

**Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

***Выпуск 94
Ноябрь 2021***

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2021

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

**УПРАВЛЕНИЕ
БОЛЬШИМИ
СИСТЕМАМИ**

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 94

Москва – 2021

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Кузнецов О.П., Кульба В.В., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: член-корр. РАН Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Калимулина Э.Ю. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИПМ РАН), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), Галаев А.А. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук: Зоркальцев В.И. (ИСЭМ СО РАН), проф. Калашников А.О. (ИПУ РАН), проф. Калянов Г.Н. (ГУ ВШЭ), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ключков В.В. (ИПУ РАН), д-р техн. наук Коргин Н.А. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук: проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (МФТИ), д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р биол. наук проф. Михальский А.И., д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н. (ИПС РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Орлов А.И. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), проф. Райгородский А.М. (МГУ), проф. Савватеев А.В. (РЭШ), д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), Совлуков А.С. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ), проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Арзамас – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – академик РАН Бычков И.В., д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в интернете: ubs.mtas.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

Системный анализ

Новиков Д.А.

Задача об оптимальной последовательности проверки независимых гипотез..... 5

Зверкина Г.А., Кошелев А.А.

Об имитационном моделировании случайных величин с помощью интенсивности 33

Математическая теория управления

Копосов А.С.

Робастное сетевое управление с итеративным обучением системой переменной конфигурации при случайных возмущениях 50

Управление в социально-экономических системах

Чеботарев П.Ю.

Кооперация и либерализм: эволюционные сценарии в модели ViSE 66

Корнеенко В.П.

Метод построения результирующей шкалы для объектов в порядковых шкалах с учётом их экспертной вероятности 95

ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПРОВЕРКИ НЕЗАВИСИМЫХ ГИПОТЕЗ

Новиков Д. А.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Сформулирована задача минимизации времени освоения предметной области в процессе креативной деятельности за счет выбора последовательности проверки независимых гипотез. В условиях наличия эффектов износа и научения, с учетом зависимости времен проверки от предыстории, получены достаточные условия, при которых оптимальным является монотонное расписание «от простого – к сложному» (упорядочение гипотез по убыванию априорной вероятности проверки в единицу времени).

Ключевые слова: креативная деятельность, проверка гипотез, теория расписаний, past-sequence-dependent scheduling problem, эффекты научения и износа.

1. Введение

Деятельность (activity) – активное взаимодействие человека с окружающей действительностью, в ходе которого человек выступает как *субъект*, целенаправленно воздействующий на *предмет* [1]. Деятельность – форма активности человека, направленная на познание, преобразование окружающего мира, себя и условий своего существования.

Под *элементарной* понимают такую деятельность, цели, технологии и результат которой не имеют собственной внутренней структуры. В противоположность этому деятельность, не являющуюся элементарной, в [1] было предложено называть комплексной. То есть *комплексная деятельность* (КД) – деятельность, обладающая нетривиальной внутренней структурой, с множественными и/или изменяющимися целями, субъектом, технологией, ролью предмета в его целевом контексте. В монографии [1]

¹ Дмитрий Александрович Новиков, чл.-корр. РАН (novikov@ipi.ru).

предложена классификация видов деятельности. В том числе выделены регулярная и креативная деятельность.

Регулярная КД – деятельность, в процессе которой новые элементы деятельности, новые структурные элементы деятельности (СЭДы) возникают только вследствие детерминированной декомпозиции вышестоящих СЭДов соответственно априори известной технологии (что составляет детерминированный спрос). Структура и технология регулярной КД являются детерминированными.

Креативная КД – деятельность, в результате которой порождается неопределённый априори спрос на результаты неизвестной априори деятельности, технологию которой необходимо создать в ходе этой новой деятельности. Синонимом «креативной деятельности» является «творческая деятельность» (дословный перевод на английский язык прилагательного «творческий» – creative). В статье [5] выделены три фазы жизненного цикла креативной деятельности (предметной области):

- 1) открытие новой предметной области и накопление базовых знаний (генерация и проверка гипотез);
 - 2) освоение предметной области;
 - 3) массовое продуктивное использование
- и показано, что креативность «сосредоточена» в целеполагании (применительно к научной или художественной деятельности – в генерации гипотез).

Для описания второй фазы целесообразно использовать математические модели опыта, приведенные в [2, 3]. Для описания третьей фазы могут быть использованы как структурные и алгоритмические модели, приведенные в [1], так и оптимизационные модели, содержащиеся в [4]. Для описания первой фазы жизненного цикла креативной деятельности ниже рассматриваются математические модели выбора оптимальной последовательности проверяемых гипотез.

Структура изложения такова: во втором разделе рассматривается модель первой фазы креативной деятельности; во втором разделе приводится постановка задачи об оптимальной последовательности проверки гипотез и анализируются соответствующие известные результаты; в четвертом разделе вводится классификация задач об оптимальной последовательности проверки гипотез; пятый раздел включает основные результаты, заключение содержит краткое обсуждение перспектив применения результатов дискретной оптимизации к моделированию креативной деятельности.

2. Модель первой фазы креативной деятельности

Пусть субъект осваивает K видов деятельности (приобретает K элементов знаний или проверяет K гипотез, образующих одну предметную область), причем последовательность выбирает он сам (допустимой является любая последовательность). Выбрав последовательность, субъект начинает проверять гипотезы по одной (условно в порядке возрастания их номеров). Процесс проверки гипотезы не прерывается и заключается в том, что к концу очередного шага дискретного времени гипотеза может быть либо уже проверена, либо еще не проверена. Процесс продолжается до тех пор, пока гипотеза не будет проверена. Гипотеза k характеризуется начальным уровнем освоения («начальными знаниями») $L_k(0)$ и априорной вероятностью проверки за один такт времени $w_k \in (0; 1]$, условно характеризующей сложность ее проверки (можно считать, что сложность обратно пропорциональна вероятности проверки и, соответственно, наоборот). Тогда, в соответствии с результатами [2], для k -й гипотезы зависимость уровня научения (вероятности того, что гипотеза проверена) от времени (считаем, что проверка k -й гипотезы начинается в нулевой момент времени) имеет вид

$$(1) L_k(t) = 1 - (1 - L_k(0))(1 - w_k)^t, \quad k = \overline{1, K}.$$

В качестве показателя уровня научения можно использовать либо среднее время проверки (см. ниже), либо время $T_k(\varepsilon, L(0), w_k)$, по завершении которого вероятность того, что k -я гипотеза осталась не проверенной, не превышает $\varepsilon > 0$:

$$(2) T_k(\varepsilon, L_k(0), w_k) = \frac{\ln(\varepsilon) - \ln(1 - L_k(0))}{\ln(1 - w_k)}, \quad k = \overline{1, K}.$$

Легко видеть, что $T_k(\varepsilon, L(0), w_k)$ – строго монотонно убывающая вогнутая функция по $L_k(0)$ и строго монотонно убывающая выпуклая функция по w_k .

Обозначим через $\mathbf{L}(0) = (L_1(0), \dots, L_k(0))$ вектор начальных знаний, через $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_k)$ – вектор априорных вероятностей проверки.

Рассмотрим случай строго *последовательной* (проверка очередной гипотезы начинается сразу по завершении проверки предыдущей) проверки гипотез.

Независимо от последовательности проверки *суммарное время последовательного освоения предметной области* составит

$$(3) T_{seq}(\mathbf{L}(0), \mathbf{w}, \varepsilon) = \sum_{k=1}^K \frac{\ln(\varepsilon) - \ln(1 - L_k(0))}{\ln(1 - w_k)}.$$

Зависимость агрегированного уровня научения от времени описывается следующим образом:

$$(4) L_{seq}(t) = \frac{1}{K(1 - \varepsilon)} \sum_{k=1}^K \min\{1 - \varepsilon; (1 - (1 - w_k)^t) I(t \geq T_{k-1}^0)\},$$

где $T_k^0 = \sum_{j < k} T_j$, $T_j = \frac{\ln(\varepsilon) - \ln(1 - L_j(0))}{\ln(1 - w_j)}$ (см. выражение (2)),

$j, k = \overline{1, K}$.

Считая, что начальные значения всех уровней научения равны нулю, сравним время (3) со временем освоения предметной области посредством случайного выбора

на каждом такте времени проверяемой гипотезы (см. модели освоения опыта в [2, 3]). Зависимость уровня научения от времени в последнем случае имеет вид

$$(5) \quad L_{rnd}(t) = 1 - \sum_{k=1}^K p_k (1 - w_k p_k)^t.$$

Из результатов [3] известно, что при одинаковых априорных вероятностях проверки, среди всевозможных распределений $\mathbf{p} = \{p_k, k = \overline{1, K}\}$ максимум ожидаемого уровня научения (5) достигается на равномерном распределении. Поэтому предположим, что используется стратегия «равномерной случайной» проверки гипотез, а априорные вероятности проверки одинаковы и равны w . Тогда

$$L_{rnd}(t) = 1 - \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(1 - \frac{w_k}{K}\right)^t, \quad \text{откуда время, по завершении}$$

которого вероятность того, что k -я гипотеза осталась не проверенной, не превышает $\varepsilon > 0$, равно $T_{rnd} = \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln\left(1 - \frac{w}{K}\right)}$.

В рамках введенных предположений время (3) последовательной проверки всех гипотез равно $T_{seq} = \frac{K \ln(\varepsilon)}{\ln(1-w)}$. Легко

видеть, что $T_{seq} \leq T_{rnd}$, т.е. стратегия последовательной проверки гипотез позволяет быстрее охватить всю предметную область, чем стратегия их «равномерной случайной» проверки.

3. Постановка задачи об оптимальной последовательности проверки гипотез и известные результаты

Сформулируем задачу об оптимальной последовательности проверки гипотез. Пусть субъект проверяет гипотезы в порядке возрастания их номеров – от первой

до K -й. Определим для каждой гипотезы множество ее «предшественников»: $N_k = \{1, \dots, k-1\}$ и функцию множеств $\mu_k(N_k) = \psi_k \left(\sum_{j=1}^{k-1} w_j \right)$, где $\psi_k: \mathfrak{R}_+^1 \rightarrow \left(0; \frac{1}{w_k} \right]$ – непрерывная функция, $k = \overline{1, K}$. Предположим, что вероятность проверки зависит от сложности уже проверенных субъектом гипотез (ниже рассмотрены два случая – мультипликативной и аддитивной зависимости от суммы априорных вероятностей проверки уже проверенных гипотез). Задача заключается в том, чтобы найти последовательность проверки всех гипотез за минимальное суммарное время.

Эта задача принадлежит к классу задач *теории расписаний* [8, 17] для одного прибора и нескольких работ с *эффектами износа и научения* (deterioration and learning) – когда время, затрачиваемое на работу или перенастройку прибора, зависит от предшествующей траектории (*предыстории*) (past-sequence-dependent, p-s-d) [14].

В [7, 18] рассматриваются модели с учетом *эффекта износа* (в терминах настоящей работы – негативное влияние предыстории – см. рис. 1), в которых длительность выполнения работы линейно растет по моменту времени начала ее выполнения, и приводятся достаточные условия, при которых оптимальным по тому или иному критерию (минимальное время завершения всех работ, минимальные взвешенные просрочки и др.) является упорядочение работ по убыванию или возрастанию их характеристик (по минимальным начальным временам выполнения, по коэффициентам линейной зависимости и др.). Помимо линейных, в теории расписаний рассматриваются и другие, но вполне конкретные (!), ограничения и зависимости (степенные [15], экспоненциальные и др. [0, 20]).

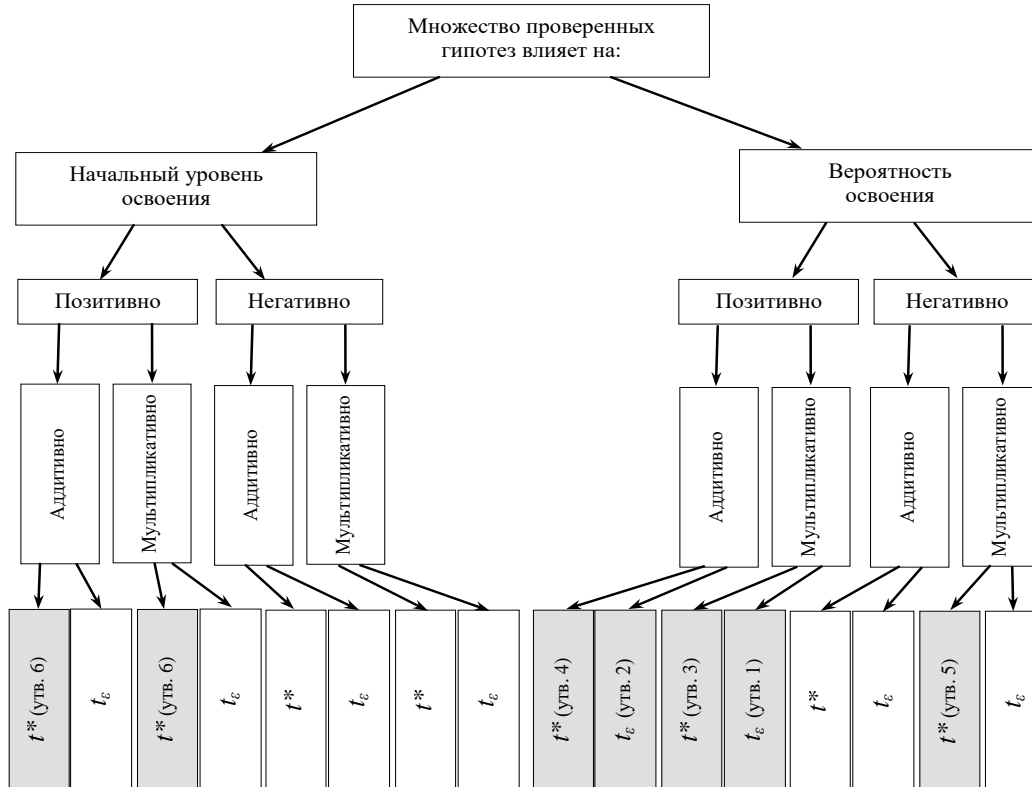


Рис. 1. Классификация задач об оптимальной последовательности проверки гипотез

В настоящей работе рассматривается также вполне конкретный случай мультипликативного (7), (13) или аддитивного (10), (14) влияния предыстории на времена проверки гипотез.

Первыми работами, учитывающими *эффект научения* (в терминах настоящей работы – позитивное влияние предыстории – см. рис. 1), в теории расписаний были [6, 10, 11]. В них длительность выполнения работы линейно убывает по числу предшествующих ей работ. Показано, что в общем случае это NP-полная задача. Приведены частные случаи, которые полиномиально разрешимы. В ряде моделей оптимальным оказывается V-образное расписание (V-shaped schedule), в котором работы упорядочиваются сначала по убыванию, а затем по возрастанию [21]. Понятно, что монотонные расписания являются частными случаями V-образных [22]. В модели, рассматриваемой в [16], оба эффекта (износа и научения) присутствуют одновременно.

Более общим является подход, заключающийся в рассмотрении задачи об оптимальной последовательности проверки гипотез в качестве усложненной модификации задачи коммивояжера. *Задача коммивояжера* [19] в случае сложных ограничений предшествования и зависимости времен от последовательности и других свойств вершин графа называется *задачей о посещении мегаполисов*. Для этой задачи с использованием подходов динамического программирования строятся и тестируются в вычислительных экспериментах схемы решения [12]. Задачи о посещении мегаполисов являются более общими, чем задачи построения расписаний с учетом износа и научения.

4. Классификация задач об оптимальной последовательности проверки гипотез

Вернемся к задаче об оптимальной последовательности проверки гипотез. Введем *систему классификаций*

(бинарных) частных случаев задачи об оптимальной последовательности проверки гипотез (см. рис. 1).

Возможны шестнадцать вариантов:

– множество уже проверенных гипотез влияет на начальный уровень освоения или на вероятность проверки проверяемой гипотезы;

– влияние позитивно (увеличивает начальный уровень освоения или вероятность проверки – исследователь накапливает опыт) или негативно (соответственно уменьшает; исследователь «устаёт» или перегружает свои когнитивные возможности);

– зависимость мультипликативная или аддитивная;

– в качестве критерия используется среднее время проверки гипотезы t^* или время t_e , по завершении которого вероятность того, что гипотеза осталась не проверенной, не превышает заданной величины.

На рис. 1 указаны номера приводимых ниже утверждений, соответствующих различным частным случаям (соответствующие прямоугольники на рис. 1 затенены). Переходя к их анализу, отметим, что логика доказательств утверждений 1–6 одинакова. Действительно, каждое из этих утверждений гласит, что при определенных предположениях оптимально монотонное упорядочение гипотез – по убыванию (или по возрастанию) априорных вероятностей проверки. В доказательстве рассматривается произвольное упорядочение гипотез и предполагается, что существует пара «соседних» гипотез, нарушающая монотонность. Далее сравниваются времена их проверки в исходной и противоположной последовательности и показывается, что перестановка этих двух гипотез сокращает суммарное время проверки этой пары. Так как при этом времена проверки гипотез с меньшими номерами не изменяются, как не изменяются и начальные условия проверки гипотез с большими номерами, то перестановка приводит

к сокращению суммарного времени проверки всех гипотез. Откуда следует оптимальность соответствующего их монотонного упорядочения. Следующий раздел содержит основные результаты.

5. Оптимальные расписания

В мультипликативном случае уровень научения зависит (ср. с выражением (1)) от последовательности проверки следующим образом:

$$(6) \quad L_k(t) = 1 - (1 - L_k(0)) (1 - w_k \mu_k(N_k))^t, \quad k = \overline{1, K}.$$

Тогда

$$(7) \quad T_s(\mathbf{L}(0), \mathbf{w}, \varepsilon) = \sum_{k=1}^K \frac{\ln(\varepsilon) - \ln(1 - L_k(0))}{\ln(1 - w_k \mu_k(N_k))}.$$

Задача минимизации времени (7) последовательного освоения предметной области заключается в выборе последовательности проверки гипотез, минимизирующей (7). В общем случае это – комбинаторная задача (существует $K!$ последовательностей). Но, к счастью, в рамках введенных предположений для некоторых случаев можно найти простое аналитическое ее решение.

Обозначим $\eta_j = \sum_{l=1}^{j-1} w_l$. Введем следующее предположение.

А.1. Начальные значения всех уровней научения одинаковы: $L_j(0) = L^0 \leq 1 - \varepsilon$, а функции влияния предшествующего опыта на вероятность проверки одинаковы для всех

гипотез: $\psi_j(\cdot) = \psi(\cdot)$, $j = \overline{1, K}$, $\psi: \mathfrak{R}_+^1 \rightarrow \left[0; \min_k \frac{1}{w_k}\right]$, где

$\psi(\cdot)$ – гладкая строго монотонно возрастающая функция.

Сначала приведем две вспомогательные леммы.

Лемма 1. Если $\psi: \mathfrak{R}_+^1 \rightarrow \mathfrak{R}_+^1$ – непрерывная строго монотонно возрастающая вогнутая функция, то для любых положительных x, y, z , таких, что $y < z$, выполнено $\frac{\psi(x+z)}{z} < \frac{\psi(x+y)}{y}$.

Лемма 2. Если $\psi: \mathfrak{R}_+^1 \rightarrow \mathfrak{R}_+^1$ – гладкая строго монотонно возрастающая выпуклая функция, то:

а) для любых положительных x, y, z , таких, что $q(x) < y < z$, выполнено $\frac{\psi(x+z)}{z} > \frac{\psi(x+y)}{y}$;

б) для любых положительных x, y, z , таких, что $y < z < q(x)$, выполнено $\frac{\psi(x+z)}{z} < \frac{\psi(x+y)}{y}$,

где $q(x)$ – решение уравнения

$$(8) \quad \frac{\psi(x+q)}{q} = \frac{d\psi(s)}{ds} \Big|_{x+q}.$$

Справедливость утверждений леммы 2 следует из свойств гладких выпуклых функций.

Утверждение 1. Пусть выполнено предположение А.1, $\psi(\cdot)$ – гладкая строго монотонно возрастающая выпуклая функция, и существует такой номер гипотезы j , что $q(\eta) < w_j < w_{j+1}$. Тогда перестановка между собой этой пары гипотез уменьшает суммарное время (7) последовательного освоения предметной области.

В качестве гипотезы можно предположить, что с использованием леммы 1 можно получить результат, аналогичный утверждению 1, для вогнутых монотонных функций $\psi(\cdot)$.

Рассмотрим теперь *аддитивный случай*, в котором уровень научения зависит (ср. с выражением (1)) от последовательности проверки следующим образом:

$$(9) \quad L_k(t) = 1 - (1 - L_k(0))(1 - w_k - \mu_k(N_k))^t, \quad k = \overline{1, K}.$$

Тогда

$$(10) \quad T_s(\mathbf{L}(0), \mathbf{w}, \varepsilon) = \sum_{k=1}^K \frac{\ln(\varepsilon) - \ln(1 - L_k(0))}{\ln(1 - w_k - \mu_k(N_k))}.$$

Введем следующее предположение.

А.2. Начальные значения всех уровней научения одинаковы: $L_j(0) = L^0 < 1 - \varepsilon$ (величина L^0 может интерпретироваться как характеризующая предметную область в целом), а функции влияния предшествующего опыта на вероятность проверки одинаковы для всех гипотез: $\psi_j(\cdot) = \psi(\cdot)$, $j = \overline{1, K}$, $\psi: \mathfrak{R}_+^1 \rightarrow [0; 1 - \min_k w_k]$, где $\psi(\cdot)$ — непрерывная строго монотонно возрастающая функция, причем для любых положительных x, y, z , таких, что $y < z$, выполнено

$$(11) \quad \psi(x + z) - \psi(x + y) \geq z - y.$$

Примерами функций, удовлетворяющих предположению А.2, являются:

- линейная функция $\psi(s) = \frac{s}{\alpha}$, $\alpha \in (0; 1]$;
- квадратичная функция $\psi(s) = s^2$;
- любая строго монотонно возрастающая строго выпуклая функция $\psi(\cdot)$, такая, что $\psi'(\min_k w_k) > 1$.

Утверждение 2. Пусть выполнено предположение А.2, и существует такой номер гипотезы j , что $w_j < w_{j+1}$. Тогда перестановка между собой этой пары гипотез уменьшает суммарное время (10) последовательного освоения предметной области.

Следствие 1. В модели (9), (10) в рамках предположения А.2 оптимальным с точки зрения суммарного времени последовательного освоения предметной области является

упорядочение гипотез по убыванию априорных вероятностей проверки (по росту «сложности»).

До сих пор мы использовали в качестве критерия время достижения уровня научения $1 - \varepsilon$. Альтернативой является использование *среднего времени проверки гипотезы*, которое равно

$$(12) \tau_k(L_k(0), w_k) = (1 - L_k(0)) / w_k, \quad k = \overline{1, K}.$$

Легко видеть, что $\tau_k(L_k(0), w_k)$ – убывающая линейная функция по $L_k(0)$ и строго монотонно убывающая выпуклая функция по w_k .

Суммарное ожидаемое время последовательного освоения предметной области для мультипликативного случая составит

$$(13) \tau_{seq}(\mathbf{L}(0), \mathbf{w}) = \sum_{k=1}^K \frac{1 - L_k(0)}{w_k \mu_k(N_k)}.$$

В рассматриваемом случае справедлив следующий аналог утверждений 1 и 2.

Введем следующее предположение (ср. с предположением А.1):

А.3. Функции влияния предшествующего опыта на вероятности проверки одинаковы для всех гипотез:

$$\psi_j(\cdot) = \psi(\cdot), \quad j = \overline{1, K}, \quad \psi: \mathfrak{R}_+^1 \rightarrow \left(0; \min_k \frac{1}{w_k}\right], \quad \text{где } \psi(\cdot) -$$

гладкая строго монотонно возрастающая функция.

Утверждение 3. Пусть существует такой номер гипотезы j , что

$$\frac{w_j}{1 - L_j(0)} < \frac{w_{j+1}}{1 - L_{j+1}(0)} \quad \text{и} \quad w_j < w_{j+1}.$$

Тогда если выполнено предположение А.3, то перестановка между собой этой пары гипотез уменьшает суммарное время (13) последовательного освоения предметной области.

Следствие 2. В модели (6), (13) в рамках предположения А.3 оптимальным с точки зрения суммарного времени

последовательного освоения предметной области является упорядочение гипотез по убыванию априорной вероятностей проверки (по росту «сложности»), если это упорядочение совпадает с упорядочением априорных вероятностей проверки, нормированных на единицу минус начальный уровень научения.

Для аддитивного случая суммарное ожидаемое время последовательного освоения предметной области составит

$$(14) \tau_{seq}(\mathbf{L}(0), \mathbf{w}) = \sum_{k=1}^K \frac{1 - L_k(0)}{w_k + \mu_k(N_k)}.$$

Для этого случая справедлив следующий аналог утверждения 3.

Утверждение 4. Пусть существует такой номер гипотезы j , что $w_j < w_{j+1}$. Тогда если выполнено предположение А.2, то перестановка между собой этой пары гипотез уменьшает суммарное время (14) последовательного освоения предметной области.

Следствие 3. В модели (6), (14) в рамках предположения А.2 оптимальным с точки зрения суммарного времени последовательного освоения предметной области является упорядочение гипотез по убыванию априорных вероятности проверки (по росту «сложности»).

Рассмотрим теперь случай, когда $\psi(\cdot)$ – непрерывная строго монотонно убывающая функция. Для него справедлив следующий «анти-аналог» утверждения 4.

Утверждение 5. Пусть начальные значения всех уровней научения одинаковы: $L_j(0) = L^0$, функции влияния предшествующего опыта на вероятности проверки одинаковы для всех гипотез: $\psi_j(\cdot) = \psi(\cdot)$, $j = \overline{1, K}$, $\psi: \mathfrak{R}_+^1 \rightarrow (0; 1 - \min_k w_k]$, где $\psi(\cdot)$ – непрерывная строго монотонно убывающая функция, и существует такой номер гипотезы j , что $w_j > w_{j+1}$. Тогда если выполнено предположение А.2, то перестановка между собой этой пары

гипотез уменьшает суммарное время (13) последовательного освоения предметной области.

Следствие 4. В мультипликативном случае, когда $\psi(\cdot)$ – непрерывная строго монотонно убывающая функция, оптимальным с точки зрения суммарного времени последовательного освоения предметной области является упорядочение гипотез по возрастанию априорных вероятностей проверки (по убыванию «сложности»).

Рассмотрим теперь случай, когда от последовательности проверки гипотез зависит начальное значение уровня научения:

$$(15) \tau_k(\zeta(\eta_k), w_k) = (1 - \zeta(\eta_k)) / w_k, \quad k = \overline{1, K},$$

где $\zeta: \mathfrak{R}_+^1 \rightarrow [0; 1)$ – непрерывная строго монотонно возрастающая функция. Суммарное время:

$$(16) \tau_{seq}(\mathbf{w}) = \sum_{k=1}^K \frac{1 - \zeta(\eta_k)}{w_k}.$$

Введем следующее предположение.

А.4. Функции влияния предшествующего опыта на начальное значение уровня освоения одинаковы для всех гипотез: $\zeta_j(\cdot) = \zeta(\cdot)$, $j = \overline{1, K}$, $\zeta: \mathfrak{R}_+^1 \rightarrow [0; 1)$, где $\zeta(\cdot)$ – непрерывная строго монотонно возрастающая функция.

В рассматриваемом случае справедлив следующий аналог утверждений 1–4.

Утверждение 6. Пусть выполнено предположение А.4, и существует номер гипотезы j , такой, что $w_j < w_{j+1}$. Тогда перестановка между собой этой пары гипотез уменьшает суммарное время (16) последовательного освоения предметной области.

Следствие 5. В модели (6), (15) в рамках предположения А.4 оптимальным с точки зрения суммарного времени последовательного освоения предметной области является упорядочение гипотез по убыванию априорных вероятностей проверки (по росту «сложности»).

