МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЙ ШКАЛЫ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ В ПОРЯДКОВЫХ ШКАЛАХ С УЧЁТОМ ИХ ЭКСПЕРТНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Корнеенко В. П.[1]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

При решении многокритериальных задач для корректного применения аддитивного интегрального механизма агрегирования возникает проблема преобразования исходных оценок объектов в порядковых шкалах измерения с учётом их экспертной вероятности в точечные оценки результирующей шкалы разности. Суть метода перехода от исходных оценок объектов в порядковых шкалах с учётом их экспертной вероятности вначале сводится к переходу оценок в балльной шкале к интервальным градациям разбиения промежуточной количественной шкалы. Затем с учётом субъективной вероятности осуществляется переход к точечной оценке на интервале разбиения результирующей шкалы разности. В статье доказано, что предлагаемый подход обеспечивает сохранение упорядочения объектов в исходной и результирующей шкалах. Идея метода показана на примере решения задачи многокритериальной оценки ценности информационно-аналитических материалов, исходные оценки которых представлены в балльных градациях и соответствующих им субъективной (экспертной) вероятности.

Ключевые слова: шкала измерения, экспертная вероятность, точечная результирующая шкала.

1. Введение

При решении прикладных задач многокритериального оценивания и выбора объектов в условиях неопределённостей, к которым можно отнести риски инвестиционных проектов, качество объектов научно-технических экспертиз, ценность информационно-аналитических материалов и др., не всегда возможно представить исходные оценки в виде точечных значений. Например, инвестиционный риск проекта «можно выразить количественно одним единственным способом: задав интервалы значений

---

[1] *Виктор Павлович Корнеенко, к.т.н., доцент* (vkorn@ipu.ru).

неопределённостям, связанным с затратами и выгодами от решения» [10, с. 75]. Аналогично в медицине ряд оценочных и прогностических шкал часто задаются в виде интервалов [1].

Существуют различные методы учёта неопределённости в математических моделях объектов [4, 12, 16]. Одним из способов является представление оценок объектов в виде различных функций принадлежности к области значений показателя [4], при построении которых возникает ряд трудностей.

В случае неопределённости для возможных количественных значений показателей объектов в [12] предлагается экспертно задавать функцию доверия в рамках теории Демпстера – Шафера, что на практике затруднительно выполнить.

С другой стороны, например при оценке рисков, нарушается ранжирование между объектами с оценками в исходной шкале измерения и объектами с оценками с поправкой на вероятность получения ущерба.

Введём следующие обозначения: $A = \{a_q \middle| q = \overline{1, n_A}\}$ – множество объектов риска; u_q – последствия (ущерб) риска, который обычно измеряется в денежных единицах; p_q – вероятность получения ущерба a_q объекта.

В качестве меры риска принимают математическое ожидание соответствующего ущерба, которое сводится к следующей формуле [5]:

(1) $R_q = u_q \times p_q, q = \overline{1, n_A}$.

Тогда, например, между объектами $a_s, a_q \in A$ с оценками ущерба в исходной шкале $u_s = 5,\ u_q = 4$ существует упорядочение в виде:

(2) $a_s \succ a_q \Leftrightarrow u_s > u_q$,

а с учётом экспертных вероятностей $p_s =\ 0{,}6$ и $p_q =\ 0{,}8$ от упорядочения (2) приходим к противоположному упорядочению объектов:

$$a_q \succ a_s \Leftrightarrow R_q > R_s,$$

где $R_q = 4 \cdot 0{,}8 = 3{,}2$; $R_s = 5 \cdot\ 0{,}6 = 3{,}0$.

Знак «≻» в формуле (2) означает, что у a_s объекта риска ущерб $u_s = 5$ больше, чем ущерб $u_q = 4$ у объекта a_q.

В данной статье предлагается метод построения результирующей шкалы, при котором сохраняется ранжирования между объектами в исходных и результирующей шкале измерения.

2. Задача формирования обобщённых оценок объектов с многоуровневой структурой критериев

2.1. ПОСТРОЕНИЕ ДЕРЕВА КРИТЕРИЕВ

Задача многокритериальной оценки качества объектов (информационно-аналитических материалов) в организационных системах управления с многоуровневой структурой показателей относится к классу задач агрегирования, оценки объектов которых в исходных шкалах измерения [9] преобразованы в шкальные значения результирующей шкалы.

Для организационных систем управления понятие цели является многоуровневым – задаётся деревом целей, достижение которых обеспечивается иерархической организацией подсистем в систему. При этом предполагается, что достижение целей подсистем более низких уровней иерархии обеспечивает достижение глобальных целей всей системы. В результате оценка качества системы состоит из оценок качества её подсистем, т.е. и сам процесс оценивания и результат будут задаваться многоуровневыми структурами. Одной из проблем для объектов с иерархической структурой показателей в виде дерева является выбор способа перечисления вершин.

Для деревьев в основном применяются два способа перечисления – «по ветвям», когда индекс вершины указывает путь к этой вершине, и «по уровням», когда по очереди рассматриваются все уровни сверху вниз, а вершины одного уровня нумеруются подряд слева направо.

