, рассмотреть неэргодические сети с «жадными» вершинами.

Литература

1. АБДУПРАХМАН Х., ЕРУСАЛИМСКИЙ Я.М., СКОРОХОДОВ В.А. *Ресурсные сети с вентиляющей достижимостью* // Инженерный вестник Дона. – 2018. – № 4. – С. 78.

2. АБДУЛПРАХМАН Х., СКОРОХОДОВ В.А. *Ресурсные сети с магнитной достижимостью* // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2016. – № 4. – С. 4–10.
3. АБДУЛПРАХМАН Х., СКОРОХОДОВ В.А. *Полные двухресурсные сети с петлями* // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2016. – № 2. – С. 10–16.
4. АБДУЛПРАХМАН Х., СКОРОХОДОВ В.А. *Двухресурсные сети с магнитной достижимостью* // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2020. – №3. – С. 4–10.
5. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов)* // Управление большими системами. – 2010. – №30.1 – С. 470–505.
6. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Метод проекции в задаче о консенсусе и регуляризованный предел степеней стохастической матрицы* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №12. – С. 38–59.
7. БЕЛОУСОВ А.И., ТКАЧЕВ С.Б. *Дискретная математика*. – М.: МГТУ, 2006. – 744 с.
8. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Социальные сети. Модели информационного влияния, управления и противоборства*. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2010. – 228 с.
9. ГРОМОВ И.Д., ТИХОНОВ П.М. *Методологические основы формирования показателей ресурсного обеспечения в организационных сетях (на примере холдинга «РЖД»)* // Инновационный транспорт. – 2021. – №. 1. – С. 20–24.
10. ЕРУСАЛИМСКИЙ Я.М., СКОРОХОДОВ В.А., КУЗЬМИНОВА М.В., ПЕТРОСЯН А.Г. *Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения*. Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009. – 195 с.

11. ЖИГИРЬ А.А. *Методы количественной оценки экономического риска строительной организации при реализации инвестиционных проектов* // ЕГИ. – 2020. – №1. – С. 106–111.
12. ЖИЛЯКОВА Л.Ю., КУЗНЕЦОВ О.П. *Теория ресурсных сетей: монография*. М.: РИОР: ИНФРА-М, 2017. – 283 с.
13. ЖИЛЯКОВА Л.Ю., ЧАПЛИНСКАЯ Н.В. *Исследование полных однородных ресурсных сетей с «жадными» вершинами* // Управление большими системами (в печати).
14. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Применение ресурсных сетей для моделирования распространения веществ в водной среде* // Проблемы управления. – 2011. – №2. – С. 46–51.
15. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Ресурсные сети с ограничениями на ёмкость вершин* [Электронный ресурс]: монография. – М.: ИЦ РИОР, НИЦ ИНФРА-М, 2018. – 160 с.
16. КУЗНЕЦОВ О.П. *Однородные ресурсные сети. I. Полные графы* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №11. – С. 136–147.
17. СКОРОХОДОВ В.А., АБДУЛРАХМАН Х. *Динамические ресурсные сети. Случай малого ресурса* // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2018. – № 4. – С. 186–194.
18. ТИХОНОВ П.М. *Графоаналитическая модель ресурсного обеспечения сетевой организационной структуры при регулируемом закупочном процессе (на примере холдинга «РЖД»)* // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. – 2020. – №. 1. – С. 129–136.
19. ЧАПЛИНСКАЯ Н.В. *Исследование полных однородных ресурсных сетей с «жадными» вершинами: зона «достаточного большого» ресурса* // Управление большими системами. – 2021. – Т. 90. – С. 49–66.
20. BLANCHARD PH., VOLCHENKOV D. *Random Walks and Diffusions on Graphs and Databases: An Introduction (Springer Series in Synergetics)*. – Springer-Verlag – Berlin – Heidelberg, 2011. – 262 p.

21. MASUDA N., PORTER M.A., LAMBIOTTE R. *Random walks and diffusion on networks* / Physics Reports. V. 716–717, 2017, P. 1-58.

6. Приложение

Доказательство утверждения 1.

Пусть r_i^{out} – суммарная выходная пропускная способность вершины v_i , не считая петли. В момент времени t_0 по двум правилам с пороговым переключением перенасыщенная вершина v_i отдает в смежную вершину v_{i+1}

- $r_{i,i+1}$ единиц ресурса, если $\Delta q_i(t_0) > r_i^{out}$ (правило 1);
- $\frac{r_{i,i+1}}{r_i^{out}} \Delta q_i(t_0)$ единиц ресурса, если $\Delta q_i(t_0) \leq r_i^{out}$ (правило 2).

То есть отдает $\min \left\{ r_{i,i+1}, \frac{r_{i,i+1}}{r_i^{out}} \Delta q_i(t_0) \right\}$.

Оценим это значение снизу:

$$\begin{aligned} \min \left\{ r_{i,i+1}, \frac{r_{i,i+1}}{r_i^{out}} \Delta q_i(t_0) \right\} &= \min \left\{ r_{i,i+1}, \rho_{i,i+1} \Delta q_i(t_0) \right\} \geq \\ &\geq \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_i(t_0) \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, на такте t_0 перенасыщенная вершина v_i передает смежной вершине v_{i+1} не менее $\delta_i = \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_i(t_0) \right\}$ ресурса. \square

Доказательство утверждения 2.

Будем рассматривать временной интервал $n - 1$, начиная с произвольного такта t_0 .

Сеть эргодическая, а значит, существует путь $v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{i+m}, v_j$ ($m \leq n - 2$), соединяющий перенасыщенную в момент времени t_0 вершину v_i с ближайшей ненасыщенной вершиной v_j . Вершины v_{i+1}, \dots, v_{i+m} , являющиеся на такте t_0 насыщенными (или перенасыщенными), будут

передавать ресурс друг другу по пути и поочередно становиться перенасыщенными. Длина всего пути $m + 1 \leq n - 1$. То есть не позднее чем на $n - 1$ такте ненасыщенная вершина v_j получит какое-то количество ресурса, изначально принадлежавшего вершине v_i . Оценим его снизу.

Начнем с конца: перенасыщенная на такте $t = m + 1$ вершина v_{i+m} , согласно утверждению 1, передаст смежной вершине v_j не менее δ_{i+m} ресурса, где

$$\delta_{i+m} = \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_{i+m}(t_0 + m) \right\}.$$

Свободный ресурс $\Delta q_{i+m}(t_0 + m)$ вершины v_{i+m} состоит из ресурса δ_{i+m-1} , поступившего на предыдущем такте от смежной вершины v_{i+m-1} , и остаточного ресурса ε_{i+m} вершины v_{i+m} , т.е.

$$\Delta q_{i+m}(t_0 + m) = \delta_{i+m-1} + \varepsilon_{i+m}.$$

Тогда для δ_{i+m} имеем оценку снизу

$$\delta_{i+m} \geq \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \delta_{i+m-1} \right\}.$$

Перенасыщенная на предыдущем такте $t = m$ вершина v_{i+m-1} , согласно утверждению 1, передаст смежной вершине v_{i+m} не менее δ_{i+m-1} ресурса, где

$$\delta_{i+m-1} = \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_{i+m-1}(t_0 + m - 1) \right\}.$$

Свободный ресурс $\Delta q_{i+m-1}(t_0 + m - 1)$ вершины v_{i+m-1} при этом находится аналогичным образом:

$$\Delta q_{i+m-1}(t_0 + m - 1) = \delta_{i+m-2} + \varepsilon_{i+m-1}.$$

Тогда для δ_{i+m-1} имеем оценку снизу

$$\delta_{i+m-1} \geq \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \delta_{i+m-2} \right\}.$$

Подставляя последнее в выражение для δ_{i+m} , получим

$$\delta_{i+m} \geq \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \delta_{i+m-2} \right\} \right\} =$$

$$= \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} r_{\min}, \rho_{\min}^2 \delta_{i+m-2} \right\}.$$

Повторяя рассуждения, выражая далее последовательно $\delta_{i+m-2}, \dots, \delta_{i+1}$, получим оценку снизу для δ_{i+m} через свободный ресурс $\Delta q_i(t_0)$ вершины v_i на такте $t = t_0$:

$$\begin{aligned} \delta_{i+m} &\geq \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} r_{\min}, \dots, \rho_{\min}^m r_{\min}, \rho_{\min}^{m+1} \Delta q_i(t_0) \right\} = \\ &= \rho_{\min}^m \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_i(t_0) \right\} \geq \rho_{\min}^{n-2} \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_i(t_0) \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, заключаем, что ненасыщенная вершина v_j не позднее чем на $n - 1$ такте получит ресурс, ограниченный снизу значением $\rho_{\min}^{n-2} \delta_i$, где $\rho_{\min} = \rho_{\min}$. \square

Доказательство утверждения 3.

Будем рассматривать временной интервал $l_0(n - 1)$, начиная с произвольного такта t_0 .

Пусть ненасыщенные в момент времени t_0 вершины имеют индексы от 1 до l_0 : v_1, v_2, \dots, v_{l_0} ($l_0 \leq n - k_0$). Оценим снизу количество поглощаемого ими ресурса за временной интервал $l_0(n - 1)$.

Пусть вершина v_i , $i > l_0$, в момент времени t_0 является перенасыщенной. Согласно утверждению 2, за количество тактов, не превосходящее $n - 1$, ближайшая к вершине v_i ненасыщенная вершина v_1 получит не менее $\rho_{\min}^{n-2} \delta_i$ ресурса.

Если полученный ресурс будет полностью поглощен вершиной v_1 , то утверждение доказано: $\rho_{\min}^{n-2} \delta_i \geq \rho_{\min}^{l_0(n-1)-1} \delta_i$, так как $l_0(n - 1) - 1 \geq n - 2$ и $0 < \rho_{\min} \leq 1$.

Рассмотрим обратный случай – поглощена была только часть пришедшего ресурса: обозначим ее λ_1 . То есть не позднее чем на такте $t_0 + (n - 1)$ вершина v_1 будет иметь

$$\Delta q_1 = \Delta q_1(t_0 + (n - 1)) \geq \rho_{\min}^{n-2} \delta_i - \lambda_1$$

свободного ресурса.

Согласно утверждению 2, не позднее чем через следующие $n - 1$ тактов, ближайшая к v_1 ненасыщенная вершина v_2 получит не менее $\rho_{\min}^{n-2} \delta_1$ ресурса. Здесь тоже предполагаем, что вершина v_2 поглотила только часть пришедшего ресурса – обозначим ее λ_2 – и будет иметь

$$\Delta q_2 = \Delta q_2(t_0 + 2(n - 1)) \geq \rho_{\min}^{n-2} \delta_1 - \lambda_2$$

свободного ресурса.

Аналогично оцениваются $\Delta q_3, \dots, \Delta q_{l_0-1}$.

По условию утверждения, на конец временного интервала $l_0(n - 1)$ в сети осталась хотя бы одна ненасыщенная вершина. То есть, дойдя до вершины v_{l_0} , ресурс $\rho_{\min}^{n-2} \delta_{l_0-1}$ был ею полностью поглощен, не насытив до конца: $\lambda_{l_0} \geq \rho_{\min}^{n-2} \delta_{l_0-1}$.

Итак, при «встрече» с каждой ненасыщенной вершиной v_j , $j = \overline{1, l_0}$, (т.е. не позднее чем на каждый $n - 1$ такт), свободный ресурс в сети будет уменьшаться на λ_j , $j = \overline{1, l_0}$. Таким образом, за количество тактов, не превышающее $l_0(n - 1)$, свободный ресурс сети уменьшится на $\sum_{j=1}^{l_0} \lambda_j$.

Так как λ_j , $j = \overline{1, l_0}$, являются строго положительными величинами, изменение свободного ресурса можно оценить снизу:

$$\sum_{j=1}^{l_0} \lambda_j = \lambda_1 + \dots + \lambda_{l_0-1} + \lambda_{l_0} > \lambda_{l_0}.$$

То есть в рассуждениях можно положить все $\lambda_j = 0$, $j = \overline{1, l_0 - 1}$. Тогда для свободных ресурсов вершин v_j , $j = \overline{1, l_0 - 1}$, имеем следующие рекуррентные неравенства:

$$\Delta q_j \geq \rho_{\min}^{n-2} \delta_{j-1} = \rho_{\min}^{n-2} \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_{j-1} \right\}, \quad j = \overline{2, l_0 - 1},$$

$$\Delta q_1 \geq \rho_{\min}^{n-2} \delta_1 = \rho_{\min}^{n-2} \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_1 \right\}.$$

С их помощью оценим снизу величину λ_{l_0} .

$$\lambda_{l_0} \geq \rho_{\min}^{n-2} \delta_{l_0-1} = \rho_{\min}^{n-2} \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_{l_0-1} \right\} \geq$$

$$\begin{aligned}
 &\geq \rho_{\min}^{n-2} \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min}^{n-1} \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_{l_0-2} \right\} \right\} = \\
 &= \rho_{\min}^{n-2} \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min}^{n-1} r_{\min}, \rho_{\min}^n \Delta q_{l_0-2} \right\} = \\
 &= \rho_{\min}^{n-2} \min \left\{ \rho_{\min}^{n-1} r_{\min}, \rho_{\min}^n \Delta q_{l_0-2} \right\} = \\
 &= \rho_{\min}^{2n-3} \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_{l_0-2} \right\} \geq \dots \geq \\
 &\geq \rho_{\min}^{l_0(n-1)-1} \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_i \right\} = \rho_{\min}^{l_0(n-1)-1} \delta_i.
 \end{aligned}$$

Таким образом, за количество тактов, не превосходящее $l_0(n-1)$, начиная с момента времени t_0 , свободный ресурс сети уменьшится не менее чем на $\rho_{\min}^{l_0(n-1)-1} \delta_i$. \square

Доказательство утверждения 4.

Пусть вершина v_i является насыщенной на такте t_0 . Покажем, что свободный ресурс каждой такой вершины с течением времени стремится к нулю:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta q_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (q_i(t) - r_{ii}) = 0.$$

Рассмотрим последовательность $\left\{ \Delta Q(t) \right\}_{t=0}^{\infty}$ суммарного свободного ресурса сети. Для определенного интервала тактов τ построим подпоследовательность этой последовательности: $\left\{ \Delta Q_i \right\}_{i=0}^{\infty}$, где $\Delta Q_i = \Delta Q(i\tau)$ – суммарный свободный ресурс сети на начало i -го временного интервала τ .

Обозначим $k(t)$ количество перенасыщенных вершин в сети в момент времени t . Каждому элементу имеющейся подпоследовательности можно поставить в соответствие число $k_i = k(i\tau)$ – количество перенасыщенных вершин на начало i -го временного интервала τ .

Имеем монотонно невозрастающую последовательность $\left\{ \Delta Q(t) \right\}_{t=0}^{\infty}$ суммарного свободного ресурса сети с неотрицательными элементами. Для периода тактов $\tau = n(n-1)$ рассмотрим подпоследовательность этой последовательности:

$\left\{ \Delta Q_i \right\}_{i=0}^{\infty}$, где $\Delta Q_i = \Delta Q(i\tau)$ – суммарный свободный ресурс сети на начало i -го периода τ . Покажем, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Delta Q_i = 0.$$

Имеем рекуррентное соотношение:

$$\Delta Q_{i+1} = \Delta Q_i - \lambda_i,$$

где λ_i – ресурс, поглощенный ненасыщенными вершинами за i -й период тактов τ .

Из леммы 1 следует, что

$$\forall i \lambda_i \geq \Lambda_i = \rho_{\min}^{n-k_i} \min \left\{ r_{\min}, \frac{\rho_{\min}}{k_i} \Delta Q_i \right\}.$$

Тогда

$$\Delta Q_{i+1} \leq \Delta Q_i - \Lambda_i = \Delta Q_i - \rho_{\min}^{n-k_i} \min \left\{ r_{\min}, \frac{\rho_{\min}}{k_i} \Delta Q_i \right\},$$

где $k_i = k(i\tau)$ – количество перенасыщенных вершин в сети на начало i -го периода тактов τ .

Перепишем неравенство следующим образом:

$$\Delta Q_{i+1} \leq \Delta Q_i - \frac{\rho_{\min}^{n-k_i+1}}{k_i} \min \left\{ \frac{r_{\min}}{\rho_{\min}} k_i, \Delta Q_i \right\}.$$

В зоне недостаточного ресурса не может быть n перенасыщенных вершин, т.е. на число k_i наложено следующее ограничение: $0 \leq k_i \leq n - 1$. При этом если начиная с некоторого i' $\forall i \geq i' k_i = 0$, то получаем, что $\forall i \geq i' \Delta Q_i = 0$. Случай $\Delta Q_i = 0$ нас не интересует, так как он приводит к доказательству теоремы; далее будем рассматривать $\Delta Q_i > 0$. Пусть теперь $\forall i k_i > 0$, т.е. $1 \leq k_i \leq n - 1$. Учитывая это ограничение, а также тот факт, что $0 < \rho_{\min} \leq 1$, можно оценить сверху выражение, зависящее от k_i :

$$\Delta Q_{i+1} \leq \Delta Q_i - \frac{\rho_{\min}^n}{n-1} \min \left\{ \frac{r_{\min}}{\rho_{\min}}, \Delta Q_i \right\}.$$

Подпоследовательность $\{\Delta Q_i\}_{i=0}^{\infty}$ – монотонно убывающая. Возможны две ситуации: либо $\Delta Q_0 < \frac{r_{\min}}{\rho_{\min}}$, а тогда $\forall i \Delta Q_i < \frac{r_{\min}}{\rho_{\min}}$, либо $\Delta Q_0 \geq \frac{r_{\min}}{\rho_{\min}}$. Во втором случае следующий элемент подпоследовательности будет меньше предыдущего на величину, ограниченную снизу значением $\frac{\rho_{\min}^{n-1} r_{\min}}{n-1}$, а значит, существует такое i' , что $\forall i \geq i' \Delta Q_i < \frac{r_{\min}}{\rho_{\min}}$.

Итак, имеем

$$\forall i \geq i' \Delta Q_{i+1} \leq \left(1 - \frac{\rho_{\min}^n}{n-1}\right) \Delta Q_i,$$

при этом

$$0 < \left(1 - \frac{\rho_{\min}^n}{n-1}\right) < 1.$$

Таким образом, подпоследовательность $\{\Delta Q_i\}_{i=0}^{\infty}$, начиная с определенного элемента, будет ограничена сверху убывающей геометрической прогрессией

$$\Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \Delta Q_i = 0.$$

Последовательность суммарного свободного ресурса сети $\{\Delta Q(t)\}_{t=0}^{\infty}$ – монотонно невозрастающая, а предел ее подпоследовательности равен нулю $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta Q(t) = 0$. \square

Доказательство теоремы 1.