6. Заключение: задачи дискретной оптимизации в моделях креативной деятельности

Таким образом, в ряде случаев оптимальным (с точки зрения среднего времени проверки всех гипотез или суммарного времени достижения заданного уровня научения) расписанием оказывается простое правило – упорядочение гипотез от простой к сложной (по убыванию априорных вероятностей проверки).

Приведем общие достаточные условия оптимальности расписания «от простого к сложному». Пусть $t_k = t(\eta_k, w_k)$ – время проверки k -й гипотезы, $k = \overline{1, K}$, где функция $t(\cdot, \cdot)$ – непрерывна и убывает по обоим переменным, и для любых x, y, z , таких, что $y < z$, выполнено $t(x, y) + t(x + y, z) > t(x, z) + t(x + z, y)$. Тогда легко проверить, что в случае $w_j < w_{j+1}$ перестановка местами последовательности проверки гипотез j и $j + 1$ приведет к сокращению суммарной длительности их проверки. Ослабление достаточных условий и формулирование их в содержательно интерпретируемом виде является перспективным направлением дальнейших исследований, так же как и изучение задач оптимизации последовательности проверки взаимозависимых гипотез.

Теория графов и дискретная оптимизация предлагают богатый аппарат для постановки и решения задач оптимизации процесса проверки гипотез и, более того, – для моделирования креативной деятельности. Приведем несколько примеров, иллюстрирующих это утверждение.

Представим предметную область в виде графа, содержащего K вершин, соответствующих гипотезам, подлежащим проверке. Гипотеза k характеризуется парой неотрицательных чисел (c_k, d_k) : первое отражает трудность (трудоемкость) ее проверки, второе – тот вклад в опыт освоения предметной области, который вносит ее проверка.

Опыт будем считать аддитивным, т.е. при последовательной проверке гипотез в порядке возрастания их номеров к моменту, когда исследователь приступает к проверке k -й гипотезы, он обладает опытом $D_k = \sum_{j=1}^{k-1} d_j$, а суммарная

трудоемкость уже проверенных им гипотез составляет $C_k = \sum_{j=1}^{k-1} C_j$. Определим для каждой гипотезы ее сложность

(зависящую от последовательности проверки всех гипотез) как $\gamma_k = c_k + C_k - D_k$ (отметим, что при таком определении сложность может быть и отрицательна). Для каждой последовательности проверки всех гипотез (т.е. для каждого гамильтонова контура $\rho = (i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, i_K)$ в соответствующем графе) определим ее сложность как максимальную из сложностей проверки всех гипотез: $\gamma(\rho) = \max_{k=1, \dots, K} \{ \gamma_{i_k} \}$.

Задача заключается в том, чтобы найти последовательность проверки всех гипотез (т.е. гамильтонов контур) минимальной сложности: $\gamma(\rho) \rightarrow \min_{\rho}$. В рамках введенных предположений эта комбинаторная задача имеет простое аналитическое решение (см. общие результаты в [9]):

– упорядочим гипотезы, для которых имеет место $d_k \geq c_k$, в порядке возрастания величины c_k и включим их в последовательность (гамильтонов контур);

– добавим к полученной последовательности гипотезы, для которых имеет место $d_k < c_k$, в порядке убывания d_k .

Содержательно, сначала следует проверять гипотезы, трудоемкость которых меньше того вклада, которые они вносят в опыт, упорядочивая их от простых к сложным, а затем следует переходить к тем гипотезам, у которых вклад в опыт меньше трудоемкости, упорядочивая их по убыванию первого.

Конечно, введенные предположения об «аддитивности» трудоемкости опыта являются достаточно сильными.

Но зато эти предположения дают возможность получить простое аналитическое и содержательно интерпретируемое решение.

Вообще дискретная оптимизация и теория графов дают широкое поле для возможных задач оптимальной проверки гипотез. Так, например, возможны следующие формулировки, основывающиеся на известных результатах [8, 9] (автор признателен проф. В.Н. Буркову за идеи и обсуждение):

1. *Задача о ранце с учетом синергетического эффекта*, когда «включение в ранец двух предметов» (другими словами, включение в план научных исследований двух тем или решение о проверке двух гипотез) уменьшает их суммарный вес (суммарное время их выполнения). Требуется разработать план научных исследований, максимизирующий накопленный опыт (объем научных знаний) при ограничении на трудозатраты (трудоемкость).

2. *Задача редактора*, когда, например, в проверке заданного набора гипотез участвуют двое – исследователь-теоретик и программист. Исследователь разрабатывает метод решения задачи (проверки гипотезы), программист разрабатывает соответствующие программы. После этого исследователь проводит вычислительные эксперименты на основе этих программ. Требуется определить очередность проверки гипотез, минимизирующую общее время проверки.

3. *Задача о назначении*. Имеется n гипотез (научных задач) и m исполнителей ($m \geq n$). Известны компетентности всех исполнителей в плане решения соответствующих задач (проверки гипотез). Требуется назначить по исполнителю (исследователю) на каждую гипотезу так, чтобы суммарное (или максимальное) время проверки всех гипотез было минимальным (время зависит от компетентности исполнителя).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Предположим противное, т.е. что $\frac{\psi(x+y)}{y} \leq \frac{\psi(x+z)}{z}$. Из вогнутости функции $\psi(\cdot)$ следует следующая оценка: $\frac{\psi(x+y)}{y} \geq \frac{\psi(x) + (\psi(x+z) - \psi(x)) y / z}{y}$.

Получаем $\frac{\psi(x)}{y} + \frac{\psi(x+z)}{z} - \frac{\psi(x)}{z} \leq \frac{\psi(x+z)}{z}$, откуда, с учетом строго монотонности функции $\psi(\cdot)$ следует $z \leq y$. Противоречие.

Доказательство утверждения 1. Во-первых, отметим, что перестановка пары гипотез j и $j+1$ не изменяет множеств N_l для всех l от 1 до $j-1$ и от $j+2$ до K , а, следовательно, не изменяет и времен проверки всех гипотез, кроме j и $j+1$. Этот факт существенен и для всех остальных утверждений.

Сравним два суммарных времени проверки гипотез j и $j+1$ $T_j(\varepsilon, w_j \psi(\eta_j)) + T_{j+1}(\varepsilon, w_{j+1} \psi(\eta_j + w_j))$ и $T_{j+1}(\varepsilon, w_{j+1} \psi(\eta_j)) + T_j(\varepsilon, w_j \psi(\eta_j + w_{j+1}))$.

Первая сумма равна

$$T_{j,j+1} = \ln\left(\frac{\varepsilon}{1-L^0}\right) \left[\frac{1}{\ln(1-w_j \psi(\eta_j))} + \frac{1}{\ln(1-w_{j+1} \psi(\eta_j + w_j))} \right],$$

Вторая сумма равна

$$T_{j+1,j} = \ln\left(\frac{\varepsilon}{1-L^0}\right) \left[\frac{1}{\ln(1-w_{j+1} \psi(\eta_j))} + \frac{1}{\ln(1-w_j \psi(\eta_j + w_{j+1}))} \right].$$

Предположим противное, т.е. что $T_{j+1,j} \geq T_{j,j+1}$. Тогда с учетом того, что $\ln\left(\frac{\varepsilon}{1-L^0}\right) < 0$, получаем:

$$\frac{1}{\ln(1 - w_{j+1} \psi(\eta_j))} + \frac{1}{\ln(1 - w_j \psi(\eta_j + w_{j+1}))} \leq \\ \leq \frac{1}{\ln(1 - w_j \psi(\eta_j))} + \frac{1}{\ln(1 - w_{j+1} \psi(\eta_j + w_j))}.$$

Перепишем это неравенство в виде

$$\frac{1}{\ln(1 - w_{j+1} \psi(\eta_j))} - \frac{1}{\ln(1 - w_j \psi(\eta_j))} \leq \\ \leq \frac{1}{\ln(1 - w_{j+1} \psi(\eta_j + w_j))} - \frac{1}{\ln(1 - w_j \psi(\eta_j + w_{j+1}))}.$$

В силу того, что $w_j < w_{j+1}$, левая часть последнего неравенства строго положительна. Значит и правая часть строго положительна:

$$\frac{\ln\left(\frac{1 - w_j \psi(\eta_j + w_{j+1})}{1 - w_{j+1} \psi(\eta_j + w_j)}\right)}{\ln(1 - w_{j+1} \psi(\eta_j + w_j)) \ln(1 - w_j \psi(\eta_j + w_{j+1}))} > 0.$$

Так как знаменатель строго положителен, то и числитель должен быть строго положительен:

$$\frac{1 - w_j \psi(\eta_j + w_{j+1})}{1 - w_{j+1} \psi(\eta_j + w_j)} > 1.$$

Значит, $\frac{\psi(\eta_j + w_{j+1})}{w_{j+1}} < \frac{\psi(\eta_j + w_j)}{w_j}$, что противоречит результату пункта а) леммы 5.2.

Доказательство утверждения 2. Сравним два суммарных времени проверки гипотез j и $j + 1$ $T_j(\varepsilon, w_j \psi(\eta_j)) + T_{j+1}(\varepsilon, w_{j+1} \psi(\eta_j + w_j))$ и $T_{j+1}(\varepsilon, w_{j+1} \psi(\eta_j)) + T_j(\varepsilon, w_j \psi(\eta_j + w_{j+1}))$.

Первая сумма равна

$$T_{j,j+1} = \ln\left(\frac{\varepsilon}{1 - L^0}\right) \left[\frac{1}{\ln(1 - w_j - \psi(\eta_j))} + \frac{1}{\ln(1 - w_{j+1} - \psi(\eta_j + w_j))} \right],$$

Вторая сумма равна

$$T_{j+1,j} = \ln\left(\frac{\varepsilon}{1-L^0}\right) \left[\frac{1}{\ln(1-w_{j+1}-\psi(\eta_j))} + \frac{1}{\ln(1-w_j-\psi(\eta_j+w_{j+1}))} \right]$$

Предположим противное, т.е. что $T_{j+1,j} \geq T_{j,j+1}$. Тогда с учетом того, что $\ln\left(\frac{\varepsilon}{1-L^0}\right) < 0$, получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\ln(1-w_{j+1}-\psi(\eta_j))} + \frac{1}{\ln(1-w_j-\psi(\eta_j+w_{j+1}))} \leq \\ & \leq \frac{1}{\ln(1-w_j-\psi(\eta_j))} + \frac{1}{\ln(1-w_{j+1}-\psi(\eta_j+w_j))}. \end{aligned}$$

Перепишем это неравенство в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\ln(1-w_{j+1}-\psi(\eta_j))} - \frac{1}{\ln(1-w_j-\psi(\eta_j))} \leq \\ & \leq \frac{1}{\ln(1-w_{j+1}-\psi(\eta_j+w_j))} - \frac{1}{\ln(1-w_j-\psi(\eta_j+w_{j+1}))}. \end{aligned}$$

В силу того, что $w_j < w_{j+1}$, левая часть последнего неравенства строго положительна. Значит, и правая часть строго положительна:

$$\frac{\ln\left(\frac{1-w_j-\psi(\eta_j+w_{j+1})}{1-w_{j+1}-\psi(\eta_j+w_j)}\right)}{\ln(1-w_{j+1}-\psi(\eta_j+w_j))\ln(1-w_j-\psi(\eta_j+w_{j+1}))} > 0.$$

Так как знаменатель строго положителен, то и числитель должен быть строго положителен:

$$\frac{1-w_j-\psi(\eta_j+w_{j+1})}{1-w_{j+1}-\psi(\eta_j+w_j)} > 1.$$

Значит $\psi(\eta_j+w_{j+1})-\psi(\eta_j+w_j) < w_{j+1}-w_j$, что противоречит условию (11) предположения А.2.

Доказательство утверждения 3. Обозначим через

$w'_j = \frac{w_j}{1 - L_j(0)} > 0$. Из условия доказываемого утверждения

следует, что $w'_j < w'_{j+1}$.

Сравним два ожидаемых суммарных времени проверки гипотез j и $j + 1$: $\tau_j(w_j \psi(\eta_j)) + \tau_{j+1}(w_{j+1} \psi(\eta_j + w_j))$ и $\tau_{j+1}(w_{j+1} \psi(\eta_j)) + \tau_j(w_j \psi(\eta_j + w_{j+1}))$.

Первая сумма равна

$$T_{j,j+1} = \frac{1}{w'_j \psi(\eta_j)} + \frac{1}{w'_{j+1} \psi(\eta_j + w_j)},$$

Вторая сумма равна

$$T_{j+1,j} = \frac{1}{w'_{j+1} \psi(\eta_j)} + \frac{1}{w'_j \psi(\eta_j + w_{j+1})}.$$

Предположим противное, т.е. что $T_{j+1,j} \geq T_{j,j+1}$. Тогда $T_{j+1,j} - T_{j,j+1} \geq 0$. То есть

$$\frac{1}{w'_{j+1} \psi(\eta_j)} + \frac{1}{w'_j \psi(\eta_j + w_{j+1})} - \frac{1}{w'_j \psi(\eta_j)} - \frac{1}{w'_{j+1} \psi(\eta_j + w_j)} \geq 0.$$

В силу предположения а.1'' и того, что $w_j < w_{j+1}$, оценим знаменатель второго слагаемого:

$$\left(\frac{1}{w'_{j+1}} - \frac{1}{w'_j} \right) \frac{1}{\psi(\eta_j)} + \left(\frac{1}{w'_j} - \frac{1}{w'_{j+1}} \right) \frac{1}{\psi(\eta_j + w_j)} > 0.$$

$$\left(\frac{1}{w'_{j+1}} - \frac{1}{w'_j} \right) \left(\frac{1}{\psi(\eta_j)} - \frac{1}{\psi(\eta_j + w_j)} \right) > 0.$$

$$\left(\frac{w'_j - w'_{j+1}}{w'_j w'_{j+1}} \right) \left(\frac{\psi(\eta_j + w_j) - \psi(\eta_j)}{\psi(\eta_j) \psi(\eta_j + w_j)} \right) > 0.$$

В силу того, что $w_j < w_{j+1}$, числитель в первом сомножителе строго отрицателен, знаменатель – строго положителен. В силу предположения А.3 и числитель и знамена-

тель второго сомножителя строго положительны. Противоречие.

Доказательство утверждения 4. Сравним два ожидаемых суммарных времени проверки гипотез j и $j+1$
 $\tau_j(w_j \psi(\eta_j)) + \tau_{j+1}(w_{j+1} \psi(\eta_j + w_j))$ и
 $\tau_{j+1}(w_{j+1} \psi(\eta_j)) + \tau_j(w_j \psi(\eta_j + w_{j+1}))$.

Первая сумма равна

$$T_{j,j+1} = \frac{1-L^0}{w_j + \psi(\eta_j)} + \frac{1-L^0}{w_{j+1} + \psi(\eta_j + w_j)},$$

Вторая сумма равна

$$T_{j+1,j} = \frac{1-L^0}{w_{j+1} + \psi(\eta_j)} + \frac{1-L^0}{w_j + \psi(\eta_j + w_{j+1})}.$$

Предположим противное, т.е. что $T_{j+1,j} \geq T_{j,j+1}$. Тогда $T_{j+1,j} - T_{j,j+1} \geq 0$. То есть

$$\begin{aligned} & \frac{1-L^0}{w_{j+1} + \psi(\eta_j)} - \frac{1-L^0}{w_j + \psi(\eta_j)} + \\ & + \frac{1-L^0}{w_j + \psi(\eta_j + w_{j+1})} - \frac{1-L^0}{w_{j+1} + \psi(\eta_j + w_j)} \geq 0. \end{aligned}$$

Преобразуем, в том числе сокращая на строго положительную величину $1-L^0$:

$$\begin{aligned} & \frac{w_j - w_{j+1}}{(w_{j+1} + \psi(\eta_j))(w_j + \psi(\eta_j))} - \\ & - \frac{\psi(\eta_j + w_{j+1}) - \psi(\eta_j + w_j) + w_j - w_{j+1}}{(w_j + \psi(\eta_j + w_{j+1}))(w_{j+1} + \psi(\eta_j + w_j))} \geq 0. \end{aligned}$$

Знаменатели обеих дробей строго положительны как произведения строго положительных чисел. В силу того, что $w_j < w_{j+1}$, числитель первой дроби строго отрицателен, значит, вся эта дробь строго отрицательна. Числитель второй дроби неотрицателен в силу условия (11) предположения А.2. Следовательно, вся разность (строго отрица-

тельного числа и неотрицательного) строго отрицательна. Противоречие.

Доказательство утверждения 5. Сравним два ожидаемых суммарных времени проверки гипотез j и $j+1$
 $\tau_j(w_j \psi(\eta_j)) + \tau_{j+1}(w_{j+1} \psi(\eta_j + w_j))$ и
 $\tau_{j+1}(w_{j+1} \psi(\eta_j)) + \tau_j(w_j \psi(\eta_j + w_{j+1}))$.

Первая сумма равна

$$T_{j,j+1} = \frac{1-L^0}{w_j \psi(\eta_j)} + \frac{1-L^0}{w_{j+1} \psi(\eta_j + w_j)},$$

Вторая сумма равна

$$T_{j+1,j} = \frac{1-L^0}{w_{j+1} \psi(\eta_j)} + \frac{1-L^0}{w_j \psi(\eta_j + w_{j+1})}.$$

Предположим противное, т.е. что $T_{j+1,j} \geq T_{j,j+1}$. Тогда $T_{j+1,j} - T_{j,j+1} \geq 0$. То есть

$$\frac{1-L^0}{w_{j+1} \psi(\eta_j)} + \frac{1-L^0}{w_j \psi(\eta_j + w_{j+1})} - \frac{1-L^0}{w_j \psi(\eta_j)} - \frac{1-L^0}{w_{j+1} \psi(\eta_j + w_j)} \geq 0.$$

В силу того, что $w_j > w_{j+1}$, и убывания функции $\psi(\cdot)$, сокращая на строго положительную величину $1-L^0$, оценим знаменатель второго слагаемого:

$$\left(\frac{1}{w_{j+1}} - \frac{1}{w_j} \right) \frac{1}{\psi(\eta_j)} - \left(\frac{1}{w_{j+1}} - \frac{1}{w_j} \right) \frac{1}{\psi(\eta_j + w_j)} > 0.$$

$$\left(\frac{1}{w_{j+1}} - \frac{1}{w_j} \right) \left(\frac{1}{\psi(\eta_j)} - \frac{1}{\psi(\eta_j + w_j)} \right) > 0.$$

$$\left(\frac{w_j - w_{j+1}}{w_j w_{j+1}} \right) \left(\frac{\psi(\eta_j + w_j) - \psi(\eta_j)}{\psi(\eta_j) \psi(\eta_j + w_j)} \right) > 0.$$

В силу того, что $w_j > w_{j+1}$, числитель в первом множителе строго положителен, знаменатель тоже строго положителен. В силу того, что $w_j > w_{j+1}$, и строгого убывания функции $\psi(\cdot)$, числитель второго множителя строго

отрицателен, а знаменатель второго сомножителя строго положителен. Противоречие.

Доказательство утверждения б. Сравним два ожидаемых суммарных времени проверки гипотез j и $j + 1$: $\tau_j(\zeta(\eta_j), w_j) + \tau_{j+1}(\zeta(\eta_j + w_j), w_{j+1})$ и $\tau_{j+1}(\zeta(\eta_j), w_{j+1}) + \tau_j(\zeta(\eta_j + w_j), w_j)$.

Первая сумма равна

$$T_{j,j+1} = \frac{1 - \zeta(\eta_j)}{w_j} + \frac{1 - \zeta(\eta_j + w_j)}{w_{j+1}},$$

Вторая сумма равна

$$T_{j+1,j} = \frac{1 - \zeta(\eta_j)}{w_{j+1}} + \frac{1 - \zeta(\eta_j + w_{j+1})}{w_j}.$$

Предположим, что $T_{j+1,j} \geq T_{j,j+1}$. Тогда $T_{j+1,j} - T_{j,j+1} \geq 0$. То есть

$$\begin{aligned} \frac{1 - \zeta(\eta_j)}{w_{j+1}} + \frac{1 - \zeta(\eta_j + w_{j+1})}{w_j} - \frac{1 - \zeta(\eta_j)}{w_j} - \frac{1 - \zeta(\eta_j + w_j)}{w_{j+1}} &\geq 0. \\ \frac{\zeta(\eta_j) - \zeta(\eta_j + w_{j+1})}{w_j} + \frac{\zeta(\eta_j + w_j) - \zeta(\eta_j)}{w_{j+1}} &\geq 0. \end{aligned}$$

В силу неравенства $w_j < w_{j+1}$ и строгой монотонности функции $\zeta(\cdot)$ справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta(\eta_j) - \zeta(\eta_j + w_{j+1})}{w_j} + \frac{\zeta(\eta_j + w_j) - \zeta(\eta_j)}{w_{j+1}} &< \\ < \frac{\zeta(\eta_j + w_j) - \zeta(\eta_j + w_{j+1})}{w_j} &< 0. \end{aligned}$$

Противоречие.

Литература

1. BELOV M., NOVIKOV D. *Methodology of Complex Activity: Foundations of Understanding and Modelling.* – Springer: Heidelberg, 2020.

2. BELOV M., NOVIKOV D. *Models of Experience // Control Sciences.* – 2021. – No. 1. – P. 43–60.
3. BELOV M., NOVIKOV D. *Models of Technologies.* – Springer: Heidelberg, 2020.
4. BELOV M., NOVIKOV D. *Optimal Enterprise: Structures, Processes and Mathematics of Knowledge, Technology and Human Capital.* – CRC Press: Boca Raton, 2021.
5. BELOV M., NOVIKOV D. *Structure of Creative Activity // Control Sciences.* – 2021.
6. BISKUP D. *Single-machine Scheduling with Learning Considerations // European Journal of Operational Research.* – 1999. – Vol. 115. – P. 173–178.
7. BROWNE S., YECHIALI U. *Scheduling Deteriorating Jobs on a Single Processor // Operations Research.* – 1990. – Vol. 38, No. 3. – P. 495–498.
8. BRUCKER P. *Scheduling Algorithms.* 5th ed. – Berlin: Springer, 2007. – 378 p.
9. BURKOV V. et al. *Mechanism Design and Management: Mathematical Methods for Smart Organizations.* – New York: Nova Science Publishers, 2013. – 163 p.
10. CHENG E., KOVALYOV M. *Scheduling with Learning Effects on Job Processing Times // Working Paper No. 06/94.* – Hong Kong: The Hong Kong Polytechnic University, 1994. – 48 p.
11. CHENG E., WANG G. *Single Machine Scheduling with Learning Effect Considerations // Annals of Operations Research.* – 2000. – Vol. 98. – P. 273–290.
12. CHENTSOV A.G., CHENTSOV A.A. *Routing under Constraints: Problem of Visit to Megalopolises // Automation and Remote Control.* – 2016. – Vol. 77, No. 11. – P. 1957–1974.

13. KOULAMAS C., KYPARISIS G. *New Results for Single-machine Scheduling with Past-sequence-dependent Setup Times and Due Date-related Objectives* // Eur. J. Oper. Res. – 2019. – Vol. 278. – P. 149–159.
14. KOULAMAS C., KYPARISIS G. *Single-machine Scheduling Problems with Past-sequence-dependent Setup Times* // Eur. J. Oper. Res. 2008. Vol. 187. P. 1045 – 1049.
15. LEE W., LAI P., WU C. *Some Single-machine and Flow-shop Scheduling Problems with a Non-linear Deterioration Function* // Computers and Mathematics with Applications. – 2011. – Vol. 62. – P. 2487–2496.
16. LOW C., LIN W. *Some Scheduling Problems with Time-dependent Learning Effect and Deteriorating Jobs* // Applied Mathematical Modelling. – 2013. – Vol. 37, P. 8865–8875.
17. PINEDO M. *Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems*. – Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2002. – 690 p.
18. SUN J, LI Y. *Single-machine Scheduling with Past-sequence-dependent Delivery Times and Deteriorating Jobs* // Mathematica Aeterna. – 2013. – Vol. 3, No. 9. – P. 799–806.
19. *The Traveling Salesman Problem and Its Variations* / Ed. by G. Gutin and A. Punnen. – N.Y.: Springer, 2007. – 834 p.
20. WANG L., HUANG W., LIU W. et al. *Scheduling with Position-Dependent Weights, Due-Date Assignment and Past-Sequence-Dependent Setup Times* // RAIRO-Oper. Res. – 2021. – Vol. 55. – P. 2747–2758.
21. WANG L., WANG J., FENG E. *Scheduling Jobs with General Learning Functions* // J Syst Sci Syst Eng. – 2011. – Vol. 20, No. 1. – P. 119–125.
22. WANG X., WANG J. *Scheduling Problems with Past-sequence-dependent Setup Times and General Effects of Deterioration and Learning* // Applied Mathematical Modelling. – 2013. – Vol. 37. – P. 4905–4914.

OPTIMAL SCHEDULE TO TEST INDEPENDENT HYPOTHESES

Dmitry Novikov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (novikov@ipu.ru).

Abstract: The first stage of any creative activity consists in generating a set of hypotheses and testing them. Generally, the time, required for testing a hypothesis is random and depends on its complexity (the prior probability of testing per unit time) and on acquired experience, determined by the set of hypotheses, successfully tested before. The problem is to choose an optimal schedule of testing, i.e. minimizing the sum of expected testing times, which are essentially nonlinear past-sequence-dependent and take into account learning and deterioration effects. For this aim, the general model of creative activity is formulated and the corresponding problem of optimal scheduling is stated; the classification of subproblems is introduced. Analysis of related works demonstrates the absence of methods to find computationally “simple” solution of the problem in hand. The used method of analytical proof of certain monotonic schedule optimality consists in reordering of two adjacent hypothesis, violating monotonicity. Main result is a set (for different subproblems) of sufficient conditions, under which the monotonic “simple-to-complex” schedule is optimal: the hypotheses are arranged in ascending order of their complexity.

Keywords: schedule theory; past-sequence-dependent scheduling problem; time-dependent processing times; learning and deterioration effects; creative activity; hypotheses testing.

УДК 519.248

ББК 22.171

DOI: 10.25728/ubs.2021.94.1

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М.В. Губко.

Поступила в редакцию 12.10.2021.

Опубликована 30.11.2021.

ОБ ИМИТАЦИОННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ПОМОЩЬЮ ИНТЕНСИВНОСТИ¹

Зверкина Г. А.²

*(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

Кошелев А. А.³

*(Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова, Москва)*

Как известно, случайные величины обычно моделируются с помощью функции, обратной к функции распределения. Однако часто при моделировании поведения сложных технических моделей исследователь сталкивается с изменением параметров моделируемых случайных величин. Часто в этих случаях меняется интенсивность завершения определенного случайного периода. Следовательно, важно иметь возможность моделировать случайную величину в условиях (случайного) изменения интенсивности этой случайной величины. В данной статье предлагается новый метод моделирования случайной величины по её интенсивности. Текст снабжён иллюстративным материалом результатов численных экспериментов, подтверждающих эффективность предложенного метода. Естественно, этот текст – только начало работы. В дальнейшем будут уточнены технические детали эффективности применения предложенного метода.

Ключевые слова: интенсивность случайной величины, численное моделирование, вопросы оптимизации моделирования.

1. Введение

Как хорошо известно, значительное количество известных моделей в теории массового обслуживания, в теории надёжности и теории сетей массового обслуживания описывается линейчатыми процессами (см. [3]).

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант №20-01-00575А

Авторы признательны М.П. Фархадову за ценное обсуждение содержания статьи.

² Галина Александровна Зверкина, к.ф.-м.н., доцент (zverkina@gmail.com).

³ Александр Анатольевич Кошелев, (koshelev030698@yandex.ru).

Как правило, большинство таких процессов являются эргодическими, т.е. с течением времени распределение состояния такого процесса (слабо) сходится к некоторому стационарному инвариантному (относительно соответствующих переходных вероятностей) распределению.