Способом перечисления «по ветвям» дерево задаётся в виде множества упорядоченных вершин [6, с. 584–587]:

(3) $ID = \{\mathfrak{F}, \mathcal{D}\}$,

где $\mathfrak{F} = \{F_0, F_{j_1}, \dots, F_{j_1 \dots j_k} \mid j_k = \overline{1, n_{j_1 \dots j_{k-1}}}; k = \overline{1, n}\}$ – множество вершин (критериев), в которых индекс $j_1 \dots j_k$ вершины $F_{j_1 \dots j_k}$ указывает путь к этой вершине от корневой вершины F_0 ($k = 0$);

$\mathcal{D} = \{(F_{j_1 \ldots j_{k-1}}, F_{j_1 \ldots j_k}) \mid j_k = \overline{1, n_{j_1 \ldots j_{k-1}}}; k = \overline{1, n}\}$ – множество дуг, в которых множество вершин $\{F_{j_1 \ldots j_k}\}$, упорядоченных по убыванию важности, инцидентно вершине $F_{j_1 \ldots j_{k-1}}$;

F_0 – глобальный (обобщённый) критерий верхнего (нулевого) уровня иерархии;

F_{j_1} – групповые критерии 1-го уровня иерархии, являющиеся концевыми вершинами множества дуг $\{(F_0, F_{j_1}) \mid j_1 = \overline{1, n_0}\}$;

n_0 – число дуг, инцидентных вершине F_0;

$F_{j_1 \ldots j_k}$ – групповые критерии k-го уровня, являющиеся концевыми вершинами дуг $\left\{\left(F_{j_1 \ldots j_{k-1}}, F_{j_1 \ldots j_k}\right) \middle| j_k = \overline{1, n_{j_1 \ldots j_{k-1}}}\right\}$;

$n_{j_1 \ldots j_{k-1}}$ – число дуг инцидентных вершине $F_{j_1 \ldots j_{k-1}}$.

Концевые вершины n-го нижнего уровня условимся обозначать строчными буквами – $f_{j_1 \ldots j_n}$.

2.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ ОБЪЕКТОВ

Постановку задачи сравнения объектов $a_k \in A$ по обобщённым оценкам с учётом многоуровневой структуры в виде иерархического дерева ID (3) критериев представим в виде нахождения упорядочения $a_{q_1} \succcurlyeq a_{q_1} \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_{q_{n_A}}$:

$$F_0(F_{j_1}(F_{j_1 j_2} \ldots (F_{j_1 \ldots j_{n-1}}(f_{j_1 \ldots j_n}(A))))) \to \max_{a_{q_1} \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_{q_{n_A}}},$$

где max – направление упорядочения (ранжирования) объектов по убывающим значениям ценности.

При решения задач многокритериального оценивания и выбора объектов с многоуровневой структурой показателей в качестве методов агрегирования часто применяется аддитивная свёртка критериев с глобальными весами критериев [13, 15]:

$$y_\Sigma^{(q)} = \sum_{j_1=1}^{n_0} \sum_{j_2=1}^{n_{j_1}} \ldots \sum_{j_n=1}^{n_{j_1 j_2 \ldots j_n}} wg(f_{j_1 j_2 \ldots j_n}) \cdot y_{j_1 j_2 \ldots j_n}^{(q)}, \quad (4)$$

где $y_{j_1 j_2 \ldots j_n}^{(q)}$ – точечная оценка $a_q \in A$ объекта в концевой вершине $f_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ дерева в результирующей шкале измерения;

$y_\Sigma^{(q)} = F_0(A)$ – обобщённая оценка объекта $a_q \in A$ по глобальному критерию верхнего (нулевого) уровня иерархии;

$wg_{j_1 j_2 \ldots j_n} = wg(f_{j_1 j_2 \ldots j_n})$ – глобальный количественный (нормированный) вес концевого $f_{j_1 j_2 \dots j_n}$ критерия, который находится перемножением локальных весов по ветвям дерева от корневого F_0 критерия к концевому $f_{j_1 j_2 \dots j_n}$.

При этом возникает вопрос при каких условиях аддитивная свёртка корректна? Для корректного применения аддитивной свёртки необходимо, чтобы оценки объектов по концевым критериям иерархического дерева, измеренных в разнотипных шкалах, были преобразованы в результирующие однородные шкалы.

В [2] приведено определение однородности для непрерывных критериев по признаку совпадения максимальных и минимальных значений (соответственно и совпадения размахов). Однако этого условия недостаточно, если речь идёт о порядковых шкалах. Поэтому расширенное понятие однородной шкалы оценок объектов по критериям, представленным в однотипной шкале измерения по отношению к частным критериям, должно включать одинаковое число градаций (шкальных значений оценок объектов) и учитывать приращение между градациями.

3. Метод построения результирующей шкалы

3.1. ОЦЕНИВАНИЕ ОБЪЕКТОВ В ШКАЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛАХ

Один из подходов оценивания информационно-аналитических материалов стратегической разведки США в пятибалльной шкале с учётом степени достоверности (экспертной вероятности) был предложен в работе [8] в виде схемы Кента (рис. 1) при иллюстрации степени достоверности информации.

В таблице 1 представлено соответствие между градациями порядковой пятибалльной шкалы критерия (достоверности информации) и вероятностными шкальными интервалами степени достоверности информации в виде шансов за и шансов против схемы Кента.

При таком подходе устанавливается множественно-точечное соответствие между шкальными интервалами экспертной вероятности в 100-балльной шкале (в виде шансов за и против) и точечной оценкой достоверности информации в пятибалльной шкале. Однако, как показано в [16], эксперту проще представлять оценки объектов в порядковой шкале с некоторой степенью субъективной вероятности.

Рис. 1. Схема Кента, иллюстрирующая степень достоверности информации. Составлено по [8, с. 249]

Таблица 1. Соответствия между градациями шкал схемы Кента

Балл	Вербальная шкала степени достоверности через понятия вероятности	Шкальные интервалы экспертной вероятности в 100-балльной шкале	
		Шансы за	Шансы против
1	Информация недостоверна	[1÷14]	[86÷99]
2	Информация вероятно недостоверна	[15÷ 39]	[61÷85]
3	Информация возможно достоверна	[40÷59]	[41÷60]
4	Информация вероятно достоверна	[60÷84]	[16÷40]
5	Информация достоверна	[85÷99]	[1÷15]

3.2. МОДЕЛЬ ПОСТРОЕНИЯ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЙ ШКАЛЫ

Для построения результирующей шкалы будем исходить из требования сохранения ранжирования между объектами в исходных и результирующих шкалах измерения с учётом их экспертной вероятности.