Вершины v_1, \dots, v_k ($1 < k < n$) образуют перенасыщенный цикл, т.е. все они насыщенные и хотя бы одна из них перенасыщенная – пусть это будет вершина v_1 .

Для доказательства бесконечного функционирования сети достаточно доказать, что свободный ресурс этой сети не сможет стать нулевым (равенство нулю означает остановку сети). Докажем, что в каждый момент времени как минимум одна из вершин v_1, \dots, v_k будет иметь ненулевой свободный ресурс.

Вершины v_1, \dots, v_k , являясь насыщенными, не могут стать ненасыщенными (не могут начать «поглощать» полученный ресурс). Так как вершина v_1 в момент времени $t = 0$ перенасыщена, на первом такте она отдаст часть своего свободного ресурса вершине v_2 , сделав ее перенасыщенной. Аналогично на втором такте вершина v_2 отдаст часть своего свободного ресурса вершине v_3 , сделав ее перенасыщенной. Соответственно на тактах $t = 1, t = 2, \dots, t = k - 1$ вершины v_2, v_3, \dots, v_k по очереди будут становиться перенасыщенными. На такте k вершина v_1 получит ненулевой ресурс от вершины v_k , и, отдав на первом такте даже весь свой свободный ресурс, v_1 станет вновь перенасыщенной. Рассуждения для каждых следующих k тактов можно повторить. Таким образом, в каждый момент времени как минимум одна из вершин v_1, \dots, v_k будет иметь ненулевой свободный ресурс.

Остановка сети в пределе следует из утверждения 4: суммарный свободный ресурс в сети стремится к нулю, значит, сеть стремится к состоянию останова. \square

Доказательство теоремы 2.

Достаточность следует из теоремы 1: если в сети в какой-то момент времени образовался перенасыщенный цикл, то, считая этот момент времени начальным, по теореме 1 имеем бесконечное функционирование сети.

Необходимость. Докажем, что если в процессе функционирования сети не образуется перенасыщенный цикл, то сеть остановится за конечное число тактов.

На основе имеющейся ресурсной сети с «жадными» вершинами построим ориентированный граф возможных путей распространения свободного ресурса. Этот граф будет содержать те же вершины, что и наша ресурсная сеть, а из множества ребер оставим только исходящие из перенасыщенных вершин (ненасыщенная вершина и вершина с ресурсом, равным пропускной способности петли, не могут отдавать ресурс). Также удалим петли перенасыщенных вершин – они не влияют на распространение сво-

бодного ресурса в сети.

По условию, в сети ни в какой момент времени не может образоваться перенасыщенный цикл. Любые существующие в сети циклы, таким образом, могут либо остаться ненасыщенными, либо насытиться, но не перенасытиться. В обоих случаях в рассматриваемом графе не будет контуров, так как у всех ненасыщенных и насыщенных, но не перенасыщенных вершин на графе не будет исходящих ребер.

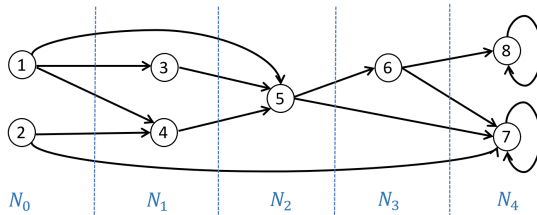


Рис. 12. Топологически отсортированный граф

Итак, при условии постоянного отсутствия в сети перенасыщенных циклов, рассматриваемый граф возможных путей распространения свободного ресурса не имеет контуров. Тогда можно произвести известную в теории графов топологическую сортировку: распределение вершин по уровням. Уровень вершины (на рис. 12 обозначается N_i) – это фактически длина максимального пути от входов графа до этой вершины. Топологическая сортировка производится, например, с помощью алгоритма Демукрона вычисления порядковой функции сети (см. [7]).

Расположив уровни слева-направо (см. рис. 12), начиная с N_0 , получим, что свободный ресурс может двигаться только слева направо, причем любой путь перемещения свободного ресурса будет заканчиваться на вершине-приемнике, являющейся ненасыщенной вершиной.

Таким образом, либо весь свободный ресурс, циркулирующий по сети, за конечное число тактов будет поглощен ненасыщенными вершинами (т.е. произойдет остановка сети), либо какая-то ненасыщенная (насыщенная, но не перенасыщенная)

вершина перенасытится.

Второй случай влечет за собой «изменение» графа возможных путей распространения ресурса – граф эволюционирует: у перенасытившейся вершины появляются все «удаленные» ранее исходящие ребра. Однако при этом, аналогично рассуждая, получим, что обновленный граф остается бесконтурным однопольным, ввиду невозможности появления перенасыщенных циклов в ресурсной сети. Тогда и в этом случае все пути перемещения свободного ресурса заканчиваются на ненасыщенных вершинах.

Отметим, что количество таких эволюций ограничено количеством не являющихся перенасыщенными на начальный момент времени вершин сети. Теорема доказана. \square

Доказательство утверждения 5.

Пусть в отсортированном графе сети n_i – количество вершин, принадлежащих уровням $N_0, \dots, N_i, i = \overline{0, \nu - 1}$ и вершины сети пронумерованы по увеличению номеров своих уровней.

Матрица R выглядит следующим образом:

$$R = \begin{pmatrix} D_0 & R_{01} & R_{02} & \dots & R_{0\nu-1} \\ O & D_1 & R_{12} & \dots & R_{1\nu-1} \\ O & O & D_2 & \dots & R_{2\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots & D_{\nu-1} \end{pmatrix}.$$

Построим матрицу пропускных способностей \tilde{R} , убрав петли вершин, не являющихся стоковыми:

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \tilde{D}_0 & R_{01} & R_{02} & \dots & R_{0\nu-1} \\ O & \tilde{D}_1 & R_{12} & \dots & R_{1\nu-1} \\ O & O & \tilde{D}_2 & \dots & R_{2\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots & D_{\nu-1} \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица $\tilde{D}_{\nu-1} = D_{\nu-1}$ осталась неизменной. Матрицы $\tilde{D}_i, i = \overline{0, \nu - 2}$, нулевые, за исключением диагональных

элементов, соответствующих пропускным способностям петель стоковых вершин уровней N_i , $i = \overline{0, \nu - 2}$. Отметим вновь, что в строках, где матрицы \tilde{D}_i , $i = \overline{0, \nu - 2}$, имеют ненулевые диагональные элементы, элементы соответствующих строк матриц R_{ij} , $j = \overline{i + 1, \nu - 1}$, нулевые.

Наконец, определим вид матрицы \tilde{R}' – стохастической матрицы сети с удаленными петлями у вершин, не являющихся стоковыми. Эта матрица и будет использоваться в формуле, которую необходимо обосновать:

$$\tilde{R}' = \begin{pmatrix} \tilde{E}_0 & P_{01} & P_{02} & \dots & P_{0\nu-1} \\ O & \tilde{E}_1 & P_{12} & \dots & P_{1\nu-1} \\ O & O & \tilde{E}_2 & \dots & P_{2\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots & E \end{pmatrix}.$$

Здесь матрицы \tilde{E}_i , $i = \overline{0, \nu - 2}$, нулевые, за исключением некоторых единичных диагональных элементов, соответствующих относительным пропускным способностям петель стоковых вершин уровней N_i , $i = \overline{0, \nu - 2}$. Матрицу P_{ij} , $i < j$, интерпретируем как матрицу относительных пропускных способностей ребер, выходящих из вершин уровня N_i и входящих в вершины уровня N_j .

Введем обозначение $\Delta Q(t_k) = Q(t_k) - R_{diag}$, $\Delta q_i^k = \Delta q_i(t_k) = q_i(t_k) - r_{ii}$. Искомую формулу тогда можно переписать в следующем виде:

$$\Delta Q(t_k) = \Delta Q(0)(\tilde{R}')^k.$$

Воспользуемся методом математической индукции.

При $k = 0$ утверждение верно. Начальное состояние стоковых вершин уровня N_0 , согласно формуле, и является конечным, что соответствует действительности: у таких вершин нет ни входящих, ни исходящих ребер – ресурс в них измениться не может.

Покажем, что утверждение верно для $k = 1$, т.е. что конечное состояние всех вершин уровня N_0 и всех стоковых вершин

уровня N_1 определяется формулой

$$Q(t_1) = (Q(0) - R_{diag})\tilde{R}' + R_{diag},$$

или в новых обозначениях

$$\Delta Q(t_1) = \Delta Q(0)\tilde{R}'.$$

Распишем последнюю формулу только для вершин интересующих нас уровней:

$$\begin{aligned} &v_1, \dots, v_{n_0} \in N_0, v_{n_0+1}, \dots, v_{n_1} \in N_1, \\ &(\Delta q_1^1, \dots, \Delta q_{n_0}^1, \Delta q_{n_0+1}^1, \dots, \Delta q_{n_1}^1) = \\ &= (\Delta q_1^0, \dots, \Delta q_{n_0}^0, \Delta q_{n_0+1}^0, \dots, \Delta q_{n_1}^0) \begin{pmatrix} \tilde{E}_0 & P_{01} \\ O & \tilde{E}_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

где в общем случае обнаружения стоковых вершин на обоих уровнях N_0 и N_1 матрица выглядит следующим образом (здесь вершина v_i показана как стоковая уровня N_1)

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_0 & P_{01} \\ O & \tilde{E}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \rho_{1n_0+1} & \dots & \rho_{1i} & \dots & \rho_{1n_1} \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \rho_{n_0n_0+1} & \dots & \rho_{n_0i} & \dots & \rho_{n_0n_1} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислив вектор $(\Delta q_1^1, \dots, \Delta q_{n_0}^1, \Delta q_{n_0+1}^1, \dots, \Delta q_{n_1}^1)$ по предлагаемой формуле, получим, что

$$\Delta q_j^1 = \begin{cases} 0, & v_j - \text{не стоковая,} \\ \Delta q_j^0, & v_j - \text{стоковая,} \\ \Delta q_j^0 + \sum_{i=1}^{n_0} \rho_{ij} \Delta q_i^0, & v_j - \text{стоковая.} \end{cases}$$

Перейдем к состояниям:

$$q_j^1 = \begin{cases} r_{jj}, & v_j - \text{не стоковая,} \\ q_j^0, & v_j - \text{стоковая,} \\ q_j^0 + \sum_{i=1}^{n_0} \rho_{ij}(q_i^0 - r_{ii}), & v_j - \text{стоковая.} \end{cases}$$

Ресурс вершины уровня N_0 , не являющейся стоковой, в конечном состоянии будет равен пропускной способности петли вершин, так как весь свободный ресурс эта вершина отдала в вершины следующих уровней. Конечное состояние стоковой вершины уровня N_0 , как говорилось в рассуждениях для случая $k = 0$, равно начальному состоянию этой вершины. А конечное состояние стоковой вершины уровня N_1 – это начальный ресурс вершины и ресурс, пришедший от всех смежных с ней вершин уровня N_0 . Таким образом, для случая $k = 1$ формула оказалась корректной.

Пусть формула верна для $k = m$.

Итак, конечное состояние всех вершин уровней N_i , $i = \overline{0, m-1}$, и всех стоковых вершин уровня N_m определяется формулой

$$Q(t_m) = (Q(0) - R_{diag})(\tilde{R}')^m + R_{diag},$$

$$\Delta Q(t_m) = \Delta Q(0)(\tilde{R}')^m.$$

То есть формула выдает следующий верный результат: для уровней N_i , где $i = \overline{0, m-1}$, все не стоковые вершины в конечном состоянии содержат ресурс, равный пропускной способности петли, все стоковые вершины содержат собственный начальный ресурс и ресурс, пришедший от вершин предыдущих уровней N_i , $i = \overline{0, m-2}$. А конечное состояние стоковых вершин уровня N_m – аналогично: начальный ресурс этих вершин и ресурс, пришедший от вершин предыдущих уровней N_i , $i = \overline{0, m-1}$.

Покажем, что для $k = m + 1$ формула дает верный результат:

$$Q(t_{m+1}) = (Q(0) - R_{diag})(\tilde{R}')^{m+1} + R_{diag},$$

$$\Delta Q(t_{m+1}) = \Delta Q(0)(\tilde{R}')^{m+1},$$

$$\Delta Q(t_{m+1}) = \Delta Q(t_m) \tilde{R}',$$

$$\Delta Q(t_m) = (\Delta q_1^m, \dots, \Delta q_{n_{m-1}+1}^m, \dots, \Delta q_{n_m}^m, \Delta q_{n_m+1}^m, \dots, \Delta q_{n_{m+1}}^m),$$

$$\tilde{R}' = \begin{pmatrix} \tilde{E}_0 & \dots & P_{0m} & P_{0m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & \dots & \tilde{E}_m & P_{mm+1} \\ O & \dots & O & \tilde{E}_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Вычислим вектор

$$(\Delta q_1^{m+1}, \dots, \Delta q_{n_{m-1}+1}^{m+1}, \dots, \Delta q_{n_m}^{m+1}, \Delta q_{n_m+1}^{m+1}, \dots, \Delta q_{n_{m+1}}^{m+1}),$$

используя тот факт, что $\Delta q_j^m = 0$ ($q_j^m = r_{jj}$) для не стоковых вершин уровней N_i , $i = \overline{0, m-1}$. Получим

$$\Delta q_j^{m+1} = \begin{cases} 0, & v_j - \text{не стоковая,} \\ \Delta q_j^m, & v_j - \text{стоковая,} \\ \Delta q_j^m + \sum_{i=n_{m-1}+1}^{n_m} \rho_{ij} \Delta q_i^m, & v_j - \text{стоковая.} \end{cases}$$

Перейдем к состояниям:

$$q_j^{m+1} = \begin{cases} r_{jj}, & v_j - \text{не стоковая,} \\ q_j^m, & v_j - \text{стоковая,} \\ q_j^m + \sum_{i=n_{m-1}+1}^{n_m} \rho_{ij} (q_i^m - r_{ii}), & v_j - \text{стоковая.} \end{cases}$$

Действительно, для уровней N_i , $i = \overline{0, m}$, все не стоковые вершины в конечном состоянии содержат ресурс, равный пропускной способности петли, а ресурс стоковых вершин $q_j^{m+1} = q_j^m$, т.е. содержит собственный начальный ресурс и ресурс, пришедший от всех не стоковых вершин предыдущих уровней N_i , $i = \overline{0, m-1}$. Конечное состояние стоковых вершин уровня N_{m+1} — сумма q_j^m (начальный ресурс этих вершин и ресурс, пришедший от всех не стоковых вершин уровней N_i , $i = \overline{0, m-1}$) и $\sum_{i=n_{m-1}+1}^{n_m} \rho_{ij} (q_i^m - r_{ii})$ (ресурс, пришедший от

всех не стоковых вершин уровня N_m). Формула верна для случая $k = m + 1$.

Таким образом, согласно принципу математической индукции, искомая формула доказана. \square

Доказательство теоремы 5.

Воспользуемся леммой 1: пока существует хотя бы одна ненасыщенная и одна перенасыщенная вершины, за i -й период тактов $\tau = n(n-1)$ свободный ресурс сети уменьшится не менее чем на

$$\Lambda_i = \left(\rho_{\min}\right)^{(n-2)(n-k_i)} \min \left\{ r_{\min}, \frac{\rho_{\min}}{k_i} \Delta Q_i \right\}.$$

Учитывая, что при достаточном ресурсе $\forall i \Delta Q_i \geq W - \sum_{j=1}^n r_{jj}$ и $\forall i 1 \leq k_i \leq n$, имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_i &\geq \left(\rho_{\min}\right)^{(n-2)(n-k_i)} \min \left\{ r_{\min}, \frac{\rho_{\min}}{k_i} \left(W - \sum_{j=1}^n r_{jj} \right) \right\} \geq \\ &\geq \left(\rho_{\min}\right)^{(n-2)(n-1)} \min \left\{ r_{\min}, \frac{\rho_{\min}}{n} \left(W - \sum_{j=1}^n r_{jj} \right) \right\} = \Lambda. \end{aligned}$$

Учитывая, что $W > \sum_{j=1}^n r_{jj}$, получаем, что Λ – строго положительная величина.

Итого: свободный ресурс сети не может стать нулевым (утв. б), однако, за каждые $\tau = n(n-1)$ тактов он уменьшается не менее чем на $\Lambda > 0$, пока существует хотя бы одна ненасыщенная вершина.

Таким образом, не более чем за

$$\frac{Q(0) - \left(W - \sum_{j=1}^n r_{jj} \right)}{\Lambda}$$

тактов все ненасыщенные вершины сети с достаточным ресурсом насытятся. \square

RESEARCH OF ERGODIC HETEROGENEOUS "GREEDY-VERTICES" RESOURCE NETWORKS

Nadezda Chaplinskaya, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, mathematician (nadya1462@gmail.com).

Abstract: A modification of the graph threshold dynamic model «resource network» – «resource network with greedy vertices» is considered. At each discrete-time moment, the vertices of the graph transfer the resource to each other through the edges with limited throughputs. First they transfer the available resource to their own loops, and then the rest of the resource is distributed to the outgoing edges according to the rules of the standard resource network (in proportion to the throughputs taking into account their limitations). The topology of an ergodic heterogeneous resource network with «greedy» vertices is considered – the network is described by a strongly connected directed graph. It is shown that when the values of the total resource are not larger than the sum of the throughputs of all loops, the network with «greedy» vertices stops, which is impossible for a standard ergodic resource network and is caused by the existence of modified loops; the nature of the network stop is investigated. For the values of the total resource that are larger than the sum of the throughputs of all loops, it is proved that from a certain time moment the network will function equivalently to the corresponding standard resource network.

Keywords: graph dynamic threshold model, resource net, "greedy-vertices" model, topology of ergodic heterogeneous networks.

УДК 519.1

ББК 22.176

DOI: 10.25728/ubs.2021.93.1

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Э.Ю. Калимулиной.*

Поступила в редакцию 22.06.2021.

Дата опубликования 30.09.2021.