Обычно для стационарного распределения можно вычислить некоторые важные характеристики, однако в значительном количестве случаев теоретическое определение скорости сходимости распределения изучаемой системы к стационарному распределению оценить или вычислить невозможно.

Поэтому для получения оценок скорости сходимости распределения исследуемой системы к стационарному распределению может быть использовано имитационное моделирование поведения системы с помощью программных средств.

Напомним данное в [3] определение линейчатого процесса (с некоторой модификацией для того, чтобы кусочно-линейный процесс был марковским):

Определение 1. Кусочно-линейным марковским процессом называется случайный процесс $X_t = (\nu(t), \vec{v}(t))$, определяемый следующим образом. Пространство состояний процесса \mathcal{X} – это множество пар $(i, \vec{\xi}_i)$, где i – элемент конечного или счётного пространства, а \vec{v}_i – вектор $= (v_1, \dots, v_{|i|})$, где $|i| \geq 0$ является «размером» базового состояния i ; $v_j \geq 0$. Поведение процесса X_t описывается так.

Пусть $X_t = (i, \vec{y})$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_{|i|})$. Тогда с вероятностью $\lambda_i(X_t) \times p_{ij}(X_t) dt$ за время dt произойдёт случайный переход X_t в базовое состояние j . После перехода в состояние j новое значение компоненты $\vec{v}(t)$ случайно и определяется измеримой по \vec{y} функцией распределения (ф.р.)

$$B_{ij}^{(0)}(\vec{x}|\vec{y}) = \mathbf{P} \{ \vec{v}(t + dt) < \vec{x} | \vec{v}(t) = \vec{y}, \nu(t) = i, \nu(t + dt) = j \}.$$

Вероятность того, что за малое время h произойдёт более одного случайного перехода, есть $o(h)$. При этом если $\nu(t + dt) = \nu(t)$, то $\vec{v}(t + dt) = \vec{v}(t) + \vec{\alpha}_i dt$, где $\vec{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{i|i|})$ –

вектор с неотрицательными компонентами, если на интервале $(t, t + dt)$ не было случайных переходов (см. [3]).

Таким образом, поведение кусочно-линейного процесса определяется случайными величинами (сл.в.), для которых обычно известна *интенсивность* окончания того или иного периода. Кроме того, часто бывает известна функция распределения периодов кусочно-линейного процесса – в этом случае может применяться *классический* метод моделирования случайных величин с помощью обратной функции к функции распределения.

То есть случайная величина ξ с функцией распределения $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P} \{ \xi \leq x \}$ может быть промоделирована как

$$(1) \quad \xi \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}(\mathcal{U}),$$

где

$$F^{-1}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y \}, \quad y \in \mathbb{R},$$

а \mathcal{U} – равномерно распределённая случайная величина на интервале $[0; 1)$.

Такое моделирование одной системы надёжности проводилось в работе [4]; при этом было обнаружено, что начиная с некоторого момента за счет накопления ошибки точность вычисления падает и становится примерно равной около 10^{-4} , что демонстрирует статья [4]. Случайные величины в работе [4] моделировались с точностью до 15 значащих цифр по схеме, описанной выше по формуле (1).

Естественно, в дальнейшем следует учитывать тот факт, что имитационное моделирование непрерывных случайных величин фактически является моделированием дискретных случайных величин с шагом, определяемым используемым программным продуктом.

В значительном количестве изучаемых моделей ТМО и смежных областей распределения работы/восстановления/интервала между заявками и пр. известны. Но не всегда даже для известных распределений можно найти явное выражение для обратной функции $F^{-1}(\cdot)$ – например, для часто встречающегося в приложениях гамма-распределения. Также в ряде сложных сто-

хастических систем «поведение» элементов системы может существенно зависеть от общего состояния системы (т.е. состояний других элементов системы) и не может быть определено до начала моделирования поведения сложной системы. В этом случае будем рассматривать случайную величину (длину периода восстановления) как случайную величину, заданную с помощью (случайно) меняющейся интенсивности окончания того или иного периода (отказа, ремонта, появления требования в системе, обслуживания требования и др.) меняется в зависимости от полного состояния изучаемой системы (см., например, [2, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]).

Поэтому целью настоящей работы является представление алгоритма моделирования случайной величины с помощью её *интенсивности*.

2. Случайные величины и интенсивности

Пусть при исследовании поведения некоторого случайного процесса нам необходимо учесть поведение некоторого объекта, на поведение которого может влиять состояние *всей* исследуемой системы.

Пусть в некоторый момент времени t известно, что еще не закончился период работы (ремонта, ожидания появления нового требования и пр.). Если распределение этого периода ξ имеет *непрерывную* функцию распределения $F(s)$, то вероятность того, что на бесконечно малом промежутке времени $(t, t + \Delta t)$ произойдет окончание интересующего нас периода, имеет вид

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \{ \xi \in (t, t + \Delta t) \mid \xi > t \} = \\ & = \frac{\mathbf{P} \{ \xi < t + \Delta t \} - \mathbf{P} \{ \xi < t \}}{\mathbf{P} \{ \xi > t \}} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)}. \end{aligned}$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ имеем

$$(2) \quad \mathbf{P} \{ \xi \in (t, t + \Delta t) \mid \xi > t \} = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t),$$

где

$$\lambda(t) = \frac{p(t)}{1 - F(t)} = \frac{F'(t)}{1 - F(t)} = -\frac{d}{dt} \ln(1 - F(t)),$$

$F(t)$ — функция распределения, $p(t)$ — плотность распределения. Функция $\lambda(t)$ называется интенсивностью случайной величины (см., например, [7]). Мы предполагаем, что интенсивность может зависеть от времени и от некоторых дополнительных параметров, связанных с поведением других элементов сложной системы. Заметим, что

$$F(s) = 1 - \exp\left(-\int_0^s \lambda(u) du\right), \quad p(s) = \lambda(s) \exp\left(-\int_0^s \lambda(u) du\right).$$

Отсюда видно, что п.в. (почти всюду) положительная случайная величина с абсолютно непрерывным распределением, являющаяся периодом некоторого процесса восстановления, определяется однозначно либо функцией распределения, либо плотностью, либо интенсивностью — подробнее см. [1, 6].

3. Идея предлагаемого метода моделирования случайных величин

В данной работе предлагается для моделирования поведения сложных систем (массового обслуживания, надёжности и пр.), поведение которых определяется кусочно-линейными процессами, использовать не «классический» метод моделирования случайных величин по схеме (1), а опираясь на формулу (2).

А именно, рассматривается последовательность независимых одинаково распределённых величин $\{\mathcal{U}_i\}$, равномерно распределённых на $[0; 1)$.

Время с момента $t = 0$ до произвольного достаточно большого времени T разбивается на интервалы точками $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n = T$. В рассматриваемый момент времени $t = \tau_i < T$ предполагается, что время пребывания некоторого параметра рассматриваемой сложной системы (обслуживания, надёжности и пр.) в данном состоянии равно величине $s \geq 0$; интенсивность окончания этого периода равна $\lambda(s)$. Тогда изменение этого состояния (т.е. окончание пребывания в данном состоянии)

на интервале времени $(t; t + \Delta t)$ (где $\Delta t \stackrel{\text{def}}{=} \tau_{i+1} - \tau_i$) близко к значению $\lambda(s)\Delta t$. Поэтому с вероятностью $\mathbb{P}_s \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P} \{ \lambda(s)\Delta t > \mathcal{U}_i \}$ в момент τ_{i+1} закончится рассматриваемый период времени пребывания исследуемого параметра в данном состоянии.

Таким образом, общая схема моделирования случайной величины по её интенсивности выглядит так:

1. Выбираем точки $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n = T$.
2. Если выполнено неравенство $\lambda(0)(\tau_1 - 0) > \mathcal{U}_0$, то принимаем, что $\xi = 0$; если это не так, то переходим к следующему этапу.
3. Если выполнено неравенство $\lambda(\tau_1)(\tau_2 - \tau_1) > \mathcal{U}_1$, то принимаем, что $\xi = \tau_1$; если это не так, то переходим к следующему этапу.
4. Повторяем описанную в п.3 процедуру для τ_i последовательно до тех пор, пока не случится событие

$$\lambda(\tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i) > \mathcal{U}_i.$$

Полагаем $\xi = \tau_i$. Напомним, что $\mathbf{P} \{ \mathcal{U} < a \} = a$ при $a \in [0; 1]$.

Очевидно, что для любой сл.в. ξ с конечным математическим ожиданием эта процедура конечна с вероятностью 1. Заметим, что при

$$(3) \quad \int_0^{\infty} \lambda(s) ds = +\infty,$$

описанная процедура конечна с вероятностью 1, но применение её в случае бесконечности $\mathbb{E} \xi$ нецелесообразно.

Данный метод удобнее классического (формула (1)) тем, что можно моделировать положительные случайные величины не зависимо от того, насколько сложно (и возможно) вычисление обратной функции к функции распределения случайной величины.

Например, для функции интенсивности $\lambda(s) = \frac{C}{\sqrt[3]{s^3 + 1}}$ невозможно выписать функцию распределения, поскольку интеграл $\int \frac{C}{\sqrt[3]{s^3 + 1}} ds$ не вычисляется в явном виде, но сама подын-

тегральная функция соответствует формуле (3), т.е. задаёт собственную функцию распределения сл.в.

Основной проблемой данного метода является то, что от выбор интервалов $\Delta\tau_i \stackrel{\text{def}}{=} \tau_{i+1} - \tau_i$ в зависимости от значения величины $\lambda(\tau_i)$ может существенно влиять на точность результатов предложенного метода моделирования случайных величин. Авторы предполагают в дальнейшем более детально исследовать этот вопрос.

Также важно и качество используемого в программе генератора случайных чисел.

4. Результаты моделирования

Ниже представлены результаты моделирования случайных величин по интенсивности как в случае, когда она имеет экспоненциальный момент, так и в случае, когда случайная величина имеет лишь конечное число степенных моментов.

Для этого рассматривались случайные величины с постоянной интенсивностью $\lambda_1(s) \equiv \lambda_0 = \text{const}$, что соответствует экспоненциальному распределению $F_1(s) = 1 - \exp(-\lambda_0 s)$. Также рассматривалась переменная интенсивность $\lambda_2(s) = \frac{C}{1+s}$, которая соответствует функции распределения $F_2(s) = 1 - \frac{1}{(1+s)^C}$, которую далее мы будем называть полиномиальным распределением.

Предложенный выше метод моделирования случайных величин был реализован на языке программирования C в программе *mod.c* (см. Приложение). С помощью стандартного генератора псевдослучайных целых неотрицательных чисел `rand()` был сконструирован генератор случайных чисел с равномерным распределением:

```
1 #define frand() ((double) rand() / (RAND_MAX + 1.0))
```

Для того чтобы функция `frand()` при каждом запуске не давала одинаковые последовательности случайных чисел, она

была дополнена функцией `rand` с аргументом, равным значению функции `time(NULL)`, которая возвращает текущее время в секундах с 1 января 1970 года [5].

Далее была реализована функция `modulus`, моделирующая случайную величину по методу, описанному выше, с использованием интенсивности. Чтобы убедиться в корректности работы программы, а также подобрать оптимальный шаг Δ , были рассмотрены и смоделированы две случайные величины с функциями распределения $F_1(s)$ и $F_2(s)$ с различными параметрами. В качестве критерия достоверности результатов моделирования сравнивались выборочные и теоретически вычисленные моменты случайных величин, а также гистограммы полученных выборок промоделированных случайных величин и плотностей соответствующих распределений.

Далее обозначаем ξ_1 — случайная величина, распределённая по показательному закону $F_1(s)$, а ξ_2 — по полиномиальному закону $F_2(s)$.

Приведем основные вероятностные характеристики этих случайных величин: функцию распределения $F(s)$, плотность распределения $p(s)$, интенсивность $\lambda(s)$, математическое ожидание $\mathbb{E}\xi$, дисперсию $\mathbb{D}\xi$. Для показательного распределения:

$$F_1(s) = 1 - e^{-\lambda_0 s}, \quad p_1(s) = \begin{cases} \lambda_0 e^{-\lambda_0 s}, & s \geq 0 \\ 0, & s < 0, \end{cases} \quad \lambda_1(s) = \lambda_0,$$

$$\mathbb{E}\xi_1 = \frac{1}{\lambda_0}, \quad \mathbb{D}\xi_1 = \frac{1}{\lambda_0^2},$$

где $\lambda_0 = \text{const} > 0$, а для полиномиального

$$F_2(s) = 1 - \frac{1}{(1+s)^C}, \quad \lambda_2(s) = \frac{C}{1+s},$$

$$p_2(s) = \begin{cases} \frac{C}{(1+s)^{C+1}}, & s \geq 0 \\ 0, & s < 0; \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\xi_2 = \frac{1}{C-1}, \quad \mathbb{D}\xi_2 = \frac{2}{C^2 - 3C + 2} - \frac{1}{(C-1)^2},$$

где $C = \text{const} > 2$.

5. Приложения

5.1. Приложение 1

По выборке, полученной моделированием для каждого из распределений, были подсчитаны математические ожидания и дисперсии для различных шагов Δ . Выборки состояли из 100000 сгенерированных чисел. Далее приведем результаты вычислений. В качестве параметров распределений были взяты $\lambda_0 = 2$, $C = 8$.

$$\lambda_0 = 2, C = 8, \Delta = 0,1$$

Эксперимент N	$\mathbb{E}\xi_1$	$\mathbb{D}\xi_1$	$\mathbb{E}\xi_2$	$\mathbb{D}\xi_2$
1	0,401235	0,200112	0,028346	0,004858
2	0,399677	0,200059	0,028995	0,004950
3	0,400694	0,201088	0,028509	0,004851

$$\lambda_0 = 2, C = 8, \Delta = 0,01$$

Эксперимент N	$\mathbb{E}\xi_1$	$\mathbb{D}\xi_1$	$\mathbb{E}\xi_2$	$\mathbb{D}\xi_2$
1	0,487648	0,243396	0,132102	0,024996
2	0,488431	0,240377	0,130432	0,024451
3	0,487839	0,244927	0,132280	0,025362

$$\lambda_0 = 2, C = 8, \Delta = 0,001$$

Эксперимент N	$\mathbb{E}\xi_1$	$\mathbb{D}\xi_1$	$\mathbb{E}\xi_2$	$\mathbb{D}\xi_2$
1	0,496119	0,245180	0,141784	0,027176
2	0,498286	0,249556	0,141512	0,027039
3	0,495537	0,245814	0,141822	0,027003

$$\lambda_0 = 2, C = 8, \Delta = 0,0001$$

Эксперимент N	$\mathbb{E}\xi_1$	$\mathbb{D}\xi_1$	$\mathbb{E}\xi_2$	$\mathbb{D}\xi_2$
1	0,466462	0,219541	0,139288	0,025180
2	0,468898	0,218354	0,138768	0,025246
3	0,468516	0,218312	0,139447	0,025323

$$\lambda_0 = 2, C = 8, \Delta = 0,00001$$

Эксперимент N	$\mathbb{E}\xi_1$	$\mathbb{D}\xi_1$	$\mathbb{E}\xi_2$	$\mathbb{D}\xi_2$
1	0,327335	0,107316	0,112233	0,014785
2	0,327366	0,107663	0,112095	0,014777
3	0,328139	0,107909	0,112430	0,014857

Из эксперимента видно, что для выбранных значений $\lambda_0 = 2$ и $C = 8$ оптимальный шаг для моделирования случайной величины $\Delta = 0,001$.

В результате моделирования было замечено, что величина шага Δ может существенно влиять на результат численного эксперимента.

5.2. Приложение 2.

Ниже приводятся гистограммы промоделированных случайных величин с указанным в заголовке распределением (голубые столбики) в сравнении со значениями плотности распределения (100000 реализаций, шаг моделирования $\Delta = 0,001$).



Рис. 1. Гистограмма промоделированных случайных величин с распределением F_2 (голубые столбики) в сравнении со значениями плотности распределения (100000 реализаций)

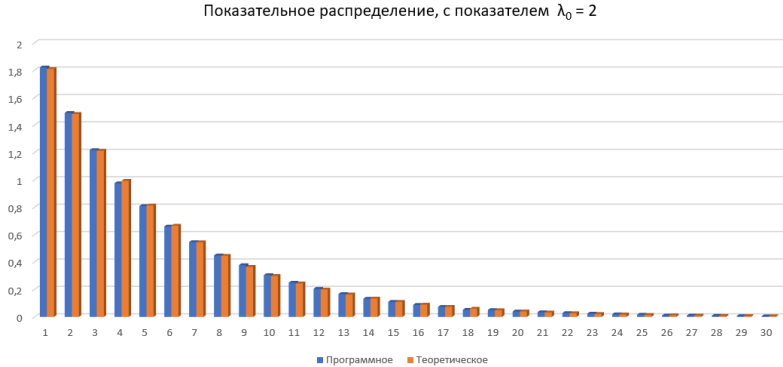


Рис. 2. Гистограмма промоделированных случайных величин с распределением F_1 (голубые столбики) в сравнении со значениями плотности распределения (100000 реализаций)

5.3. Приложение 3

Текст программы *mod.c*

```

1 #include <stdio.h>
2 #include <stdlib.h>
3 #include <math.h>
4 #include <time.h>
5
6 #define lambda0 2.0
7 #define C 8.0
8 #define delta1 0.001
9 #define delta2 0.001
10 #define frand() ((double) rand() / (RAND_MAX + 1.0))
11
12 void sort(double *p0, int n);
13 double lambda(double t, int num);
14 void modulus(double *mass, double *mE, double *disp,
15             double delta, int num);
16 void nuller(double *mass, int n);
17
18 void sort(double *p0, int n)
19 {
20     double first;
21     int j, i;
22     for(i = 0; i < n-1; i++)
23         for(j = i+1; j < n; j++)

```

```
23     if(p0[i] > p0[j])
24     {
25         first = p0[i];
26         p0[i] = p0[j];
27         p0[j] = first;
28     }
29 }
30
31 double lambda(double t, int num)
32 {
33     double l;
34     if(num == 1)
35     {
36         l = lambda0; //1 --- Exponential distribution
37     }
38     if(num == 2)
39     {
40         l = C / (1 + t); //2 --- Polynomial distribution
41     }
42     return l;
43 }
44
45 void modulus(double *mass, double *mE, double *disp,
46             double delta, int num)
47 {
48     int i;
49     double randnum, t = 0, tNew = 0, sumt = 0, tsq = 0;
50     for(i = 0; i < 100000; i++)
51     {
52         while(1)
53         {
54             randnum = frand();
55             if(delta * lambda(t, num) > randnum)
56             {
57                 tNew = t;
58                 mass[i] = t;
59                 break;
60             }
61             t += delta;
62         }
63         sumt += tNew;
64         tsq += t*t;
65         t = 0;
66     }
67 }
```

```

65     }
66     *mE = sumt / 100000;
67     *disp = (tsq / 100000 - *mE * *mE) * 100000 / 99999;
68     return;
69 }
70
71 void nuller(double *mass, int n)
72 {
73     int i;
74     for(i = 0; i < n; i++)
75     {
76         mass[i] = 0;
77     }
78 }
79
80 int main(void)
81 {
82     double rv1[100000], rv2[100000], mexp[30], mpol[16];
83     double x, mE = 0, disp = 0, dt1 = 0.1, left1 = 0,
84     sum = 0;
85     int i, j;
86     FILE *f1, *f2;
87     f1 = fopen("out1.txt", "w");
88     f2 = fopen("out2.txt", "w");
89     srand(time(NULL));
90     modulus(rv1, &mE, &disp, delta1, 1);
91     printf("Exponential distribution\n delta = %lf\n M[
92     exp] = %lf\t M[exp_theor] = %lf\n D[exp] = %lf\t D[
93     exp_theor] = %lf\n", delta1, mE, 1.0 / lambda0, disp,
94     1.0 / pow(lambda0, 2));
95     modulus(rv2, &mE, &disp, delta2, 2);
96     printf("Polynomial distribution\n delta = %lf\n M[
97     pol] = %lf\t M[pol_theor] = %lf\n D[pol] = %lf\t D[
98     pol_theor] = %lf\n", delta2, mE, 1.0 / (C - 1), disp,
99     2.0 / (C*C - 3 * C + 2) - 1.0 / pow(C - 1, 2));
100
101     sort(rv1, 100000);
102     sort(rv2, 100000);
103     nuller(mexp, 30);
104     nuller(mpol, 16);
105     j = 0;
106     left1 = dt1;
107     for(i = 0; i < 100000 && j < 30; i++)

```

```
101     {
102         if(rv1[i] > left1)
103         {
104             left1 += dt1;
105             j++;
106         }
107         mexp[j] += 1;
108     }
109     j = 0;
110     left1 = dt1;
111     for(i = 0; i < 100000 && j < 16; i++)
112     {
113         if(rv2[i] > left1)
114         {
115             left1 += dt1;
116             j++;
117         }
118         mpol[j] += 1;
119     }
120
121     left1 = 0.05;
122     for(j = 0; j < 30; j++)
123     {
124         fprintf(f1, "%lf\t %lf\t %lf\t %lf\n", left1, (
125         mexp[j] / 100000) / dt1, lambda0 * exp(-lambda0 * (
126         left1)), 1 - exp(-lambda0 * (left1)));
127         left1 += dt1;
128     }
129
130     left1 = 0.05;
131     for(j = 0; j < 16; j++)
132     {
133         fprintf(f2, "%lf\t %lf\t %lf\t %lf\n", left1, (
134         mpol[j] / 100000) / dt1, C / pow(1 + left1, C + 1), 1
135         - 1 / pow(1 + left1, C));
136         left1 += dt1;
137     }
138 }
139
140 fclose(f1);
141 fclose(f2);
142 return 0;
143 }
```

Литература

1. БОРОВКОВ А.А. *Вероятностные процессы в теории массового обслуживания*. – М.: Физматлит, 1972. – 368 с.
2. ВЕРЕТЕННИКОВ А.Ю. *О скорости сходимости к стационарному распределению в системах обслуживания с одним прибором* // Автоматика и телемеханика. – 2013. – №10. – С. 23–35. Engl. transl.: *On the rate of convergence to the stationary distribution in the single-server queuing system* // Automation and Remote Control. – 2013. – Vol. 74, Iss. 10. – P. 1620–1629.
3. ГНЕДЕНКО Б.В., КОВАЛЕНКО И.Н. *Введение в теорию массового обслуживания*. – М.: Наука, 1966.
4. ЗВЕРКИНА Г.А. *Об экспоненциальной сходимости коэффициента готовности* // Управление большими системами. – 2021. – Вып. 90. – С. 5–35.
5. КЕРНИГАН Б.У., РИЧЧИ Д.М. *Язык программирования С*. 2-е изд. – М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2015. – 288 с.
6. КОКС Д., СМИТ В. *Теория восстановления*. – М.: Советское радио, 1967.
7. ТАРТАКОВСКИЙ А.Г. *О последовательном оценивании интенсивности процессов восстановления* // Проблемы передачи информации. – 1985. – №21:1. – С. 40–47; *Problems Information Transmission*. – 1985. – Vol. 21:1. – P. 30–36.
8. VERETENNIKOV A. *On convergence rate for Erlang–Sevastyanov type models with infinitely many servers* // *Theory of Stochastic Processes*. – 2017. – No. 1. – P. 88–102.
9. VERETENNIKOV A. *On mean-field GI/GI/1 queueing model: existence and uniqueness* // *Proc. of the Int. Conf. "Analytical and Computational Methods in Probability Theory and Its Applications" (ACMPT-2017), 23–27 October 2017 / Ed.: A.V. Lebedev. – RUDN, Moscow, Russia. – P. 182–186.*
10. VERETENNIKOV A. *On mean-field (GI/GI/1) queueing model: existence and uniqueness* // *Queueing Systems*. – 2020. – Vol. 94(3). – P. 243–255.

11. VERETENNIKOV A. *On Polynomial Recurrence for Reliability System with a Warm Reserve* // Markov Processes and Related Fields. – 2019. – Vol. 25. – P. 745–761.
12. VERETENNIKOV A. *On Recurrence and Availability Factor for Single-Server System With General Arrivals* // Reliability: Theory and Applications (RT& A). – 2016. – Vol. 11, No. 3(42). – P. 49–58.
13. VERETENNIKOV A.YU. *On the rate of convergence for infinite server Erlang-Sevastyanov's problem* // Queueing Systems. – 2014. – Vol. 76, Iss. 2. – P. 181–203.
14. VERETENNIKOV A.YU., ZVERKINA G.A. *Simple Proof of Dynkin's Formula for Single-Server Systems and Polynomial Convergence Rates* // Markov Processes and Related Fields. – 2014. – Vol. 20. - P. 479–504.

ON SIMULATION OF RANDOM VARIABLES USING INTENSITY

Galina Zverkina, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., assistant professor (zverkina@gmail.com).

Alexandr Koshelev, Moscow State University, Moscow, student (koshelev030698@yandex.ru).

Abstract: As is well known, random variables are usually modelled using the inverse function of the distribution function. However, often when modelling the behaviour of complex technical models, a researcher is faced with a change in the parameters of the simulated random variables. Often in these cases, the intensity of the completion of a certain random period changes (or “failure rate”, or “hazard rate”). Therefore, it is important to be able to simulate a random variable under conditions of a (random) change in the intensity of this random variable. This paper proposes a new method for modelling a random variable by its intensity. The text is provided with illustrative material of the results of numerical experiments confirming the efficiency of the proposed method. Naturally, this text is just the beginning of work. In the future, the technical details of the effectiveness of the application of the proposed method will be clarified.

Keywords: random variable intensity, numerical simulation, discussion of simulation optimization.

УДК 519.2, 519.6

ББК 22.171, 22.176, 22.19

DOI: 10.25728/ubs.2021.94.2

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.*

Поступила в редакцию 15.11.2021.

Дата опубликования 30.11.2021.

РОБАСТНОЕ СЕТЕВОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ИТЕРАТИВНЫМ ОБУЧЕНИЕМ СИСТЕМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ КОНФИГУРАЦИИ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ¹

Копосов А. С.²

*(Арзамасский политехнический институт (филиал)
Нижегородского государственного технического
университета им. Р.Е. Алексеева, Арзамас)*

Рассматривается задача синтеза управления с итеративным обучением системой, состоящей из одинаковых подсистем (агентов), связанных информационной сетью переменной конфигурации. Агенты представляют собой дискретные линейные динамические объекты с аффинными моделями неопределенностей, работающие в повторяющемся режиме. Каждый объект находится под действием случайных возмущений, а выходные переменные объектов измеряются с шумами. Конфигурации информационной сети определяют группу функционирующих агентов и характер обмена информацией между ними. Смена конфигурации происходит в соответствии с определенными внешними правилами. Синтез управления основан на дивергентном методе векторной функции Ляпунова. Приводятся результаты моделирования полученного закона управления группой манипуляторов с гибким звеном.

Ключевые слова: сетевое управление, управление с итеративным обучением, неопределенные параметры, робастное управление, стохастические системы, системы с переключениями, векторная функция Ляпунова.

1. Введение

Управление с итеративным обучением (УИО) можно классифицировать как одно из направлений интеллектуального управления. Данный метод применяется к системам, функционирующим в повторяющемся режиме, и основан на идее о том, что при многократном выполнении системой одной и той же операции точность ее работы может быть повышена за счет информации,

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-08-00528 а.

² Антон Сергеевич Копосов, аспирант (koposov96@yandex.ru).

полученной на предыдущих повторениях. Такой подход позволяет достичь требуемой точности при наличии параметрических неопределенностей, внешних возмущений и шумов измерений, которые могут проявляться во время фактической работы системы. УИО находит применение во многих робототехнических системах, и их активное развитие обуславливает повышенный интерес исследователей к данному методу.

В частности, УИО может эффективно применяться к сетевым системам, состоящим из одинаковых подсистем (агентов), связанных информационной сетью. В [1] рассматривалась задача сетевого УИО при наличии внешних возмущений и шумов измерений. В данной работе, в отличие от [1], дополнительно учитываются неопределенности моделей агентов и возможность изменения структуры сети, т.е. подключение и отключение агентов. Для уменьшения ошибки при изменении структуры сети предложено специальное правило переключения алгоритма УИО.