Введём обозначения:

$A = \{a_q | q = \overline{1, n_A}\}$ – множество оцениваемых объектов;

$\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_j, \dots, f_m\}$ – множество критериев (концевых вершин дерева), m – число критериев;

$\mathcal{B} = [1, \dots, r, \dots, b]$ – исходная b-балльная порядковая шкала области определения оценок объектов;

$\mathcal{P} = [0,1, \dots, 100]$ – расширенная 100-балльная порядковая шкала области определения экспертной (субъективной) вероятности (к 100-балльной шкале добавляется нулевой балл).

Промежуточную результирующую количественную шкалу измерения объектов для множества критериев $\mathcal{F}$ представим в виде

(5) $Y = \langle y_{min}; y_{max};\ b \rangle$,

где y_{min} – минимальное значение результирующей промежуточной шкалы при измерении объектов $a_q \in A$; y_{max} – максимальное значение результирующей промежуточной шкалы при измерении объектов $a_q \in A$.

На практике субъективную вероятность можно рассматривать и в количественной шкале на отрезке $[0, 1]$. Исходные экспертные оценки с учётом степени уверенности экспертов представим в виде кортежа:

(6) $\langle r_j^{(q)}, p_{jr}^{(q)} \rangle$,

где $r_j^{(q)} = f_j(a_q)$ – r-й балл $a_q \in A$ объекта по f_j критерию; $p_{jr}^{(q)} =$ $= P\left(r_j^{(q)}\right)$ – субъективная вероятность того, что $a_q \in A$ объект оценён экспертом в r баллов по f_j критерию.

Чтобы при построении обобщённых оценок объектов критерии отвечали требованию однородности, т.е. имели общую шкалу, каждая градация которой отражает одинаковый уровень предпочтений для каждого объекта, необходимо от экспертных оценок с учётом степени уверенности экспертов $p_{jr}^{(q)}$ перейти к результирующей количественной промежуточной шкале разности Y (5). Это связано с тем, что объекты в порядковой шкале могут быть сравнимы только в шкале разности, т.е. объект a_s предпочтительнее объекта a_q на $\Delta r = r_j^{(s)} - r_j^{(q)}$ баллов, если справедливо неравенство $r_j^{(s)} > r_j^{(q)}$.

Преобразование

$$\mathcal{A}: \langle r_j^{(q)}, p_{jr}^{(q)} \rangle \to y_{jr}^{(q)}$$

исходных оценок в виде кортежа (6) к точечным оценкам $y_{jr}^{(q)}$ с учётом экспертной вероятности $p_{jr}^{(q)} \in \mathcal{P}$ в результирующей количественной шкале разности представим в виде сложного отображения $\mathcal{A} = \Upsilon \circ \mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}: r_j^{(q)} \to Y_{jr}^{(q)} \Rightarrow \Upsilon: Y_{jr}^{(q)} \times p_{jr}^{(q)} \to y_{jr}^{(q)},$$

где $\mathcal{C}$ – точечно-множественное отображение исходных $r_j^{(q)} \in \mathcal{B}$ оценок в порядковой шкале в интервальные градации промежуточной шкалы $Y_{jr}^{(q)} = Y(r_j^{(q)}) \in Y$ (5); Υ – отображение декартового произведения $Y_{jr}^{(q)} \times p_{jr}^{(q)}$ промежуточной шкалы и экспертной вероятности в точечную оценку $y_{jr}^{(q)} \in Y_r \subset Y$ результирующей количественной шкалы разности.

При этом промежуточная шкала разности Y (5) разбивается на непересекающиеся отрезки $Y_r = [y_{r-1}, y_r], r = 1, 2, \ldots, b$.

3.3. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ОЦЕНОК

Пусть исходные оценки объектов с учётом степени уверенности экспертов представлены в виде кортежа (6). Алгоритм метода сводится к следующим шагам.

Шаг 1. *Переход от исходных градаций порядковой (балльной) шкалы к интервальным шкальным градациям в промежуточной количественной шкале.* В начале количественная промежуточная шкала разбивается на b отрезков совокупностью точек

(7) $\quad y_0 < y_1 < \cdots < y_r < \cdots < y_b,$

где $y_0 = y_{min}, y_b = y_{max}, r = \overline{1, b}$.

Соответствие между балльными градациями $r \in \mathcal{B}$ и интервальными шкальными значениями $Y_r = [y_{r-1}, y_r], r = \overline{1, b}$, промежуточной шкалы $Y = \{Y_r \lceil r = \overline{1,\ b}\}$ задаётся отображением

(8) $\mathcal{i}: r \to Y_r = [y_{r-1}, y_r], \forall\, r = \overline{1, b}$.

В случае равномерного разбиения с шагом $h = \frac{\Delta Y}{b} = \frac{y_b - y_0}{b}$ отображение (8) можно представить в виде точечно-множественного отображения

$\mathcal{i}: r \to [y_0 + (r-1)h, y_0 + rh]$,

где $y_{r-1} = y_0 + (r-1)h, y_r = y_0 + rh; h = y_r - y_{r-1}, \forall\, r = \overline{1, b}$.

Шаг 2. *Переход от оценок объектов в интервальных градациях Y_r промежуточной шкалы к точечным $y_{jr}^{(q)}$ в результирующей количественной шкале разности с учётом экспертной вероятности и принимающих значения на отрезках $[y_{r-1}, y_r]$ разбиения* (7). Будем предполагать, что субъективная вероятность $p_{jr}^{(q)}$ численно совпадает с вероятностью того, что непрерывная случайная величина $\boldsymbol{Y}$ примет значение меньшее, чем значение точечной оценки $y_{jr}^{(q)}$ из полуинтервала $[y_{r-1}, y_{jr}^{(q)}) \subset Y_r$:

$p_{jr}^{(q)} = P(y_{r-1} \le \boldsymbol{Y} < y_{jr}^{(q)})$.

Зная плотность распределения $\varphi(y)$ случайной величины $\boldsymbol{Y}$, точечную оценку $y_{jr}^{(q)}$ можно рассматривать как переменную функции в виде интеграла с переменным верхним пределом:

(9) $p_{jr}^{(q)}(y_{jr}^{(q)}) = \int_{y_{r-1}}^{y_{jr}^{(q)}} \varphi(y)dy$.