ДВУХКОМПОНЕНТНОЕ ОБЩЕСТВО В МОДЕЛИ ViSE: ЗАВИСИМОСТЬ ДИНАМИКИ ОТ УРОВНЯ КООПЕРАЦИИ И ПОРОГА ГОЛОСОВАНИЯ

Чеботарев П. Ю.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Максимов В. М.²

(Московский физико-технический институт, Москва)

В предположениях модели ViSE получены представления ожидаемых приращений капитала в обществах, состоящих из группы и эгоистов. В общем случае нахождение этих величин требует интегрирования; для случая гауссовского генератора предложений оно приводит к явным выражениям, представленным в настоящей статье. Исследованы зависимости этих величин от уровня кооперации и порога голосования для гауссовских и паретовских распределений стохастических предложений, нейтральной и неблагоприятной среды, постоянного и переменного числа участников. Эти зависимости представлены поверхностями в \mathbb{R}^3 . Обсуждаются условия, определяющие сравнительную эффективность групповой и эгоистической стратегий, а также выгоду общества в целом.

Ключевые слова: социальная динамика, голосование, кооперация, стохастическая среда, *homines economici*, порог голосования.

1. Введение

В модели ViSE общество состоит из n участников (агентов), каждый из которых характеризуется текущим значением капитала (его отрицательная величина есть долг). Альтернативно капитал может интерпретироваться как полезность. Задается вектор неотрицательных начальных значений капитала участников. На каждом шаге $t = 1, \dots, M$ на голосование ставится одно предложение, и агенты, руководствуясь своими стратегиями голосования³, голосуют «за» или «против». Каждое предложение представляет собой вектор алгебраических приращений капиталов

¹ Павел Юрьевич Чеботарев, д.ф.-м.н., зав. лаб. (pavel4e@gmail.com).

² Владислав Михайлович Максимов, аспирант (vladislav.maksimov@phystech.edu).

³ В терминологии модели ViSE под стратегией голосования агента понимается алгоритм использования им имеющейся у него информации для принятия индивидуальных решений о поддержке предложений.

агентов. В случае, если предложение одобрено посредством используемой *процедуры голосования*, оно реализуется: капиталы участников получают предложенные приращения. Один из вариантов модели предполагает банкротство участников, капитал которых стал отрицательным: такие участники перестают голосовать и не учитываются в последующих предложениях (вариант «с вымиранием»).

Предложение в модели ViSE формируется стохастически: его компоненты есть реализации случайных величин, которые в простейшем случае, рассматриваемом в данной работе, одинаково распределены и независимы. Распределения этих величин в рамках изучаемого класса распределений характеризуются параметрами сдвига и растяжения. Чаще всего рассматриваются классы симметричных распределений, имеющих конечные математическое ожидание μ (в этом случае оно совпадает с медианой и используется в качестве параметра сдвига) и дисперсию σ^2 . В качестве параметра растяжения используется стандартное отклонение σ либо разность между медианой и первым квартилем. При сравнении распределений из разных классов они стандартизируются по параметрам сдвига и растяжения.

Предложения, полученные указанным образом, в модели ViSE называются *предложениями стохастической среды*. Среда *благоприятна*, если $\mu > 0$, *нейтральна* при $\mu = 0$ и *неблагоприятна* при $\mu < 0$.

В соответствии с моделью вектор капиталов агентов на шаге t определяется формулой

$$(1) \quad \mathbf{c}(t) = r(\mathbf{c}(t-1) + \boldsymbol{\zeta}(t)I(t)), \quad 0 < t \leq M,$$

где вектор $\boldsymbol{\zeta}(t)$ – предложение среды на шаге t ; M – общее число шагов;

$$I(t) = \begin{cases} 1, & \text{если предложение } \boldsymbol{\zeta}(t) \text{ принято голосованием;} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$r(\cdot)$ – оператор, исключающий из вектора капиталов отрицательные компоненты в модели с вымиранием и тождественный оператор в модели без вымирания.

Анализ закономерностей изменения вектора капиталов (1) при различных распределениях позволяет оценить выгодность индивидуальных стратегий голосования, а также эффективность

процедур принятия коллективных решений как методов отбора предложений, и выбирать среди них оптимальные в отношении максимизации выбранных критериев.

Простейшие стратегии голосования участников в модели ViSE – эгоистическая и групповая. Эгоист поддерживает те и только те предложения, которые увеличивают его капитал; таких агентов можно назвать также *homines economici*. Все члены группы, преследуя групповой интерес, поддерживают те и только те предложения, которые увеличивают суммарный капитал участников группы.

Наиболее распространенный метод принятия демократических решений – голосование с порогом поддержки. В соответствии с процедурой этого класса предложение принимается тогда и только тогда, когда доля участников, поддержавших его, превосходит число α , называемое *строгим относительным порогом голосования*. При $\alpha = 0,5$ получаем процедуру простого большинства; при $\alpha = 0$ для принятия предложения достаточно одного голоса; при $\alpha = 1$ предложение не принимается даже при его единогласной поддержке. Для задания процедуры, одобряющей все предложения без исключения, следует присвоить α произвольное отрицательное значение. Таким образом, полный набор пороговых процедур голосования может быть задан условием $\alpha \in [-1/n, 1]$, где n – число участников. При этом $\alpha n \in [-1, n]$ называют *строгим абсолютным порогом голосования*.

Порог $\alpha n = n - 1$ соответствует процедуре единогласия, меньшие пороги, удовлетворяющие условию $\alpha n \geq [n/2] + 1$, – различным процедурам *квалифицированного большинства*, традиционно используемым для принятия наиболее важных решений, требующих высокой поддержки. Пороги, меньшие половины числа участников, используются для принятия «инициативных» решений, таких как включение вопроса в повестку дня заседания, создание парламентской комиссии и т.п. Некоторые решения принимаются по желанию всего лишь одного (любого) участника. Например, всякий взрослый член семьи может по своему выбору приобрести товар небольшой стоимости, предназначенный для использования всей семьей.

В данной работе исследуется общество, состоящее из группы

и эгоистов; его общая численность n складывается из количества эгоистов n_e и численности группы n_g : $n = n_e + n_g$.

В следующем разделе обсуждаются цели исследования и их связь с полученными ранее результатами.

2. Предварительные результаты, цели и задачи исследования

Общая цель анализа модели ViSE состоит в выяснении того, как социальным агентам следует голосовать и обрабатывать результаты голосований, чтобы коллективные решения приносили им наибольшую пользу в терминах тех или иных критериев. Как при этом защитить слабых, как отстоять определенные индивидуальные и групповые интересы, не становясь заложниками сплоченных групп конкурентов? Какие категории участников будут в наибольшем выигрыше при заданных внешних условиях? Разумеется, найденные ответы будут в полной мере верны лишь в рамках модели, но они полезны и в жизни – в той мере, в которой модель ее отражает.

Главная черта описанной выше групповой стратегии голосования – то, что она является кооперативной. Несколько участников, кооперируясь, договариваются, что каждый из них будет защищать групповые интересы независимо от того, совпадают ли они с его индивидуальными интересами в каждом конкретном случае. Напомним, что все интересы агентов в модели ViSE выражаются в терминах капитала/полезности.

Феномен кооперации чаще всего моделируют в формализме теории игр [12, 14, 16]. При этом нередко постулируется, что кооперативное поведение всех игроков выгоднее для каждого из них, чем всеобщий отказ от кооперации, в то же время в несимметричной ситуации, когда одни выбирают кооперацию, а другие уклоняются от нее, последние получают относительный выигрыш. При выполнении указанных порядковых соотношений всеобщий отказ от кооперации является единственным равновесием Нэша, которое при этом неэффективно по Парето.

Но всегда ли выигрыши в указанных ситуациях (всеобщая кооперация, тотальный отказ от нее, кооперация части агентов) соотносятся именно так? От чего это зависит? Как это связано

с благоприятностью внешних условий, соотношением числа агентов, имеющих близкие интересы, и «чужаков», с алгоритмом голосования (который можно интерпретировать в терминах степени либеральности/консерватизма общества)? То, что люди в одних ситуациях интуитивно стремятся к кооперации, в других считают ее излишней, а в третьих демонстрируют разнообразие стратегий, говорит о нетривиальности этих вопросов и о том, что они не менее фундаментальны, чем вопросы о выходе общества на границу Парето при заданном соотношении выигрышей.

В рамках модели ViSE соотношение выигрышей при разных стратегиях исследуется в предположениях о принятии решений голосованием и стохастической природе предложений. Ключевую роль при этом, разумеется, играет влияние групп и отдельных участников на коллективные решения. Так, если голоса малой группы критически важны для принятия или непринятия решения, то участникам этой группы, скорее всего, удастся защитить свои интересы. Данная статья посвящена выявлению закономерностей такого рода в случае, когда общество состоит из двух компонент: группы и эгоистов. Эта структура общества проста, но анализ ее приводит к ряду нетривиальных выводов.

Отметим, что выход на границу Парето, где обычно находится общество, состоящее из кооперирующихся агентов, также может быть изучен в рамках модели ViSE. Именно такая эволюция реализуется алгоритмом «снежного кома кооперации» [6], эффективным, когда кооперация части агентов взаимна.

Модель ViSE исследуется с 2003 г. (см. [13]). При ее изучении были получены частичные ответы на приведенные выше вопросы в отношении обществ различной структуры.

Так, в [2] изучались общества, состоящие из группы и эгоистов, и в [5] получены приближенные выражения среднего приращения капитала участников для таких обществ при гауссовском генераторе предложений. В [4] найден оптимальный порог притязаний группы в двухкомпонентном обществе.

В [10] и [3] рассматривались однородные общества, состоящие из эгоистов либо из участников с различными просоциальными стратегиями. Предложения генерировались посредством не только гауссовских распределений, но и распределений

с тяжелыми хвостами, включая распределения Стюдента и симметризованные распределения Парето.

В [6] аналитически исследовались общества, состоящие из двух групп и эгоистов, в [8] – из трех групп, в [7] – из двух групп равного размера, одна из которых характеризуется порогом притязаний. В [11] анализировались двухкомпонентные общества, состоящие из эгоистов и альтруистов с разными стратегиями, в [17] – общества, где есть эгоисты, группы и альтруисты либо участники с комбинированной стратегией голосования, образующие «ответственную элиту».

В [9] была решена задача об оптимальном пороге голосования в случае гауссовского генератора и общества из эгоистов, а в [15] – при произвольном генераторе предложений. В [1] проведен сравнительный анализ методов стимулирования просоциальной стратегии голосования, которая предохраняет общество от разорения.

Более подробный обзор ранее полученных результатов можно найти в [3].

В настоящей работе мы вновь обращаемся к двухкомпонентному обществу, состоящему из группы и эгоистов, чтобы систематически исследовать зависимость изменений капитала участников от порога голосования и относительного размера группы, который естественно трактовать как уровень кооперации в обществе. При этом будут рассмотрены гауссовские и паретовские генераторы предложений и общества как с постоянным составом участников, так и с вымиранием.

Отправной точкой будут полученные в [2] с помощью приближенных оценок пять зон локализации порога голосования для обществ рассматриваемого типа. Приведем их для нейтральной среды, более точно указав границы зоны 3 с зонами 4 и 5. Схема указанных зон представлена на рис. 1.

Зона 1. $\alpha < \beta \left(1 - \frac{3}{\sqrt{n_e}}\right)$, где $\beta = n_e/2n$. При таких порогах голосования значительная часть предложений принимается.

Зона 2. $\alpha > 1 - \beta \left(1 - \frac{3}{\sqrt{n_e}}\right)$. Эта зона зеркальна по отношению к первой; здесь предложения принимаются редко и капитал участников меняется мало.

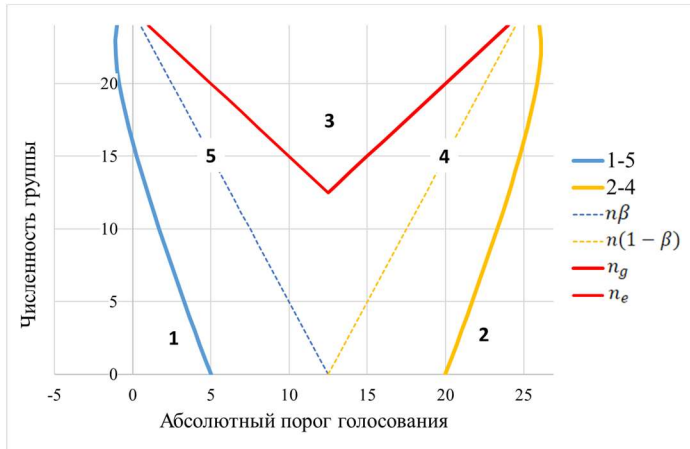


Рис. 1. Зоны абсолютного порога голосования для общества, состоящего из группы и эгоистов, в нейтральной среде; $n = 25$

Зона 3. $2\beta \leq \alpha < 1 - 2\beta$. При таких порогах голосования принимаются те и только те предложения, которые поддержаны группой. Это приводит к тому, что для эгоистов результаты голосования в нейтральной среде в среднем нейтральны: ожидаемое приращение их капиталов равно нулю.

Чтобы доказать последние утверждения, достаточно переписать неравенство, определяющее зону 3, в виде $n_e \leq \alpha n < n_g$. При таких порогах голосования предложение принимается тогда и только тогда, когда за него голосует группа. Поскольку в каждом предложении приращения капитала участников независимы, математическое ожидание приращения капитала эгоиста по множеству принятых предложений (как и по множеству всех предложений) равно нулю.

Зона 4. $1 - 2\beta \leq \alpha \leq 1 - \beta \left(1 - \frac{3}{\sqrt{n_e}}\right)$. При таких порогах принимаются предложения, поддержанные группой вместе с определенным числом эгоистов, что дает последним возможность блокировать наиболее разорительные для них (в терминах количества теряющих капитал агентов) предложения. Это положительно сказывается на их капитале.

Зона 5. $\beta \left(1 - \frac{3}{\sqrt{n_e}}\right) \leq \alpha < 2\beta$. При сравнительно низких порогах голосования, удовлетворяющих этому условию, ситуация зеркальна предыдущей, а именно, у эгоистов достаточно голосов, чтобы принять все самые выгодные для них (в терминах количества увеличивающих капитал агентов) предложения, что также положительно влияет на их капитал.

Зоны 4 и 5, в отличие от других, пересекаются.

Сформулируем основные задачи исследования.

1. В опубликованных ранее работах установлено, что для агентов каждой из категорий выгодны ситуации, когда эта категория оказывает сильное влияние на принятие решений. Последнее означает, что часто реализуются решающие и/или блокирующие коалиции, включающие значительное число участников данной категории. Однако этого общего факта недостаточно для сравнения *любых* ситуаций, характеризуемых долей группы и порогом голосования, по выгодности их для разных участников. Одна из задач работы – получить и проинтерпретировать наиболее интересные результаты такого сравнения. Для этого будут получены выражения среднего приращения капитала группы и эгоистов в двухкомпонентном обществе.

2. Вторая задача – установить характер зависимости результатов указанного сравнения от благоприятности среды.

3. Третья задача – выяснить, насколько сильно качественные результаты такого сравнения зависят от типа симметричного распределения случайных величин, генерирующих предложения.

4. Наконец, предположим, что эгоисты могут вступать в группу, а члены группы, напротив, выходить из нее, если им это выгодно. К каким изменениям структуры общества это может привести? Порог голосования также может меняться посредством коллективных решений, принятых в интересах тех, кому это выгодно. Интересно исследовать возможные направления эволюции общества в сторону предпочтений агентов, т.е. траектории переходов в пространстве параметров, характеризующих общество, и равновесия в этом процессе. Результаты этого исследования будут представлены в отдельной работе.

3. Динамика капиталов в модели без вымирания

В этом разделе получены выражения среднего приращения капитала (далее – «СПК») группы и эгоистов в двухкомпонентном обществе без вымирания.

Теорема 1. Пусть $M(\tilde{d}_e)$ и $M(\tilde{d}_g)$ – математические ожидания приращений капиталов эгоиста и члена группы за один шаг соответственно. Для любого распределения – генератора предложений среды, имеющего математическое ожидание μ , имеет место

$$(2) \quad M(\tilde{d}_e) = E_{[an],n_e}^F \bar{F}(0) + E_{[an]-n_g,n_e}^F (1 - \bar{F}(0)),$$

$$(3) \quad M(\tilde{d}_g) = \mu P_{[an],n_e} + E_{1,0}^{\bar{F}} (P_{[an]-n_g,n_e} - P_{[an],n_e}),$$

где

$$(4) \quad E_{k,m}^{F'} = \mu P_{k-1,m-1} + \mu^- (P_{k,m} - P_{k-1,m-1})$$

выражает среднее элемента «голосующей выборки» [5], т.е. математическое ожидание $M(\zeta_i I(\zeta, k))$, где $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ – вектор независимых величин с функцией распределения компонент $F'(\cdot) = F'_{\zeta_i}(\cdot)$ и $M(\zeta_i) = \mu$, $I(\zeta, k)$ – индикатор того, что более k компонент ζ положительны, $\mu^- = M(\zeta_i | \zeta_i \leq 0)$, F – функция распределения генератора предложений среды, $\bar{F} = \bar{F}_{n_g}$ – функция распределения среднего n_g независимых случайных величин с распределением F , $P_{k,m} = \sum_{i=k+1}^m \binom{m}{i} p^i q^{m-i}$, $\binom{m}{i}$ – число сочетаний из m по i , $q = F'(0)$, $p = 1 - q = P\{\zeta_i > 0\}$.

При вычислении суммы, выражающей $P_{k,m}$, используются следующие соглашения: если $k < 0$, то $P_{k,m} = 1$; если $k \geq 0$, то при $m < k + 1$ полагаем $P_{k,m} = 0$, т.к. в сумме нет слагаемых. В остальных случаях полезно выражение $P_{k,m}$ через функцию распределения биномиального распределения: $P_{k,m} = 1 - \text{Bi}(p, k, m)$.

Доказательство. Равенство (2) обобщает выражение $M(\tilde{d}_e) = E_{[an],n_e}^N (1 - P_G) + E_{[an]-n_g,n_e}^N P_G$ (формула (16) в [5], где N – функция распределения гауссовского генератора предложений, P_G – вероятность поддержки предложения группой) на случай произвольного генератора предложений с распределением F

с использованием того факта, что вероятность отсутствия поддержки предложения со стороны группы равна $\bar{F}(0)$. Отметим, что в настоящей статье величины, обозначенные E , выражают математическое ожидание (Expectation), а в [5] через E обозначались события (Event).

Равенство (3) выводится подстановками из формул (7), (17), (25) и (26) статьи [5] с учетом того, что решения принимаются с порогом α .