2. Синтез сетевого управления с итеративным обучением

2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему из N линейных систем (агентов) с неопределенными параметрами, функционирующих в повторяющемся режиме и имеющих возможность подключаться к сети и отключаться от нее. Конфигурация m сетевой системы определяет группу из N_m агентов, функционирующих в данной конфигурации. Динамика агента i , подключенного к сети в конфигурации m на повторении k , описывается следующей дискретной моделью в пространстве состояний:

$$(1) \quad x_i(k, p + 1) = A(\delta_i(p))x_i(k, p) + B(\delta_i(p))u_i(k, p) + G\omega_i(k, p),$$

$$(2) \quad y_i(k, p) = Cx_i(k, p),$$

$$(3) \quad y_{v,i}(k, p) = y_i(k, p) + v_i(k, p),$$

$$i \in J_m, J_m = \{i_1, i_2, \dots, i_{N_m}\}, k \geq 0, 0 \leq p \leq T - 1,$$

где $x_i(k, p) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – вектор состояния, $u_i(k, p) \in \mathbb{R}^{n_u}$ – вектор управления, $\omega_i(k, p) \in \mathbb{R}^{n_\omega}$ – вектор шумов объекта,

$y_i(k, p) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – вектор выходных переменных (профиль повторения), $y_{v,i}(k, p) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – вектор измеренных выходных переменных, $v_i(k, p) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – вектор шумов измерений, \mathcal{J}_m – набор номеров агентов, доступных в конфигурации m , $T < \infty$ – продолжительность повторения. Граничные условия $x_i(k, 0)$ и $u_i(0, p)$ будем считать известными.

Модель неопределенностей задается в виде

$$(4) \quad A(\delta_i(p)) = A + A_a(\delta_i(p)) = A + \sum_{n=1}^l \delta_{i,n}(p)A_n,$$

$$(5) \quad B(\delta_i(p)) = B + B_a(\delta_i(p)) = B + \sum_{n=1}^l \delta_{i,n}(p)B_n,$$

где A и B – матрицы номинальной модели, A_n и B_n – постоянные матрицы соответствующих размеров. Множество неопределенных параметров $\delta_{i,n}(p)$ агента i определим как

$$\Delta_i = \{\delta_i = [\delta_{i,1} \quad \dots \quad \delta_{i,l}]^T: \delta_{i,n} \in [\underline{\delta}_{i,n}, \bar{\delta}_{i,n}], n = 1, 2, \dots, l\},$$

а также определим конечное множество вершин многогранника ограничений агента i

$$\Delta_{v,i} = \{\delta_i = [\delta_{i,1} \quad \dots \quad \delta_{i,l}]^T: \delta_{i,n} \in \{\underline{\delta}_{i,n}, \bar{\delta}_{i,n}\}, n = 1, 2, \dots, l\},$$

содержащее 2^l элементов.

Предполагается, что шумы объекта $\omega_i(k, p)$ и шумы измерений $v_i(k, p)$ представляют собой независимые гауссовские белые шумы с ковариационными матрицами

$$S_{\omega,i} = E[\omega_i(k, p)\omega_i^T(k, p)], S_{v,i} = E[v_i(k, p)v_i^T(k, p)],$$

где E – символ математического ожидания.

Связи между агентами в конфигурации m представим в виде направленного графа $\mathcal{G}_m = (\mathcal{J}_m, \mathcal{E}_m)$, где $\mathcal{E}_m \subseteq \mathcal{J}_m \times \mathcal{J}_m$ – ребра графа. Возможность доступа агента $j \in \mathcal{J}_m$ к выходным данным агента i задается ребром, направленным от вершины i к вершине j и обозначаемым упорядоченной парой $(i, j) \in \mathcal{E}_m$. Элементы матрицы смежности

$$D_m(\mathcal{G}_m) = \begin{bmatrix} d_{i_1 i_1} & d_{i_1 i_2} & \dots & d_{i_1 i_{N_m}} \\ d_{i_2 i_1} & d_{i_2 i_2} & \dots & d_{i_2 i_{N_m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{i_{N_m} i_1} & d_{i_{N_m} i_2} & \dots & d_{i_{N_m} i_{N_m}} \end{bmatrix}$$

задаются следующим образом: $d_{ij} > 0$, если $(j, i) \in \mathcal{E}_m$, $d_{ij} = 0$ в противном случае, $d_{ii} = 0$. В общем случае значения ненулевых

элементов отражают значимость тех или иных связей, в простейшем случае они равны единице.

Матрица Лапласа графа \mathcal{G}_m задается выражением

$$L_m(\mathcal{G}_m) = \begin{bmatrix} \sum_{j \in \mathcal{J}_m} d_{i_1 j} & -d_{i_1 i_2} & \cdots & -d_{i_1 i_{N_m}} \\ -d_{i_2 i_1} & \sum_{j \in \mathcal{J}_m} d_{i_2 j} & \cdots & -d_{i_2 i_{N_m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -d_{i_{N_m} i_1} & -d_{i_{N_m} i_2} & \cdots & \sum_{j \in \mathcal{J}_m} d_{i_{N_m} j} \end{bmatrix}.$$

Обозначим за $y_{ref}(p)$ желаемый выходной сигнал и введем ошибку обучения $e_i(k, p) = y_{ref}(p) - u_i(k, p)$. Агента, имеющего доступ к $y_{ref}(p)$, назовем лидером, а остальные – ведомыми системами. Возможность получения агентами информации о желаемом выходном сигнале задается матрицей $G_m = \text{diag}[g_{i_n}]_{n=1}^{N_m}$, где $g_i = 1$, если агенту i имеет доступ к $y_{ref}(p)$, и $g_i = 0$ в противном случае.

Задача заключается в поиске такого управления (протокола) $u_i(k, p)$, при котором среднее значение ошибки монотонно не возрастает с увеличением числа повторений:

$$(6) \quad E\|e_i(k+1, p)\| \leq E\|e_i(k, p)\|,$$

$$k \geq 0, 0 \leq p \leq T-1,$$

при этом $\lim_{k \rightarrow \infty} E\|u_i(k, p) - u_i(\infty, p)\| = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} E[\|e_i(k, p)\|^2]$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} E[\|u_i(k, p) - u_i(\infty, p)\|^2]$ ограничены, где $u_i(\infty, p)$ – ограниченная переменная, называемая обученным управлением.

Для оценки векторов состояния и выходного сигнала используем фильтра Калмана с номинальными параметрами

$$\hat{x}_i(k, p+1) = A\hat{x}_i(k, p) + Bu_i(k, p) + F_i[y_{v,i}(k, p) - C\hat{x}_i(k, p)],$$

$$\hat{y}_i(k, p) = C\hat{x}_i(k, p),$$

где $\hat{x}_i(k, p) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – оценка вектора состояния, $\hat{y}_i(k, p) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – оценка выходного сигнала, F_i – матрица усиления наблюдателя. Ошибку оценивания определим как $\tilde{x}_i(k, p) = x_i(k, p) - \hat{x}_i(k, p)$.

Закон УИО для агента i на повторении $k+1$ в случае, если он функционировал на повторении k , имеет вид

$$(7) \quad u_i(k+1, p) = u_i(k, p) + \Delta u_i(k+1, p),$$

$$i = i_1, i_2, \dots, i_{N_r},$$

где $\Delta u_i(k+1, p)$ – корректирующая добавка для агента i , которую будем формировать в виде

$$(8) \quad \Delta u_i(k+1, p) = K_{1,r}[\hat{x}_i(k+1, p) - \hat{x}_i(k, p)] + \\ + K_{2,r} \left[\sum_{j \in \mathcal{J}_{i,r}} d_{ij} \left(\hat{y}_j(k, p+1) - \hat{y}_i(k, p+1) \right) + \right. \\ \left. + g_i \left(y_{ref}(p+1) - \hat{y}_i(k, p+1) \right) \right],$$

где $K_{1,r}$ и $K_{2,r}$ – матрицы протокола в конфигурации r , $\mathcal{J}_{i,r} = \{j \in \mathcal{J}_r | (j, i) \in \mathcal{E}_r\}$ – множество агентов, информация о которых доступна агенту i в этой конфигурации.

Если агенты подключаются к сети на повторении k_s , то они получают управляющие сигналы от агентов, функционирующих на повторении $k_s - 1$, и продолжают свою работу на k_s , т.е.

$$(9) \quad u_i(k_s, p) = u_j(k_s - 1, p) + \Delta u_j(k_s, p),$$

$$i = i_{N_r+1}, i_{N_r+2}, \dots, i_{N_r+N_s}, j \in [i_1, i_{N_r}],$$

где N_s – количество подключаемых агентов на повторении k_s . Конфигурацию сетевой системы, при которой управление хотя бы одним агентом происходит согласно закону (9), будем называть переходной конфигурацией, в противном случае – стандартной конфигурацией. После переходной конфигурации происходит переключение к стандартной с учетом новых агентов.

2.2. ПОСТРОЕНИЕ 2D-МОДЕЛИ

Введем в рассмотрение векторы приращений по переменной k оценки вектора состояния и ошибки оценивания

$$\hat{\xi}_i(k+1, p+1) = \hat{x}_i(k+1, p) - \hat{x}_i(k, p),$$

$$\tilde{\xi}_i(k+1, p+1) = \tilde{x}_i(k+1, p) - \tilde{x}_i(k, p)$$

соответственно, а также ошибку обучения относительно оценки выходного сигнала $\hat{e}_i(k, p) = y_{ref}(p) - \hat{y}_i(k, p)$. Динамика исходной системы в момент подключения $k_s = k + 1$ относительно введенных векторов описывается уравнениями

$$(10) \quad \hat{\xi}_i(k+1, p+1) = A \hat{\xi}_i(k+1, p) + F_i C \tilde{\xi}_i(k+1, p) + \\ + B \Delta u_j(k+1, p-1) + F_i \Delta v_i(k+1, p-1),$$

$$(11) \quad \tilde{\xi}_i(k+1, p+1) = A_a(\delta_i) \tilde{\xi}_i(k+1, p) + \\ + (A(\delta_i) - F_i C) \tilde{\xi}_i(k+1, p) + B_a(\delta_i) \Delta u_j(k+1, p-1) + \\ + G \Delta \omega_i(k+1, p-1) - F_i \Delta v_i(k+1, p-1),$$

$$(12) \quad \hat{e}_i(k+1, p) = -C A \hat{\xi}_i(k+1, p) - C F_i C \tilde{\xi}_i(k+1, p) +$$

$$+\hat{e}_i(k, p) - CB\Delta u_j(k+1, p-1) - CF_i\Delta v_i(k+1, p-1),$$

$$i = i_{N_r+1}, i_{N_r+2}, \dots, i_{N_r+N_s}, j \in [i_1, i_{N_r}],$$

а на остальных повторениях k

$$(13) \hat{\xi}_i(k+1, p+1) = A\hat{\xi}_i(k+1, p) + F_iC\tilde{\xi}_i(k+1, p) + \\ + B\Delta u_i(k+1, p-1) + F_i\Delta v_i(k+1, p-1),$$

$$(14) \tilde{\xi}_i(k+1, p+1) = A_a(\delta_i)\tilde{\xi}_i(k+1, p) + \\ + (A(\delta_i) - F_iC)\tilde{\xi}_i(k+1, p) + B_a(\delta_i)\Delta u_i(k+1, p-1) + \\ + G\Delta\omega_i(k+1, p-1) - F_i\Delta v_i(k+1, p-1),$$

$$(15) \hat{e}_i(k+1, p) = -CA\hat{\xi}_i(k+1, p) - CF_iC\tilde{\xi}_i(k+1, p) + \\ + \hat{e}_i(k, p) - CB\Delta u_i(k+1, p-1) - CF_i\Delta v_i(k+1, p-1),$$

$$i = i_1, i_2, \dots, i_{N_r},$$

где $N_m = N_r$, если подключение новых агентов не происходит, $N_m = N_r + N_s$ в противном случае.

Обозначим

$$\eta_i(k+1, p) = [\hat{\xi}_i^T(k+1, p) \quad \tilde{\xi}_i^T(k+1, p)]^T,$$

$$\varepsilon_i(k+1, p) = \hat{e}_i(k+1, p),$$

$$v_i(k+1, p) = \Delta u_i(k+1, p-1),$$

$$\mu_i(k+1, p) = [\Delta\omega_i^T(k+1, p-1) \quad \Delta v_i^T(k+1, p-1)]^T,$$

тогда системы (10)–(12) и (13)–(15) относительно данных векторов примут вид

$$(16) \eta_i(k+1, p+1) = A_{11,i}(\delta_i)\eta_i(k+1, p) + A_{12}\varepsilon_i(k, p) + \\ + B_1(\delta_i)v_j(k+1, p) + F_{1,i}\mu_i(k+1, p),$$

$$(17) \varepsilon_i(k+1, p) = A_{21,i}\eta_i(k+1, p) + A_{22}\varepsilon_i(k, p) + \\ + B_2v_j(k+1, p) + F_{2,i}\mu_i(k+1, p),$$

$$i = i_{N_r+1}, i_{N_r+2}, \dots, i_{N_r+N_s}, j \in [i_1, i_{N_r}],$$

и

$$(18) \eta_i(k+1, p+1) = A_{11,i}(\delta_i)\eta_i(k+1, p) + A_{12}\varepsilon_i(k, p) + \\ + B_1(\delta_i)v_i(k+1, p) + F_{1,i}\mu_i(k+1, p),$$

$$(19) \varepsilon_i(k+1, p) = A_{21,i}\eta_i(k+1, p) + A_{22}\varepsilon_i(k, p) + \\ + B_2v_i(k+1, p) + F_{2,i}\mu_i(k+1, p),$$

$$i = i_1, i_2, \dots, i_{N_r},$$

соответственно, где

$$A_{11,i}(\delta_i) = \begin{bmatrix} A & F_iC \\ A_a(\delta_i) & A(\delta_i) - F_iC \end{bmatrix}, A_{12} = 0,$$

$$A_{21,i} = [-CA \quad -CF_iC], A_{22} = I_{n_y}, B_1(\delta_i) = [B^T \quad B_a^T(\delta_i)]^T, \\ B_2 = -CB, F_{1,i} = \begin{bmatrix} 0 & F_i \\ G & -F_i \end{bmatrix}, F_{2,i} = [0 \quad -CF_i].$$

Объединим системы (16)–(17) и (18)–(19) относительно векторов

$$\eta(p, k) = [\eta_{i_1}^T(p, k) \quad \dots \quad \eta_{i_{N_m}}^T(p, k)]^T, \\ \mu(p, k) = [\mu_{i_1}^T(p, k) \quad \dots \quad \mu_{i_{N_m}}^T(p, k)]^T, \\ \varepsilon(p, k) = [\varepsilon_{i_1}^T(p, k) \quad \dots \quad \varepsilon_{i_{N_m}}^T(p, k)]^T$$

с учетом (7)–(9) в следующую модель:

$$\eta(k+1, p+1) = (A_{11c,m}(\delta_{c,m}) + \\ + B_{1c,m}(\delta_{c,m})K_{1c,m}C_{0,m}H_{1c,m})\eta(k+1, p) + \\ + (A_{12c,m} + B_{1c,m}(\delta_{c,m})K_{2c,m}H_{2c,m})\varepsilon(k, p) + \\ + F_{1c,m}\mu(k+1, p), \\ \varepsilon(k+1, p) = (A_{21c,m} + B_{2c,m}K_{1c,m}C_{0,m}H_{1c,m})\eta(k+1, p) + \\ + (A_{22c,m} + B_{2c,m}K_{2c,m}H_{2c,m})\varepsilon(k, p) + F_{2c,m}\mu(k+1, p),$$

где

$$A_{11c,m}(\delta_{c,m}) = \text{diag}[A_{11,i_n}(\delta_{i_n})]_{n=1}^{N_m}, A_{12c,m} = I_{N_m} \otimes A_{12}, \\ A_{21c,m} = \text{diag}[A_{21,i_n}]_{n=1}^{N_m}, A_{22c,m} = I_{N_m} \otimes A_{22}, \\ B_{1c,m}(\delta_{c,m}) = \text{diag}[B_1(\delta_{i_n})]_{n=1}^{N_m}, B_{2c,m} = I_{N_m} \otimes B_2, \\ K_{1c,m} = I_{N_m} \otimes K_{1,m}, K_{2c,m} = I_{N_m} \otimes K_{2,m}, \\ C_{0,m} = I_{N_m} \otimes C_0, C_0 = [I_{n_x} \quad 0], \\ H_{1c,m} = H_m \otimes I_{2n_x}, H_{2c,m} = H_m(L_m + G_m) \otimes I_{n_y}, \\ F_{1c,m} = \text{diag}[F_{1,i_n}]_{n=1}^{N_m}, F_{2c,m} = \text{diag}[F_{2,i_n}]_{n=1}^{N_m}.$$

Здесь $\delta_{c,m} = [\delta_{i_1}^T \quad \dots \quad \delta_{i_{N_m}}^T]^T$ – расширенный вектор неопределенных параметров. При этом множество неопределенных параметров и конечное множество его 2^{LN_m} вершин определяются как $\Delta_{c,m} = \bigcup_{i \in \mathcal{J}_m} \Delta_i$ и $\Delta_{cv,m} = \bigcup_{i \in \mathcal{J}_m} \Delta_{v,i}$ соответственно.

Матрица H_m определяется следующим образом. Если новые агенты не подключаются к сети, содержащей N_r агентов, то $H_m = I_{N_r}$. В случае, когда N_s агентов подключается к сети, содержащей N_r агентов, то $h_{ii} = 1$, $i = 1, \dots, N_r$, и $h_{ij} = 1$,

$i = N_r + 1, \dots, N_r + N_s$ для некоторого $j \in [1, N_m]$, в остальных случаях элементы H_m равны нулю.

Полученная модель является стохастической 2D-моделью. В [2] показано, что экспоненциальная устойчивость детерминированной системы

$$(20) \eta(k+1, p+1) = (A_{11c,m}(\delta_{c,m}) + B_{1c,m}(\delta_{c,m})K_{1c,m}C_{0,m}H_{1c,m})\eta(k+1, p) + (A_{12c,m} + B_{1c,m}(\delta_{c,m})K_{2c,m}H_{2c,m})\varepsilon(k, p),$$

$$(21) \varepsilon(k+1, p) = (A_{21c,m} + B_{2c,m}K_{1c,m}C_{0,m}H_{1c,m})\eta(k+1, p) + (A_{22c,m} + B_{2c,m}K_{2c,m}H_{2c,m})\varepsilon(k, p)$$

гарантирует выполнение условий сходимости (6).

2.3. РЕШЕНИЕ НА ОСНОВЕ ДИВЕРГЕНТНОГО МЕТОДА ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

По аналогии с [1] определим понятие экспоненциальной устойчивости следующим образом.

Определение 1. Расширенная система (20)–(21) является экспоненциально устойчивой, если существуют действительные числа $\kappa > 0$ и $0 < \lambda < 1$ такие, что

$$|\eta(k, p)|^2 + |\varepsilon(k, p)|^2 \leq \kappa \lambda^{k+p}.$$

Если система (20)–(21) экспоненциально устойчива, то условия сходимости (6) будут выполнены. Таким образом, при заданной структуре управления задача синтеза управления сводится к поиску матриц протокола $K_{1,m}$ и $K_{2,m}$ из условия экспоненциальной устойчивости. Для этого используем дивергентный метод векторной функции Ляпунова [4].

Определим векторную функцию Ляпунова как

$$(22) V_m(\eta(k+1, p), \varepsilon(k, p)) = \begin{bmatrix} V_{1,m}(\eta(k+1, p)) \\ V_{2,m}(\varepsilon(k, p)) \end{bmatrix},$$

где

$$V_{1,m}(\eta(k+1, p)) = \eta^T(k+1, p)P_{1c,m}\eta(k+1, p),$$

$$V_{2,m}(\varepsilon(k, p)) = \varepsilon^T(k, p)P_{2c,m}\varepsilon(k, p),$$

$$P_{1c,m} = I_{N_m} \otimes P_{1,m}, P_{2c,m} = I_{N_m} \otimes P_{2,m}.$$

Дискретный аналог дивергенции функции (22) определяется в виде

$$(23) \mathcal{D}V_m(\eta(k+1, p), \varepsilon(k, p)) = \Delta_p V_{1,m}(\eta(k+1, p)) + \Delta_k V_{2,m}(\varepsilon(k, p)),$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_p V_{1,m}(\eta(k+1, p)) &= V_{1,m}(\eta(k+1, p+1)) - V_{1,m}(\eta(k+1, p)), \\ \Delta_k V_{2,m}(\varepsilon(k, p)) &= V_{2,m}(\varepsilon(k+1, p)) - V_{2,m}(\varepsilon(k, p)). \end{aligned}$$

Подставляя компоненты функции (22) в (23) с учетом (20) и (21), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}V_m(\eta(k+1, p), \varepsilon(k, p)) &= \\ &= \begin{bmatrix} \eta(k+1, p) \\ \varepsilon(k, p) \end{bmatrix}^T (\Phi_m^T(\delta_{c,m}) P_{c,m} \Phi_m(\delta_{c,m}) - \\ &\quad - P_{c,m}) \begin{bmatrix} \eta(k+1, p) \\ \varepsilon(k, p) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} P_{c,m} &= \text{diag}[P_{1c,m} \quad P_{2c,m}], \\ \Phi_m(\delta_{c,m}) &= A_{c,m}(\delta_{c,m}) + B_{c,m}(\delta_{c,m}) K_{c,m} C_{c,m} H_{c,m}, \\ A_{c,m}(\delta_{c,m}) &= \begin{bmatrix} A_{11c,m}(\delta_{c,m}) & A_{12c,m} \\ A_{21c,m} & A_{22c,m} \end{bmatrix}, \\ B_{c,m}(\delta_{c,m}) &= [B_{1c,m}^T(\delta_{c,m}) \quad B_{2c,m}^T]^T, \quad K_{c,m} = [K_{1c,m} \quad K_{2c,m}], \\ C_{c,m} &= \text{diag}[C_{0,m} \quad I_{N_m} \otimes I_{n_y}], \quad H_{c,m} = \text{diag}[H_{1c,m} \quad H_{2c,m}]. \end{aligned}$$

Система (20)–(21) будет устойчива, если будут выполнены следующие линейные матричные неравенства:

$$(24) \Phi_m^T(\delta_{c,m}) P_{c,m} \Phi_m(\delta_{c,m}) - P_{c,m} + Q_m + (K_{c,m} C_{c,m} H_{c,m})^T R_m (K_{c,m} C_{c,m} H_{c,m}) \leq 0, \quad P_{c,m} > 0,$$

где $Q_m > 0$, $R_m > 0$ – весовые матрицы, которые имеют вид

$$\begin{aligned} Q_m &= \text{diag}[Q_{1,m} \quad Q_{2,m}], \quad Q_{1,m} = I_{N_m} \otimes Q_1, \\ Q_{2,m} &= I_{N_m} \otimes Q_2, \quad R_m = I_{N_m} \otimes R. \end{aligned}$$

Используя лемму Шура о дополнении, сведем неравенства (24) к следующей системе матричных уравнений и неравенств:

$$(25) \begin{bmatrix} X_{c,m} & \Phi_m^T(\delta_{c,m}) & X_{c,m} & (Y_{c,m} C_{c,m} H_{c,m})^T \\ \Phi_m(\delta_{c,m}) & X_{c,m} & 0 & 0 \\ X_{c,m} & 0 & Q_m^{-1} & 0 \\ Y_{c,m} C_{c,m} H_{c,m} & 0 & 0 & R_m^{-1} \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$(26) X_{c,m} > 0,$$

$$(27) C_{c,m}H_{c,m}X_{c,m} = Z_{c,m}C_{c,m}H_{c,m},$$

где

$$\Phi_{c,m}(\delta_{c,m}) = A_{c,m}(\delta_{c,m})X_{c,m} + B_{c,m}(\delta_{c,m})Y_{c,m}C_{c,m}H_{c,m},$$

$$X_{c,m} = \text{diag}[X_{1c,m} \quad X_{2c,m}] = P_{c,m}^{-1}, \quad X_{1c,m} = I_{N_m} \otimes X_{1,m},$$

$$X_{2c,m} = I_{N_m} \otimes X_{2,m}, \quad Y_{c,m} = [Y_{1c,m} \quad Y_{2c,m}] = K_{c,m}Z_{c,m},$$

$$Y_{1c,m} = I_{N_m} \otimes Y_{1,m}, \quad Y_{2c,m} = I_{N_m} \otimes Y_{2,m},$$

$$Z_{c,m} = \text{diag}[Z_{1c,m} \quad Z_{2c,m}], \quad Z_{1c,m} = I_{N_m} \otimes Z_{1,m},$$

$$Z_{2c,m} = I_{N_m} \otimes Z_{2,m}.$$

Поскольку неравенства (25)–(26) невыпуклые, их стоит проверять только для $\delta_{c,m} \in \Delta_{cv,m}$. Таким образом, полученный результат можно обобщить в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Если система (25)–(27) разрешима относительно $X_{1,m}$, $X_{2,m}$, $Y_{1,m}$, $Y_{2,m}$, $Z_{1,m}$ и $Z_{2,m}$ для $\delta_{c,m} \in \Delta_{cv,m}$, то закон управления (7), (9) с корректирующей добавкой (8) и матрицами протокола $K_{1,m} = Y_{1,m}Z_{1,m}^{-1}$ и $K_{2,m} = Y_{2,m}Z_{2,m}^{-1}$ гарантирует экспоненциальную устойчивость системы (1)–(3) и обеспечивает сходимость выходного сигнала к желаемой траектории при любых значениях неопределенных параметров, удовлетворяющих (4)–(5), т.е. является робастным по отношению к заданным неопределенностям.

3. Пример

В качестве агентов будем рассматривать одинаковые манипуляторы с гибким звеном [3], момент инерции каждого манипулятора меняется в зависимости от массы перемещаемого груза и задан в виде аффинной модели. Динамика движения манипулятора в этом случае описывается следующей моделью в пространстве состояний:

$$\dot{x}_i(k, t) = A_c(\delta_i)x_i(k, t) + B_c u_i(k, t) + G_c \omega_i(k, t),$$

$$y_i(k, t) = C_c x_i(k, t),$$

$$y_{v,i}(k, t) = y_i(k, t) + v_i(k, t),$$

где $x = [\theta \quad \alpha \quad \dot{\theta} \quad \dot{\alpha}]^T$, θ – угол поворота сервопривода, α – угол отклонения звена, $u = \tau$ – крутящий момент, приложенный к основанию гибкого звена,

$$A_c(\delta_i) = A_c + A_{c,a}(\delta_i) = A_c + \delta_{i,1}A_1,$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_s}{J_{eq}} & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & -\frac{K_s(J_l+J_{eq})}{J_{eq}J_l} & \frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\delta_{i,1} \in \left[\frac{K_s(J_l+J_{eq})}{J_{eq}J_l} - \frac{K_s(\underline{J}_l+J_{eq})}{J_{eq}\underline{J}_l}, \frac{K_s(J_l+J_{eq})}{J_{eq}J_l} - \frac{K_s(\bar{J}_l+J_{eq})}{J_{eq}\bar{J}_l} \right],$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{J_{eq}} & -\frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix}^T, G_c = I_{n_x}, C_c = [1 \ 0 \ 0 \ 0],$$

K_s – жесткость звена, J_{eq} – момент инерции сервопривода, B_{eq} – коэффициент вязкого трения сервопривода, J_l – момент инерции звена относительно центра масс, $\underline{J}_l = J_l + \Delta\underline{J}_l$, $\bar{J}_l = J_l + \Delta\bar{J}_l$.