Пусть, например, функция распределения $F(y) = P(\boldsymbol{Y} < y)$ случайной величины $\boldsymbol{Y}$ линейна на отрезках разбиения (7):

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y \le y_{r-1}; \\ \dfrac{y - y_{r-1}}{y_r - y_{r-1}}, & y_{r-1} < y \le y_r; \\ 1, & y > y_r. \end{cases}$$

График равномерного распределения случайной величины $\boldsymbol{Y}$ представлен на рис. 2.

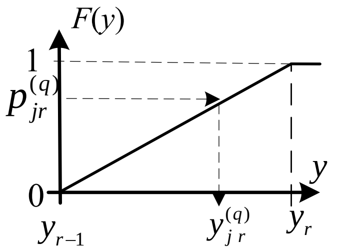


Рис. 2. График равномерного распределения

Тогда плотность распределения на отрезке $Y_r = [y_{r-1}, y_r]$ разбиения (7) постоянна, т.е.

(10) $\varphi(y) = \begin{cases} \frac{1}{y_r - y_{r-1}}, \ y_{r-1} < y \leq y_r; \\ 0, y \notin [y_{r-1}, \ y_r]. \end{cases}$

Подставив $\varphi(y)$ (10) в $p_j^r(y_{jr}^{(q)})$ (9), получим:

$$p_{jr}^{(q)}(y_{jr}^{(q)}) \ = \frac{1}{y_r - y_{r-1}} \ (y_{jr}^{(q)} - y_{r-1}),$$

откуда значение точечной оценки $y_{jr}^{(q)} \in [y_{r-1}, y_r]$ находим по формуле

(11) $y_{jr}^{(q)} = \ y_{r-1} + (y_r - y_{r-1}) \times p_{jr}^{(q)}, \ \forall \, p_{jr}^{(q)} \in [0,1], \ r = \overline{1, b}.$

Если субъективная вероятность принимает значения в расширенной 100-балльной шкале, то точечные оценки на сегменте $Y_r = [y_{r-1}, y_r]$ с учётом степени уверенности экспертов вычисляются по формулам:

(12) $y_{jr}^{(q)} = \ y_{r-1} + \frac{y_r - y_{r-1}}{100} \times p_{jr}^{(q)}.$

Данный метод обладает следующими свойствами, которые докажем для равномерного распределения с плотностью $\varphi(y)$ (10) в виде теоремы.

Теорема 1 (о сохранении упорядочения объектов в исходных и результирующих шкалах). *Пусть переход от исходных балльных оценок* $r_j^{(q)} \in \mathcal{B}$ *объектов с учётом экспертной вероятности* $p_{jr}^{(q)}$ *к точечным оценкам* $y_{jr}^{(q)} \in Y$ *в результирующей шкале* Y (5) *выполнен в соответствии с линейным отображением* (11).

Тогда в исходной и результирующей шкале сохраняется упорядочение объектов, т.е. для любых $a_s, a_q \in A$ объектов с прямым порядком предпочтения из соотношения

(13) $a_s \succ a_q \Leftrightarrow r_j^{(s)} > d_j^{(q)}, \ \forall\, r, d \in \mathcal{B}$

следует соотношение

(14) $y_{jr}^{(s)} > y_{jd}^{(q)} \Leftrightarrow a_s \succ a_q$,

а для равноважных объектов в порядковой исходной шкале объекты в результирующей шкале упорядочиваются в соответствии с величинами экспертной вероятности, т.е. для любых $a_s, a_q \in A$ объектов из соотношения

(15) $a_s \approx a_q \Leftrightarrow r_j^{(s)} = r_j^{(q)} \ \wedge p_{jr}^{(s)} > p_{jr}^{(q)}$

следует соотношение в результирующей шкале

(16) $y_{jr}^{(s)} > y_{jr}^{(q)} \Rightarrow a_s \succ a_q$.

Доказательство. Пусть справедливо соотношение (13), где $r_j^{(s)} = r \in \mathcal{B}$, $d_j^{(q)} = d \in \mathcal{B}$ и $r > d$, то тогда для точек разбиения (7) справедливо неравенство $y_r > y_d$.

Поскольку $y_{jd}^{(q)} \in [y_{d-1}, y_d]$, $y_{jr}^{(s)} \in [y_{r-1}, y_r]$, то отсюда следует (14): $y_{jr}^{(s)} > y_{jb}^{(q)} \Leftrightarrow a_s \succ a_q$.

Из (15) следует, что если оценкам $r_j^{(s)}$, $r_j^{(q)}$ для равноважных объектов $a_s \approx a_q$ в порядковой шкале соответствует интервальная градация $Y_r = [y_{r-1}, y_r]$, то точечные оценки будут принимать значения на отрезке $Y_r = [y_{r-1}, y_r]$, т.е.

$y_{jr}^{(s)}, y_{jr}^{(q)} \in Y_r = [y_{r-1}, y_r]$.