Докажем (4). По теореме 3 из [15]

$$E_{k,m}^{F'} = p(\mu^+ - \mu^-)P_{k-1,m-1} + \mu^- P_{k,m},$$

где $\mu^+ = M(\zeta | \zeta > 0)$. Используя выражение для $p(\mu^+ - \mu^-)$ из формулы полной вероятности для математических ожиданий $p\mu^+ + (1-p)\mu^- = \mu$, получаем требуемое:

$$\begin{aligned} E_{k,m}^{F'} &= (\mu - \mu^-)P_{k-1,m-1} + \mu^- P_{k,m} = \\ &= \mu P_{k-1,m-1} + \mu^- (P_{k,m} - P_{k-1,m-1}). \end{aligned}$$

Предложение 1. В случае генерации предложений посредством нормального распределения с параметрами μ и σ ($F \equiv N(\mu, \sigma)$) в обозначениях теоремы 1 имеет место

$$(5) \quad E_{k,m}^F = \mu P_{k,m} + \frac{\sigma f}{q} (P_{k-1,m-1} - P_{k,m}),$$

$$(6) \quad E_{1,0}^{\bar{F}} = \mu F_0 \left(\frac{\mu}{\sigma_g} \right) + \sigma_g f_0 \left(\frac{\mu}{\sigma_g} \right),$$

$$(7) \quad \bar{F}(0) = 1 - F_0 \left(\frac{\mu}{\sigma_g} \right),$$

где $f = f_0 \left(\frac{\mu}{\sigma} \right)$; $\sigma_g = \sigma / \sqrt{n_g}$; $F_0(\cdot)$ и $f_0(\cdot)$ – стандартные нормальные функция распределения и плотность.

Доказательство. Подставив выражение $\mu^- = \mu - \frac{\sigma f}{q}$ (формула (П.5) в [5] для случая, когда $F' \equiv N(\mu, \sigma)$) в формулу (4), получаем (5).

Выражение (6) следует из формулы (32) в [5] с учетом того, что среднее n_g независимых нормальных величин с параметрами μ и σ распределено нормально с параметрами μ и $\sigma / \sqrt{n_g}$.

Для получения (7) достаточно воспользоваться наблюдением из предыдущего абзаца и использовать симметричность

и непрерывность нормального распределения.

Следствие 1. При гауссовском генераторе предложений СПК эгоистов и членов группы выражаются формулами

$$M(\tilde{d}_e) = \left(\mu P_{[an]-n_g, n_e} + \frac{\sigma f}{q} (P_{[an]-n_g-1, n_e-1} - P_{[an]-n_g, n_e}) \right) F_0 \left(\frac{\mu}{\sigma_g} \right) + \left(\mu P_{[an], n_e} + \frac{\sigma f}{q} (P_{[an]-1, n_e-1} - P_{[an], n_e}) \right) F_0 \left(-\frac{\mu}{\sigma_g} \right),$$

$$M(\tilde{d}_g) = \mu P_{[an], n_e} + \left(\mu F_0 \left(\frac{\mu}{\sigma_g} \right) + \sigma_g f_0 \left(\frac{\mu}{\sigma_g} \right) \right) (P_{[an]-n_g, n_e} - P_{[an], n_e}).$$

Данное следствие выводится из теоремы 1 и предложения 1 с помощью подстановок.

Таким образом, СПК эгоистов и членов группы при гауссовском генераторе предложений выражаются довольно простыми формулами (следствие 1). В случае произвольного генератора предложений можно использовать формулы (2)–(4) теоремы 1, но нужна функция распределения $\bar{F} = \bar{F}_{n_g}$ среднего n_g независимых случайных величин с распределением F . При гауссовской F это распределение нормально, другие двухпараметрические семейства распределений не обладают замкнутостью относительно суммирования или взятия среднего. Среднее независимых непрерывных *равномерных* случайных величин распределено по Бейтсу; в случае произвольного распределения для расчетов по формулам (2)–(4) нужно табулировать соответствующее распределение среднего, не имеющее универсального алгебраического выражения. При достаточно большом n_g и выполнении условий центральной предельной теоремы можно использовать нормальное приближение этого распределения.

Перейдем к результатам, позволяющим ответить на вопросы 1–3 из раздела 2.

4. Результаты моделирования

4.1. ДИНАМИКА КАПИТАЛОВ В НЕЙТРАЛЬНОЙ СРЕДЕ С ГАУССОВСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПРЕДЛОЖЕНИЙ

На рис. 2 представлена зависимость среднего приращения капитала (СПК) эгоистов от порога голосования и численности

группы в обществе из $n = 25$ агентов при гауссовском распределении предложений с $\mu = 0$ (нейтральная среда) и $\sigma = 12$ без вымирания. Для наглядности эта зависимость, как и следующие, показана в виде поверхности, проходящей через точки с целыми координатами n_g (размер группы) и αn (абсолютный порог голосования); третья координата точек – соответствующее СПК. Показаны также план («вид сверху», вдоль оси СПК) этой поверхности и ее сечения, соответствующие нескольким порогам голосования и размерам группы.

Форма данной поверхности – два симметричных относительно плоскости $\alpha n = 12$ соединяющихся «хребта». Максимумы капитала эгоиста достигаются при численности группы $n_g = 24$ (один эгоист) и порогах голосования $\alpha n = 24$ и $\alpha n = 0$. В первом случае голоса эгоиста достаточно, чтобы заблокировать принятие невыгодных для него предложений, во втором – для одобрения выгодных. В нейтральной среде ($\mu = 0$) результатом этого является одно и то же значение СПК, недостижимое ни для одной категории агентов в иных обществах с 25 участниками. Это значение снижется по мере роста числа эгоистов, приводящего при фиксированном n к сокращению размера группы. При $\alpha n = 24$ или $\alpha n = 0$ СПК эгоиста снижается ровно вдвое при увеличении числа эгоистов на единицу в диапазоне от 1 до 24.

Группа из одного агента – это эгоист, поэтому СПК эгоистов (и СПК по всему обществу) при $n_g = 1$ и $n_g = 0$ равны. Два «хребта» соответствуют относительно высоким и низким α и содержат наибольшие (при фиксированной структуре общества) значения СПК эгоистов. С уменьшением группы хребты становятся ниже. Соединившись, они дают два локально максимальных значения при $n_g \in \{0, 1\}$ и $\alpha = 0,5$.

Эти значения уступают СПК на «хребтах» при $n_g \in [20, 24]$, в частности, ниже «пиков» СПК одного эгоиста ($n_g = 24$) в 3,1 раза. В то же время они в 1,73 раза выше наибольшего СПК эгоистов в самых «невыгодных» для них обществах – при $n_g = 7$.

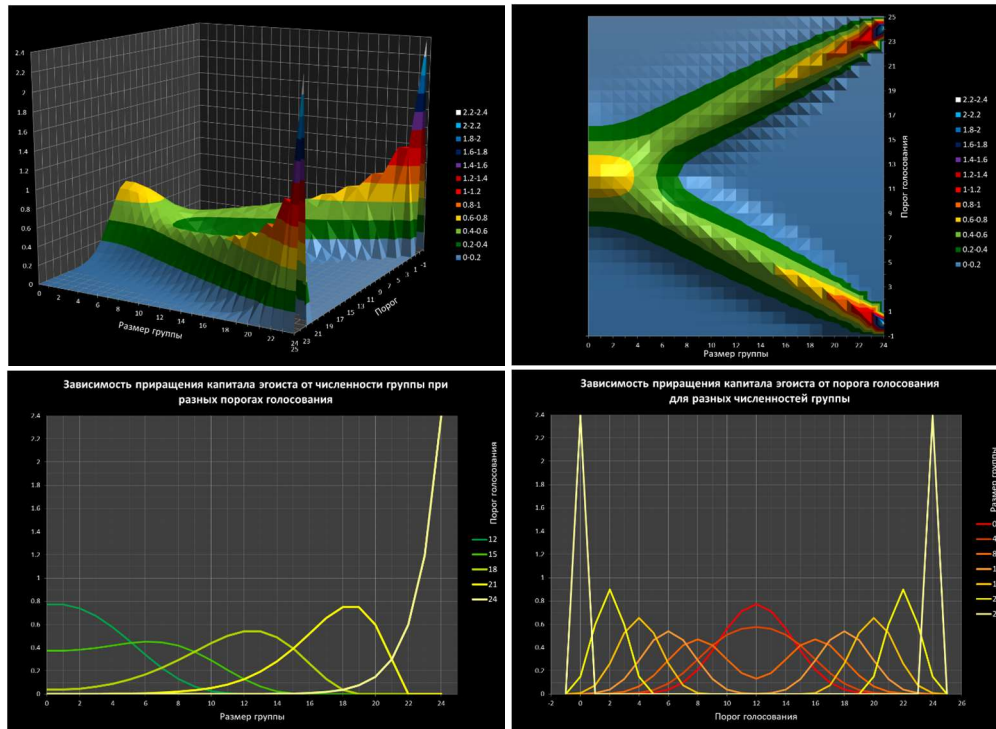


Рис. 2. Среднее приращение капитала эгоиста за 1 шаг; $n = 25$ участников: эгоисты и группа; нормальное распределение; $\mu = 0$, $\sigma = 12$

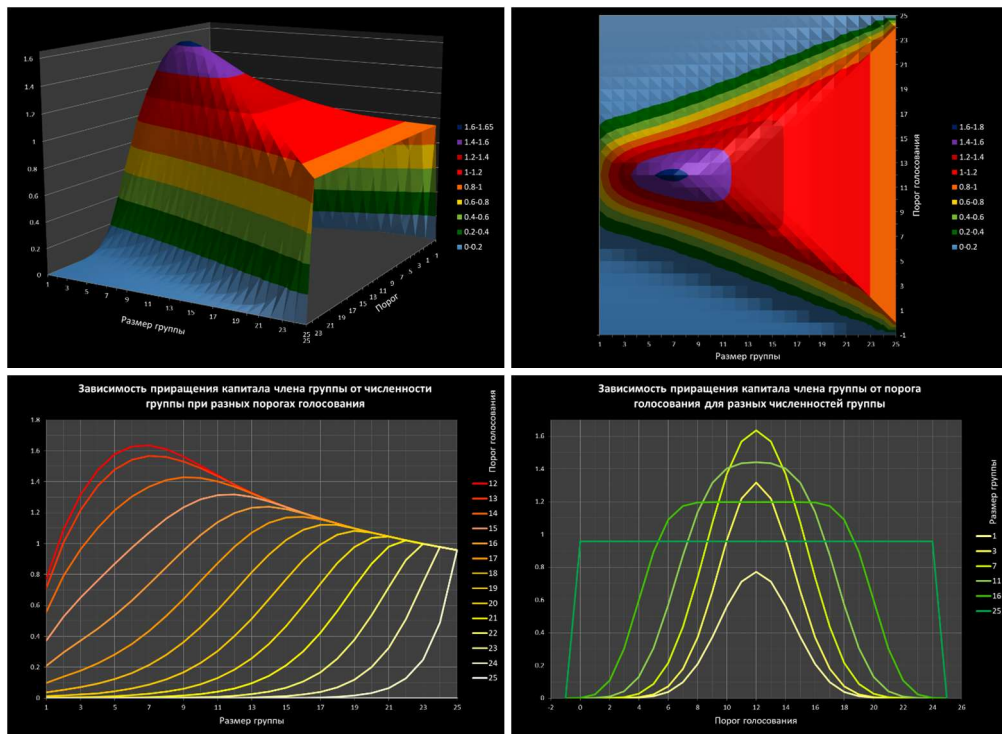


Рис. 3. Среднее приращение капитала члена группы за 1 шаг; 25 участников: эгоисты и группа; нормальное распределение; $\mu = 0$, $\sigma = 12$

Таким образом, эгоистам выгодно находиться в меньшинстве в обществах с относительно высоким или низким порогом голосования (в зонах 4, 5). Менее выгоден локальный максимум при отсутствии группы и голосовании простым большинством ($\alpha = 0,5$) – на пересечении пунктирных линий на рис. 1. Как было показано в разделе 2, в зоне 3 СПК эгоистов равно нулю, а в зонах 1 и 2 принимает малые положительные значения.

Обратимся теперь к результатам группы. В каком обществе из 25 агентов быстрее всего растет капитал ее участника? Это общество с $n_g = 7$ ($n_e = 18$) и $\alpha = 0,5$ (рис. 3). Как было отмечено выше, именно при $n_g = 7$ минимальна верхняя грань СПК эгоиста. Тем самым разделение общества на $n_e = 18$ эгоистов (72% общества) и группу из $n_g = 7$ членов наименее выгодно для первых и оптимально для вторых по критерию максимального достижимого приращения капитала.

Указанный максимум СПК члена группы составляет 68% от наибольшего значения СПК эгоиста («пики» на рис. 2). В то же время при простом большинстве он в 2,1 раза выше, чем СПК в обществе из эгоистов, и в 1,7 раза выше, чем в обществе-группе.

При отдалении порога голосования от порога простого большинства СПК члена группы падает почти до нуля. Так, если $n_e < 13$, то при изменении абсолютного порога голосования от n_e до 0 СПК члена группы снижется в 2^{n_e} раз. Так же СПК снижается и при повышении порога голосования от $n_g - 1$ до 24. При $n_e \leq \alpha n \leq n_g - 1$ СПК не меняется. Последнее объясняется тем, что такие пороги, принадлежащие зоне 3 на рис. 1, эквивалентны: при них одобряются все предложения, поддержанные группой, и только они. Если $n_e \geq 13$, то при изменении порога голосования от $\alpha n = 12$ до 0 либо до 24 СПК снижается не сколько меньше, чем в 2^{n_e} раз.

При увеличении или уменьшении размера группы от наиболее выгодной для нее численности СПК монотонно снижается. Зависимость самого выгодного размера группы от абсолютного порога голосования представлена в таблице 1.

Для понимания ситуации важен вопрос: «Какие общества принадлежат множеству Парето по вектору СПК агентов?» Здесь

«общество A доминирует B по Парето» означает, что при некоторой биекции множеств агентов обществ A и B каждый агент в A имеет СПК не ниже (и хотя бы один – выше), чем соответствующий агент в B . Ответ на данный вопрос дает рис. 4, где область, содержащая общества из множества Парето, выделена цветом.

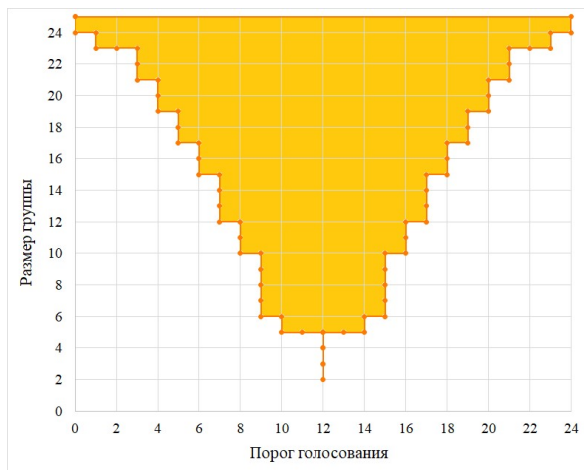


Рис. 4. Общества из 25 агентов, образующие множество Парето по вектору СПК при нормальном распределении и $\mu = 0$, принадлежат закрашенной области

Сечения этого множества линиями равного размера группы симметричны относительно порога простого большинства, причем мощность сечения тем выше, чем больше группа.

Несколько примеров обществ, входящих в множество Парето, приведены в таблице 2. Отметим, что если в обществе A СПК как эгоистов, так и членов группы выше, чем в обществе B , это не значит, что A доминирует B по Парето. Действительно, если в B и богатые, и бедные в среднем беднее, чем в A , нельзя утверждать, что B беднее, так как в B почти все могут быть богатыми, а в A почти все – бедными.

Рассмотрим теперь СПК по всему обществу. Соответствующая поверхность, показанная на рис. 5, имеет минимум при простом большинстве и группе в 36% общества ($n_g = 9$). «Яме», включающей этот минимум, соответствуют размеры группы

от 7 до 10 и относительные пороги, близкие к 0,5. В частности, при $n_g = 8$ СПК почти такое же, как при $n_g = 9$. В случае абсолютных порогов голосования 8–11 или 13–16 СПК при $n_g = 9$ выше, чем в случае простого большинства (порог 12) и лишь за пределами отрезка [8, 16] становится ниже. При простом большинстве и уменьшении размера группы до нуля СПК общества растет на 28%, а при увеличении до 25 – на 58%. Заметны слабо возвышающиеся «хребты», унаследованные от поверхности СПК эгоистов; их высота минимальна при $n_g = 7$. Тем самым значение $n_g = 7$ наименее выгодно не только для эгоистов, но и для общества в целом – в смысле максимального достижимого СПК; участникам группы оно, напротив, предоставляет наилучшие возможности роста капитала.

Последнее – важный вывод, соотносимый с реальностью. Для сплоченной эгоистичной группы (олигархии, бюрократии мафии, и др.) выгоднее всего быть сравнительно небольшой. Эта оптимальная доля, при которой группа наиболее эффективно защищает свои интересы, падает с ростом числа агентов n . Примерно та же доля группы оказывается наименее выгодной не только для остальных, но и для общества в целом.

Обществу в целом выгоднее всего быть группой из 25 агентов. При сокращении группы СПК общества снижается и при простом большинстве и 9 эгоистах оно ниже, чем в обществе из одних эгоистов. Если эгоистов 10, то уровень СПК общества из эгоистов недостижим ни при какой процедуре голосования с порогом, даже в зонах 4 и 5, где расположены «хребты».

Для сравнения успешности стратегий голосования рассмотрим разность СПК участника группы и эгоиста (рис. 6).

Отметим, что эта разность имеет достаточно компактный аналитический вид.

Таблица 1. Зависимость размера группы, наиболее выгодного для ее членов, от строгого абсолютного порога голосования и диапазоны численностей группы, при которых эгоистическая стратегия выгоднее групповой; 25 участников: эгоисты и группа; нормальное распределение; $\mu = 0$.

Порог голосования ap	0, 24	1, 23	2, 22	3, 21	4, 20	5, 19	6, 18	7, 17	8, 16	9, 15	10, 14	11–13
Оптимальный размер группы	25	24	23	22	21	19	17	16	14	12	9	7
Эгоистическая стратегия выгоднее групповой для размеров группы из множества:	[2, 24]	[2, 23]	[2, 21]	[2, 19]	[2, 16]	[3, 13]	[5, 9]	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset

Таблица 2. Примеры обществ, принадлежащих множеству Парето по СПК; нормальное распределение; $\mu = 0$.