Были приняты следующие значения параметров однозвенных гибких манипуляторов: $K_s = 1,3 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$, $J_{eq} = 2,08 \times 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $B_{eq} = 0,004 \text{ Н}\cdot\text{м}/(\text{рад/с})$, $J_l = 0,0038 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $\Delta\underline{J}_l = -0,13J_l$, $\Delta\bar{J}_l = 0,13J_l$. Интенсивности шумов $Q_n = 10^{-3}I_{n_x}$ и $R_n = 10^{-4}$ для всех агентов, требуемая точность $e^* = 0,05$ рад. Продолжительность цикла повторения составляет 3 с. При переходе к дискретной модели использовался метод Эйлера с шагом $T_s = 0,01$ с. Желаемая траектория выходного сигнала

$$y_{ref}(p) = \frac{\pi(pT_s)^2}{6} - \frac{\pi(pT_s)^3}{27},$$

$$0 \leq p \leq T - 1, T = 300.$$

В данном примере $CB = 0$, однако разработанная теория предполагает, что $CB \neq 0$. Для обхода этого затруднения воспользуемся тем, что для данной системы $\dot{y}_i(k, t) = C_c \dot{x}_i(k, t) = C_{1,c} x_i(k, t)$ и $\dot{y}_{v,i}(k, t) = C_{1,c} x_i(k, t) + \dot{v}_i(k, t)$, где $C_{1,c} = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$. Тогда, применяя метод Эйлера, для решения задачи синтеза будем использовать следующую дискретную модель в пространстве состояний:

$$x_i(k, p + 1) = A(\delta_i)x_i(k, p) + B(\delta_i)u_i(k, p) + G\omega_i(k, p),$$

$$y_i(k, p + 1) = C_{1,c}x_i(k, p),$$

$$y_{v,i}(k, p + 1) = y_i(k, p + 1) + v_i(k, p + 1),$$

где $A(\delta_i) = T_s A_c(\delta_i) + I_{n_x}$, $B(\delta_i) = T_s B_c(\delta_i)$, $G = T_s G_c$, $C_1 = T_s C_{1,c} + C_c$.

В данном случае введем ошибку обучения как $\varepsilon_i(k, p) = y_{ref}(p + 1) - y_i(k, p + 1)$. Тогда динамика УИО на стандартной и переходной конфигурациях будет описываться уравнениями (16)–(17) и (18)–(19) соответственно с матрицами

$$\begin{aligned} A_{11,i}(\delta_i) &= \begin{bmatrix} A & F_i C_c \\ A_a(\delta_i) & A(\delta_i) - F_i C_c \end{bmatrix}, A_{12} = 0, \\ A_{21,i} &= [-C_1 A \quad -C_1 F_i C_c], A_{22} = I_{n_y}, \\ B_1 &= \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = -C_1 B, F_{1,i} = \begin{bmatrix} 0 & F_i \\ G & -F_i \end{bmatrix}, F_{2,i} = [0 \quad -C_1 F_i]. \end{aligned}$$

Будем рассматривать сетевую систему из трех одинаковых агентов с одним лидером и двумя ведомыми системами, получающими от лидера информацию о желаемом выходном сигнале. Рассмотрим последовательное и одновременное подключение агентов. Такие сценарии соответствуют производственной системе с изменением объема производства. Когда объем производства увеличивается, происходит подключение новых агентов, при уменьшении – отключение лишних.

При последовательном подключении сценарий работы системы определяется следующими конфигурациями:

1. Работает только лидер.
2. Подключается первая ведомая система и получает управляющий сигнал от лидера.
3. Лидер и первая ведомая система работают самостоятельно, получая доступную им информацию о выходном сигнале.
4. Подключается вторая ведомая система и получает управляющий сигнал от лидера.
5. Все агенты работают самостоятельно, получая доступную им информацию о выходном сигнале.

Решая задачу максимизации $\text{tr}[X_{c,m}]$ при ограничениях (25)–(27), задавая весовые матрицы $Q_1 = 10^{-5} I_{2n_x}$, $Q_2 = 10^5$, $R = 10$, и учитывая 2^{1N_m} комбинаций параметров $\delta_{i,1}$, были получены следующие матрицы протокола:

$$\begin{aligned} K_{1,1} &= [-15,2673 \quad 0,054 \quad -0,3625 \quad -0,0175], \\ K_{2,1} &= 8,3708, \\ K_{1,2} &= [-0,109 \quad -0,0476 \quad -0,0105 \quad -0,0035], \\ K_{2,2} &= 0,0234, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{1,3} &= [-18,4099 \quad 0,0471 \quad -0,4042 \quad -0,0228], \\
 K_{2,3} &= 6,763, \\
 K_{1,4} &= [-0,1177 \quad -0,0565 \quad -0,0133 \quad -0,0047], \\
 K_{2,4} &= 0,0005, \\
 K_{1,5} &= [-20,1069 \quad 0,0192 \quad -0,4255 \quad -0,0264], \\
 K_{2,5} &= 6,1906.
 \end{aligned}$$

На рис. 1 представлен график изменения среднеквадратических ошибок выходных сигналов. Неопределенный параметр лидера задан номинальным значением, а первая и вторая ведомые системы находятся на нижней и верхней границе соответственно. Подключения первой и второй ведомых систем происходят на повторениях 15 и 30 соответственно. В данном случае выходной сигнал лидера достигает требуемой точности за 4 повторения, первой ведомой системы – за 2 повторения, а ошибка второй ведомой системы не превышает значения в 0,05 рад на всем интервале времени своего функционирования. В моменты подключения агентов наблюдается возрастание ошибок функционирующих систем, но их величина находится в рамках требуемой точности.

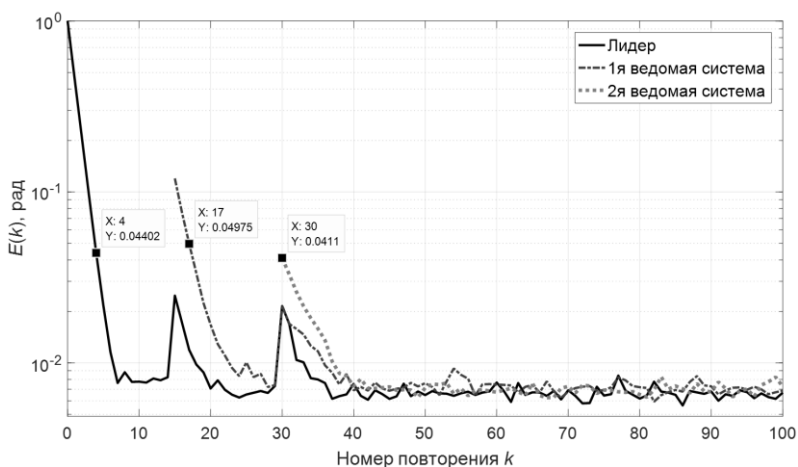


Рис. 1. Изменение среднеквадратических ошибок агентов при последовательном подключении (логарифмический масштаб)

Конфигурации при одновременном подключении:

1. Работает только лидер.
2. Подключаются ведомые системы и получают управляющий сигнал от лидера.
3. Все агенты работают самостоятельно, получая доступную им информацию о выходном сигнале.

Для данного сценария были получены следующие матрицы протокола:

$$K_{1,1} = [-15,2673 \quad 0,054 \quad -0,3625 \quad -0,0175],$$

$$K_{2,1} = 8,3708,$$

$$K_{1,2} = [-0,0384 \quad -0,0217 \quad -0,0046 \quad -0,0016],$$

$$K_{2,2} = 0,0003,$$

$$K_{1,3} = [-20,1069 \quad 0,0192 \quad -0,4255 \quad -0,0264],$$

$$K_{2,3} = 6,1906.$$

Моделирование данного сценария (см. рис. 2) было проведено с теми же значениями неопределенных параметров и с использованием тех же моделей шумов, что и в рассмотренном выше случае.

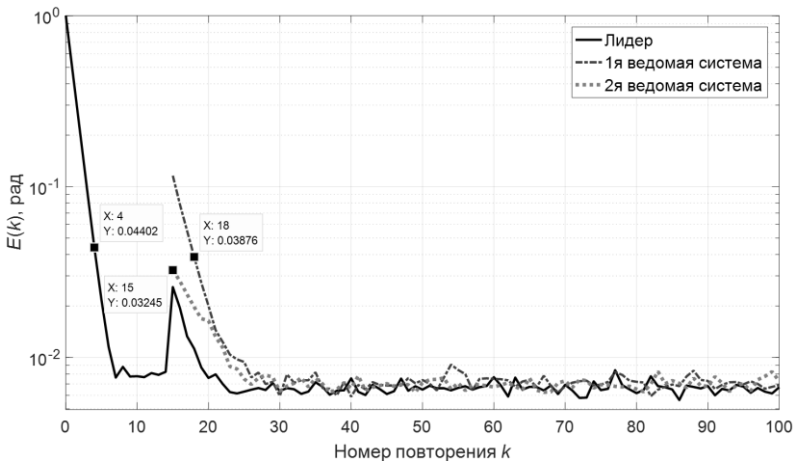


Рис. 2. Изменение среднеквадратических ошибок агентов при одновременном подключении (логарифмический масштаб)

Подключение ведомых систем происходило на повторении 15. Была достигнута аналогичная скорость сходимости агентов, за исключением первой ведомой системы, которая достигла требуемой точности за 3 повторения. В данном случае также наблюдается незначительное влияние переключения конфигурации на работу функционирующих систем. После 24 повторения среднеквадратические ошибки агентов не превышали значения в 0,01 рад.

4. Заключение

В данной работе с использованием дивергентного метода векторной функции Ляпунова получен закон УИО группой стохастических систем с неопределенными параметрами, связанных информационной сетью переменной конфигурации. Как и в [1], результаты моделирования показали эффективность полученного таким образом закона управления. Этот закон является робастным по отношению к заданным неопределенностям, обеспечивает высокую скорость сходимости выходного сигнала к желаемой траектории и позволяет снизить влияние изменения конфигурации сети на точность работы агентов. Однако причина возрастания ошибки в момент подключения агентов все еще вызывает интерес и требует дополнительных исследований.

Литература

1. ПАКШИН П.В., КОПОСОВ А.С., ЕМЕЛЬЯНОВА Ю.П. *Управление с итеративным обучением мультиагентной системой в условиях случайных возмущений* // Автоматика и телемеханика. – 2020. – №3. – С. 132–156. – DOI 10.31857/S0005231020030083.
2. ПАКШИН П.В., ЕМЕЛЬЯНОВА Ю.П., ЕМЕЛЬЯНОВ М.А., ГАЛКОВСКИЙ К., РОДЖЕРС Э. *Стохастическая устойчивость некоторых классов 2D-систем* // Автоматика и телемеханика. – 2018. – №1. – С. 113–129.
3. APKARIAN J., KARAM P., L'EVIS M. *Workbook on Flexible Link Experiment for Matlab/Simulink® Users: Instructor Workbook*. – Quanser Inc. – 2011.

4. PAKSHIN P., EMELIANOVA J., ROGERS E., GAŁKOWSKI K. *Repetitive process based stochastic iterative learning control design for linear dynamics* // Systems & Control Letters. – 2020. – Vol. 137. – P. 104625. – DOI 10.1016/j.sysconle.2020.104625.

ROBUST NETWORKED ITERATIVE LEARNING CONTROL OF A VARIABLE CONFIGURATION SYSTEM UNDER RANDOM DISTURBANCES

Anton Koposov, Arzamas Polytechnic Institute of R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod State Technical University, Arzamas, postgraduate student (koposov96@yandex.ru).

Abstract: The paper considers the iterative learning control design problem of a system, consisting of identical subsystems (agents) under changing the information network configuration. The agents represent discrete linear dynamic plants with affine model of uncertainty operating in a repetitive mode. Each plant is under the influence of random disturbances, and the output variables of the plants are measured in the presence of noises. The configurations of the information network determine the group of functioning agents and the type of information exchange between agents. The configuration change takes place in accordance with certain external rules. The control design is based on the divergent method of the vector Lyapunov function. The results of modeling the obtained control law for a group of manipulators with flexible single-links are presented.

Keywords: networked control, iterative learning control, uncertain parameters, robust control, stochastic systems, systems with switches, vector Lyapunov function.

УДК 62-50

ББК 32.965.02

DOI: 10.25728/ubs.2021.94.3

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 29.07.2021.

Опубликована 30.11.2021.

КООПЕРАЦИЯ И ЛИБЕРАЛИЗМ: ЭВОЛЮЦИОННЫЕ СЦЕНАРИИ В МОДЕЛИ ViSE

Чеботарев П. Ю.¹

(ФГБУН Институт радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова РАН,
ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

В предположениях модели ViSE рассматриваются общества, состоящие из группы и эгоистов. Изучены сценарии эволюции общества, заключающейся в изменении его структуры и порога голосования в интересах участников при гауссовском генераторе предложений. Установлено, что для нетривиальных обществ существуют сценарии, приводящие к образованию «открытой» группы, размер которой позволяет ей монопольно принимать решения посредством голосования. В то же время к обществам из эгоистов нет путей из обществ с невырожденной группой. Группа-мафия никогда не отпускает желающих ее покинуть. В обществах, близких к мажоритарным, реализуется механизм «снежного кома» кооперации, в самых либеральных и самых консервативных обществах – механизм последовательной атомизации. «Открытая» и «демократическая» группы допускают циклические сценарии эволюции. В благоприятной среде рационально усиление консерватизма.

Ключевые слова: социальная динамика, голосование, кооперация, либерализм, стохастическая среда, *homines eonomici*, порог голосования, эволюционные сценарии.

1. Введение

В модели ViSE общество состоит из участников (агентов), каждый из которых характеризуется текущим значением капитала (его отрицательная величина означает долг). Альтернативно капитал может интерпретироваться как полезность. Задается вектор начальных значений капитала участников. На каждом шаге $t = 1, \dots, M$ на голосование ставится одно предложение,

¹ Павел Юрьевич Чеботарев, д.ф.-м.н. (pavel4e@gmail.com).

и агенты, руководствуясь своими *стратегиями голосования*¹, голосуют «за» или «против». Каждое *предложение* есть вектор алгебраических приращений капиталов участников. В случае, если предложение одобрено с использованием принятой *процедуры голосования*, оно реализуется: капиталы участников получают предложенные приращения. Один из вариантов модели предполагает банкротство участников, чей капитал стал отрицательным, после чего эти участники перестают голосовать и не учитываются в последующих предложениях (вариант «с вымиранием»).

Предложение в модели формируется стохастически: его компоненты есть реализации случайных величин, которые в простейшем случае одномерны, одинаково распределены и независимы. Распределения этих величин в рамках рассматриваемых классов распределений характеризуются параметрами сдвига (математическое ожидание μ или медиана) и растяжения (стандартное отклонение σ или разность между медианой и первым квартилем). При сравнении распределений из разных классов они стандартизируются по параметрам сдвига и растяжения.

Предложения, сгенерированные указанным образом, называются *предложениями стохастической среды*. Среда *благоприятна*, если $\mu > 0$, *нейтральна* при $\mu = 0$ и *неблагоприятна* при $\mu < 0$. Стохастические предложения – удобный «движитель» модели – источник динамики, выявляющей социальные феномены.

Таким образом, вектор капиталов агентов на шаге t определяется формулой

$$(1) \quad \mathbf{c}(t) = r(\mathbf{c}(t-1) + \zeta(t)I(t)), \quad 0 < t \leq M,$$

где вектор $\zeta(t)$ – предложение среды на шаге t ; M – общее число шагов;

$$I(t) = \begin{cases} 1, & \text{если предложение } \zeta(t) \text{ принято голосованием;} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$r(\cdot)$ – оператор, исключающий из вектора капиталов отрицательные компоненты в модели с вымиранием и тождественный оператор в модели без вымирания.

Анализ закономерностей изменения вектора капиталов (1)

¹ *Стратегия в модели ViSE – алгоритм использования агентом имеющейся у него информации для принятия индивидуальных решений о поддержке предложений.*

при различных распределениях позволяет находить оптимальные – максимизирующие те или иные критерии – индивидуальные стратегии голосования и процедуры принятия коллективных решений.

Простейшие стратегии голосования в модели ViSE – эгоистическая и групповая. Эгоист поддерживает те и только те предложения, которые увеличивают его капитал; агентов этого типа можно назвать также *homines economici*. Все члены группы, защищающей групповой интерес, поддерживают те и только те предложения, которые увеличивают их суммарный капитал.

В качестве метода принятия решений рассматриваем голосование с порогом. В процедурах этого класса предложение принимается тогда и только тогда, когда доля участников, поддержавших его, превосходит число α , называемое *строгим относительным порогом голосования*. При $\alpha = 0,5$ получаем процедуру простого большинства; при $\alpha = 0$ для принятия предложения достаточно одного голоса; для одобрения *всех* предложений следует присвоить α отрицательное значение. *Строгий абсолютный порог голосования* – величина $\alpha n \in [-1, n]$. Подробнее о модели ViSE см. в [5].

В статье рассматривается общество, состоящее из группы и эгоистов; его общая численность n складывается из количества эгоистов n_e и численности группы n_g : $n = n_e + n_g$.

Данное исследование является продолжением работы [5], где изучалась зависимость средних (ожидаемых) приращений капиталов (СПК) участников от размера группы и порога голосования.

Предположим, что общество может меняться, а именно, эгоисты могут вступать в группу, а члены группы, напротив, выходить из нее, когда им это выгодно. Пусть порог голосования также может изменяться посредством коллективных решений. Представляет интерес изучение того, к чему такие изменения могут приводить, а именно, каковы допустимые траектории переходов в пространстве параметров, характеризующих общество, и равновесия в этом эволюционном¹ процессе. Результаты такого исследе-

¹ Термин «эволюция» используется в статье в значении «постепенная трансформация» и не связан с биологической эволюцией – происхождением новых поколений под действием наследования, мутаций, отбора и пр. [11].

дования могут указывать направления эволюции реальных обществ.

2. Об интерпретации параметров модели

Эгоизм и кооперация – две базовые социальные установки. Групповая стратегия голосования является примером кооперации. Изменение размера группы есть изменение уровня кооперации в обществе. Эволюция кооперации – одна из важных тем социальных исследований [8, 11]. В основном разработка ее ведется в парадигмах теории игр и эволюционной биологии (моделирование появления новых поколений организмов/агентов с определенными свойствами) – как теоретически, так и экспериментально [9]; в контексте голосования – например, в [10]. В рамках анализа модели ViSE проблемы такого рода обсуждались, в частности, в [4, 5].

Если стратегии голосования характеризуют участников, то порог голосования – параметр общества в целом. При высоком пороге голосования предложения принимаются редко, и, как правило, сохраняется *status quo*. Поэтому можно сказать, что идеологической характеристикой такого общества является *консерватизм*. Политическая терминология многозначна, и всегда полезно указывать, в каком смысле используется то или иное понятие. Здесь смысл «консерватизма» прямой: избегание изменений, реформ.

Общество с низким порогом голосования можно назвать демократичным, но это не самое точное наименование: при голосовании с высоким порогом все участники также равноправны; у каждого один голос; нет никаких привилегий. Низкий порог голосования означает надделение значительными правами меньшинств: их голосов достаточно для принятия решений, касающихся всех агентов. Это имплицитно и большие индивидуальные права: чтобы реализовать свою инициативу, агенту не обязательно получать поддержку большинства – достаточно объединиться с не составляющей большинства когортой единомышленников. Можно сказать, что такое общество приветствует инициативу, *высоко ставит права личности и меньшинств*, скорее нацелено на реформы, чем на поддержание *status quo*. Такое общество можно

назвать *либеральным* – в том классическом смысле, от которого отталкивались создатели идеологии консерватизма [7].

Переходя от модели к практике, можно сказать, что в обществах указанного типа политические партии и профсоюзы вольны организовывать большие общественные компании и публичные акции, затрагивающие широкие слои населения, фирмы – предлагать потребителям новые товары, борясь за увеличение своей доли рынка, издания – проводить резонансные журналистские расследования, способные вызвать политические кризисы и т.д. Всё это можно описывать в терминах решений, принимаемых меньшинствами, но затрагивающих всех.

Разумеется, в таких обществах существенная часть решений по-прежнему принимается мажоритарно, а иногда и с более высоким порогом. Поэтому можно характеризовать общество распределением относительного порога голосования на отрезке $[0, 1]$. Однако это сделало бы модель более громоздкой – без кардинального изменения результатов. Для качественного сравнения различных ситуаций *в среднем* в первом приближении достаточно использовать средние пороги голосования.

Доля группы и порог голосования – те координаты, в которых общества рассматриваются в данной статье. Эти координаты интерпретируются как шкалы «атомизация – кооперация» (доля группы в обществе) и «либерализм – консерватизм» (порог голосования).

3. Кооперация или атомизация: одобрение переходов

Выясним, прежде всего, какие изменения общества выгодны для эгоистов, членов группы, а также для агентов, меняющих свою стратегию. Начнем с последних, которых для краткости будем называть *перебежчиками*.

«Перебежчики» – это эгоисты, присоединяющиеся к группе, и члены группы, выходящие из нее и становящиеся эгоистами. Стоит отметить, что такие переходы приводят к коррекции групповой стратегии за счет изменения состава участников, капиталы которых образуют суммарный капитал группы.

Рассмотрим случай нейтральной среды ($\mu = 0$) с нормально распределенным генератором предложений.

Изменение участником своей стратегии оправдано, если оно приносит ему увеличение (или, как минимум, сохранение) ожидаемого приращения капитала. Проверка этого условия сводится к сравнению СПК эгоиста в рассматриваемом обществе (которое обозначим S) с СПК члена группы в обществе S' , где размер группы на единицу больше. Если вторая величина превышает первую, то новому члену группы выгоден переход от S к S' , и на диаграмме, где по вертикали – размер группы, а по горизонтали – порог голосования an , в клетку, соответствующую S , помещаем стрелку, указывающую на клетку общества S' . Если, напротив, первая величина превышает вторую, то стрелка в клетке S' указывает на S . Перечень символов переходов, используемых в последующих диаграммах, приведен в таблице 1. Указанные сравнения ожидаемых приращений капитала агентов производятся с использованием аналитических результатов, полученных в [5].

Таблица 1. Символы переходов между обществами

Переход, изменяющий структуру общества				Переход, изменяющий порог голосования			
Вверх Вниз	Не одобрен	Нейтрален	Одобен	Вправо Влево	Не одобрен	Нейтрален	Одобен
Не одобрен	E	⊥	⋈	Не одобрен	E	⊢	⇔
Нейтрален	⊥		↑	Нейтрален	⊣	—	→
Одобен	⋈	↓	⋇	Одобен	⇐	←	⇔

Каждый из символов в таблице 1 кодирует желательность/нежелательность перехода как в одну, так и в другую сторону. В данном случае переход «нейтрален», если СПК переходящего участника не меняется. Для наглядности диаграммы размечены несколькими цветами.

Анализ диаграммы переходов на рис. 1 приводит к следующим выводам.

1. Если $5 \leq an \leq 19$, то в обществе с группой от 2 до 24 участников ($1 < n_g < 25$) эгоистам выгодно вступать в группу, а членам группы невыгодно ее покидать. Это позволяет реализовать сценарий «снежного кома» кооперации [4, 5]. При $n_g = 1$ эгоисту выгодно присоединиться к группе; если же единственный член группы становится эгоистом, то ничего не меняется, поскольку его групповая стратегия тождественна эгоистической.

При $n_g = 25$ имеем равновесия: все агенты в группе, покидать ее невыгодно.

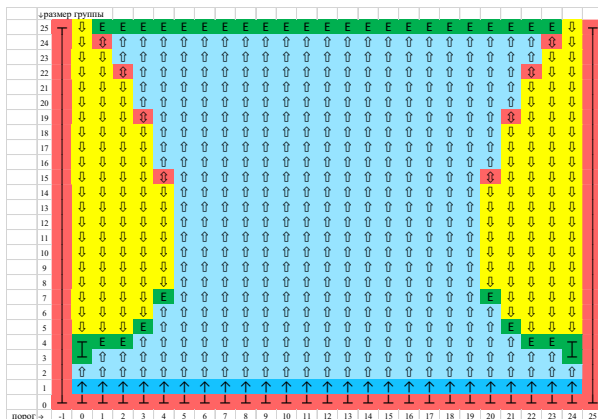


Рис. 1. Изменения степени кооперации, выгодные агентам, меняющим свою стратегию: $n = 25$ агентов; гауссовский генератор предложений с $\mu = 0$; по оси абсцисс – абсолютный порог αn

2. Если $\alpha n \in [1, 4] \cup [20, 23]$, то при $n_g \in [0, 3] \cup \{25\}$ переходы те же, что в п. 1. При $n_g > 0$ эгоистам выгодно вступать в группу вплоть до определенного ее размера (от 4 до 7 при разных порогах голосования), являющегося равновесием, а также начиная с большего ее размера (от 15 до 24). В промежуточной области (между равновесием и «антиравновесием», из которого выгодны оба перехода) участнику группы выгодно ее покинуть.

3. При $\alpha n \in \{0, 24\}$ есть два отличия от предыдущего случая. Во-первых, $n_g = 25$ не является равновесием: члену группы выгодно выйти из нее. Во-вторых, $n_g \in \{3, 4\}$ определяют равновесное макросостояние: переход между соответствующими двумя обществами нейтрален.

Весьма интересны на данной диаграмме траектории последовательного уменьшения группы. Точки начала этих траекторий отмечены символами \uparrow либо \downarrow . Точки их окончания, являющиеся равновесными состояниями, отмечены символом E и имеют координаты (1, 4), (2, 4), (22, 4), (23, 4), (3, 5), (21, 5), (4, 7), (20, 7);

равновесные макросостояния: $(0, 3) \& (0, 4)$ и $(24, 3) \& (24, 4)$. Наличие равновесных обществ с группой небольшого размера – теоретический феномен, имеющий аналоги в реальности. Все остальные равновесия – общества без эгоистов, где $1 \leq an \leq 23$, – достижимы посредством механизма «снежного кома» кооперации.

Интерпретация этих результатов: в самых либеральных и консервативных обществах участники имеют стимул к атомизации; в обществах, более близких к *мажоритарным* (принимающим решения простым большинством) – стимул к кооперации. Это связано с тем, что в либеральном и в консервативном обществах роль отдельной личности выше всего: в первом ей легче воплотить свою инициативу, во втором велико внимание к «белым воронам», способным заблокировать принятие решения. В ряде других случаев мы также увидим, что «крайности сходятся»: у консервативного и либерального обществ больше общего друг с другом, чем с обществом мажоритарным.

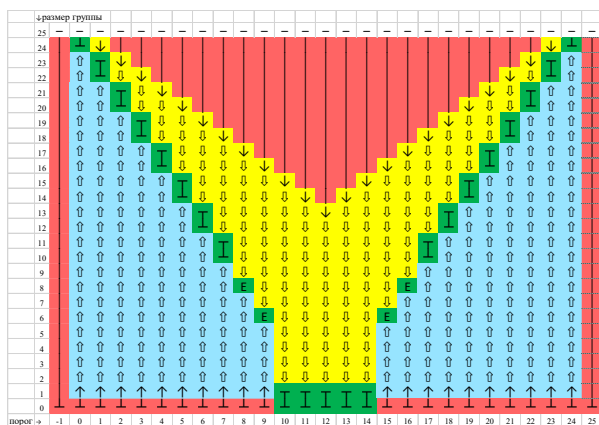


Рис. 2. Изменения степени кооперации, выгодные эгоистам

Консерватизм – это «либерализм наоборот»: если в либеральном обществе распространенному стремлению к стабильности может с успехом противостоять инициатива немногих, то при консервативном устройстве доминирующий курс (например, на усиление политической реакции) может быть заблокирован

протестами меньшинства. Поэтому неудивительно, что доминантой реальной (не приукрашенной) новостной повестки консервативных режимов нередко являются новости о протестах и реакции на них.

Выясним теперь, какие изменения структуры общества выгодны агентам, не меняющим стратегий, – эгоистам (рис. 2) и членам группы (рис. 3).