Поскольку справедливо неравенство $p_{jr}^{(s)} > p_{jr}^{(q)}$, то справедливо (16), т.е. $y_{jr}^{(s)} > y_{jr}^{(q)} \Rightarrow a_s \succ a_q$. Теорема 1 доказана. ■

4. Связь между интервальными и точечными оценками объектов

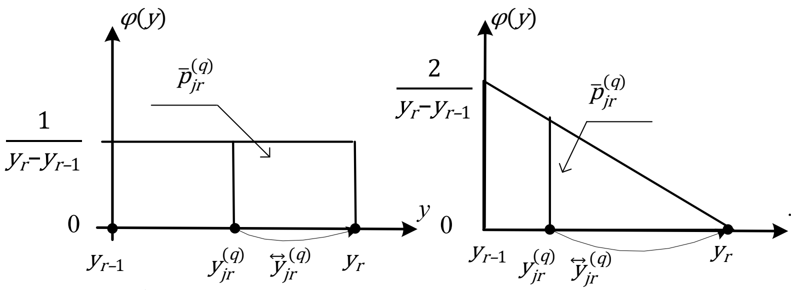
Исходим из того, что при стремлении экспертной вероятности к значению 100 (%) точечная оценка $y_{jr}^{(q)}$ стремится к правой крайней точке шкального интервала $Y_r = [y_{r-1}, y_r]$ и при экспертной вероятности равной 100 (%) она совпадёт с правым концом y_r, т.е. $y_{jr}^{(q)} = y_r$. В этом случае наряду с точечной оценкой $y_{jr}^{(q)}$ введём в рассмотрение интервальную оценку $\overleftrightarrow{y}_{jr}^{(q)}$ объекта a_q по критерию f_j, за которую примем сегмент $\overleftrightarrow{y}_{jr}^{(q)} = [y_{jr}^{(q)}, y_r]$ отрезка Y_r результирующей шкалы. Данной интервальной оценке можно поставить в соответствие вероятность неуверенности эксперта:

(17) $\bar{p}_{jr}^{(q)} = 1 - p_{jr}^{(q)} = \int_{y_{jr}^{(q)}}^{y_r} \varphi(y)dy.$

В качестве примера вычислим вероятность неуверенности эксперта $\bar{p}_{jr}^{(q)}$ (17) для равномерного и треугольного законов распределения [3]. При равномерном законе распределения вероятность неуверенности эксперта определяется по формуле

$$\bar{p}_{jr}^{(q)} = \frac{y_r - p_{jr}^{(q)}}{y_r - y_{r-1}}$$

и численно совпадает с площадью прямоугольника, как показано на рис. 3а на графике плотности $\varphi(y)$ (10) равномерного распределения.



а) *равномерный закон распределения*

б) *треугольный закон распределения*

Рис. 3. Соответствие между точечными и интервальными оценками

Для треугольного закона распределения с плотностью

$$(18)\ \varphi(y) = \begin{cases} \frac{2(y_r - y)}{(y_r - y_{r-1})^2}, & y \in (y_{r-1}, y_r]; \\ 0, & y \notin (y_{r-1}, y_r] \end{cases}$$

вероятность неуверенности эксперта определяется по формуле

$$\bar{p}_{jr}^{(q)} = \left(\frac{y_r - p_{jr}^{(q)}}{y_r - y_{r-1}}\right)^2.$$

и численно совпадает с площадью прямоугольного треугольника, как показано на рис. 3б на графике плотности $\varphi(y)$ (18).

5. Пример решения задачи многокритериального оценивания информационных материалов

Задача оценки информационно-аналитических материалов стоит не только перед разведывательными подразделениями различных стран, но и является одной из важнейших задач коммерческих компаний при ведении конкурентной разведки [11].

Рассмотрим пример решения задачи многокритериального оценивания информационных материалов на модельных данных.

5.1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Исходные оценки в пятибалльной шкале для семи информационно-аналитических материалов по пяти критериям с учётом степени уверенности экспертов представим в таблице 2.

Таблица 2. Оценки объектов в пятибалльной шкале с экспертной вероятностью в 100-балльной шкале

A	Критерии				
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
a_1	$\langle 3, 60\rangle$	$\langle 2, 35\rangle$	$\langle 5, 85\rangle$	$\langle 4, 45\rangle$	$\langle 1, 35\rangle$
a_2	$\langle 4, 70\rangle$	$\langle 3,50\rangle$	$\langle 2, 70\rangle$	$\langle 4, 70\rangle$	$\langle 4, 50\rangle$
a_3	$\langle 5,45\rangle$	$\langle 2,45\rangle$	$\langle 3, 40\rangle$	$\langle 4, 70\rangle$	$\langle 5,80\rangle$
a_4	$\langle 4, 90\rangle$	$\langle 4, 90\rangle$	$\langle 4, 90\rangle$	$\langle 3, 90\rangle$	$\langle 3, 90\rangle$
a_5	$\langle 2, 50\rangle$	$\langle 3, 50\rangle$	$\langle 2, 50\rangle$	$\langle 3, 70\rangle$	$\langle 4, 70\rangle$
a_6	$\langle 4, 75\rangle$	$\langle 4, 65\rangle$	$\langle 4, 70\rangle$	$\langle 4, 65\rangle$	$\langle 4, 75\rangle$
a_7	$\langle 1, 60\rangle$	$\langle 2, 40\rangle$	$\langle 3, 55\rangle$	$\langle 3, 60\rangle$	$\langle 3, 80\rangle$

В качестве концевых критериев представлены: f_1 – актуальность информационных материалов; f_2 – достоверность информационных материалов; f_3 – структурность информационных материалов; f_4 – полнота (содержательность) информационных материалов; f_5 – наглядность информационных материалов.

5.2. ИЕРАРХИЧЕСКОЕ ДЕРЕВО КРИТЕРИЕВ ОЦЕНКИ

В качества примера на рис. 4 представлена многоуровневая структура критериев информационно-аналитических материалов в виде трёхуровневого иерархического дерева способом перечисления «по ветвям». Для представленного на рисунке дерева приняты следующие обозначения: F_0 – обобщённый критерий ценности материалов; F_1 – группа показателей полезности материалов, характеризующих актуальность сведений – f_{11}, достоверность – f_{12}; F_2 – группа критериев построения формы материалов, характеризующих структурность материала – f_{21}, полноту (уровень раскрытия темы) – f_{22}, наглядность материала – f_{23}.