Порог голосования ap	12	12	12	12	12	0; 24	1; 23	3; 21	6; 18	9; 15	9; 15	9; 15
Размер группы	2	5	7	15	25	24	23	23	15	12	10	6
СПК эгоиста	0,738	0,460	0,226	0	–	2,393	1,197	0	0,037	0,129	0,292	0,451
СПК члена группы	1,091	1,578	1,635	1,236	0,957	0,489	0,749	0,998	1,024	1,318	1,285	0,973

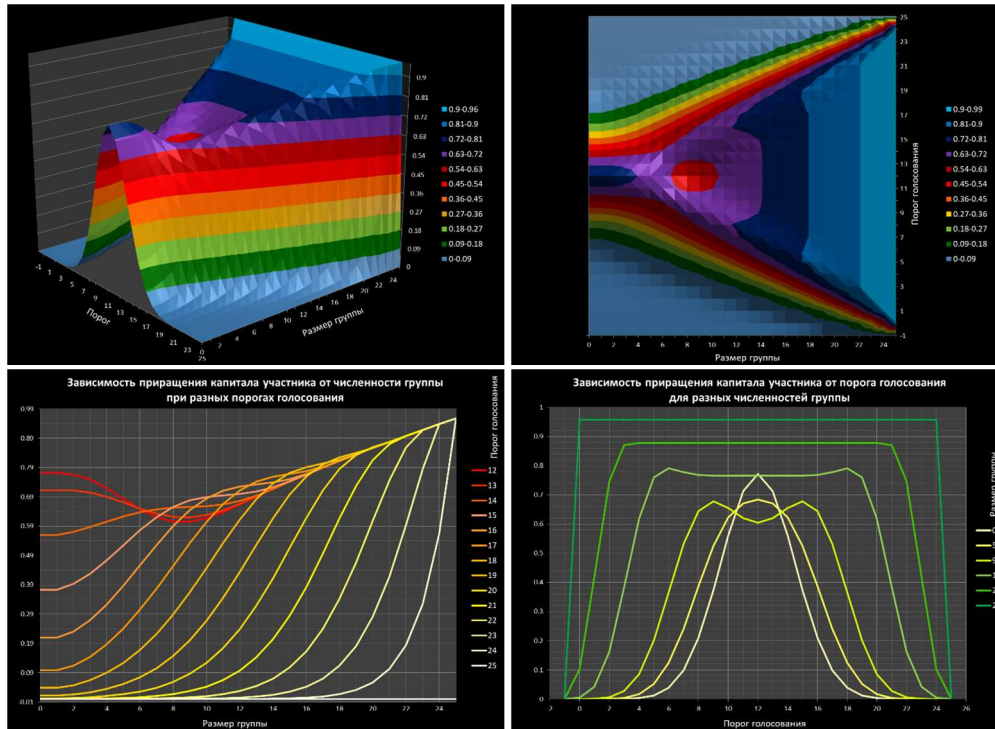


Рис. 5. Среднее приращение капитала агента за 1 шаг; 25 агентов: эгоисты и группа; нормальное распределение; $\mu = 0$, $\sigma = 12$

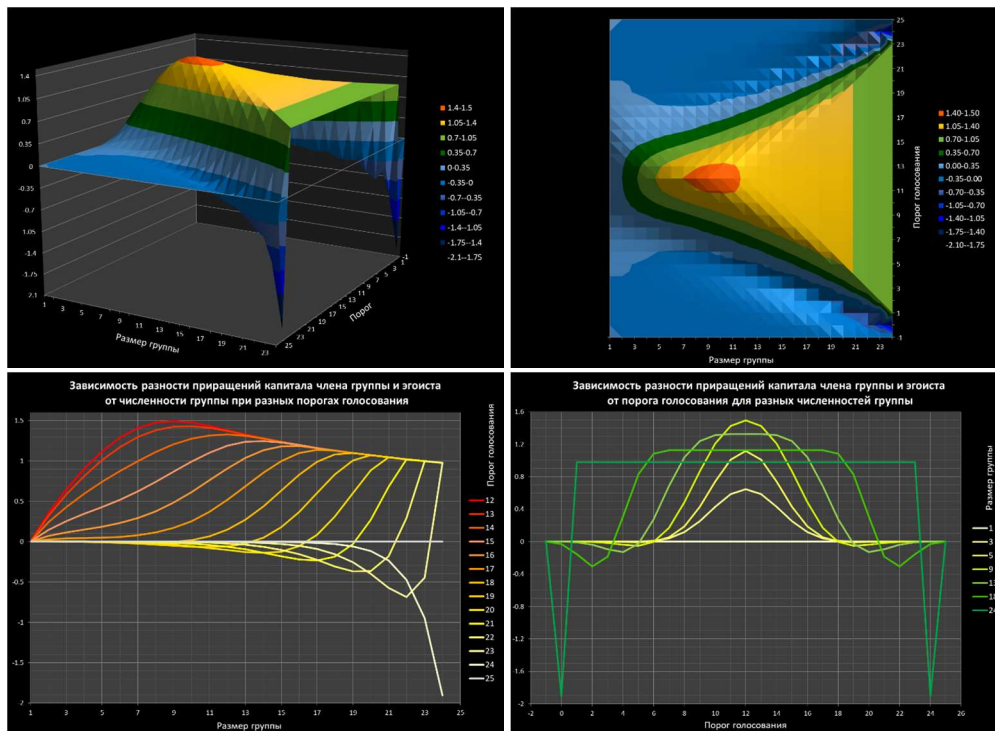


Рис. 6. Разность средних приращений капитала члена группы и эгоиста за 1 шаг; 25 участников: эгоисты и группа; нормальное распределение; $\mu = 0$, $\sigma = 12$

Следствие 2. При гауссовском генераторе предложений разность СПК участника группы и эгоиста выражается формулой

$$M(\tilde{d}_g) - M(\tilde{d}_e) = \frac{\sigma f}{q} \left((P_{[an]-n_g, n_e} - P_{[an], n_e}) \left(\frac{q}{\sqrt{g}f} f_0 \left(\frac{\mu}{\sigma_g} \right) + F_0 \left(\frac{\mu}{\sigma_g} \right) \right) - \right. \\ \left. - (P_{[an]-n_g-1, n_e-1} - P_{[an]-1, n_e-1}) F_0 \left(\frac{\mu}{\sigma_g} \right) - (P_{[an]-1, n_e-1} - P_{[an], n_e}) \right).$$

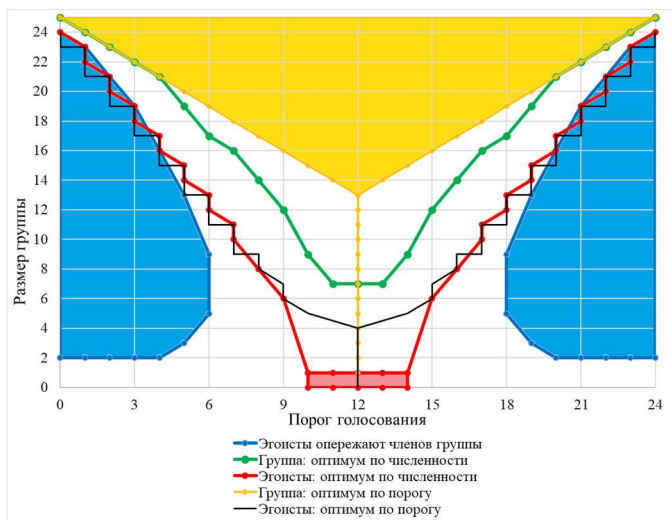


Рис. 7. Области, в которых эгоисты опережают членов группы по СПК и оптимумы СПК эгоистов и членов группы по численности/порогу при фиксированных пороге/численности. 25 участников: эгоисты и группа; нормальное распределение; $\mu = 0$

При абсолютных порогах голосования от 7 до 17 (α от¹ 28% до 68%) рассматриваемая разность всегда положительна: выгоднее быть в группе. При удалении от этого отрезка расширяется диапазон численностей группы, при которых выгоднее быть эгоистом. Эти диапазоны показаны голубым на

¹ Поскольку число агентов – целое, границы этого отрезка можно задавать с точностью до $1/25 = 4\%$: в полуинтервалах $[28\%, 32\%]$ и $[68\%, 72\%]$; множество реализуемых пропорций поддержки предложений симметрично относительно простого большинства.

рис. 7. При самых высоких и самых низких порогах голосования эгоисты лидируют почти при любой структуре общества.

Их превосходство наиболее заметно там, где поверхность СПК эгоистов имеет «пики», т.е. в тех частях зон 4 и 5, где голосов малого числа эгоистов достаточно для принятия выгодных либо блокирования невыгодных для них предложений.

В свою очередь, член группы имеет наибольшее превосходство над эгоистом, когда $n_g = 9$ (36% общества), а процедура – простое большинство. Как отмечено выше, эта же точка доставляет локальный минимум среднему капиталу по всему обществу.

4.2. ДИНАМИКА КАПИТАЛОВ В НЕБЛАГОПРИЯТНОЙ СРЕДЕ

Отметим закономерности, характерные для умеренно неблагоприятной среды. Пусть $\mu = -1$, $\sigma = 12$. На рис. 8а показано СПК эгоистов: здесь часть поверхности, соответствующая высоким порогам голосования и очень большой группе, оказывается «сжатой» вдоль вертикальной оси по сравнению с частью (в точности симметричной ей при $\mu = 0$), отвечающей низким порогам. Последняя имеет более высокий пик и заходит (в отличие от первой) в отрицательную область. В зоне 3 (между двумя «хребтами») СПК эгоистов отрицательно. В ней, напомним, предложения принимаются в интересах группы: голосов эгоистов недостаточно для влияния на решения общества. СПК эгоистов в обществах с малой или отсутствующей группой при простом большинстве ниже, чем в нейтральной среде.

СПК члена группы (рис. 8б) также заходит в отрицательную область – при низких порогах голосования; сильнее всего – когда группа мала. В неблагоприятной среде в этой зоне значений параметров капитал теряют все участники, поскольку принимается много предложений, невыгодных для обеих категорий агентов. Как и в случае $\mu = 0$, СПК члена группы максимально в обществе с простым большинством и $n_g = 7$.

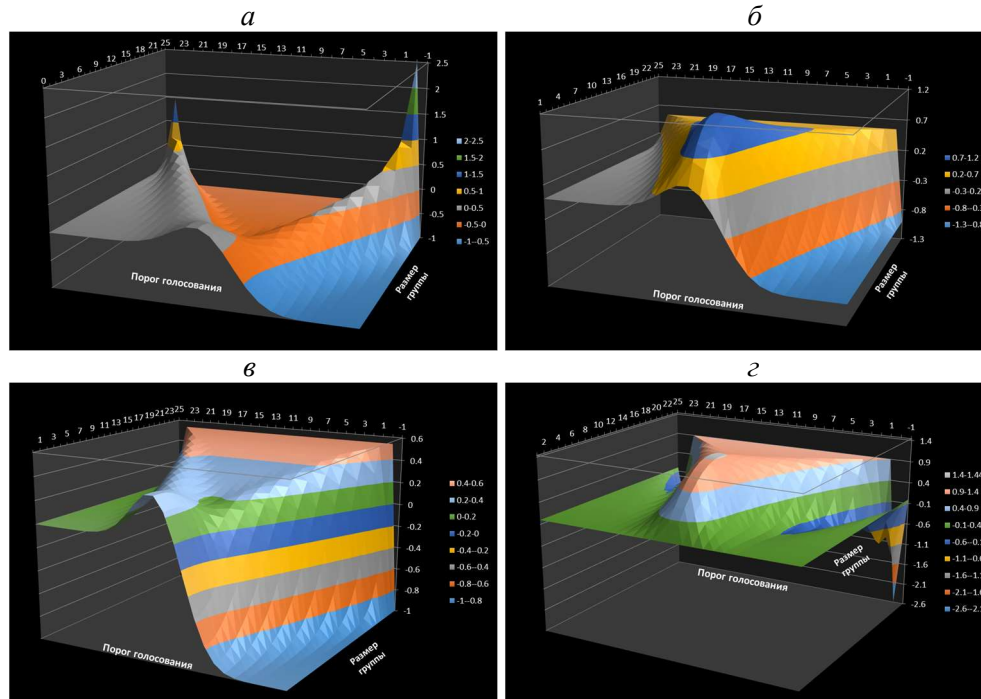


Рис. 8. СПК в двухкомпонентном обществе из $n = 25$ участников при нормальном распределении с $\mu = -1$, $\sigma = 12$ в модели без вымирания: а – эгоисты, б – члены группы: в – среднее по обществу, г – разность между СПК члена группы и эгоиста

СПК по всему обществу также зависит от порога голосования несимметрично (рис. 8в), принимая сравнительно низкие (в том числе отрицательные) значения при невысоких порогах. В то же время в зоне 3, где СПК эгоистов отрицательно, СПК общества положительно, поскольку группа, имеющая заметное положительное СПК, достаточно велика.

При этом поверхность разности СПК члена группы и эгоиста (рис. 8г) мало отличается от полученной для случая $\mu = 0$ (в частности, имеет максимум при $n_g = 9$), и можно сделать качественный вывод, что неблагоприятность среды примерно в равной степени затрагивает члена группы и эгоиста. При этом поверхность на рис. 8г не симметрична относительно $\alpha n = 12$.

4.3. СЛУЧАЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ТЯЖЕЛЫМИ ХВОСТАМИ

В [3, 10] установлено, что в случае, когда предложения генерируются распределениями с тяжелыми хвостами, динамика капиталов однородных обществ заметно отличается от наблюдаемой при нормальном распределении. Для сравнения с полученными выше результатами рассмотрим зависимость СПК двухкомпонентных обществ от размера группы и порога голосования при генерации предложений симметризованным распределением Парето (далее – *СП-распределение*) с параметром $k = 2,01$ (рис. 9). Это распределение имеет по сравнению с гауссовским высокую вероятность больших выбросов. Распределения сопоставляются по квартилям [3]. При этом нормальному распределению с $\sigma = 12$ соответствует СП-распределение с $k = 2,01$ и $\sigma \approx 276,6$.

В среде с большими выбросами очертания поверхностей СПК эгоистов и членов группы примерно такие же, как при нормальном распределении с теми же квартилями, но наибольшие значения СПК участников существенно выше. При простом большинстве группе выгоднее всего иметь размер 8 (при нормальном распределении капитал ее членов быстрее всего рос при $n_g = 7$), а разница между СПК члена группы и эгоиста максимальна при $n_g = 10$ (в случае нормального распределения – при $n_g = 9$).

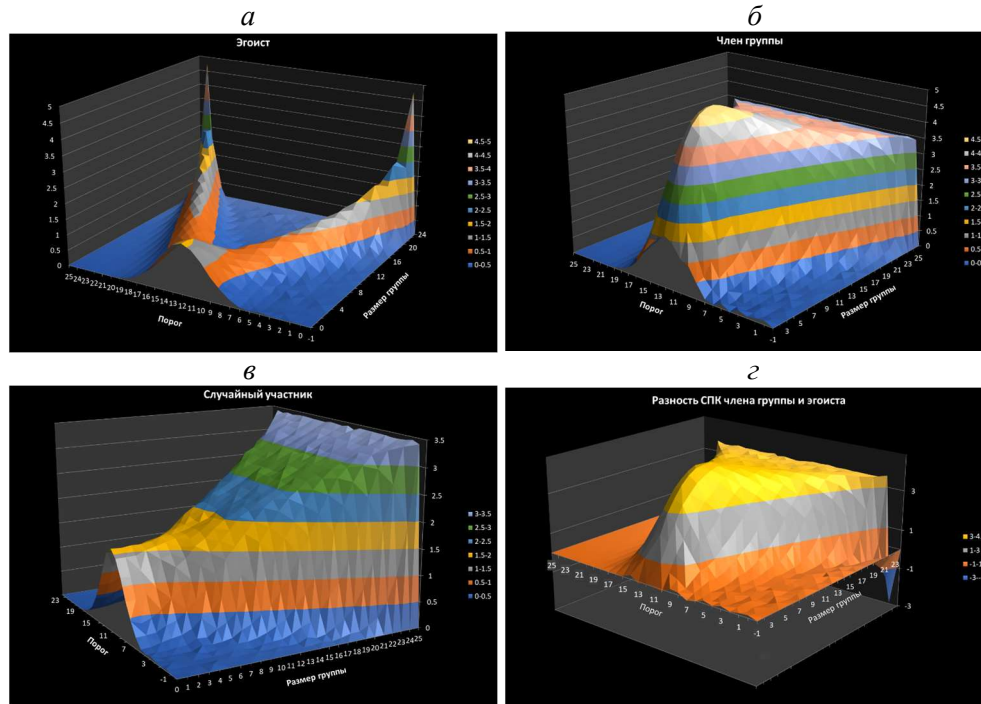


Рис. 9. Поверхности СПК в двухкомпонентном обществе из $n = 25$ участников при СП-распределении с $k = 2,01$, $\mu = 0$ и $\sigma = 276,6$ в модели без вымирания: а – эгоисты, б – члены группы, в – среднее по обществу, г – разность между СПК члена группы и эгоиста

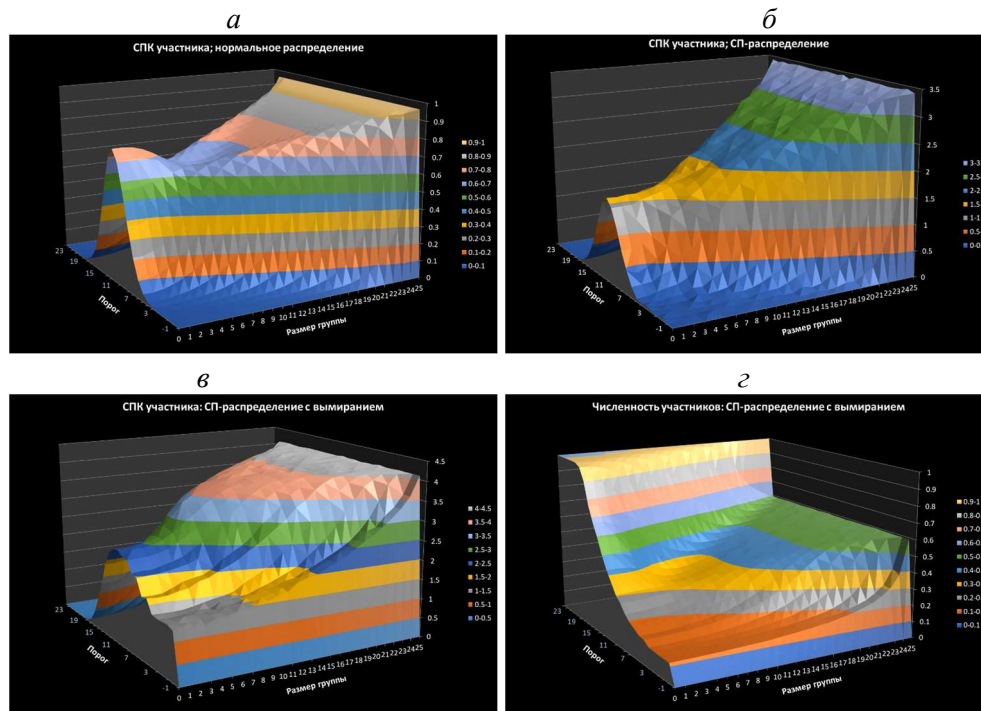


Рис. 10. Показатели общества при $\mu = 0$: а – СПК без вымирания для нормального распределения, б – СПК без вымирания для СП-распределения; в – СПК с вымиранием для СП-распределения, г – относительная численность для СП-распределения. Начальная численность $n = 25$