В случае эгоистов выделяются следующие основные зоны.

1. Треугольная область нейтральности, показанная красным, где все решения принимает группа, максимизирующая свое приращение капитала, а СПК эгоистов равно $\mu = 0$.

2. Желтая Y-образная область, где эгоистам выгодно увеличение их числа и, соответственно, уменьшение размера группы.

3. Две голубые области, где отличие порога голосования от порога простого большинства выражается числами от 3 до 12, а размер группы не превышает удвоенного отличия. Здесь эгоистам выгодно уменьшение их доли в обществе.

4. Отмеченные зеленым равновесные состояния либо макросостояния из двух обществ. Выход из них снижает СПК эгоистов.

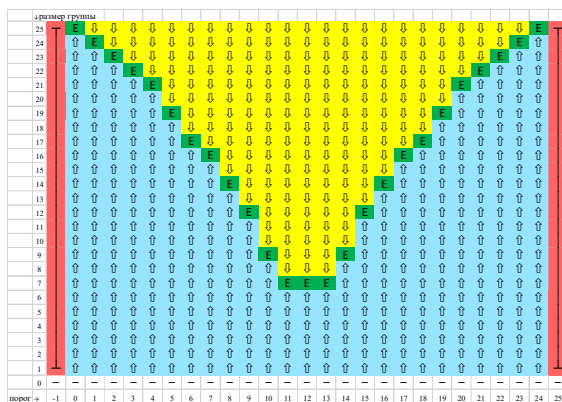


Рис. 3. Изменения степени кооперации, выгодные членам группы

Сравнение приведенных диаграмм показывает, что интересы эгоистов и «перебежчиков» часто противоположны. Диаграмма предпочтений членов группы (рис. 3) имеет более простой вид:

чем ближе порог голосования к мажоритарному, тем меньше размер группы, оптимальный для ее членов; при $11 \leq an \leq 13$ этот размер равен 7.

Членам группы и эгоистам довольно часто выгодны одни и те же изменения степени кооперации. На следующей диаграмме (рис. 4а) желтым показано согласованное уменьшение группы, голубым – согласованное увеличение, бежевым и синим – соответственно уменьшение и увеличение при нейтральности одной из категорий. На рис. 4б–г аналогичным образом показаны согласованные изменения структуры общества перебежчиками и эгоистами; перебежчиками и группой; тремя категориями агентов.

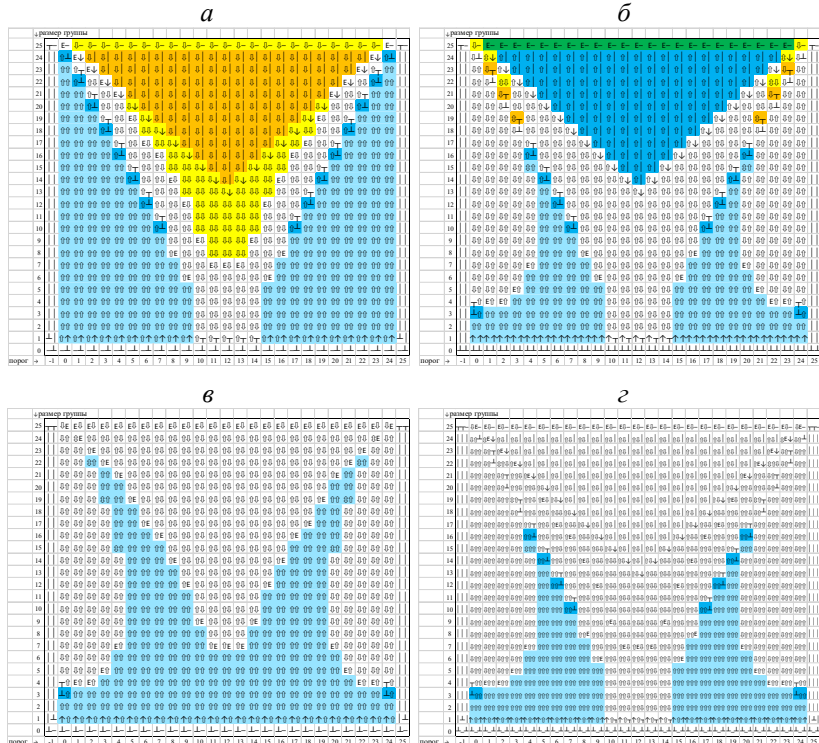


Рис. 4. Одобрение переходов (а) группой (левый символ в ячейке) и эгоистами; (б) перебежчиками (левый символ) и эгоистами; (в) перебежчиками (левый символ) и группой; (г) перебежчиками (левый символ), группой (средний) и эгоистами

Относительно диаграмм на рис. 4 отметим следующее.

1. Существуют переходы, одобряемые всеми агентами (рис. 4г). Это переходы к обществам с большей группой, реализующие стратегию «снежного кома» кооперации. Отметим, что данная стратегия имеет ряд приложений, см., например, [2], где она описывается так: «Первоначальный союз должен стать готовым к принятию новых членов, а те пожелать войти в эту ассоциацию. Причиной такого желания могут стать лишь очевидные и весомые преимущества нового статуса, причем практические...» В нашем случае одобряемые всеми переходы реализуются при порогах голосования, отличающихся от порога простого большинства не менее чем на 3, и при размере группы, ограниченном числами от 3 до 16. Синим показаны переходы, к которым одна из категорий относится нейтрально, голубым – одобряемые всеми тремя. Вместе они составляют 22% нетривиальных обществ.

2. Все переходы, одобряемые перебежчиками и группой (рис. 4в), также увеличивают кооперацию. Это переходы из 33% нетривиальных обществ, они реализуются при порогах от 0 до 24; при некоторых порогах есть два диапазона соответствующих размеров группы.

3. Переходы, одобряемые (в слабом смысле) перебежчиками и группой (рис. 4б), увеличивают кооперацию, за исключением 12 переходов, реализуемых при низких или высоких порогах голосования. Из последних в половине (они показаны бежевым) эгоисты сохраняют нейтралитет, половину (показанную желтым) – поддерживают, либо эгоистов нет. Всего здесь 43% нетривиальных обществ. Из них в половине (50,6%) – одобрение при нейтральности эгоистов.

4. Наконец, согласованные предпочтения группы и эгоистов (рис. 4а) образуют: (а) две большие области кооперации с порогами голосования 0–9 и 15–24, где диапазон размеров группы тем шире, чем сильнее порог голосования отличен от порога простого большинства; (б) V-образную область атомизации при порогах голосования от 5 до 19; (в) отрезок атомизации при $n_g = 25$ в обществах, где нет эгоистов; (г) треугольную область атомизации при нейтралитете эгоистов, отмеченную бежевым. При этом

для 57% нетривиальных обществ переходы одобряются всеми агентами обеих категорий и еще для 20% переходы поддерживаются группой при нейтралитете эгоистов.

Построенные диаграммы позволяют увидеть, в каких областях пространства параметров интересы разных категорий агентов совпадают, а в каких противоположны.

4. Эволюция двухкомпонентных обществ

4.1. КООПЕРАЦИЯ – АТОМИЗАЦИЯ

Обратимся к изучению эволюции обществ в модели ViSE в результате изменений их структуры либо процедуры голосования, осуществляемых агентами в их интересах.

Прежде всего допустим, что любой эгоист может беспрепятственно войти в группу, а любой член группы может выйти из нее, став эгоистом. Такую группу назовем *открытой*. В этом случае переходы, определяющие возможную эволюцию общества, задаются рассмотренной выше диаграммой на рис. 1. Однако многие группы, например, политические партии, устроены иначе. Они принимают не всех, а лишь тех, чье присоединение считают для себя выгодным. При этом любой участник имеет право покинуть группу. В [2] группа данного типа описана так: «Вступление в ассоциацию... должно быть обусловлено придиричливой оценкой готовности кандидатов, а выход – беспрепятственным».

На рис. 5 приведена диаграмма переходов в случае, когда необходимым условием вступления в группу, кроме выгоды нового ее участника, является санкция самой группы, которая выдается, если после данного перехода СПК члена группы также растет. Дополнительным обоснованием санкции в модели ViSE может быть то, что при вступлении в группу, кроме изменения стратегии входящего участника, требуется расширение группой понятия «групповой интерес» за счет учета интереса вступающего, в результате чего мера учета интересов прежних участников снижается.

Санкционированное присоединение и добровольный выход соответствуют практике демократических организаций, в отличие от организаций мафиозного типа. Поэтому группу данного типа будем называть *демократической*.

Если СПК присоединяющегося эгоиста *не меняется*, то его переход в группу будем считать одобренным при условии роста СПК членов группы, не одобренным при уменьшении последнего и нейтральным в случае его неизменности. Тем самым предполагается доброжелательность входящего в группу участника: он готов на нейтральное в отношении его капитала действие ради пользы «ближних» – новых компаньонов. В то же время критерий пользы ближних лексикографически подчинен критерию пользы агента.

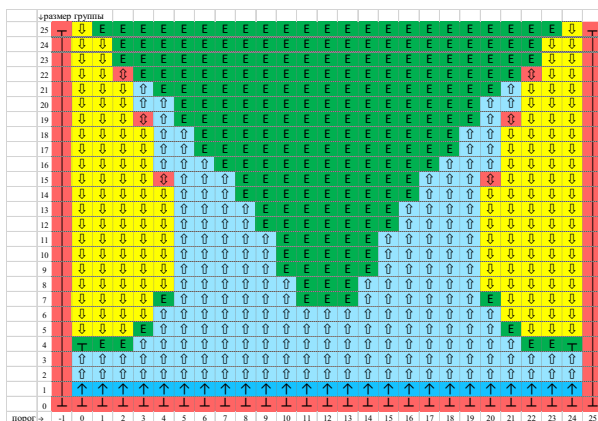


Рис. 5. Одобренные изменения степени кооперации в случае демократической группы

Когда для присоединения к группе требуется ее санкция (рис. 5), есть три отличия от рассмотренного выше случая (рис. 1).

1. При $n_g = 3$ и $an \in \{0, 24\}$ увеличение группы теперь одобряется, поскольку оно выгодно членам группы.

2. При $n_g = 24$ и $an \in \{1, 23\}$ присоединение единственного эгоиста к группе (приводящее к равновесному состоянию) блокируется ею.

3. Добавляется большой «клин» обществ-равновесий, показанный на рис. 5 зеленым. В этих обществах $n_g \geq 7$.

Наличие таких равновесий означает, что механизм «снежного кома» кооперации приводит к группе лишь из семи агентов

при $11 \leq n_g \leq 13$ и к группе из максимум 22 агентов при сравнительно высоких или низких порогах.

Заметим, что «клин» равновесий на рис. 5 не совпадает с областью Парето на рис. 4 в [5], но граница его (за исключением четырех точек с ординатами $an \in \{0, 1, 23, 24\}$) совпадает с линией оптимума группы по численности на рис. 7 в [5].

Краткая интерпретация этих результатов: чем общество дальше от мажоритарного, тем выше минимальный уровень кооперации, обеспечивающий его структурную стабильность при демократической группе.

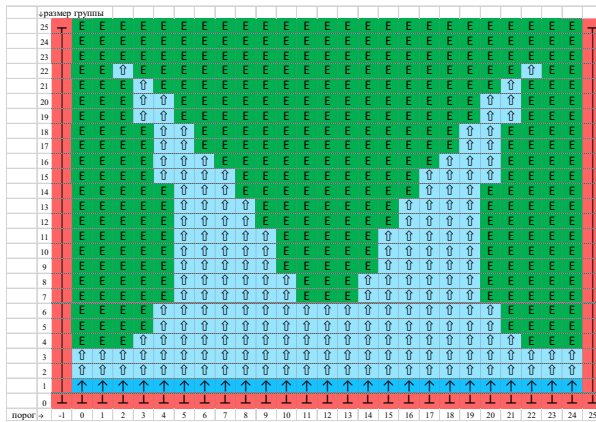


Рис. 6. Одобренные изменения структуры при группе-мафии

Наконец, приведем диаграмму для группы, блокирующей все невыгодные для ее участников переходы (рис. 6; такую группу будем называть *мафиозной*, или *группой-мафией*). Она получается из диаграммы на рис. 4в заменой двойных одобрений $\hat{u}\hat{u}$, а также $\perp\hat{u}$ на переходы \hat{u} , $\uparrow\hat{u}$ на \uparrow , $||$ и $|\perp$ на $|$, \perp на \perp , остальных комбинаций – на E (*Equilibrium*). Также она может быть получена из диаграммы на рис. 5 заменой не одобряемых группой переходов \downarrow , а также \top в клетках (4,0) и (4,24) на E, а двухсторонних переходов \hat{u} – на переходы к большей группе \hat{u} .

Интерпретация этих результатов: мафиозная группа хотя и бывает заинтересована в уменьшении своего размера (рис. 3), но никогда не одобряет инициативу участников по выходу из нее.

Наибольшие перспективы своего расширения она, как и демократическая группа, имеет в умеренно либеральных и умеренно консервативных обществах.

4.2. ЛИБЕРАЛИЗМ – КОНСЕРВАТИЗМ

Диаграммы эволюционных переходов, состоящих в изменении порога голосования, представлены на рис. 7.

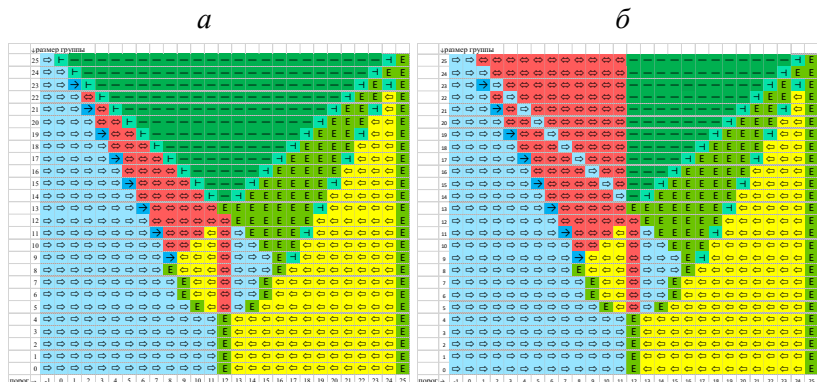


Рис. 7. Изменения порога голосования посредством голосования с текущим порогом. Голоса воздержавшихся: (а) не учитываются; (б) учитываются с коэффициентом 0,5

Естественно считать, что решение об изменении на единицу абсолютного порога принимается голосованием с текущим порогом. Изменение поддерживают агенты, которым оно приносит увеличение ожидаемого приращения капитала. Если СПК не меняется, то агент воздерживается; голоса таких участников не вносят вклада в число голосов «за» (рис. 7а) либо учитываются с коэффициентом 0,5 (рис. 7б) – при этом воздерживающийся дает 0,5 голоса «за» и 0,5 голоса «против». Результаты применения этих способов учета воздержавшихся отличаются незначительно: они касаются лишь нейтральности части переходов между равноценными состояниями. Далее будем рассматривать случай (а).

На диаграмме (рис. 7а) выделим несколько областей.

1. Совокупность равновесий (E). Все точки с $an = 25$ равновесны (так как при этом пороге предложения не принимаются), но равновесия неустойчивы: при единичных отклонениях возврата к ним не происходит. Кроме того, при $n_g < 5$ равновесием служит порог простого большинства $an = 12$, а при $n_g \in [5, 8]$ есть по два равновесия, симметричных относительно $an = 12$. Наконец, есть «треугольная» область (показана светло-зеленым) равновесий с $an \geq 12$ и $n_g \leq an$, включающая также точку (12, 13).

2. Равновесные макросостояния (вида $\vdash\text{---}\dashv$) из верхней треугольной области, где пороги диапазона $n_e \leq an < n_g$ равновесны, относятся к области 3 на рис. 1 в [5] и приводят к принятию тех и только тех предложений, которые поддерживает группа.

3. Большая область (содержащая точку (5, 5) и показанная голубым), где порог увеличивается, достигая $an = 12$ при $n_g < 5$ либо более низких значений при $n_g \geq 5$: достигаемые значения тем ниже, чем больше группа. При $n_g < 9$ достигаются равновесия, при $9 \leq n_g \leq 22$ – области разнонаправленных переходов; при $n_g > 22$ – равновесные макросостояния (см. п. 2).

4. Область, где порог уменьшается, в основном симметричная предыдущей относительно $an = 12$ (показана желтым).

5. Область разнонаправленных переходов, упомянутая в п. 3, в основном симметричная «треугольной» области равновесий из п. 1 относительно $an = 12$, но на одну клетку более узкая (показана красным).

6. Наконец, круглая в первом приближении «центробежная» область с центром в (12, 8) и радиусом 3 ($5 < n_g < 11$). В ней общество удаляется от простого большинства ($an = 12$), увеличивая либо уменьшая порог и достигая в итоге области разнонаправленных переходов (когда порог уменьшается при $n_g > 8$) либо равновесия (в остальных случаях).

Итак, последовательное изменение порога голосования приводит к одному из описанных в п. 1 состояний равновесия либо к области разнонаправленных переходов, где можно «блуждать» как угодно долго, а также выходить из нее с возвратом или без.

Здесь проявляется главная особенность голосования с низким порогом – нестабильность. Так, при пороге голосования 10 общество с группой из 12 агентов одобряет голосованием как повышение, так и понижение порога. После реализации таких изменений голосование с новым порогом снова позволяет как повысить, так и понизить порог. Подобные ситуации возникают, когда голосов каждой из двух категорий участников достаточно для принятия решения, а интересы этих категорий противоположны.

В областях, приблизительно описываемых условиями $n_g + 2\alpha n \leq 25$ и $n_g - 2\alpha n \leq -23$, тенденция изменения порога – центростремительная; при средних порогах и группе от 5 до 11 (в обществе из 25 агентов) – центрбежная.

Интерпретация результатов: радикально либеральные и консервативные общества эволюционируют в направлении мажоритарных – тем сильнее, чем ниже степень кооперации. Общества, близкие к мажоритарным, удаляются от мажоритарных при степени кооперации несколько ниже средней. При более высокой кооперации они попадают в зону «антиравновесий» (разнонаправленных переходов) в случае либерального «уклона», а в случае консервативного «уклона» являются равновесиями; при еще большей кооперации они попадают в зону равновесных макросостояний.

4.3. СЛУЧАЙ, КОГДА РАЗРЕШЕНЫ ОБА ТИПА ПЕРЕХОДОВ

Пусть теперь разрешены оба типа переходов: изменяющие структуру общества и меняющие порог голосования. Тогда для анализа возможной эволюции нужно совместить диаграммы, показанные на рис. 1, рис. 5, рис. 6 и рис. 7а. Результаты приведены на рис. 8 (случай открытой группы) и рис. 9 (случай демократической группы). Диаграмма для группы-мафии представлена далее на рис. 14. Левый символ в каждой клетке отражает возможные изменения структуры, правый – изменения порога. Черным показана граница множества Парето, которое сужается с уменьшением размера группы (рис. 4 в [5]).

В первом случае (рис. 8) есть два равновесных макросостояния: $\alpha n = 25$ (отклонение всех предложений при любом размере группы) и $n_g = 25$ (все агенты – в группе) при $1 \leq \alpha n \leq 23$.

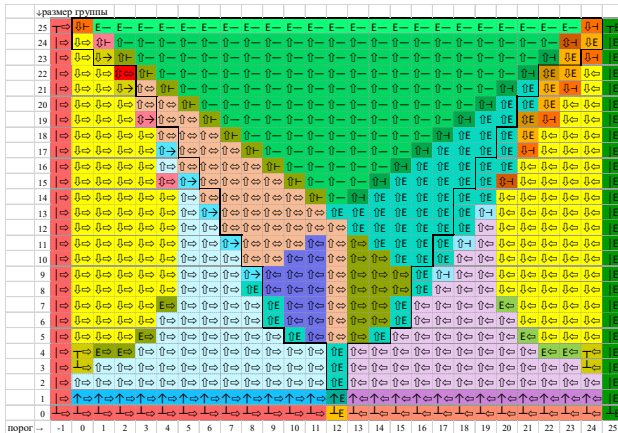


Рис. 8. Переходы двух типов в случае открытой группы

Опишем основные типы трансформации общества.

1. В «желтых» областях, где пороги голосования далеки от порога простого большинства, возможны выход агентов из группы и движение к среднему порогу.

2. В других областях – напротив, увеличение группы, а при достаточно малой группе – движение к мажоритарному обществу.

3. Удаление от мажоритарного общества в небольшой «круглой» области с центром (12, 8).

В случае возможности присоединения к группе лишь с ее одобрения (рис. 9) главное отличие состоит в запрете увеличения группы (движения вверх) в большом зеленом треугольнике на рис. 5. Это приводит к появлению А) равновесных макросостояний при $14 \leq n_g \leq 24$ и Б) области равновесных состояний, угловые точки которой – (12, 13), (14, 11) и (19, 19). Кроме того, это приводит к запрету на движение вверх в зоне, симметричной новой области равновесных состояний «Б» и в верхней части «круглой» области. Для общества в целом данный случай часто менее выгоден: запрещая в своих интересах присоединение эгоистов, группа ограничивает рост совокупного капитала общества.

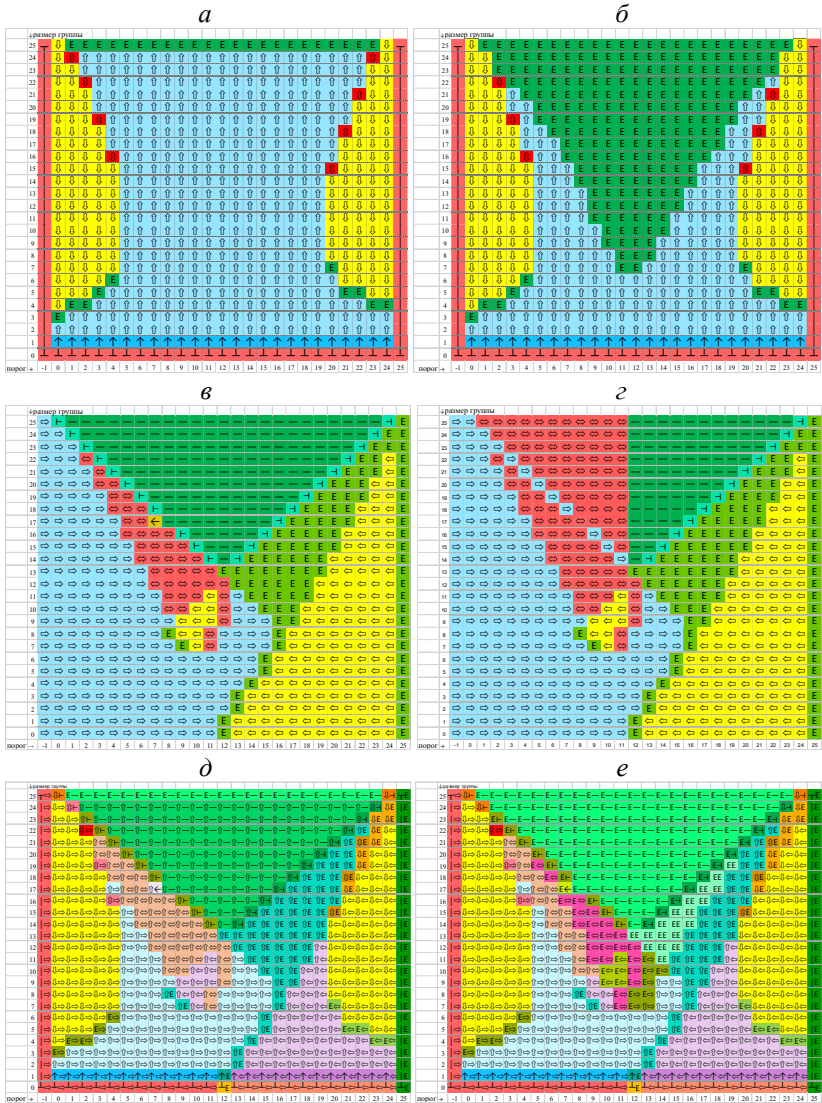


Рис. 10. Переходы между обществами (нормальное распределение, $\mu = -1$, $\sigma = 12$, $n = 25$): изменение структуры (а) без учета и (б) с учетом голосов воздержавшихся; изменение порога (в) без учета и (г) с учетом воздержавшихся; переходы двух типов (д) без одобрения и (е) с одобрением группой

5. Комбинированные сценарии эволюции

Под комбинированными будем понимать сценарии, включающие изменения как структуры общества, так и процедуры голосования, где каждое изменение одобрено по правилам, рассмотренным выше. Чем ограничены эти сценарии? Не ставя задачи дать полное их описание ввиду его громоздкости, приведем ряд примеров и укажем области взаимно достижимых состояний.

Могут ли такие сценарии быть циклическими? Ответ на этот вопрос положительный; один из примеров показан на рис. 11. Здесь общество с $n_g = 20$, $an = 2$ и свободным присоединением к группе последовательно сокращает размер группы до $n_g = 4$, затем доводит порог an до 10, потом снижает его до 4, увеличивая размер группы до 20, и возвращается к исходному состоянию.

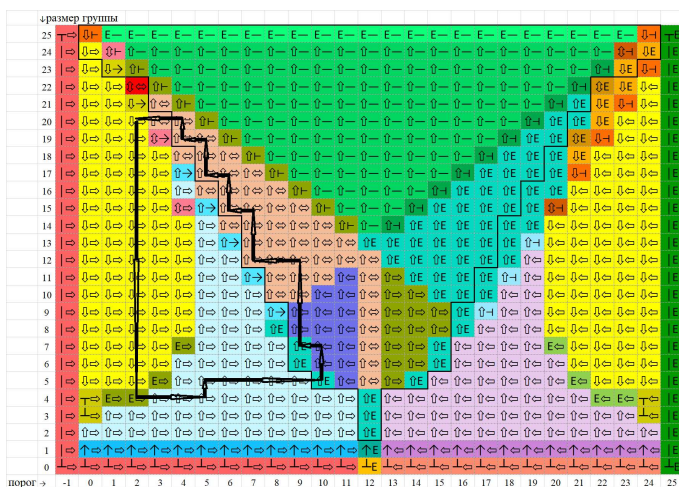


Рис. 11. Циклический сценарий в случае открытой группы

На рис. 12а представлены маршруты, проходящие через другие области пространства параметров. Один из них, показанный белым, начинается с $n_g = 25$, $an = 24$, доходит до точки $n_g = 4$, $an = 12$, затем до $n_g = 19$, $an = 3$, где раздваивается: одна ветвь завершается в точке $n_g = 25$, $an = 4$, другая доходит до $n_g = 6$, $an = 8$ и может быть продолжена далее.

Наконец, сценарий, показанный серым, начинается в противоположном углу диаграммы ($n_g = 1, \alpha n = -1$) и приходит к состоянию $n_g = 25, \alpha n = 16$. Эти примеры показывают, что трансформации общества могут начинаться, продолжаться и заканчиваться в разных областях пространства параметров.

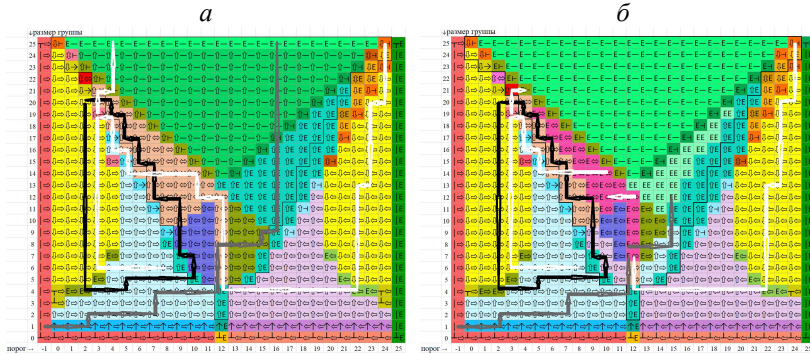


Рис. 12. Комбинированные сценарии при (а) открытой группе; (б) демократической группе

Насколько сильно ограничение входа в группу сокращает возможности перемещения по пространству параметров? Рисунок 12б показывает, что на маршрут, показанный черным, это ограничение не влияет, но другие маршруты фрагментируются и/или обрываются раньше. Таким образом, демократическая, как и открытая группа, допускает циклические сценарии эволюции.