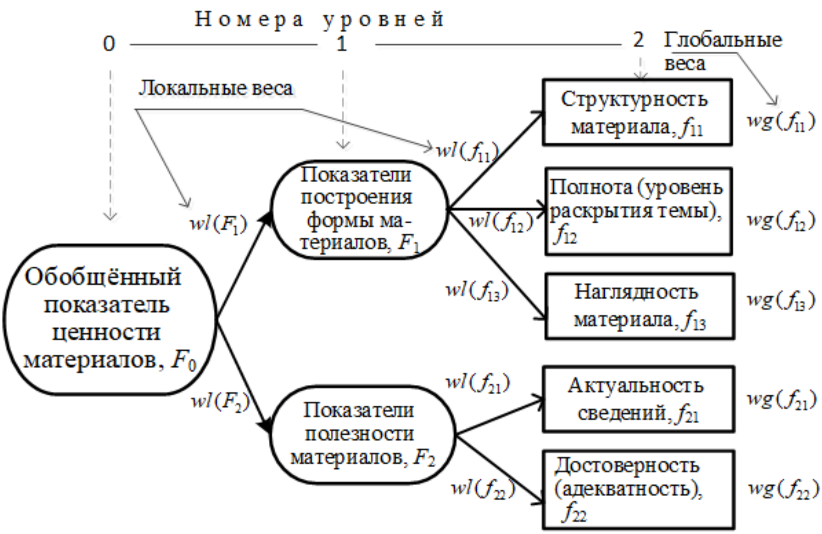


Рис. 4. Иерархическое дерево критериев ценности материалов

5.3. ЭКСПЕРТНАЯ ОЦЕНКА ВЕСОВ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ

Для вычисления локальных весов (коэффициентов) критериев иерархического дерева обычно используются экспертные методы оценки и ранжирования объектов. Прямые методы экспертного оценивания весов критериев нашли применение в методике планирования посредством относительных показателей технической оценки (ПАТТЕРН), в которой экспертам предлагается оценить в количественной шкале нормированные локальные веса критериев на каждом уровне иерархии, а затем глобальные веса находятся перемножением локальных весов по ветвям многоуровневого дерева критериев [15].

Другим экспертным подходом на основе матрицы парных сравнений к назначению «весов» конечному набору сравниваемых объектов является оптимизационный метод аппроксимационной матрицы формирования весов объектов в многокритериальных задачах выбора [7], который по эффективности превосходит метод анализа иерархий (the Analytic Hierarchy Process, AHP – сокращенно МАИ) Т. Саати [14].

Пусть экспертными методами сформированы следующие количественные локальные веса критериев, а именно:

а) локальные веса групповых критериев:

F_0: $wl(F_1) = 0{,}6$; $wl(F_2) = 0{,}4$;

б) локальные веса концевых критериев:

F_1: $wl(f_{11}) = 0{,}5$; $wl(f_{12}) = 0{,}3$; $wl(f_{13}) = 0{,}2$;

F_2: $wl(f_{21}) = 0{,}5$; $wl(f_{22}) = 0{,}5$.

Глобальные веса концевых критериев находим произведением локальных «весов» вершин, лежащих на пути от корневой вершины F_0 к произвольной концевой вершине:

$wg(f_{11}) = wl(F_1) \times wl(f_{11}) = 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}30$;

$wg(f_{12}) = wl(F_1) \times wl(f_{12}) = 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$;

$wg(f_{13}) = wl(F_1) \times wl(f_{13}) = 0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}12$;

$wg(f_{21}) = wl(F_2) \times wl(f_{21}) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}20$;

$wg(f_{22}) = wl(F_2) \times wl(f_{22}) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}20$.

Легко убедиться, что сумма глобальных весов равна единице.

5.4. ПЕРЕХОД ОТ БАЛЛЬНЫХ ГРАДАЦИЙ К ИНТЕРВАЛЬНЫМ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ШКАЛЫ

В качестве промежуточной шкалы рассмотрим количественную шкалу

$Y = \langle y_{min},\ y_{max}; b; \leq \rangle$,

где $y_{min} = 0,\ y_{max} = 100; b = 5$ – количество интервальных градаций.

Количественная шкала разбивается на 5 градаций в виде отрезков $Y_r = [y_{r-1}, y_r], r = 1 \div 5$, точками с равномерным шагом дискретизации $h = \frac{100-0}{5} = 20$. Правило перехода к градациям промежуточной шкалы с учётом того, что $y_{min} = 0$, можно представить в виде

$i: r \rightarrow [20 \times (r-1), 20 \times r],\ r = 1, 2, 3, 4, 5.$

В результате имеем соответствие между балльными и интервальными градациями шкал:

$1 \leftrightarrow Y_1 = [0, 20]$; $2 \leftrightarrow Y_1 = [20, 40]$; $3 \leftrightarrow Y_1 = [40, 60]$;
$4 \leftrightarrow Y_1 = [60, 80]$; $5 \leftrightarrow Y_1 = [80, 100]$.

Соответствия между градациями порядковых шкал критериев с прямым порядком предпочтения для шкальных интервальных градаций промежуточной шкалы представлено в таблице 3.

Таблица 3. Соответствия между градациями шкал

Балльная шкала	Вербальная шкала	Промежуточная шкала [0, 100], $h = 20$	Промежуточная шкала [0, 10], $h = 2$
1 балл	Очень низкая	[0, 20]	[0, 2]
2 балла	Низкая	[20, 40]	[2, 4]
3 балла	Средняя	[40, 60]	[4, 6]
4 балла	Хорошая	[60, 80]	[6, 8]
5 баллов	Высокая	[80, 100]	[8, 10]

5.5. ПЕРЕХОД К ТОЧЕЧНЫМ ОЦЕНКАМ С УЧЁТОМ ЭКСПЕРТНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Значение точечной оценки $y_{jr}^{(q)} \in [y_{r-1}, y_r]$ находим по формуле (12):

$$y_{jr}^{(q)} = y_{r-1} + \frac{y_r - y_{r-1}}{100} \times p_{jr}^{(q)} = y_{r-1} + \frac{20}{100} \times p_{jr}^{(l)}, r = 1 \div 5,$$

где $y_0 = 0,\ y_1 = 20,\ y_3 = 40,\ y_4 = 60,\ ,\ y_4 = 80,\ y_5 = 100.$

Точечные оценки представлены в таблице 4. Легко видеть, что если эксперт оценивает объекты с большим значением вероятности, то точечная оценка смещается к правому концу соответствующего отрезка $Y_r = [20(r-1), 20r]$, а если меньшим значением вероятности, то точечная оценка смещается к левому концу соответствующего отрезка.