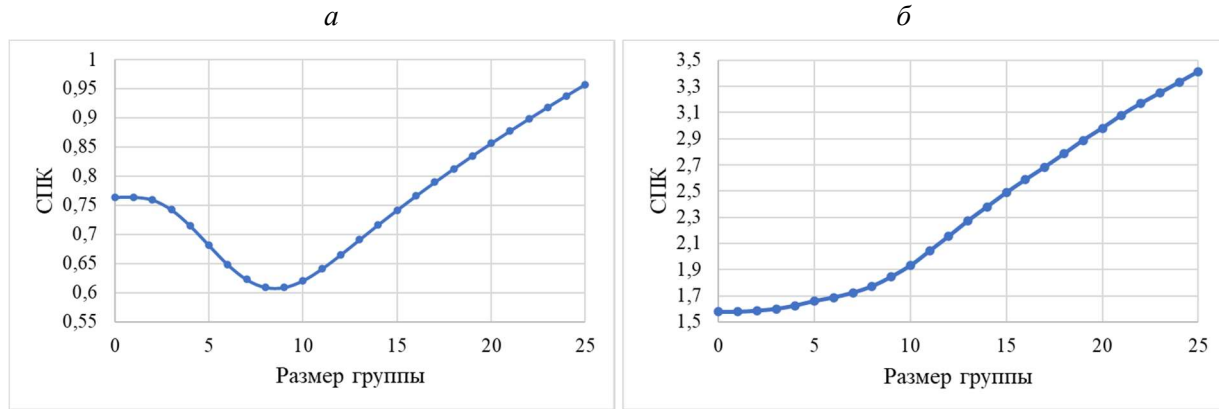


Рис. 11. СПК по обществу из $n = 25$ участников при простом большинстве: а – нормальное распределение с $\mu = 0, \sigma = 12$; б – СП-распределение с $k = 2,01, \mu = 0, \sigma = 276,6$

Форма поверхности СПК по обществу (рис. 9в) заметно отличается от таковой для нормального распределения (рис. 5, рис. 8в; для удобства сравнения эти поверхности при $\mu = 0$ представлены на рис. 10аб). А именно, СПК агента при СП-распределении не имеет минимума при $n_g = 9$ и при простом большинстве растет с увеличением размера группы (рис. 11). В частности, если расформировать группу из 8 членов, то в случае нормального распределения общество будет богатеть на 27% быстрее, а в случае СП-распределения с $k = 2,01$ – медленнее. То же, разумеется, будет относиться и к собранному со всего общества налогу, если им обложена прибыль участников.

4.4. ДИНАМИКА В МОДЕЛИ С ВЫМИРАНИЕМ

Обратимся к особенностям динамики модели с вымиранием.

На рис. 12 представлены поверхности СПК и средней относительной численности после 500 шагов для эгоистов и членов группы в зависимости от исходного размера группы и порога голосования. Предложения генерируются СП-распределением с $k = 2,01, \mu = 0, \sigma = 276,6$. Результаты получены имитационным моделированием.

Наиболее благоприятны для эгоистов по обоим критериям (СПК и численности) зоны 4 и 5. «Хребет» поверхности СПК эгоистов, находящийся в зоне 5 сравнительно низких порогов голосования, шире, чем «хребет» в зоне 4. В зоне 4 эгоисты, имеющие возможность блокировать невыгодные для них предложения, лучше сохраняют численность, но имеют более низкое СПК, чем в зоне 5, где их голосов достаточно для принятия выгодных для них предложений. В то же время лучше всего численность обеих категорий агентов сохраняется в зоне 2, где предложения принимаются очень редко, а также вблизи границы этой зоны.

В зонах 4 и 5 эгоисты наиболее благополучны, когда их мало. Для членов группы также выгодна ее низкая начальная численность (в данном случае от 3 до 5, т.е. 12–20% числа участников) но – при простом большинстве. Тогда они имеют наибольшее СПК и эффективно сохраняют относительную численность.

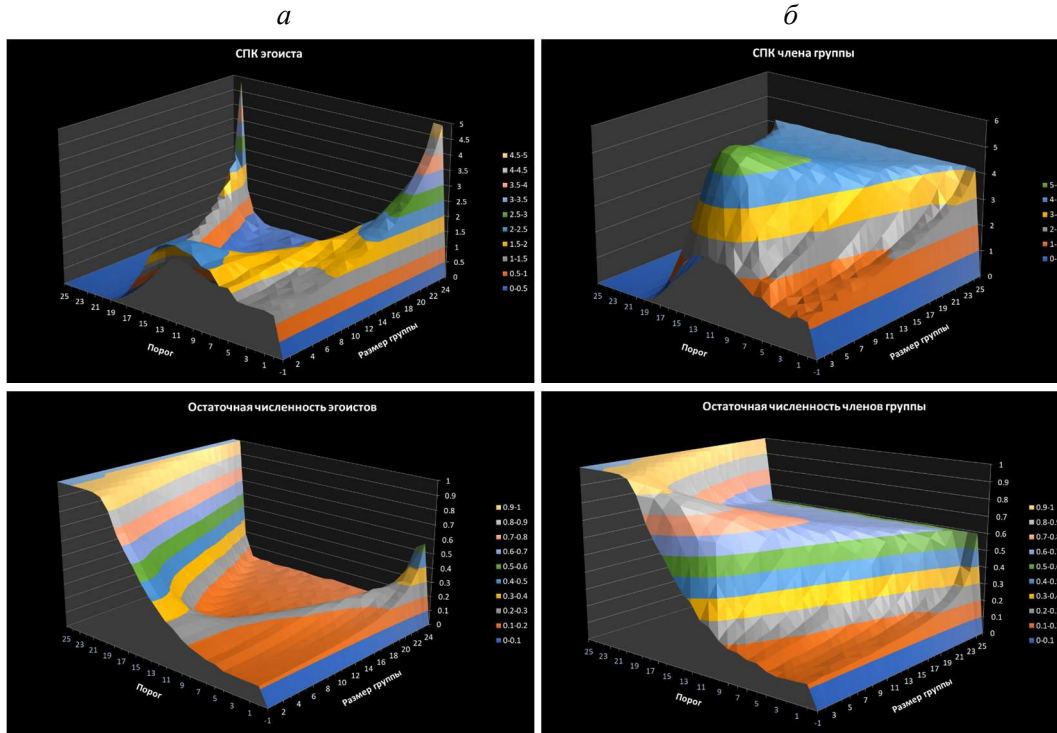


Рис. 12. СПК и относительная численность после 500 шагов с вымиранием; начальный капитал 40; $n = 25$ участников; СП-распределение с $k = 2,01, \mu = 0, \sigma = 276,6$; а – эгоист, б – член группы

За исключением зоны 2, группа сохраняет численность лучше, чем эгоисты. СПК члена группы максимально при $n_g = 6$ и простом большинстве.

Рассмотрим теперь поверхность СПК всего общества (рис. 10в). При уменьшении исходного размера группы до низких значений СПК заметно падает. При начальной численности группы более 8 СПК выше, чем в случае без вымирания (рис. 9в). В модели с вымиранием по критерию СПК обществу выгодно иметь группу размером не менее трети от общей численности. Однако рост группы от этого значения увеличивает СПК довольно медленно.

Сравним поверхности численности общества и его СПК (рис. 10вг). Численность лучше всего сохраняется при высоких порогах голосования, но при этом СПК близок к нулю, так как решения принимаются очень редко. При большой группе и средних порогах голосования общество имеет высокое СПК, но к 500-му ходу не менее 40% участников разоряется.

Таким образом, критерии численности и СПК оценивают общества по-разному: первый максимизируется отказом от принятия предложений, второй – принятием предложений, выгодных для достаточно большой группы, что приводит к довольно интенсивному разорению участников.

Рис. 13 позволяет оценить влияние размера группы на СПК общества в разных средах. Так, при СП-распределении с $k = 2,01$ и порогах голосования среднего диапазона в случае с вымиранием разница между обществом с максимальной ($n_g = 25$) и умеренной ($n_g = 16$) группой невелика (рис. 13в). Иными словами, численность группы в 64% от всего общества обеспечивает СПК почти максимального достижимого уровня. Тем самым в среде с нередкими аномальными выбросами важно иметь группу размера около $2/3$, но дальнейшее ее увеличение при средних порогах голосования не дает существенного роста СПК.

При нормальном распределении без вымирания (рис. 13а) и простом большинстве СПК общества из эгоистов фактически равно СПК общества с группой из 16 участников, и они существенно отстают от СПК общества-группы (где $n_g = 25$).

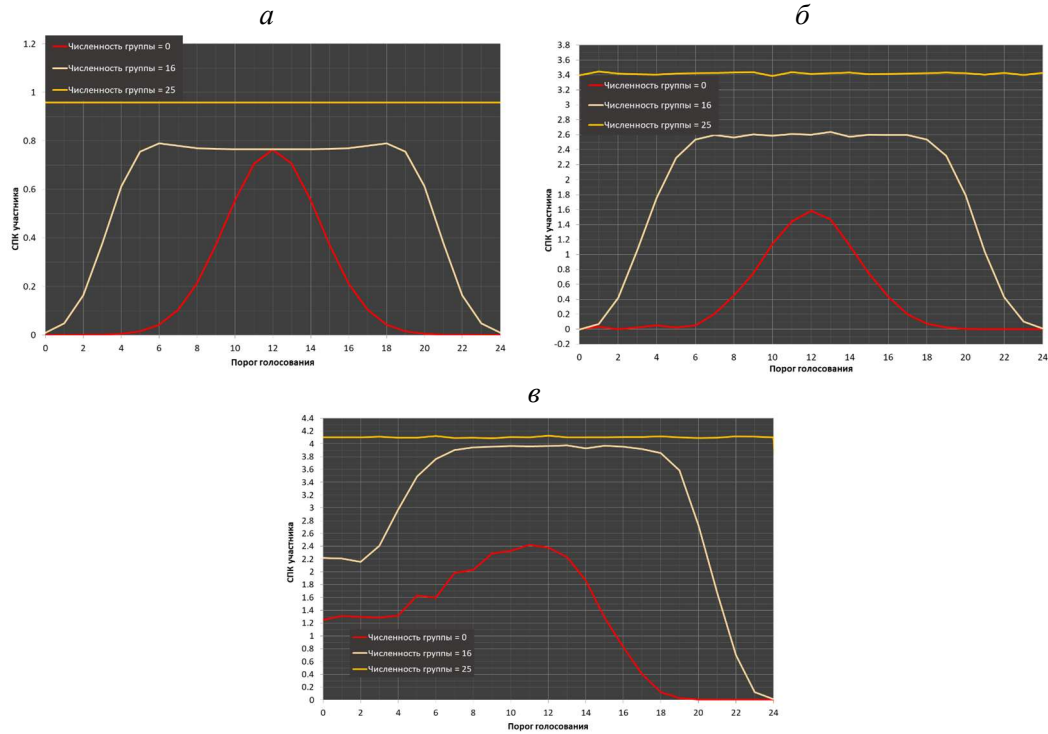


Рис. 13. Срезы поверхностей СПК общества при размерах группы 0, 16 и 25: а – нормальное распределение без вымирания, б – СП-распределение без вымирания, в – СП-распределение с вымиранием

При СП-распределении с $k = 2,01$ без вымирания (рис. 13б) ситуация промежуточная: СПК общества с $n_g = 16$ значительно выше, чем в обществе из эгоистов, в том числе при простом большинстве, но заметно ниже, чем в обществе-группе. Таким образом, «конкурентоспособность» общества из эгоистов при распределении с тяжелыми хвостами намного ниже, и для достижения высокого среднего капитала нужно иметь большую группу.

5. Обсуждение результатов

В данном разделе обсудим основные выводы работы, как уже сформулированные выше, так и новые.

В статье в предположениях модели ViSE рассмотрены общества, состоящие из группы и эгоистов при разных порогах принятия коллективных решений.

В большинстве случаев групповая стратегия эффективнее эгоистической. При $\mu = 0$ и гауссовском генераторе предложений из 575 рассмотренных нетривиальных обществ с 25 агентами, где представлены обе стратегии ($n_g \in [2, 24]$; $\alpha n \in [0, 24]$), это верно для 347 обществ (60,3%). При порогах голосования от 7 до 17 групповая стратегия побеждает всегда. В то же время при остальных порогах в 70,8% обществ больший ожидаемый капитал обеспечивает эгоистическая стратегия.

Последнее связано с тем, что при низких порогах голосования принимается *большинство* предложений, причем отклоняемые предложения в среднем более разорительны для эгоистов. Тем самым последним удается более эффективно блокировать невыгодные для них предложения. При высоких порогах ситуация зеркальна в отношении принятия/непринятия предложений: они одобряются *редко*, и эгоисты предъявляют к ним более жесткие требования, чем члены группы в терминах доли удовлетворенных агентов своей категории.

Упомянутая «зеркальность» при $\mu = 0$ приводит к симметрии результатов относительно порога большинства $\alpha = 0,5$.

Симметричность функции среднего приращения капитала (СПК) относительно $\alpha = 0,5$ в нейтральной среде при фиксированной структуре общества и симметричном распределении

предложений вытекает из полученных в статье аналитических выражений СПК эгоистов и членов группы в модели с постоянным числом агентов (теорема 1 и ее следствия).

Установлены закономерности влияния благоприятности среды, типа распределения, структуры общества и процедуры голосования на СПК двух категорий участников и всего общества на примере общества из $n = 25$ агентов. Найденные зависимости представлены поверхностями в \mathbb{R}^3 и их сечениями. Детально изучен случай нейтральной среды ($\mu = 0$).

Установлено, что для эгоистов наиболее выгодны ситуации, когда их количество n_e мало, а число их голосов, необходимое для принятия или отклонения предложения, – более половины n_e (но не более n_e). Менее выгоден для них локальный максимум, доставляемый обществом, состоящим только из эгоистов.

СПК члена группы при гауссовском генераторе предложений максимально, когда в ней $n_g = 7$ агентов из $n = 25$, а процедура голосования – простое большинство. С ростом n оптимальный размер группы растет как $\sqrt{2n}$ (при $n = 144,5$ млн, например, эта величина равна 17 тыс.).

Значения параметров, выгодные для сравнительно небольшой группы, невыгодны для общества в целом, содержащего эту группу. Так, среднее по обществу СПК агента имеет локальный минимум при $n_g = 9$ (когда член группы имеет наибольшее превосходство над эгоистом), а при $n_g = 7$ (этот размер группы дает ей наибольшее СПК) – выше этого минимума лишь на 2,6%. Среднее СПК агента максимально, когда все агенты в группе. Общество, где все агенты – эгоисты, а процедура – простое большинство, доставляет среднему СПК агента локальный максимум, составляющий 80,6% от наибольшего значения.

При ухудшении внешних условий доля нетривиальных обществ, в которых групповая стратегия эффективнее эгоистической, медленно растет. Так, при $\mu/\sigma = -1/12$ она составляет 61,4%, а в сильно неблагоприятной среде, где $\mu/\sigma = -1$, равна 64% (против 60,3% в нейтральной среде). В благоприятной среде ситуация симметрична: 61,4% при $\mu/\sigma = 1/12$ и 64% при $\mu/\sigma = 1$. Таким образом, эгоистическая стратегия наиболее кон-

курентоспособна в нейтральной среде. Отклонения от нейтральности среды повышают привлекательность группы.

Некоторые качественные закономерности чувствительны к типу стохастического генератора предложений. Так, при распределении с тяжелыми хвостами (симметризованное распределение Парето с $k = 2,01$) поверхность СПК общества не имеет локального минимума при сравнительно небольшой группе: в случае простого большинства СПК монотонно растет с размером группы, начиная с $n_g = 1$ (рис. 11). Эгоистическая стратегия при таком генераторе оказывается менее конкурентоспособной: групповая стратегия в нейтральной среде дает более высокое СПК для $3/4$ нетривиальных обществ (против $3/5$ при гауссовском генераторе).

Для распределения с тяжелыми хвостами в статье рассмотрен также вариант модели ViSE с вымиранием. При этом появляется еще один критерий – доля не разорившихся участников. Показано, что эти два критерия в некоторых случаях противоречат друг другу: в обществах, обеспечивающих высокое СПК, разорение может идти интенсивнее, чем в других. Чтобы выбрать один из критериев, нужно ответить на вопрос: «Что важнее – достаток или безопасность?» Альтернативой этому выбору может быть построение агрегированного критерия, балансирующего указанные два.

6. Заключение

В работе изучена динамика модели ViSE для обществ, состоящих из группы и эгоистов.

Получены представления ожидаемых значений капитала как функций от размера группы, порога голосования и других параметров модели. В общем случае нахождение этих величин требует интегрирования; в условиях гауссовского генератора предложений для них получены выражения в стандартных функциях.

Исследованы зависимости этих величин от структуры общества и порога голосования – для гауссовских и паретовских распределений стохастических предложений, нейтральной и умеренно неблагоприятной среды, постоянного и уменьшающегося вследствие разорения числа участников.

Эти зависимости представлены поверхностями в \mathbb{R}^3 . Обсуждаются условия, определяющие сравнительную эффективность групповой и эгоистической стратегий, а также выгоду общества в целом. Для сплоченной эгоистичной группы (олигархии, бюрократии, мафии и др.) ей выгоднее всего быть сравнительно небольшой. В модели ViSE эта оптимальная доля, при которой группа наиболее эффективно защищает свои интересы (часто в ущерб остальным агентам) падает с ростом числа агентов n . Примерно та же доля группы оказывается наименее выгодной не только для эгоистов, но и для общества в целом.

Для эгоистов наиболее выгодны ситуации, когда их количество n_e мало, а число их голосов, необходимое для принятия или отклонения предложения, – более половины n_e (но не более n_e). Менее выгоден для них локальный максимум, доставляемый обществом, состоящим из эгоистов.