Как меняется СПК общества вдоль рассмотренного циклического маршрута? График зависимости СПК по обществу от номера состояния представлен на рис. 13. На графике переходы, увеличивающие атомизацию, показаны желтым (они в данном случае уменьшают СПК), переходы, приближающие процедуру к мажоритарной, повышая порог голосования, – красным; они увеличивают СПК, как и движение к кооперации, показанное голубым; большинство переходов к более либеральным обществам, показанных зеленым, на данном маршруте снижают СПК. Таким образом, свободный выход участников из открытой или демократической группы может стоить обществу достаточно дорого.

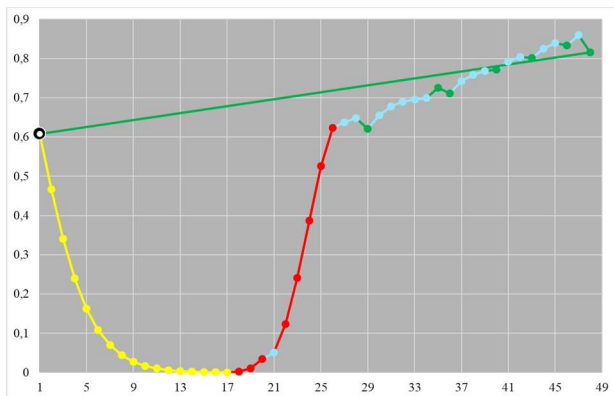


Рис. 13. СПК по всему обществу на циклическом маршруте, показанном на рис. 11, при $\sigma = 12$. Цвета переходов: желтый – рост атомизации, голубой – рост кооперации, красный – приближение к мажоритарности, зеленый – рост либеральности

Группа-мафия не допускает своего сокращения по инициативе участников, поэтому в ее присутствии нет циклических сценариев. В то же время существуют сценарии с немонотонным изменением порога, один из которых представлен на рис. 14.

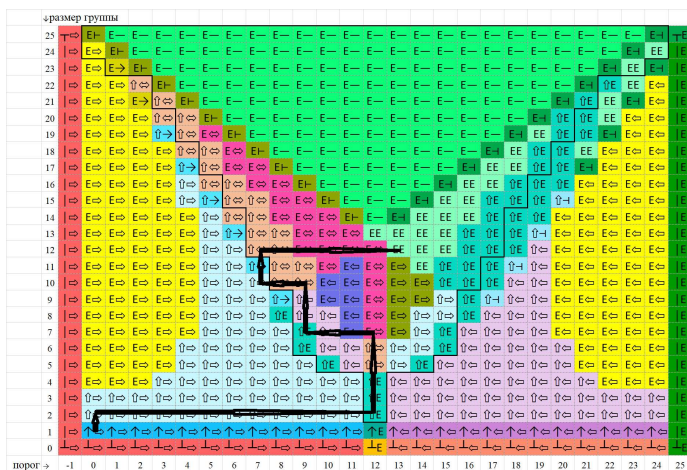


Рис. 14. Пример комбинированного сценария для общества с группой-мафией

Максимальные области взаимно достижимых состояний для обществ с открытой и демократической группой заштрихованы соответственно на рис. 15а и рис. 15б. Вторая область уже; для сравнения часть границы первой области показана на рис. 15б белым.

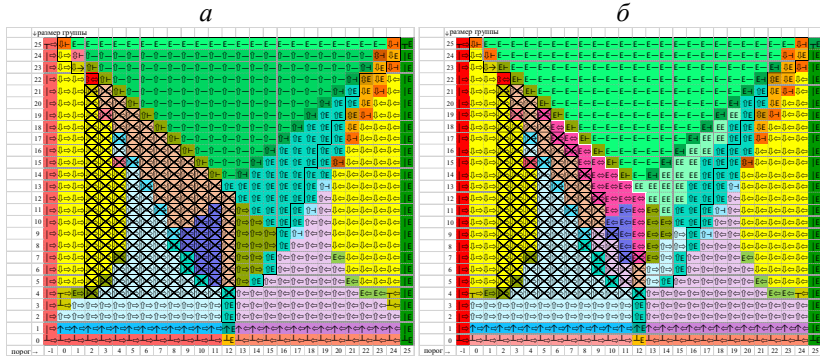


Рис. 15. Области взаимно доступных состояний в случаях:
(а) открытой группы; (б) демократической группы

Наконец, коснемся еще одного типа эволюции. Как показывает рис. 4а, интересы группы и эгоистов в части структурных изменений в 57% обществ совпадают. При этом вместе они составляют всё общество за вычетом одного агента, осуществляющего переход (перебежчика). Последний поддерживает этот переход в 20% всех обществ, в остальных же 37% (из 57%) – не согласен с ним. Если общество совершает этот переход, не считаясь с его интересами (назначив одного агента перебежчиком в интересах остальных; такой переход назовем *приказным*), то переход будет происходить в 57% обществ и в конце концов приводить в Y-образную область, на рис. 4а показанную белым. Тем самым эта область образована равновесиями сценариев, составленных из приказных переходов.

6. Основные выводы

В предположениях модели ViSE изучена эволюция обществ, состоящих из группы и эгоистов, при разных порогах принятия коллективных решений. А именно, рассмотрен вопрос о том,

как может меняться общество, если участники, стремясь максимизировать свой капитал, будут изменять свои стратегии или/и порог голосования.

Результаты такой эволюции во многом зависят от начального состояния общества. В зависимости от него выгоду может приносить как кооперация, так и атомизация, изменение процедуры принятия решений в направлении как консерватизма, так и либерализма; как приближение этой процедуры к мажоритарной, так и удаление от нее. В статье изучены возможные переходы и равновесия при нескольких вариантах «правил игры». В частности, рассмотрены три типа групп, образуемых кооперирующимися участниками: открытые, демократические и мафиозные. Открытая группа принимает и отпускает всех желающих, демократическая способна блокировать присоединение к ней, мафиозная – также и выход из нее.

Выявлены условия реализации разных типов динамики, главным образом, в нейтральной среде.

Конкретные выводы приводились в предыдущих разделах статьи; часть из них формулировалась в терминах, относящихся к интерпретации. В данном разделе приведем наиболее простые выводы.

1. Установлено, что известный механизм «снежного кома» кооперации реализуется во многих, но далеко не во всех случаях.

2. При открытой группе из любого общества, кроме отвергающего все предложения, есть путь к обществу с большой группой, монополюбно принимающей решения. Для групп других типов множество равновесных состояний/макросостояний шире. К обществам, состоящим из эгоистов, из обществ с невырожденной группой путей нет.

3. В самых либеральных и консервативных обществах участники имеют стимул к атомизации; в обществах, более близких к мажоритарным – стимул к кооперации. Это связано с тем, что в либеральном и в консервативном обществах роль отдельной личности выше всего: в первом ей легче воплотить свою инициативу, во втором велико внимание к «белым воронам», нарушающим монолитность.

4. Чем общество дальше от мажоритарного, тем выше минимальный уровень кооперации, обеспечивающий его структурную стабильность при демократической группе.

5. Мафиозная группа хотя и бывает заинтересована в уменьшении своего размера, но никогда не одобряет инициативу участников по выходу из нее. Наибольшие перспективы своего расширения она, как и демократическая группа, имеет в умеренно либеральных и умеренно консервативных обществах.

6. Радикально либеральные и консервативные общества эволюционируют в направлении мажоритарных – тем сильнее, чем ниже степень кооперации. Общества, близкие к мажоритарным, удаляются от мажоритарных при степени кооперации несколько ниже средней. При более высокой кооперации они попадают в зону «антиравновесий» (разнонаправленных переходов) в случае либерального «уклона», а в случае консервативного «уклона» являются равновесиями; при еще большей кооперации они находятся в зоне равновесных макросостояний.

7. Открытая и демократическая группы допускают циклические сценарии эволюции и большие области взаимно достижимых состояний. Речь идет о процессах в координатах «либерализм, кооперация», и это напоминает циклические процессы в реальных демократических обществах. В присутствии мафиозной группы циклические сценарии невозможны, но есть сценарии с немонотонным изменением порога голосования.

8. В неблагоприятной среде левая область атомизации становится больше, чем в нейтральной среде, а правая – меньше. Области повышения и понижения порога голосования соответственно увеличивается и уменьшается. Это связано с установленным ранее фактом роста оптимального порога голосования в неблагоприятной среде при гауссовской генерации предложений.

7. Заключение

Исследование динамики модели ViSE для обществ, состоящих из группы и эгоистов, начатое в [1, 3, 5], продолжено посредством изучения сценариев эволюции, определяемых изменениями структуры общества и процедуры голосования. Рассмотрены

три типа групп: открытые, демократические и мафиозные. Указаны значения параметров, при которых реализуется механизм «снежного кома» кооперации и обратный механизм последовательной атомизации. Первое характерно для обществ, близких к мажоритарным, второе – для наиболее либеральных и наиболее консервативных обществ.

Также получены следующие результаты. Установлено, что в случае открытой группы для всех рассмотренных нетривиальных обществ существуют сценарии, приводящие к образованию группы, способной монопольно принимать решения. При этом нет путей, образованных переходами, одобренными участниками, из обществ с невырожденной группой к обществам из эгоистов. Группа-мафия никогда не одобряет инициативу ее членов по выходу из нее. Открытая и демократическая группы допускают циклические сценарии эволюции, имеющие общие черты с циклическими процессами в реальных обществах.

Модель выявляет важную черту консерватизма рассмотренного типа: он работает как «либерализмом наоборот», что приводит к симметричности ряда диаграмм относительно среднего порога голосования. В терминах практики это связано с тем, что если в либеральном обществе распространенному стремлению к стабильности может успешно противостоять инициатива немногих, то при консервативном устройстве доминирующий курс (например, на усиление политической реакции) может быть заблокирован протестующим меньшинством. Поэтому закономерно, что реальной доминантой новостной повестки консервативных режимов часто оказываются новости, связанные с протестной активностью. Последняя становится эрзацем «позитивной» оппозиционной деятельности, имеющей здесь мало перспектив. При уменьшении благоприятности среды участникам выгодно усиление консерватизма.

Литература

1. БОРЗЕНКО В.И., ЛЕЗИНА З.М., ЛОГИНОВ А.К. и др. *Стратегии при голосовании в стохастической среде: эгоизм и коллективизм* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №2. – С. 154–173.

2. КОВАЛЕВ С.А. *Политический идеализм и реальная политика: вызов XXI века* // Доклад на конференции «Страна в мире», 2 марта 2010. – URL: <https://polit.ru/article/2010/03/02/kovalyov1/>.
3. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Аналитическое выражение ожидаемых значений капиталов при голосовании в стохастической среде* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №3. – С. 152–165.
4. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., ЛОГИНОВ А.К., ЦОДИКОВА Я.Ю. и др. *Анализ феноменов коллективизма и эгоизма в контексте общественного благосостояния* // Проблемы управления. – 2008. – №4. – С. 30–37.
5. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., МАКСИМОВ В.М. *Двухкомпонентное общество в модели ViSE: зависимость динамики от размера группы и порога голосования* // Управление большими системами. – 2021, – Вып. 93. – С. 51–88. – DOI: <https://doi.org/10.25728/ubs.2021.93.2>.
6. ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., МАЛЫШЕВ В.А., ЦОДИКОВА Я.Ю. и др. *Оптимальный порог голосования как функция коэффициента вариации среды* // Управление большими системами. – 2016. – Вып. 62. – С. 169–187.
7. ЧЕРНАВСКИЙ М.Ю. *К проблеме возникновения идеологий либерализма и консерватизма* // Гуманитарные науки: проблемы и решения. Вып. V. – СПб.: Нестор. – 2007. – С. 67–78.
8. AXELROD R. *The Evolution of Cooperation (Revised edition)*. – New York: Basic Books, 2006.
9. CAMERER C.F. *Behavioral Game Theory: Experiments in Strategic Interaction*. – Princeton University Press, 2011.
10. EPPLER D., RIORDAN M.H. *Cooperation and punishment under repeated majority voting* // Public Choice. – 1987. – Vol. 55, No. 1. – P. 41–73.
11. NOWAK M.A. *Five rules for the evolution of cooperation* // Science. – 2006. – Vol. 314, No. 5805. – P. 1560–1563.

COOPERATION AND LIBERALISM: EVOLUTIONARY SCENARIOS IN THE ViSE MODEL

Pavel Chebotarev, V.A. Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science (pavel4e@gmail.com).

Abstract: Under the assumptions of the ViSE model, we consider societies consisting of a group and egoists. Scenarios of the evolution of society due to changes in its structure and voting threshold in the interests of the participants are studied, provided that a Gaussian proposal generator is used. It is shown that for non-trivial societies there are scenarios that lead to the formation of an “open” group, whose size allows it to make monopoly decisions through voting. On the other hand, there are no trajectories traversed on the initiative of the participants from societies with a non-singleton group to societies consisting of egoists. A “mafia” type group never lets go of those who want to leave it. In societies whose decision procedure is close to the majority, the mechanism of “snowball” of cooperation is implemented, while in the most liberal and most conservative societies the mechanism of consecutive atomization dominates. “Open” and “democratic” groups admit cyclic evolutionary scenarios. In unfavorable environments, it is rational to strengthen conservatism.

Keywords: social dynamics, voting, cooperation, liberalism, stochastic environment, homines economici, voting threshold, evolutionary scenarios.

УДК 342.8

ББК 67.400.5

DOI: 10.25728/ubs.2021.94.4

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.Г. Чартишвили.

Поступила в редакцию 06.09.2021.

Опубликована 30.11.2021.

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЙ ШКАЛЫ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ В ПОРЯДКОВЫХ ШКАЛАХ С УЧЁТОМ ИХ ЭКСПЕРТНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Корнеенко В. П.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

При решении многокритериальных задач для корректного применения аддитивного интегрального механизма агрегирования возникает проблема преобразования исходных оценок объектов в порядковых шкалах измерения с учётом их экспертной вероятности в точечные оценки результирующей шкалы разности. Суть метода перехода от исходных оценок объектов в порядковых шкалах с учётом их экспертной вероятности вначале сводится к переходу оценок в балльной шкале к интервальным градациям разбиения промежуточной количественной шкалы. Затем с учётом субъективной вероятности осуществляется переход к точечной оценке на интервале разбиения результирующей шкалы разности. В статье доказано, что предлагаемый подход обеспечивает сохранение упорядочения объектов в исходной и результирующей шкалах. Идея метода показана на примере решения задачи многокритериальной оценки ценности информационно-аналитических материалов, исходные оценки которых представлены в балльных градациях и соответствующих им субъективной (экспертной) вероятности.

Ключевые слова: шкала измерения, экспертная вероятность, точечная результирующая шкала.

1. Введение

При решении прикладных задач многокритериального оценивания и выбора объектов в условиях неопределённостей, к которым можно отнести риски инвестиционных проектов, качество объектов научно-технических экспертиз, ценность информационно-аналитических материалов и др., не всегда возможно представить исходные оценки в виде точечных значений. Например, инвестиционный риск проекта «можно выразить количественно одним единственным способом: задав интервалы значений

¹ Виктор Павлович Корнеенко, к.т.н., доцент (vkor@ipr.ru).

неопределённостям, связанным с затратами и выгодами от решения» [10, с. 75]. Аналогично в медицине ряд оценочных и прогнозистических шкал часто задаются в виде интервалов [1].

Существуют различные методы учёта неопределённости в математических моделях объектов [4, 12, 16]. Одним из способов является представление оценок объектов в виде различных функций принадлежности к области значений показателя [4], при построении которых возникает ряд трудностей.

В случае неопределённости для возможных количественных значений показателей объектов в [12] предлагается экспертно задавать функцию доверия в рамках теории Демпстера – Шафера, что на практике затруднительно выполнить.

С другой стороны, например при оценке рисков, нарушается ранжирование между объектами с оценками в исходной шкале измерения и объектами с оценками с поправкой на вероятность получения ущерба.

Введём следующие обозначения: $A = \{a_q | q = \overline{1, n_A}\}$ – множество объектов риска; u_q – последствия (ущерб) риска, который обычно измеряется в денежных единицах; p_q – вероятность получения ущерба a_q объекта.

В качестве меры риска принимают математическое ожидание соответствующего ущерба, которое сводится к следующей формуле [5]:

$$(1) R_q = u_q \times p_q, q = \overline{1, n_A}.$$

Тогда, например, между объектами $a_s, a_q \in A$ с оценками ущерба в исходной шкале $u_s = 5$, $u_q = 4$ существует упорядочение в виде:

$$(2) a_s \succ a_q \Leftrightarrow u_s > u_q,$$

а с учётом экспертных вероятностей $p_s = 0,6$ и $p_q = 0,8$ от упорядочения (2) приходим к противоположному упорядочению объектов:

$$a_q \succ a_s \Leftrightarrow R_q > R_s,$$

где $R_q = 4 \cdot 0,8 = 3,2$; $R_s = 5 \cdot 0,6 = 3,0$.

Знак « \succ » в формуле (2) означает, что у a_s объекта риска ущерб $u_s = 5$ больше, чем ущерб $u_q = 4$ у объекта a_q .

В данной статье предлагается метод построения результирующей шкалы, при котором сохраняется ранжирования между объектами в исходных и результирующей шкале измерения.

2. Задача формирования обобщённых оценок объектов с многоуровневой структурой критериев

2.1. ПОСТРОЕНИЕ ДЕРЕВА КРИТЕРИЕВ

Задача многокритериальной оценки качества объектов (информационно-аналитических материалов) в организационных системах управления с многоуровневой структурой показателей относится к классу задач агрегирования, оценки объектов которых в исходных шкалах измерения [9] преобразованы в шкальные значения результирующей шкалы.

Для организационных систем управления понятие цели является многоуровневым – задаётся деревом целей, достижение которых обеспечивается иерархической организацией подсистем в систему. При этом предполагается, что достижение целей подсистем более низких уровней иерархии обеспечивает достижение глобальных целей всей системы. В результате оценка качества системы состоит из оценок качества её подсистем, т.е. и сам процесс оценивания и результат будут задаваться многоуровневыми структурами. Одной из проблем для объектов с иерархической структурой показателей в виде дерева является выбор способа перечисления вершин.

Для деревьев в основном применяются два способа перечисления – «по ветвям», когда индекс вершины указывает путь к этой вершине, и «по уровням», когда по очереди рассматриваются все уровни сверху вниз, а вершины одного уровня нумеруются подряд слева направо.

Способом перечисления «по ветвям» дерево задаётся в виде множества упорядоченных вершин [6, с. 584–587]:

$$(3) \quad ID = \{\mathfrak{F}, \mathcal{D}\},$$

где $\mathfrak{F} = \{F_0, F_{j_1}, \dots, F_{j_1 \dots j_k} \mid j_k = \overline{1, n_{j_1 \dots j_{k-1}}}; k = \overline{1, n}\}$ – множество вершин (критериев), в которых индекс $j_1 \dots j_k$ вершины $F_{j_1 \dots j_k}$ указывает путь к этой вершине от корневой вершины F_0 ($k = 0$);

$D = \{(F_{j_1 \dots j_{k-1}}, F_{j_1 \dots j_k}) \mid j_k = \overline{1, n_{j_1 \dots j_{k-1}}}; k = \overline{1, n}\}$ – множество дуг, в которых множество вершин $\{F_{j_1 \dots j_k}\}$, упорядоченных по убыванию важности, инцидентно вершине $F_{j_1 \dots j_{k-1}}$;

F_0 – глобальный (обобщённый) критерий верхнего (нулевого) уровня иерархии;

F_{j_1} – групповые критерии 1-го уровня иерархии, являющиеся концевыми вершинами множества дуг $\{(F_0, F_{j_1}) \mid j_1 = \overline{1, n_0}\}$;

n_0 – число дуг, инцидентных вершине F_0 ;

$F_{j_1 \dots j_k}$ – групповые критерии k -го уровня, являющиеся концевыми вершинами дуг $\{(F_{j_1 \dots j_{k-1}}, F_{j_1 \dots j_k}) \mid j_k = \overline{1, n_{j_1 \dots j_{k-1}}}\}$;

$n_{j_1 \dots j_{k-1}}$ – число дуг инцидентных вершине $F_{j_1 \dots j_{k-1}}$.

Концевые вершины n -го нижнего уровня условимся обозначать строчными буквами – $f_{j_1 \dots j_n}$.

2.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ ОБЪЕКТОВ

Постановку задачи сравнения объектов $a_k \in A$ по обобщённым оценкам с учётом многоуровневой структуры в виде иерархического дерева ID (3) критериев представим в виде нахождения упорядочения $a_{q_1} \succcurlyeq a_{q_2} \succcurlyeq \dots \succcurlyeq a_{q_{n_A}}$:

$$F_0(F_{j_1}(F_{j_1 j_2} \dots (F_{j_1 \dots j_{n-1}}(f_{j_1 \dots j_n}(A)))))) \rightarrow \max_{a_{q_1} \succcurlyeq \dots \succcurlyeq a_{q_{n_A}}}$$

где \max – направление упорядочения (ранжирования) объектов по убывающим значениям ценности.

При решения задач многокритериального оценивания и выбора объектов с многоуровневой структурой показателей в качестве методов агрегирования часто применяется аддитивная свёртка критериев с глобальными весами критериев [13, 15]:

$$(4) \ y_{\Sigma}^{(q)} = \sum_{j_1=1}^{n_0} \sum_{j_2=1}^{n_{j_1}} \dots \sum_{j_n=1}^{n_{j_1 j_2 \dots j_{n-1}}} \text{wg}(f_{j_1 j_2 \dots j_n}) \cdot y_{j_1 j_2 \dots j_n}^{(q)}$$

где $y_{j_1 j_2 \dots j_n}^{(q)}$ – точечная оценка $a_q \in A$ объекта в концевой вершине $f_{j_1 j_2 \dots j_n}$ дерева в результирующей шкале измерения;

$y_{\Sigma}^{(q)} = F_0(A)$ – обобщённая оценка объекта $a_q \in A$ по глобальному критерию верхнего (нулевого) уровня иерархии;

$\text{wg}_{j_1 j_2 \dots j_n} = \text{wg}(f_{j_1 j_2 \dots j_n})$ – глобальный количественный

(нормированный) вес конечного $f_{j_1 j_2 \dots j_n}$ критерия, который находится перемножением локальных весов по ветвям дерева от корневого F_0 критерия к конечному $f_{j_1 j_2 \dots j_n}$.

При этом возникает вопрос при каких условиях аддитивная свёртка корректна? Для корректного применения аддитивной свёртки необходимо, чтобы оценки объектов по конечным критериям иерархического дерева, измеренных в разнотипных шкалах, были преобразованы в результирующие однородные шкалы.

В [2] приведено определение однородности для непрерывных критериев по признаку совпадения максимальных и минимальных значений (соответственно и совпадения размахов). Однако этого условия недостаточно, если речь идёт о порядковых шкалах. Поэтому расширенное понятие однородной шкалы оценок объектов по критериям, представленным в однотипной шкале измерения по отношению к частным критериям, должно включать одинаковое число градаций (шкальных значений оценок объектов) и учитывать приращение между градациями.

3. Метод построения результирующей шкалы

3.1. ОЦЕНИВАНИЕ ОБЪЕКТОВ В ШКАЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛАХ

Один из подходов оценивания информационно-аналитических материалов стратегической разведки США в пятибалльной шкале с учётом степени достоверности (экспертной вероятности) был предложен в работе [8] в виде схемы Кента (рис. 1) при иллюстрации степени достоверности информации.

В таблице 1 представлено соответствие между градациями порядковой пятибалльной шкалы критерия (достоверности информации) и вероятностными шкальными интервалами степени достоверности информации в виде шансов за и шансов против схемы Кента.

При таком подходе устанавливается множественно-точечное соответствие между шкальными интервалами экспертной вероятности в 100-балльной шкале (в виде шансов за и против) и точечной оценкой достоверности информации в пятибалльной шкале. Однако, как показано в [16], эксперту проще представлять оценки

объектов в порядковой шкале с некоторой степенью субъективной вероятности.



Рис. 1. Схема Кента, иллюстрирующая степень достоверности информации. Составлено по [8, с. 249]

Таблица 1. Соответствия между градациями шкал схемы Кента

Балл	Вербальная шкала степени достоверности через понятия вероятности	Шкальные интервалы экспертной вероятности в 100-балльной шкале	
		Шансы за	Шансы против
1	Информация недостоверна	[1 ÷ 14]	[86 ÷ 99]
2	Информация вероятно недостоверна	[15 ÷ 39]	[61 ÷ 85]
3	Информация возможно достоверна	[40 ÷ 59]	[41 ÷ 60]
4	Информация вероятно достоверна	[60 ÷ 84]	[16 ÷ 40]
5	Информация достоверна	[85 ÷ 99]	[1 ÷ 15]

3.2. МОДЕЛЬ ПОСТРОЕНИЯ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЙ ШКАЛЫ

Для построения результирующей шкалы будем исходить из требования сохранения ранжирования между объектами в исходных и результирующих шкалах измерения с учётом их экспертной вероятности.

Введём обозначения:

$A = \{a_q | q = \overline{1, n_A}\}$ – множество оцениваемых объектов;

$\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_j, \dots, f_m\}$ – множество критериев (концевых вершин дерева), m – число критериев;

$B = [1, \dots, r, \dots, b]$ – исходная b -балльная порядковая шкала области определения оценок объектов;

$\mathcal{P} = [0, 1, \dots, 100]$ – расширенная 100-балльная порядковая шкала области определения экспертной (субъективной) вероятности (к 100-балльной шкале добавляется нулевой балл).

Промежуточную результирующую количественную шкалу измерения объектов для множества критериев \mathcal{F} представим в виде

$$(5) \quad Y = \langle y_{min}; y_{max}; b \rangle,$$

где y_{min} – минимальное значение результирующей промежуточной шкалы при измерении объектов $a_q \in A$; y_{max} – максимальное значение результирующей промежуточной шкалы при измерении объектов $a_q \in A$.

На практике субъективную вероятность можно рассматривать и в количественной шкале на отрезке $[0, 1]$. Исходные экспертные оценки с учётом степени уверенности экспертов представим в виде кортежа:

$$(6) \quad \langle r_j^{(q)}, p_{jr}^{(q)} \rangle,$$

где $r_j^{(q)} = f_j(a_q)$ – r -й балл $a_q \in A$ объекта по f_j критерию; $p_{jr}^{(q)} = P(r_j^{(q)})$ – субъективная вероятность того, что $a_q \in A$ объект оценён экспертом в r баллов по f_j критерию.

Чтобы при построении обобщённых оценок объектов критерии отвечали требованию однородности, т.е. имели общую шкалу, каждая градация которой отражает одинаковый уровень предпочтений для каждого объекта, необходимо от экспертных оценок с учётом степени уверенности экспертов $p_{jr}^{(q)}$ перейти

к результирующей количественной промежуточной шкале разности Y (5). Это связано с тем, что объекты в порядковой шкале могут быть сравнимы только в шкале разности, т.е. объект a_s предпочтительнее объекта a_q на $\Delta r = r_j^{(s)} - r_j^{(q)}$ баллов, если справедливо неравенство $r_j^{(s)} > r_j^{(q)}$.