Таблица 4. Оценки объектов в пятибалльной и результирующей количественной шкале

A	F_1						F_2			
	$f_1 \equiv f_{11}$		$f_2 \equiv f_{12}$		$f_3 \equiv f_{13}$		$f_4 \equiv f_{21}$		$f_5 \equiv f_{22}$	
	$r_1^{(l)}$	$y_{1r}^{(l)}$	$r_2^{(l)}$	$y_{2r}^{(l)}$	$r_3^{(l)}$	$y_{3r}^{(l)}$	$r_4^{(l)}$	$y_{4r}^{(l)}$	$r_5^{(l)}$	$y_{5r}^{(l)}$
a_1	3	52	2	27	5	97	4	69	1	7
a_2	4	74	3	50	2	34	4	74	2	70
a_3	5	89	2	29	3	48	4	74	5	96
a_4	4	78	4	78	4	78	3	58	3	58
a_5	2	30	3	50	2	30	3	54	4	74
a_6	4	75	4	73	4	74	4	73	4	75
a_7	1	12	2	28	3	51	3	52	3	56

На рис. 5 показан переход к точечной оценке с учётом степени уверенности эксперта по f_1 критерию от исходных экспертных оценок в порядковой пятибалльной шкале.

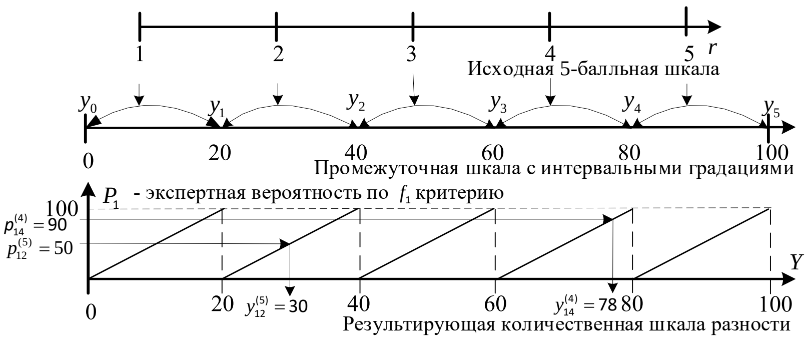


Рис. 5. Переход к точечной оценке с учётом уверенности экспертов

В соответствии с теоремой 1, например для критерия $f_1 \equiv f_{11}$ – актуальность сведений, имеем упорядочения:

а) без учёта экспертной вероятности в пятибалльной шкале:

$a_3 \succ \{a_2 \approx a_4 \approx a_6\} \succ a_1 \succ a_5 \succ a_7$;

б) с учётом экспертной вероятности в результирующей шкале:

$a_3 \succ a_4 \succ a_6 \succ a_2 \succ a_1 \succ a_5 \succ a_7$.

В этом случае для равноважных объектов a_2, a_4, a_6 с балльной оценкой $r_1^{(2)} = r_1^{(4)} = r_1^{(6)} = 4$ с учётом их экспертной вероятности имеем упорядочение: $a_4 \succ a_6 \succ a_2 \Leftrightarrow 90 > 75 > 70$.

5.6. ФОРМИРОВАНИЕ ОБОБЩЁННЫХ ОЦЕНОК ОБЪЕКТОВ

Обобщённые оценки определим по данным таблицы 3 по концевым критериям с учётом нормированных весов их важности. Результаты вычисления по аддитивной свёртке критериев $y_\Sigma^{(q)}$ (4) представлены в столбце 7 таблицы 5, которые затем преобразованы в оценки $r_\Sigma^{(q)}$ 100-балльной шкалы (см. столбец 8).

Таблица 5. Результаты вычислений относительно эталонных объектов a_{min}, a_{max}

$\boldsymbol{a_q}$	Оценки объектов с учётом весов критериев					Обобщённые оценки	
	$y_1^{(q)}$	$y_2^{(q)}$	$y_3^{(q)}$	$y_4^{(q)}$	$y_5^{(q)}$	$y_\Sigma^{(q)}$	$r_\Sigma^{(q)}$
$\boldsymbol{a_1}$	26,0	8,1	19,4	44,5	3,5	101,5	40
$\boldsymbol{a_2}$	37,0	15,0	6,8	37,0	35,0	130,8	63
$\boldsymbol{a_3}$	44,5	8,7	9,6	37,0	48,0	147,8	76
$\boldsymbol{a_4}$	39,0	23,4	15,6	29,0	29,0	136,0	67
$\boldsymbol{a_5}$	15,0	15,0	6,0	27,0	37,0	100,0	39
$\boldsymbol{a_6}$	37,5	21,9	14,8	36,5	37,5	148,2	76
$\boldsymbol{a_7}$	6,0	8,4	10,2	26,0	28,0	78,6	23
$\boldsymbol{a_{\min}}$	6,0	8,1	6,0	26,0	3,5	49,6	1
$\boldsymbol{a_{\max}}$	44,5	23,4	19,4	44,5	48,0	179,8	100

Ранжирование объектов по обобщённым оценкам можно представить в виде

$\{a_3 \approx a_6\} \succ a_4 \succ a_2 \succ a_1 \succ a_5 \succ a_7.$

Сравнение объектов по предпочтительности в 100-балльной шкале наглядно представлено на рис. 6.