Общество с постоянным числом участников максимизирует свой капитал, когда все агенты – в группе. Общество, где все агенты – эгоисты, а процедура – простое большинство, доставляет приращению его капитала локальный максимум, который при нейтральной среде и 25 агентах составляет 80,6% от наибольшего значения.

Данное исследование продолжено в отдельной работе (на момент принятия к публикации данной статьи она представлена в журнал), где изучены сценарии эволюции двухкомпонентного общества при изменении его структуры и порога голосования. Полученные результаты интерпретируются в терминах уровня кооперации в обществе и степени его либеральности.

Литература

1. АФОНЬКИН В.А. *Налоговые схемы стимулирования просоциального голосования в модели ViSE* // Проблемы управления. – 2021. – №1. – С. 61–68.
2. БОРЗЕНКО В.И., ЛЕЗИНА З.М., ЛОГИНОВ А.К., ЦОДИКОВА Я.Ю., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Стратегии при голосовании в стохастической среде: эгоизм и коллективизм* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №2. – С. 154–173.

3. МАКСИМОВ В.М., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Социальная динамика, определяемая голосованием: квартильный учет особенностей стохастической среды* // Автоматика и телемеханика. – 2020. – №10. – С. 149–172.
4. МАЛЫШЕВ В.А., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Об оптимальном пороге притязаний группы при голосовании в стохастической среде* // Автоматика и телемеханика. – 2017. – №6. – С. 157–172.
5. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Аналитическое выражение ожидаемых значений капиталов при голосовании в стохастической среде* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №3. – С. 152–165.
6. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., ЛОГИНОВ А.К., ЦОДИКОВА Я.Ю., ЛЕЗИНА З.М., БОРЗЕНКО В.И. *Анализ феноменов коллективизма и эгоизма в контексте общественного благосостояния* // Проблемы управления. – 2008. – №4. – С. 30–37.
7. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., ЛОГИНОВ А.К., ЦОДИКОВА Я.Ю., ЛЕЗИНА З.М., БОРЗЕНКО В.И. *Голосование в стохастической среде: случай двух групп* // Проблемы управления. – 2010. – №1. – С. 18–25.
8. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., ЛОГИНОВ А.К., ЦОДИКОВА Я.Ю., ЛЕЗИНА З.М., БОРЗЕНКО В.И. *Голосование в стохастической среде: феномен убывания полезностей при расширении фракций* // XI Международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества, Москва, 6–8 апреля 2010 года. ГУ–ВШЭ, 2010. – С. 1–3. – URL: www.hse.ru/data/2010/04/02/1218244162/cheb.doc.
9. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., МАЛЫШЕВ В.А., ЦОДИКОВА Я.Ю., ЛОГИНОВ А.К., ЛЕЗИНА З.М., АФОНЬКИН В.А. *Оптимальный порог голосования как функция коэффициента вариации среды* // Управление большими системами. – 2016. – Т. 62. – С. 169–187.
10. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., МАЛЫШЕВ В.А., ЦОДИКОВА Я.Ю., ЛОГИНОВ А.К., ЛЕЗИНА З.М., АФОНЬКИН В.А. *О сравнительной полезности альтруизма и эгоизма при голосовании в стохастической среде* // Автоматика и телемеханика. – 2018. – №11. – С. 123–149.

11. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., ЦОДИКОВА Я.Ю., ЛОГИНОВ А.К., ЛЕЗИНА З.М. *Какой процент альтруистов нужен в обществе и на что им следует направлять свои усилия?* // Второй Российский экономический конгресс, Суздаль, 18-22 февраля 2013 г. – М.: НЭА, 2013. – С. 1–3.
12. AXELROD R., HAMILTON W.D. *The evolution of cooperation* // Science. – 1981. – Vol. 211, No. 4489. – P. 1390–1396.
13. CHEBOTAREV P.JU., BORZENKO V.I., LEZINA Z.M., LEZINA I.V., LOGINOV A.K., TSODIKOVA JA.JU. *A model of social dynamics governed by collective decisions* // Abstracts of the Int. Conf. "Mathematical Modelling of Social and Economical Dynamics" (MMSSED-2004), June 23–25, 2004. – URL: <http://www.mmsed.narod.ru/articles/artChebotarev.ps>.
14. KOLOKOLTSOV V.N., MALAFEYEV O.A. *Understanding Game Theory: Introduction to the Analysis of Many Agent Systems with Competition and Cooperation*. – World Scientific, 2020.
15. MALYSHEV V. *Optimal majority threshold in a stochastic environment* // Group Decision and Negotiation. – 2021. – V. 30. P. 427–446.
16. MOULIN H. *Cooperative Microeconomics: A Game-theoretic Introduction*. – Princeton University Press, 2014.
17. TSODIKOVA Y., CHEBOTAREV P., LOGINOV A. *Modeling Responsible Elite* / Recent Advances of the Russian Operations Research Society. Ed. by F. Aleskerov and A. Vasin. Newcastle upon Tyne: Cambridge Scholars Publishing, 2020. – P. 89–110.

TWO-COMPONENT SOCIETIES IN THE ViSE MODEL: HOW THE LEVEL OF COOPERATION AND VOTING THRESHOLD AFFECT THE CAPITAL DYNAMICS

Pavel Chebotarev, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, head of laboratory (pavel4e@gmail.com).

Vladislav Maksimov, Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, PhD student (vladislav.maksimov@phystech.edu).

Abstract: Under the assumptions of the ViSE model, representations of the expected capital gains in societies consisting of a group and egoists are obtained. In the general case, finding these quantities requires integration; for the case of a Gaussian proposal

generator, explicit expressions are obtained for them. The dependences of these quantities on the level of cooperation and the voting threshold are investigated: for Gaussian and symmetrized Pareto distributions of stochastic proposals, a neutral and unfavorable environment, a constant and non-constant number of participants. These dependencies are represented by surfaces in \mathbb{R}^3 . Conditions that determine the comparative effectiveness of group and egoistic strategies, as well as the benefits of society as a whole, are discussed.

Keywords: social dynamics, voting, cooperation, stochastic environment, homines economici, voting threshold.

УДК 342.8

ББК 67.400.5

DOI: 10.25728/ubs.2021.93.2

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.Г. Чхартишвили.*

Поступила в редакцию 06.09.2021.

Опубликована 30.09.2021.

МОДЕЛИ, МЕТОДЫ И ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОПТИМИЗАЦИИ ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЯ В ДОМОХОЗЯЙСТВАХ

Гребенюк Г. Г.¹, Крыгин А. А.², Середа Л. А.³

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассматривается подход к оптимизации энергопотребления в домохозяйствах, позволяющий снизить трудоемкость расчетов активными потребителями экономически выгодных режимов бытовых приборов. На основе анализа применяемых методов оптимизации режимов энергопотребления выявлены причины, ограничивающие применение этих методов в практике домохозяйств. Одна из них заключается в наличии данных по оптимизируемым бытовым приборам и ограничениям. Выполнена формализация требований к режимам использования бытовых приборов с циклическим, термостатическим и комбинированным режимами работы. Показаны особенности формирования ограничений в задаче линейного программирования и предложена методика оптимизации режимов, доступная по трудоемкости активному потребителю. Приведены результаты моделирования, подтверждающие эффективность предложенной методики.

Ключевые слова: энергоэффективность, энергоменеджмент, домохозяйство.

1. Введение

Динамика изменения нагрузок электрических бытовых приборов оказывает значительное влияние на режимы работы энергосистемы любой страны. Неравномерность суточной нагрузки вызывает переход энергоблоков к неоптимальным режимам работы [15], для которых характерен значительный удельный расход топлива и стоимость производства энергии. Система переменных тарифов направлена на снижение неравномерности и объема энергопотребления различными группами потребителей, в том числе домохозяйствами. Со стороны потре-

¹ Георгий Григорьевич Гребенюк, д.т.н., г.н.с. (gggrebenuk@gmail.com).

² Андрей Александрович Крыгин, к.т.н., с.н.с. (andreyakr@yandex.ru).

³ Леонид Анатольевич Середа, н.с. (sereda@lab49.ru).

бителей имеется мотивация к снижению затрат путем изменения графика работы бытовых приборов таким образом, чтобы общая стоимость потребленной энергии была минимальной. Для реализации данной мотивации на практике потребитель должен определить оптимальные режимы работы своих приборов. Это не тривиальная задача, для решения которой в помощь потребителю создаются специальные методики и программы оптимизации.

Предметом настоящего исследования является разработка методики оптимизации режимов энергопотребления бытовых приборов, удобной для практического использования в жилом секторе. Работы в этой области [5–8, 11–14, 16, 17, 18–22, 23] можно отнести к теоретическим. Они содержат этапы формализации задачи, вывода необходимых уравнений, неравенств, выбора оптимизируемой функции. С использованием компьютерного моделирования находится оптимальный график и оценивается экономическая выгода.

Описанный подход в силу сложности восприятия потребителем не реализуется на практике. Разрабатываемая в статье методика оптимизации энергопотребления содержит алгоритмы, учитывающие доступность получения данных для ввода в программу оптимизации. Основная часть этих данных вводится непосредственно из паспортных характеристик бытовых приборов и лишь для приборов с термостатическим управлением потребовалась дополнительная простая методика измерения значений двух параметров, необходимых для решения общей оптимизационной задачи.

Статья состоит из двух частей: в первой части формулируются постановка задачи и требования к математической модели энергопотребления, во второй части предлагаются математические модели для описания функционирования конкретных бытовых электроприборов.

2. Математическая модель оптимизации энергопотребления

2.1. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Анализ работ [5–8, 11–14, 16, 17, 18–22, 23] показал, что основная причина, по которой практическое применение изложенных в них методик оптимизации затруднено, заключается в использовании сложных математических моделей, подготовка входных данных для которых требует определенной квалификации пользователя. Во многих случаях такие методики ориентированы на применение в инфраструктуре «умных» сетей [17].

Типовая схема взаимодействия между потребителем и используемой им программой оптимизации энергопотребления состоит из следующих этапов:

1. Определение электроприборов, подлежащих оптимизации. Формализация функциональных требований к приборам.
- 2) Ввод в программу оптимизации необходимых для расчета данных.
- 3) Расчет графиков работы электроприборов данной группы.

Этап 1. Определение электроприборов, подлежащих оптимизации. Формализация функциональных требований к приборам

Сгруппируем множество различных видов приборов в подмножества и определим для каждого из них структуру входных данных для программы оптимизации. При этом разделим входные данные на две части, описывающие паспортные характеристики прибора и функциональные требования пользователя к прибору.

1. Приборы, не подлежащие оптимизации.

К этому подмножеству относятся приборы, для которых невозможно формализовать функциональные требования, либо, наоборот, приборы, для которых программа работы точно задана. В него включены все приборы, запуск и остановку которых осуществляет пользователь (электрическая плита, компьютер, пылесос) и приборы с заданной автоматической программой работы, например, записывающий по таймеру рекордер. К это-

му подмножеству также можно отнести и осветительные приборы [24].

2. Приборы с циклическим режимом работы.

К этому подмножеству относятся приборы, у которых цикл работы состоит из выполнения заданного (по потребляемой энергии и времени выполнения) ряда операций: стиральные и посудомоечные машины, зарядные устройства и др.

Необходимый набор паспортных характеристик прибора для программы оптимизации у этого подмножества можно представить следующим образом:

- время выполнения цикла работы (или каждой операции цикла);
- количество потребляемой энергии за цикл (или каждой операции цикла).

Например, цикл работы посудомоечной машины состоит из трех операций: нагрев воды, мытье посуды и сушка.

Функциональные требования к приборам этого подмножества определяются интервалом времени, в течении которого прибор должен начать или закончить свою работу. Например, требуется зарядить ноутбук к семи часам утра.

3. Приборы с термостатическим управлением.

К этому виду относятся приборы, которые предназначены для поддержания температуры в заданных пределах, такие как кондиционеры, обогреватели, холодильники, морозильники. Можно определить алгоритм их включения и выключения, зависящий от температуры внутри прибора (назовем ее «внутренняя температура») и температуры окружающей среды («внешняя температура»).

Паспортные данные этого подмножества приборов включают только потребляемую мощность, а функциональные требования заключаются в том, что внутренняя температура должна находиться в заданном диапазоне. В таблице 1 конкретизируются понятия внутренней и внешней температуры и диапазона комфортных температур для основных приборов этого подмножества.

К перечисленным величинам необходимо добавить еще две, характеризующие скорость изменения внутренней темпера-

туры, например, для холодильника – скорость повышения температуры, когда он не работает, и понижения – когда работает. Об этих параметрах речь пойдет ниже, в разделе, посвященном созданным математическим моделям.

Таблица 1. Таблица температур, внутренних и внешних по отношению к прибору

	Холодильник	Морозильник	Кондиционер/ нагреватель
Внутренняя температура	Температура в камере	Температура в камере	Температура в комнате
Внешняя температура	Температура в комнате	Температура в комнате	Температура на улице
Θ^-_{comf}	0	-25	22
Θ^+_{comf}	6	-18	26

4. Приборы с циклическим режимом работы с возможностью прерывания и возобновления цикла.

К этому подмножеству можно отнести зарядные устройства (например, уже рассматриваемый процесс зарядки ноутбука в течении ночи можно прерывать и возобновлять), принтер (в тех случаях, когда имеется сервер печати и необходимо, например, распечатать определенное число страниц в ночное время) и др. В это подмножество также можно включить и несколько «зависимых» приборов, т.е. приборов, у которых время начала работы одного прибора зависит от времени окончания работы другого.

5. Приборы с несколькими режимами работы.

Это приборы, обладающие возможностью выполнить одну работу в разные промежутки времени с различным энергопотреблением. К этому подмножеству можно отнести как термостатические, так и приборы с циклическим режимом, например: кондиционер и обогреватель, зарядные устройства и другие приборы, имеющие несколько режимов.

В этом случае функциональные требования не изменятся, а к паспортным данным нужно добавить уже перечисленные данные для каждого режима.

Этап 2. Ввод в программу оптимизации необходимых для расчета данных

Существует «проблема входных данных»: с одной стороны, чем более подробные данные будут вводиться в программу по характеристикам приборам, графикам потребления приборов (для оценки суммарной потребляемой мощности) и пр., тем больший выигрыш будет у пользователя от оптимизации; с другой стороны, из-за увеличения объема ввода увеличивается трудоемкость этого процесса, что сокращает количество пользователей программ оптимизации. На трудоемкость влияет не только количество входных данных, но и их состав. Так любой пользователь из технического паспорта прибора может выбрать величину потребляемой мощности, но он не сможет рассчитать и ввести в модель коэффициент теплопередачи процесса теплообмена, так как для этого нужны специальные знания. В то же время значения этого параметра (как будет показано ниже) необходимо для оптимизации работы такого прибора как холодильник.

Исходя из сказанного можно сделать простой вывод: для практического применения методики оптимизации энергопотребления необходимо минимизировать объем вводимых пользователем входных данных и одновременно предоставить пользователю рекомендации для определения значений входных параметров.

Рассмотрим этот вывод на примере [23]. При формализации задачи оптимизации в этой работе для каждого прибора вводится матрица, строки которой определяют все допустимые графики работы прибора. Работа по составлению этой матрицы возлагается на пользователя. Если пользователь начнет вводить данные в программу оптимизации по методике, предлагаемой в [23], то трудоемкость процесса заполнения указанной матрицы будет значительной. Например, для стиральной машины в интервале ее работы 22:00 – 24:00 при десятиминутном интервале оптимизации пользователю придется заполнить нулями и единицами 12 строк этой матрицы.

Ясно, что объем вводимых данных избыточен и в программе оптимизации должен присутствовать модуль, автоматически

переводящий описание функциональных требований в матричное представление.

В [23] приведена методика оптимизации работы кондиционера с установкой диапазона изменения температуры в комнате 22–25 градусов. Для этого прибора представлен алгоритм оптимизации, но не приводится методика определения самих данных.

В некоторых ситуациях описанную выше матрицу допустимых графиков работы прибора невозможно заполнить: одна и та же строка матрицы может быть как допустимой, так и недопустимой, в зависимости от условий, никак не связанных с работой прибора.

Например, пусть необходимо оптимизировать работу стиральной машины и электрической сушилки так, чтобы операции стирки и последующей сушки закончились не позднее 23:00. Тогда строка в матрице, соответствующей сушилке, работа которой начинается в 21:00, будет допустимой, если операция стирки закончится к этому моменту, и недопустимой в обратном случае. В методике [23] не предложен механизм определения допустимости задаваемого пользователем графика работы прибора к условиям задачи.

Этап 3. Расчет графиков работы электроприборов данной группы.

Результатом взаимодействия потребителя и программы оптимизации по приведенной выше схеме является оптимальный набор графиков работы выбранных электроприборов. Под оптимальным набором понимается сумма допустимых графиков всех оптимизируемых приборов, которая достигает оптимума по выбранному критерию или критериям и удовлетворяет некоторым ограничениям. График работы оптимизируемого прибора назовем допустимым, если он удовлетворяет пользователя.

Выполненный анализ показал, что методику оптимизации энергопотребления нужно строить в следующем порядке:

- 1) провести группировку приборов по способу задания функциональных требований;
- 2) выяснить приемлемый для пользователя состав и вид входных данных;

3) определить минимальный набор входных данных для формализации ограничения суммарной потребляемой мощности;

4) сконструировать алгоритмы оптимизации, работающие с указанными выше входными данными.

Это означает, что первичным для практического применения методики оптимизации является вопрос о данных (по оптимизируемым приборам и ограничениям), которые может предоставить пользователь, а алгоритмы оптимизации являются вторичными. Рассмотрим подробно каждый из перечисленных пунктов 1–4.

2.2. ОБЩИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Общий подход к решению задачи оптимизации заключается в следующем: весь период, на котором проводится оптимизация, разбивается на равные интервалы (назовем их «интервалы оптимизации»), внутри которых такие переменные модели, как стоимость единицы энергии, суммарное потребление, режимы работы приборов и пр., условно считаются постоянными величинами. Как правило, длительность интервала оптимизации составляет 1–10 минут.

Особенностью рассматриваемой задачи, с точки зрения поиска математического метода ее решения, является значительное количество переменных. Даже для небольшого домохозяйства и длительности оптимизации в несколько суток общее количество ограничений составляет порядка 10^2 – 10^4 . Эффективным методом решения рассматриваемой оптимизационной задачи является метод линейного программирования [3, 4]. Поэтому алгоритм оптимизации проектируется так, чтобы полученные неравенства удовлетворяли условиям задачи линейного целочисленного программирования (ЛП).

Для этого в задачу ЛП вводятся переменные величины, отражающие состояние прибора (работает/не работает) на каждом интервале оптимизации, Постоянные величины, например, мощность прибора или стоимость киловатта в заданном интер-

вале времени, присутствуют в виде коэффициентов в ограничениях и целевой функции.

Наконец, строится целевая функция и ограничения в виде неравенства, описывающие функциональные требования к прибору. В результате этих действий задача сводится к задаче линейного целочисленного программирования.

2.3 ФОРМАЛИЗАЦИЯ ОГРАНИЧЕНИЯ СУММАРНОЙ ПОТРЕБЛЯЕМОЙ МОЩНОСТИ

Из ранее принятого допущения постоянства общей потребляемой мощности в течение любого интервала оптимизации вытекает ограничение общей потребляемой энергии на этом интервале оптимизации. Тогда при известном максимальном потреблении эта задача сводится к задаче определения функции $A^-(t)$ – суммарного потребления в течении t -го интервала оптимизации всех приборов, не входящих в список оптимизируемых приборов. При этом нужно учитывать сформулированное утверждение о минимизации объема входных данных, вводимых пользователем.

Методам определения функции $A^-(t)$ посвящено немало количество работ. В канонической, активно цитируемой и используемой работе [10] благодаря полной и детальной статистике по приборам и социальному составу жителей исследуемых домохозяйств построена математическая модель (модель «Капассо»), которая с высокой точностью прогнозирует графики потребления электроэнергии как суммарной, так и по отдельным группам приборов. Для РФ подобная статистика отсутствует, поэтому в данной работе предлагается использовать оценку функции $A^-(t)$ на основе методики расчета суточного профиля нагрузки домохозяйств [1]. Методика построена таким образом, чтобы минимизировать общее количество измерений. Однако в результате обработки данных получается усредненный суточный профиль нагрузки в то время, как для ограничения по суммарной потребляемой мощности нужна оценка максимального суточного профиля. Поэтому потребовалась небольшая модификация методики, заключающаяся в предположении, что значения потребляемой мощности, полученные при измерении,

можно рассматривать как случайную величину, имеющую нормальное распределение. Тогда можно применить правило трех сигм и утверждать, что почти всегда максимальная потребляемая мощность $A^-(t)$ будет меньше суммы средней мощности и утроенного среднеквадратичного отклонения. С помощью этого утверждения была проведена оценка функции $A^-(t)$.

Таким образом, определены все структуры входных данных для программы оптимизации. С одной стороны, каждый из перечисленных параметров является необходимым, без них оптимизацию провести невозможно, а с другой – пользователь без труда сможет определить значение каждого параметра, так как возможно всего 4 варианта:

- значение параметра определяется предпочтениями пользователя (срок окончания программы стирки, диапазон комфортных температур для кондиционера);

- значение параметра можно найти в паспорте прибора (потребляемая мощность, время работы операции). Точность параметров, указанных в паспорте приборов, может быть недостаточной для их использования в предлагаемом методе. В этом случае повышение точности может быть достигнута с использованием современных датчиков и технологий «Интернета вещей»;

- параметры, относящиеся к ограничению максимального потребления, определяются не пользователем, а соответствующими аудиторами, причем, аудит проводится только у нескольких представителей домохозяйств, в среднем составляющей единицы и иногда даже доли процентов [1];

- значения двух параметров для приборов с термостатическим управлением; ниже будет приведена простая (для пользователя) методика их определения.

Перейдем к рассмотрению созданной математической модели и алгоритмам оптимизации энергопотребления.

2.4 АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЯ

Алгоритм конструируется достаточно стандартным образом: по каждому из рассмотренных подмножеств видов приборов определялся их вклад в целевую функцию и ограничение

по суммарной потребляемой мощности, а также составлялись неравенства, описывающие ограничения, вводимые на переменные и функциональные требования к приборам. Для этого введены переменные, описывающие состояние прибора (вкл/выкл) в течение каждого интервала оптимизации и с их помощью получены все перечисленные выражения (целевой функции как суммарной стоимости потребленной электроэнергии, и т.д.).

Алгоритм допускает расширение системы ограничений, в том числе связанных с безопасностью и надежностью функционирования инженерных сетей.

Рассмотрим особенности в конструировании алгоритма.

1. Приборы с циклическим режимом работы.

Основная трудность моделирования этой группы приборов состоит в преобразовании полученных выражений к задаче линейного программирования. Методику преобразования рассмотрим на простом примере: необходимо оптимизировать работу прибора, цикл которого состоит из трех операций (каждая из которых занимает один интервал оптимизации) в течении шести интервалов оптимизации.

Обозначим a_1, a_2, a_3 – потребление прибора на каждом интервале цикла, а $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ – стоимости единицы электроэнергии на каждом интервале оптимизации.

Введем четыре оптимизируемых переменных $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \{0, 1\}$, соответствующих номеру интервала начала работы прибора, следующим способом: если прибор начинает работать с l -го интервала, то $e_k = 1, k = l$ и $e_k = 0, k \neq l$. Тогда общие ограничения на переменные можно записать следующим образом:

$$(1) \quad \begin{cases} 0 \leq e_1 \leq 1, \\ \dots \\ 0 \leq e_4 \leq 1, \\ e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 1. \end{cases}$$

Выражение части целевой функции:

$$(2) \quad e_1(c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3) + e_2(c_2a_1 + c_3a_2 + c_4a_3) + e_3(c_3a_1 + c_4a_2 + c_5a_3) + e_4(c_4a_1 + c_5a_2 + c_6a_3) \rightarrow \min.$$

Выражения по вкладу в общее потребление на k -м интервале оптимизации $R(k)$:

$$(3) \begin{cases} R(1) = e_1 a_1, \\ R(2) = e_1 a_2 + e_2 a_1, \\ R(3) = e_1 a_3 + e_2 a_2 + e_3 a_1, \\ R(4) = e_2 a_3 + e_3 a_2 + e_4 a_1, \\ R(5) = e_3 a_3 + e_4 a_2, \\ R(6) = e_4 a_3. \end{cases}$$

Таким образом, все полученные выражения линейны относительно введенных переменных и удовлетворяют условиям задачи линейного программирования.

2. Приборы с термостатическим управлением.

Главная трудность, возникающая при моделировании приборов из этого подмножества, заключается в математическом описании функционального ограничения на температуру внутри прибора: она должна находиться в заданном диапазоне. Для решения этой задачи используется упрощенная математическая модель процесса поддержания внутренней температуры прибора в виде дифференциального уравнения 1-го порядка, которая апробирована на реальных данных и широко используется в исследованиях по энергопотреблению [9].

В [9] показано, что для получения зависимости температуры внутри прибора от графика использования прибора достаточно проверить выполнение неравенства относительно температуры внутри прибора на концах всех интервалов оптимизации.

Полученное выражение для температуры является линейным и удовлетворяет условиям задачи линейного программирования. Также оно содержит два комплексных параметра, описывающих теплоемкость, тепловое сопротивление и коэффициент полезного действия прибора. Для определения значений этих параметров в [2] предложена простая методика: пользователю необходимо провести три измерения внутренней температуры прибора с интервалом, равным интервалу оптимизации при

включенном и выключенном приборе. В этом случае для комнатного обогревателя и величины интервала оптимизации в 10 минут пользователю нужно провести следующие действия:

- измерить температуру в комнате;
- включить обогреватель на 10 минут;
- измерить температуру в комнате;
- выключить обогреватель и измерить температуру в комнате через 10 минут.

Этих измерений достаточно для определения необходимых параметров. С одной стороны, это необходимый минимум измерений, с другой – измерения просты и доступны для пользователя.

Для методики получены выражения для температуры при следующих важных ситуациях использования указанного подмножества приборов:

1. Случай работы прибора в заданных промежутках времени при заданном комфортном диапазоне изменения температуры в помещении.

2. Случай работы нескольких приборов в общей окружающей среде, например, в режиме поддержания температуры в одной комнате несколькими обогревателями.

3. Ситуации, когда внутренняя температура одного прибора является внешней температурой для другого. Например, оптимизация совместной работы холодильника и кондиционера, которые расположены в одном помещении.

3. Приборы с циклическим режимом работы с возможностью прерывать и возобновлять цикл.

При моделировании прибор из этого подмножества представлялся в виде нескольких приборов, цикл работы которых нельзя прерывать.

4. Приборы с несколькими режимами работы.

Приборы из этого подмножества моделировались аналогично приборам с циклическим режимом работы: каждый прибор представлялся в виде нескольких приборов (по количеству режимов работы) и вводилось дополнительное ограничение, запрещающее возможность работы более одного прибора для любого интервала оптимизации.

3. Практический пример оптимизации энергопотребления

Работоспособность полученных алгоритмов для различного вида приборов была проверена на упрощенном примере оптимизации работы холодильника и посудомоечной машины (с двумя режимами работы) в течение пяти часов.

При тридцатиминутном интервале оптимизации были составлены выражения целевой функции и неравенств (76 неравенств), описывающие функциональные ограничения приборов и ограничение на максимально потребляемую мощность. Полученные выражения были объединены, переведены в матричный вид и с помощью программы Matlab найдено оптимальное решение поставленной задачи, точнее несколько оптимальных решений. На рис. 1 приведены графики работы приборов в одном из оптимальных вариантов.

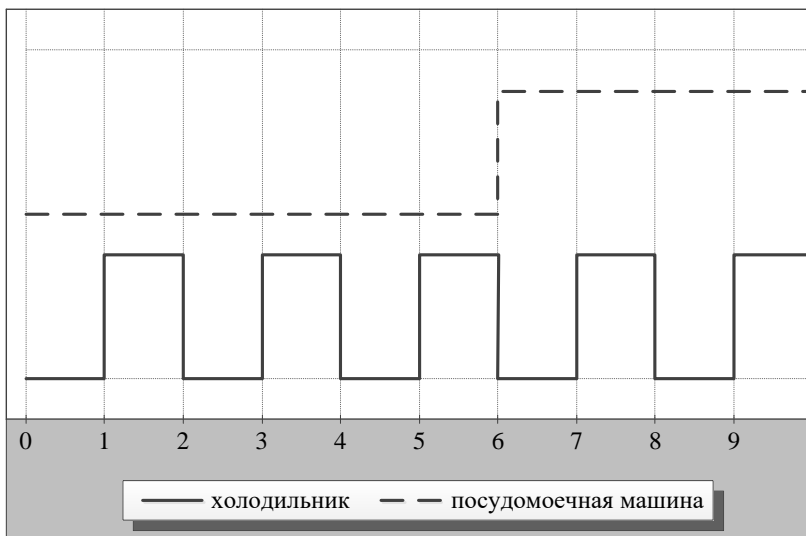


Рис. 1. Графики зависимости работы приборов от номера интервала оптимизации

Верхний график характеризует режимы включения/выключения посудомоечной машины на каждом интервале оптимизации. Нижний график соответствует режимам включения/выключения холодильника.

Анализ полученного решения показал, что при уменьшении интервала оптимизации суммарная стоимость электроэнергии уменьшается (при одновременном повышении точности решения), поэтому при практическом применении значение величины интервала оптимизации нужно задавать меньше, чем в приведенном примере (около 1–5 минут), но так, чтобы решение задачи выполнялось за приемлемое время.

В процессе проводилась оценка экономии путем сравнения стоимости энергопотребления приборов без применения оптимизации и с применением предложенной методики. Для данного примера предложенная методика обеспечивает экономию примерно 11 %.

4. Выводы

1. При исследовании существующих методов оптимизации энергопотребления в домохозяйствах была выявлена проблема, заключающаяся в сложности применения этих методов на практике.

2. Проведенный анализ позволил сформулировать основные принципы построения методики оптимизации, удобной для практического применения.

3. Для формализации функциональных требований проведено разделение множества различных видов приборов на подмножества, для каждого из которых определена структура входных данных.

4. Разработана методика прогнозирования графика максимальной суммарной мощности.

5. Разработана общая методика, включающая методики оптимизации энергопотребления для каждого из выделенных подмножеств бытовых приборов.

6. Выполнено моделирование полученных алгоритмов оптимизации, которое показало их работоспособность, эффектив-

ность и возможность их практического применения без обучения пользователей специальным навыкам.

Литература

1. ГРЕБЕНЮК Г.Г., КОВАЛЕВ С.П., КРЫГИН А.А., СЕРЕДА Л.А. *Организация энергоменеджмента и планирование электрической нагрузки домохозяйств // Энергобезопасность и энергосбережение.* – 2015. – №3. – С. 22–27.
2. ГРЕБЕНЮК Г.Г., КРЫГИН А.А. *Оптимизация энергопотребления домохозяйства на основе прогноза графика максимальной нагрузки бытовых приборов // Управление большими системами: сборник трудов.* – 2017. – Вып. 69. – С. 50–75.
3. ЗОРКАЛЬЦЕВ В.И., ФИЛАТОВ А.Ю. *Новые варианты двойственных алгоритмов внутренних точек для систем линейных неравенств // Журнал вычислительной математики и математической физики.* – 2004. – Т. 44, №7. – С. 1234–1243.
4. УСКОВ Е.И. *Численное сравнение оптимизационных алгоритмов // Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа.* – М.: ВЦ РАН, 2012. – С. 118–131.
5. ALBANI M.H., EL-SAADANY E.F. *A summary of demand response in electricity markets // Electric Power Systems Research.* – 2008. – Vol. 11, Iss. 78. – P. 1989–1996.
6. ANN-PIETTE M., GHATIKAR G., KILICCOTE S., WATSON D., KOCH E., HENNAGE D. *Design and operation of an open, interoperable automated demand response infrastructure for commercial buildings // J. Comput. Inf. Sci. Eng.* – June, 2009. – Vol. 9. – P. 1–9.
7. BASHASH S., FATHY HOSAM K. *Modeling and Control Insights into Demand-side Energy Management through Setpoint Control of Thermostatic Loads // American Control Conference, June 29 – July 1, 2011, San Francisco, CA, USA.* – P. 4546–4553.
8. BRADAC Z., KACZMARCZYK V., FIEDLER P. *Optimal scheduling of domestic appliances via MILP // Energies.* – 2015. – Vol. 8, Iss. 1. – P. 217–232.

9. CALLAWAY D.S. *Tapping the energy storage potential in electric loads to deliver load following and regulation, with application to wind energy* // Energy Conversion and Management. – 2009. – Vol. 50. – P. 1389–1400.
10. CAPASSO A., GRATTIERI W., LAMEDICA R., PRUDENZI A. *A bottom-up approach to residential load modeling* // IEEE Trans. on Power Systems. – Sept. 1994. – Vol. 2. – P. 957–965.
11. CHAN S.C., TSUI K.M., WU H.C., HOU Y., WU Y.C., WU F. F. *Load / price forecasting and managing demand response for smart grids: Methodologies and challenges* // Signal Processing Magazine. – 2012. – Vol. 29, Iss. 5. – P. 68–85.
12. CONEJO A.J., MORALES J.M., BARINGO L. *Real-time demand response model* // IEEE Trans. on Smart Grid. – 2010. – Vol. 1, Iss. 3. – P. 236–242.
13. FERREIRA R.S., BARROSO L.A.N., CARVALHO M.M. *Demand response models with correlated price data: a robust optimization approach* // App. Energy. – 2012. – Vol. 96. – P. 133–149.
14. GOTTWALT S. *Demand side management – a simulation of household behavior under variable prices* // Energy policy. – 2011. – Vol. 39, Iss. 12. – P. 8163–8174.
15. GREBENYUK G.G., SOLOV'EV M.M. *Continuous Price Regulation to Form the Desired Load Schedule of a Power System* // Automation and Remote Control – 2004. – Vol.65, No. 5. – P. 834–839.
16. LI B. *Predicting user comfort level using machine learning for smart grid environments* // Innovative Smart Grid Technologies. – 2011. – P. 1–6.
17. LI N., LIJUN CHEN, LOW S. *Optimal demand response based on utility maximization in power networks* // Proc. of the IEEE Power & Energy Society General Meeting. – 2011. – URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/6039082> (дата обращения: 25.02.2021).
18. LUJANO-ROJAS J.M. *Optimum residential load management strategy for real time pricing demand response programs* // Energy policy. – 2012. – Vol. 45. – P. 671–679.

19. MOHSENIAN-RAD A.H., LEON-GARCIA A. *Optimal Residential Load Control With Price Prediction in Real-Time Electricity Pricing Environments* // IEEE Trans. on Smart Grid. – 2010. – Vol. 1, Iss. 2. – P. 120–133.
20. PEDRASA M.A.A., SPOONER T.D., MAXGILL I.F. *Scheduling of demand side resources using binary particle swarm optimization* // IEEE Trans. on Power Systems. – 2009. – Vol. 24, №3. – P. 1173–1181.
21. RAMANATHAN B., VITTAL V. *A framework for evaluation of advanced direct load control with minimum disruption* // IEEE Trans. on Power Systems. – 2008. – Vol. 23, Iss. 4. – P. 1681–1688.
22. SOU K.C. *Scheduling smart home appliances using mixed integer linear programming* // 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC2011). – P. 5144–5149.
23. VOLKOVA I.O., GUBKO M.V., SALNIKOVA E.A. *Active consumer: optimization problems of power consumption and self-generation* // Automation and Remote Control. – 2014. – Vol. 75, Iss. 3. – P. 551–562.
24. ZIEGENFUS S. *Demand Response And Light Control* // ASHRAE Journal. – 2012. – November. – P. B20–B24.

MODELS, METHODS AND PRACTICAL RECOMMENDATIONS FOR OPTIMIZING ENERGY CONSUMPTION IN HOUSEHOLDS

Georgy Grebenuk, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, chief researcher (gggrebenuk@gmail.com).

Andrey Krygin, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand. Sc., senior researcher (andreyakr14@gmail.com).

Leonid Sereda, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, researcher (sereda@lab49.ru).

Abstract: An approach to optimizing energy consumption in households is considered, which makes it possible to reduce the labor intensity of calculations by active consumers of economically beneficial modes of household appliances. On the basis

of the analysis of the applied methods of optimization of energy consumption modes, the reasons limiting the use of these methods in the practice of households are revealed. One is the availability of data on optimized appliances and constraints. The formalization of the requirements for the modes of use of household appliances with cyclic, thermostatic and combined modes of operation has been completed. The features of the formation of constraints in the problem of linear programming are shown and a methodology for optimizing the modes is proposed, which is available due to labor intensity to an active consumer. The results of modeling are presented, confirming the effectiveness of the proposed method.

Keywords: energy efficiency, energy management, household.

УДК 620.9:502.174

ББК 78.34

DOI: 10.25728/ubs.2021.93.3

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.*

Поступила в редакцию 04.08.2021.

Опубликована 30.09.2021.