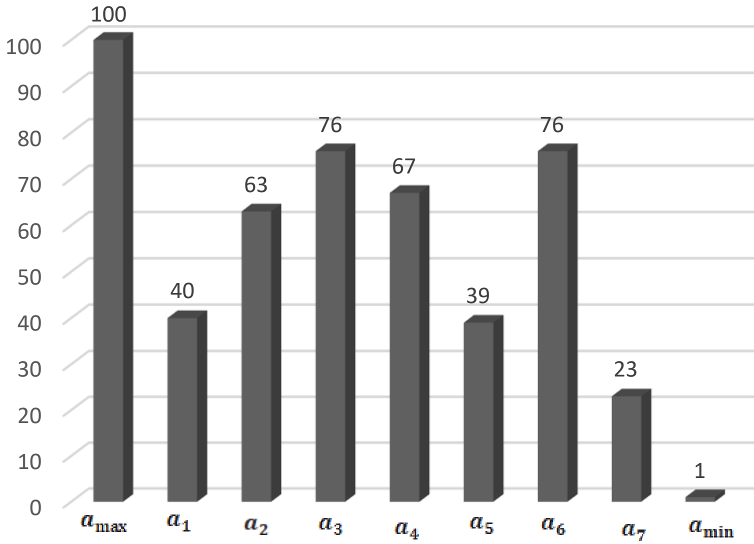


Рис. 6. Сравнение объектов в результирующей шкале

6. Заключение

Рассмотренный метод построения результирующей шкалы предназначен для прикладных задач, в которых возникает проблема преобразования исходных оценок объектов, представленных в виде кортежа, в точечные оценки результирующей шкалы.

Преимуществом данного метода является сохранение упорядочения между объектами в исходной и результирующей шкале измерения, а для равноважных объектов в порядковой исходной шкале объекты в результирующей шкале упорядочиваются в соответствии с величинами экспертной вероятности.

Таким образом, в данной статье решена проблема перехода к точечным оценкам объектов, исходные оценки которых представлены с учётом их экспертной вероятности

Литература

1. АЛЕКСАНДРОВИЧ Ю.С, ГОРДЕЕВ В.И. *Оценочные и прогностические шкалы в медицине критических состояний*. – С.-Пб.: Изд-во «Сотис», 2007. – 140 с.
2. ВАСИН А.А., КРАСНОЩЕКОВ П.С., МОРОЗОВ В.В. *Исследование операций*. – М.: Академия, 2008. – 170 с.
3. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С. *Теория вероятностей*. – М.: Академия, 2003. – 576 с.
4. ЗАДЕ Л.А. *Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений*. – М.: Мир, 1976. – 123 с.
5. КАРТВЕЛИШВИЛИ В.М., СВИРИДОВА О.А. *Риск-менеджмент. Методы оценки риска*. – М.: Изд-во РЭУ им. Г.В. Плеханова, 2017. – 120 с.
6. КОРНЕЕНКО В.П. *Методы оптимизации*. – М.: Высш. шк., 2007. – 664 с.
7. КОРНЕЕНКО В.П. *Метод аппроксимационной матрицы формирования весов объектов в многокритериальных задачах выбора* // Вестник кибернетики. – 2021. – №1(41). – С. 51–62.
8. ПЛЭТТ В. *Информационная работа стратегической разведки. Основные принципы*. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – 342 с.
9. ПФАНЦАГЛЬ И. *Теория измерений*. – М.: Мир, 1976. – 247 с.
10. ХАББАРД Д.У. *Как измерить всё, что угодно. Оценка стоимости нематериального в бизнесе*. – М.: ЗАО «Олимп – бизнес», 2009. – 320 с.
11. ЮЩУК Е.Л., ПЕТРЯШОВ Д.В., КУЗИН А.В. и др. *Конкурентная разведка*. – Е.: Урал. гос. экон. ун-т., 2015. – Ч. 1. – 210 с.
12. BEYNON M., CURRY B., MORGAN P. *The Dempster-Shafer theory of evidence: an alternative approach to multicriteria decision modeling* // Int. Jornal Omega. – 2000. – Vol. 28. – P. 37–50.
13. FIGUEIRA J., GRECO S., EHRGOTT M. *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys multiple criteria decision analysis: state of the art surveys*. – Springer, 2005. – 1048 p.
14. SAATY T.L. *Axiomatic foundation of the Analytic Hierarchy*

Process // Management Scienc. – 1986. – Vol. 32, No. 7. – P. 841–855.
15. SIGFORD S.V., PARVIN R.H. *Project PATTERN a methodology for delernining relevance in complex decision-making* // IEEE Trans. – 1965. – Vol. 12, No. 1. – P. 9–13.
16. YAZDIA M., HAFEZIB P., ABBASSIC R. *A methodology for enhancing the reliability of expert system applications in probabilistic risk assessment* // Journal of Loss Prevention in the Process Industries. – 2019. – Vol. 58: – P. 51–59.

METHOD FOR CONSTRUCTING THE RESULTS SCALE FOR OBJECTS IN ORDERAL SCALES TAKING INTO ACCOUNT THEIR EXPERT PROBABILITY

Viktor Korneenko, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Senior Researcher, Ph.D (vkorn@ipu.ru).

Abstract: When solving multi-criteria problems for the correct application of the additive integral aggregation mechanism, the problem arises of converting the initial estimates of objects in ordinal measurement scales, taking into account their expert probability, into point estimates of the resulting difference scale. The essence of the method of transition from the initial estimates of objects in ordinal scales, taking into account their expert probability, initially reduces to the transition of estimates in the point scale to interval gradations of the division of the intermediate quantitative scale. Then, taking into account the subjective probability, a transition is made to a point estimate on the interval of splitting the resulting difference scale. The article proves that the proposed approach ensures the preservation of the ordering of objects in the initial and resulting scales. The idea of the method is shown by the example of solving the problem of multi-criteria evaluation of the value of information and analytical materials, the initial estimates of which are presented in point gradations and the corresponding subjective (expert) probability.

Keywords: measurement scale, resulting scale, expert probability.

УДК 519.8
ББК 22.18
DOI: 10.25728/ubs.2021.94.5

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Э.Ю. Калимулиной.

Поступила в редакцию 06.07.2021.
Опубликована 30.11.2021.