Преобразование

$$\mathcal{A}: \langle r_j^{(q)}, p_{jr}^{(q)} \rangle \rightarrow y_{jr}^{(q)}$$

исходных оценок в виде кортежа (6) к точечным оценкам $y_{jr}^{(q)}$ с учётом экспертной вероятности $p_{jr}^{(q)} \in \mathcal{P}$ в результирующей количественной шкале разности представим в виде сложного отображения $\mathcal{A} = Y \circ \mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}: r_j^{(q)} \rightarrow Y_{jr}^{(q)} \Rightarrow Y: Y_{jr}^{(q)} \times p_{jr}^{(q)} \rightarrow y_{jr}^{(q)},$$

где \mathcal{C} – точно-множественное отображение исходных $r_j^{(q)} \in \mathcal{B}$ оценок в порядковой шкале в интервальные градации промежуточной шкалы $Y_{jr}^{(q)} = Y(r_j^{(q)}) \in Y$ (5); Y – отображение декартового произведения $Y_{jr}^{(q)} \times p_{jr}^{(q)}$ промежуточной шкалы и экспертной вероятности в точечную оценку $y_{jr}^{(q)} \in Y_r \subset Y$ результирующей количественной шкалы разности.

При этом промежуточная шкала разности Y (5) разбивается на непересекающиеся отрезки $Y_r = [y_{r-1}, y_r]$, $r = 1, 2, \dots, b$.

3.3. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ОЦЕНОК

Пусть исходные оценки объектов с учётом степени уверенности экспертов представлены в виде кортежа (6). Алгоритм метода сводится к следующим шагам.

Шаг 1. Переход от исходных градаций порядковой (балльной) шкалы к интервальным шкальным градациям в промежуточной количественной шкале. В начале количественная промежуточная шкала разбивается на b отрезков совокупностью точек

$$(7) \quad y_0 < y_1 < \dots < y_r < \dots < y_b,$$

где $y_0 = y_{\min}$, $y_b = y_{\max}$, $r = \overline{1, b}$.

Соответствие между балльными градациями $r \in \mathcal{B}$ и интер-

вальными шкальными значениями $Y_r = [y_{r-1}, y_r]$, $r = \overline{1, b}$, промежуточной шкалы $Y = \{Y_r \mid r = \overline{1, b}\}$ задаётся отображением

$$(8) \quad i: r \rightarrow Y_r = [y_{r-1}, y_r], \forall r = \overline{1, b}.$$

В случае равномерного разбиения с шагом $h = \frac{\Delta Y}{b} = \frac{y_b - y_0}{b}$ отображение (8) можно представить в виде точечно-множественного отображения

$$i: r \rightarrow [y_0 + (r - 1)h, y_0 + rh],$$

где $y_{r-1} = y_0 + (r - 1)h$, $y_r = y_0 + rh$; $h = y_r - y_{r-1}$, $\forall r = \overline{1, b}$.

Шаг 2. Переход от оценок объектов в интервальных градациях Y_r промежуточной шкалы к точечным $y_{jr}^{(q)}$ в результирующей количественной шкале разности с учётом экспертной вероятности и принимающих значения на отрезках $[y_{r-1}, y_r]$ разбиения (7). Будем предполагать, что субъективная вероятность $p_{jr}^{(q)}$ численно совпадает с вероятностью того, что непрерывная случайная величина Y примет значение меньше, чем значение точечной оценки $y_{jr}^{(q)}$ из полуинтервала $[y_{r-1}, y_{jr}^{(q)}) \subset Y_r$:

$$p_{jr}^{(q)} = P(y_{r-1} \leq Y < y_{jr}^{(q)}).$$

Зная плотность распределения $\varphi(y)$ случайной величины Y , точечную оценку $y_{jr}^{(q)}$ можно рассматривать как переменную функции в виде интеграла с переменным верхним пределом:

$$(9) \quad p_{jr}^{(q)}(y_{jr}^{(q)}) = \int_{y_{r-1}}^{y_{jr}^{(q)}} \varphi(y) dy.$$

Пусть, например, функция распределения $F(y) = P(Y < y)$ случайной величины Y линейна на отрезках разбиения (7):

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y \leq y_{r-1}; \\ \frac{y - y_{r-1}}{y_r - y_{r-1}}, & y_{r-1} < y \leq y_r; \\ 1, & y > y_r. \end{cases}$$

График равномерного распределения случайной величины Y представлен на рис. 2.

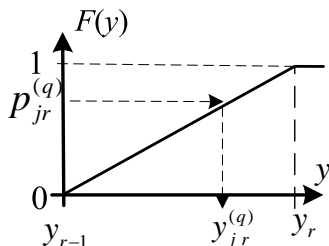


Рис. 2. График равномерного распределения

Тогда плотность распределения на отрезке $Y_r = [y_{r-1}, y_r]$ разбиения (7) постоянна, т.е.

$$(10) \varphi(y) = \begin{cases} \frac{1}{y_r - y_{r-1}}, & y_{r-1} < y \leq y_r; \\ 0, & y \notin [y_{r-1}, y_r]. \end{cases}$$

Подставив $\varphi(y)$ (10) в $p_{jr}^r(y_{jr}^{(q)})$ (9), получим:

$$p_{jr}^{(q)}(y_{jr}^{(q)}) = \frac{1}{y_r - y_{r-1}} (y_{jr}^{(q)} - y_{r-1}),$$

откуда значение точечной оценки $y_{jr}^{(q)} \in [y_{r-1}, y_r]$ находим по формуле

$$(11) y_{jr}^{(q)} = y_{r-1} + (y_r - y_{r-1}) \times p_{jr}^{(q)}, \quad \forall p_{jr}^{(q)} \in [0, 1], \quad r = \overline{1, b}.$$

Если субъективная вероятность принимает значения в расширенной 100-балльной шкале, то точечные оценки на сегменте $Y_r = [y_{r-1}, y_r]$ с учётом степени уверенности экспертов вычисляются по формулам:

$$(12) y_{jr}^{(q)} = y_{r-1} + \frac{y_r - y_{r-1}}{100} \times p_{jr}^{(q)}.$$

Данный метод обладает следующими свойствами, которые докажем для равномерного распределения с плотностью $\varphi(y)$ (10) в виде теоремы.

Теорема 1 (о сохранении упорядочения объектов в исходных и результирующих шкалах). Пусть переход от исходных балльных оценок $r_j^{(q)} \in B$ объектов с учётом экспертной вероятности $p_{jr}^{(q)}$ к точечным оценкам $y_{jr}^{(q)} \in Y$ в результирующей шкале Y (5) выполнен в соответствии с линейным отображением (11).

Тогда в исходной и результирующей шкале сохраняется упорядочение объектов, т.е. для любых $a_s, a_q \in A$ объектов с прямым порядком предпочтения из соотношения

$$(13) a_s > a_q \Leftrightarrow r_j^{(s)} > d_j^{(q)}, \forall r, d \in B$$

следует соотношение

$$(14) y_{jr}^{(s)} > y_{jd}^{(q)} \Leftrightarrow a_s > a_q,$$

а для равноважных объектов в порядковой исходной шкале объекты в результирующей шкале упорядочиваются в соответствии с величинами экспертной вероятности, т.е. для любых $a_s, a_q \in A$ объектов из соотношения

$$(15) a_s \approx a_q \Leftrightarrow r_j^{(s)} = r_j^{(q)} \wedge p_{jr}^{(s)} > p_{jr}^{(q)}$$

следует соотношение в результирующей шкале

$$(16) y_{jr}^{(s)} > y_{jr}^{(q)} \Rightarrow a_s > a_q.$$

Доказательство. Пусть справедливо соотношение (13), где $r_j^{(s)} = r \in B$, $d_j^{(q)} = d \in B$ и $r > d$, то тогда для точек разбиения (7) справедливо неравенство $y_r > y_d$.

Поскольку $y_{jd}^{(q)} \in [y_{d-1}, y_d]$, $y_{jr}^{(s)} \in [y_{r-1}, y_r]$, то отсюда следует (14): $y_{jr}^{(s)} > y_{jd}^{(q)} \Leftrightarrow a_s > a_q$.

Из (15) следует, что если оценкам $r_j^{(s)}$, $r_j^{(q)}$ для равноважных объектов $a_s \approx a_q$ в порядковой шкале соответствует интервальная градация $Y_r = [y_{r-1}, y_r]$, то точечные оценки будут принимать значения на отрезке $Y_r = [y_{r-1}, y_r]$, т.е.

$$y_{jr}^{(s)}, y_{jr}^{(q)} \in Y_r = [y_{r-1}, y_r].$$

Поскольку справедливо неравенство $p_{jr}^{(s)} > p_{jr}^{(q)}$, то справедливо (16), т.е. $y_{jr}^{(s)} > y_{jr}^{(q)} \Rightarrow a_s > a_q$. Теорема 1 доказана. ■

4. Связь между интервальными и точечными оценками объектов

Исходим из того, что при стремлении экспертной вероятности к значению 100 (%) точечная оценка $y_{jr}^{(q)}$ стремится к правой

крайней точке шкального интервала $Y_r = [y_{r-1}, y_r]$ и при экспертной вероятности равной 100 (%) она совпадёт с правым концом y_r , т.е. $y_{jr}^{(q)} = y_r$. В этом случае наряду с точечной оценкой $y_{jr}^{(q)}$ введём в рассмотрение интервальную оценку $\vec{y}_{jr}^{(q)}$ объекта a_q по критерию f_j , за которую примем сегмент $\vec{y}_{jr}^{(q)} = [y_{jr}^{(q)}, y_r]$ отрезка Y_r результирующей шкалы. Данной интервальной оценке можно поставить в соответствие вероятность неуверенности эксперта:

$$(17) \bar{p}_{jr}^{(q)} = 1 - p_{jr}^{(q)} = \int_{y_{jr}^{(q)}}^{y_r} \varphi(y) dy.$$

В качестве примера вычислим вероятность неуверенности эксперта $\bar{p}_{jr}^{(q)}$ (17) для равномерного и треугольного законов распределения [3]. При равномерном законе распределения вероятность неуверенности эксперта определяется по формуле

$$\bar{p}_{jr}^{(q)} = \frac{y_r - p_{jr}^{(q)}}{y_r - y_{r-1}}$$

и численно совпадает с площадью прямоугольника, как показано на рис. 3а на графике плотности $\varphi(y)$ (10) равномерного распределения.

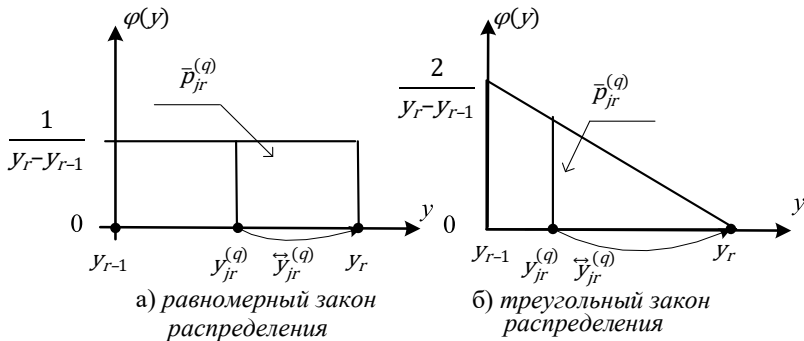


Рис. 3. Соответствие между точечными и интервальными оценками

Для треугольного закона распределения с плотностью

$$(18) \varphi(y) = \begin{cases} \frac{2(y_r - y)}{(y_r - y_{r-1})^2}, & y \in (y_{r-1}, y_r]; \\ 0, & y \notin (y_{r-1}, y_r] \end{cases}$$

вероятность неуверенности эксперта определяется по формуле

$$\bar{p}_{jr}^{(q)} = \left(\frac{y_r - p_{jr}^{(q)}}{y_r - y_{r-1}} \right)^2.$$

и численно совпадает с площадью прямоугольного треугольника, как показано на рис. 3б на графике плотности $\varphi(y)$ (18).

5. Пример решения задачи многокритериального оценивания информационных материалов

Задача оценки информационно-аналитических материалов стоит не только перед разведывательными подразделениями различных стран, но и является одной из важнейших задач коммерческих компаний при ведении конкурентной разведки [11].

Рассмотрим пример решения задачи многокритериального оценивания информационных материалов на модельных данных.

5.1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Исходные оценки в пятибалльной шкале для семи информационно-аналитических материалов по пяти критериям с учётом степени уверенности экспертов представим в таблице 2.

Таблица 2. Оценки объектов в пятибалльной шкале с экспертной вероятностью в 100-балльной шкале

A	Критерии				
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
a_1	$\langle 3, 60 \rangle$	$\langle 2, 35 \rangle$	$\langle 5, 85 \rangle$	$\langle 4, 45 \rangle$	$\langle 1, 35 \rangle$
a_2	$\langle 4, 70 \rangle$	$\langle 3, 50 \rangle$	$\langle 2, 70 \rangle$	$\langle 4, 70 \rangle$	$\langle 4, 50 \rangle$
a_3	$\langle 5, 45 \rangle$	$\langle 2, 45 \rangle$	$\langle 3, 40 \rangle$	$\langle 4, 70 \rangle$	$\langle 5, 80 \rangle$
a_4	$\langle 4, 90 \rangle$	$\langle 4, 90 \rangle$	$\langle 4, 90 \rangle$	$\langle 3, 90 \rangle$	$\langle 3, 90 \rangle$
a_5	$\langle 2, 50 \rangle$	$\langle 3, 50 \rangle$	$\langle 2, 50 \rangle$	$\langle 3, 70 \rangle$	$\langle 4, 70 \rangle$
a_6	$\langle 4, 75 \rangle$	$\langle 4, 65 \rangle$	$\langle 4, 70 \rangle$	$\langle 4, 65 \rangle$	$\langle 4, 75 \rangle$
a_7	$\langle 1, 60 \rangle$	$\langle 2, 40 \rangle$	$\langle 3, 55 \rangle$	$\langle 3, 60 \rangle$	$\langle 3, 80 \rangle$

В качестве конечных критериев представлены: f_1 – актуальность информационных материалов; f_2 – достоверность информационных материалов; f_3 – структурность информационных материалов; f_4 – полнота (содержательность) информационных материалов; f_5 – наглядность информационных материалов.

5.2. ИЕРАРХИЧЕСКОЕ ДЕРЕВО КРИТЕРИЕВ ОЦЕНКИ

В качестве примера на рис. 4 представлена многоуровневая структура критериев информационно-аналитических материалов в виде трёхуровневого иерархического дерева способом перечисления «по ветвям». Для представленного на рисунке дерева приняты следующие обозначения: F_0 – обобщённый критерий ценности материалов; F_1 – группа показателей полезности материалов, характеризующих актуальность сведений – f_{11} , достоверность – f_{12} ; F_2 – группа критериев построения формы материалов, характеризующих структурность материала – f_{21} , полноту (уровень раскрытия темы) – f_{22} , наглядность материала – f_{23} .

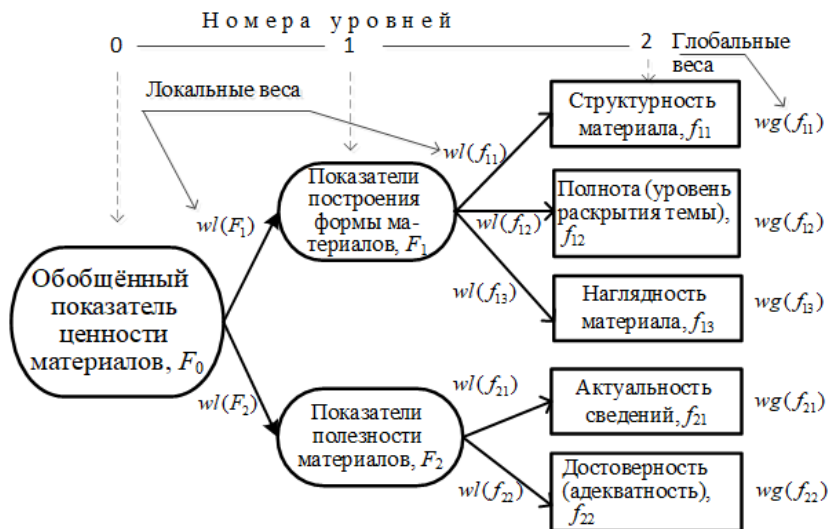


Рис. 4. Иерархическое дерево критериев ценности материалов

5.3. ЭКСПЕРТНАЯ ОЦЕНКА ВЕСОВ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ

Для вычисления локальных весов (коэффициентов) критериев иерархического дерева обычно используются экспертные методы оценки и ранжирования объектов. Прямые методы экспертного оценивания весов критериев нашли применение в методике планирования посредством относительных показателей технической оценки (ПАТТЕРН), в которой экспертам предлагается оценить в количественной шкале нормированные локальные веса критериев на каждом уровне иерархии, а затем глобальные веса находятся перемножением локальных весов по ветвям многоуровневого дерева критериев [15].

Другим экспертным подходом на основе матрицы парных сравнений к назначению «весов» конечному набору сравниваемых объектов является оптимизационный метод аппроксимационной матрицы формирования весов объектов в многокритериальных задачах выбора [7], который по эффективности превосходит метод анализа иерархий (the Analytic Hierarchy Process, АНР – сокращенно МАИ) Т. Саати [14].

Пусть экспертными методами сформированы следующие количественные локальные веса критериев, а именно:

а) локальные веса групповых критериев:

$$F_0: wl(F_1) = 0,6; wl(F_2) = 0,4;$$

б) локальные веса конечных критериев:

$$F_1: wl(f_{11}) = 0,5; wl(f_{12}) = 0,3; wl(f_{13}) = 0,2;$$

$$F_2: wl(f_{21}) = 0,5; wl(f_{22}) = 0,5.$$

Глобальные веса конечных критериев находим произведением локальных «весов» вершин, лежащих на пути от корневой вершины F_0 к произвольной конечной вершине:

$$wg(f_{11}) = wl(F_1) \times wl(f_{11}) = 0,6 \times 0,5 = 0,30;$$

$$wg(f_{12}) = wl(F_1) \times wl(f_{12}) = 0,6 \times 0,3 = 0,18;$$

$$wg(f_{13}) = wl(F_1) \times wl(f_{13}) = 0,6 \times 0,2 = 0,12;$$

$$wg(f_{21}) = wl(F_2) \times wl(f_{21}) = 0,4 \times 0,5 = 0,20;$$

$$wg(f_{22}) = wl(F_2) \times wl(f_{22}) = 0,4 \times 0,5 = 0,20.$$

Легко убедиться, что сумма глобальных весов равна единице.

5.4. ПЕРЕХОД ОТ БАЛЛЬНЫХ ГРАДАЦИЙ К ИНТЕРВАЛЬНЫМ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ШКАЛЫ

В качестве промежуточной шкалы рассмотрим количественную шкалу

$$Y = \langle y_{min}, y_{max}; b; \leq \rangle,$$

где $y_{min} = 0$, $y_{max} = 100$; $b = 5$ – количество интервальных градаций.

Количественная шкала разбивается на 5 градаций в виде отрезков $Y_r = [y_{r-1}, y_r]$, $r = 1 \div 5$, точками с равномерным шагом дискретизации $h = \frac{100-0}{5} = 20$. Правило перехода к градациям промежуточной шкалы с учётом того, что $y_{min} = 0$, можно представить в виде

$$i: r \rightarrow [20 \times (r - 1), 20 \times r], \quad r = 1, 2, 3, 4, 5.$$

В результате имеем соответствие между балльными и интервальными градациями шкал:

$$1 \leftrightarrow Y_1 = [0, 20]; \quad 2 \leftrightarrow Y_1 = [20, 40]; \quad 3 \leftrightarrow Y_1 = [40, 60];$$

$$4 \leftrightarrow Y_1 = [60, 80]; \quad 5 \leftrightarrow Y_1 = [80, 100].$$

Соответствия между градациями порядковых шкал критериев с прямым порядком предпочтения для шкальных интервальных градаций промежуточной шкалы представлено в таблице 3.

Таблица 3. Соответствия между градациями шкал

Балльная шкала	Вербальная шкала	Промежуточная шкала [0, 100], $h = 20$	Промежуточная шкала [0, 10], $h = 2$
1 балл	Очень низкая	[0, 20]	[0, 2]
2 балла	Низкая	[20, 40]	[2, 4]
3 балла	Средняя	[40, 60]	[4, 6]
4 балла	Хорошая	[60, 80]	[6, 8]
5 баллов	Высокая	[80, 100]	[8, 10]

5.5. ПЕРЕХОД К ТОЧЕЧНЫМ ОЦЕНКАМ С УЧЁТОМ ЭКСПЕРТНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Значение точечной оценки $y_{jr}^{(q)} \in [y_{r-1}, y_r]$ находим по формуле (12):

$$y_{jr}^{(q)} = y_{r-1} + \frac{y_r - y_{r-1}}{100} \times p_{jr}^{(q)} = y_{r-1} + \frac{20}{100} \times p_{jr}^{(l)}, \quad r = 1 \div 5,$$

где $y_0 = 0$, $y_1 = 20$, $y_3 = 40$, $y_4 = 60$, $y_4 = 80$, $y_5 = 100$.

Точечные оценки представлены в таблице 4. Легко видеть, что если эксперт оценивает объекты с большим значением вероятности, то точечная оценка смещается к правому концу соответствующего отрезка $Y_r = [20(r - 1), 20r]$, а если меньшим значением вероятности, то точечная оценка смещается к левому концу соответствующего отрезка.

Таблица 4. Оценки объектов в пятибалльной и результирующей количественной шкале

A	F_1						F_2			
	$f_1 \equiv f_{11}$		$f_2 \equiv f_{12}$		$f_3 \equiv f_{13}$		$f_4 \equiv f_{21}$		$f_5 \equiv f_{22}$	
	$r_1^{(l)}$	$y_{1r}^{(l)}$	$r_2^{(l)}$	$y_{2r}^{(l)}$	$r_3^{(l)}$	$y_{3r}^{(l)}$	$r_4^{(l)}$	$y_{4r}^{(l)}$	$r_5^{(l)}$	$y_{5r}^{(l)}$
a_1	3	52	2	27	5	97	4	69	1	7
a_2	4	74	3	50	2	34	4	74	2	70
a_3	5	89	2	29	3	48	4	74	5	96
a_4	4	78	4	78	4	78	3	58	3	58
a_5	2	30	3	50	2	30	3	54	4	74
a_6	4	75	4	73	4	74	4	73	4	75
a_7	1	12	2	28	3	51	3	52	3	56

На рис. 5 показан переход к точечной оценке с учётом степени уверенности эксперта по f_1 критерию от исходных экспертных оценок в порядковой пятибалльной шкале.

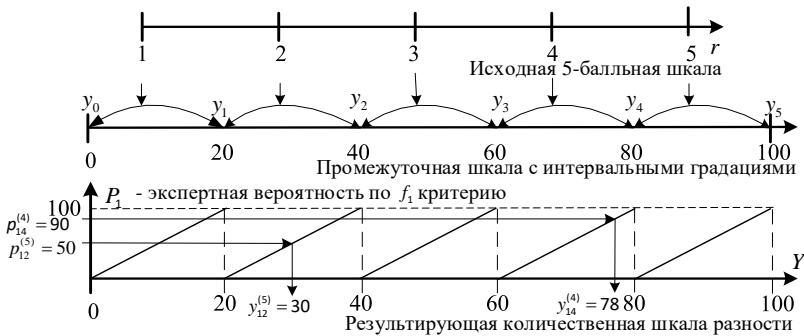


Рис. 5. Переход к точечной оценке с учётом уверенности экспертов

В соответствии с теоремой 1, например для критерия $f_1 \equiv f_{11}$ – актуальность сведений, имеем упорядочения:

а) без учёта экспертной вероятности в пятибалльной шкале:

$$a_3 > \{a_2 \approx a_4 \approx a_6\} > a_1 > a_5 > a_7;$$

б) с учётом экспертной вероятности в результирующей шкале:

$$a_3 > a_4 > a_6 > a_2 > a_1 > a_5 > a_7.$$

В этом случае для равноважных объектов a_2, a_4, a_6 с балльной оценкой $r_1^{(2)} = r_1^{(4)} = r_1^{(6)} = 4$ с учётом их экспертной вероятности имеем упорядочение: $a_4 > a_6 > a_2 \Leftrightarrow 90 > 75 > 70$.

5.6. ФОРМИРОВАНИЕ ОБОБЩЁННЫХ ОЦЕНОК ОБЪЕКТОВ

Обобщённые оценки определим по данным таблицы 3 по конечным критериям с учётом нормированных весов их важности. Результаты вычисления по аддитивной свёртке критериев $y_{\Sigma}^{(q)}$ (4) представлены в столбце 7 таблицы 5, которые затем преобразованы в оценки $r_{\Sigma}^{(q)}$ 100-балльной шкалы (см. столбец 8).

Таблица 5. Результаты вычислений относительно эталонных объектов a_{min}, a_{max}

a_q	Оценки объектов с учётом весов критериев					Обобщённые оценки	
	$y_1^{(q)}$	$y_2^{(q)}$	$y_3^{(q)}$	$y_4^{(q)}$	$y_5^{(q)}$	$y_{\Sigma}^{(q)}$	$r_{\Sigma}^{(q)}$
a_1	26,0	8,1	19,4	44,5	3,5	101,5	40
a_2	37,0	15,0	6,8	37,0	35,0	130,8	63
a_3	44,5	8,7	9,6	37,0	48,0	147,8	76
a_4	39,0	23,4	15,6	29,0	29,0	136,0	67
a_5	15,0	15,0	6,0	27,0	37,0	100,0	39
a_6	37,5	21,9	14,8	36,5	37,5	148,2	76
a_7	6,0	8,4	10,2	26,0	28,0	78,6	23
a_{min}	6,0	8,1	6,0	26,0	3,5	49,6	1
a_{max}	44,5	23,4	19,4	44,5	48,0	179,8	100

Ранжирование объектов по обобщённым оценкам можно представить в виде

$$\{a_3 \approx a_6\} > a_4 > a_2 > a_1 > a_5 > a_7.$$

Сравнение объектов по предпочтительности в 100-балльной шкале наглядно представлено на рис. 6.

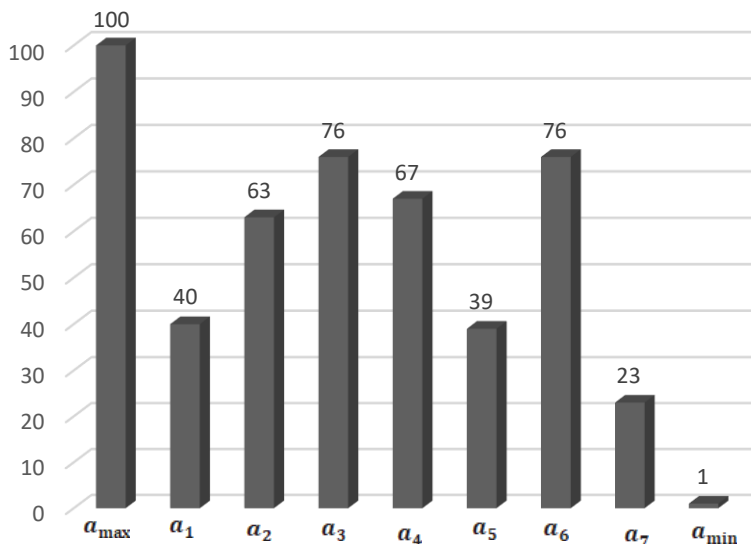


Рис. 6. Сравнение объектов в результирующей шкале

6. Заключение

Рассмотренный метод построения результирующей шкалы предназначен для прикладных задач, в которых возникает проблема преобразования исходных оценок объектов, представленных в виде кортежа, в точечные оценки результирующей шкалы.

Преимуществом данного метода является сохранение упорядочения между объектами в исходной и результирующей шкале измерения, а для равнозначных объектов в порядковой исходной шкале объекты в результирующей шкале упорядочиваются в соответствии с величинами экспертной вероятности.

Таким образом, в данной статье решена проблема перехода к точечным оценкам объектов, исходные оценки которых представлены с учётом их экспертной вероятности

Литература

1. АЛЕКСАНДРОВИЧ Ю.С., ГОРДЕЕВ В.И. *Оценочные и прогностические шкалы в медицине критических состояний.* – С.-Пб.: Изд-во «Сотис», 2007. – 140 с.
2. ВАСИН А.А., КРАСНОЩЕКОВ П.С., МОРОЗОВ В.В. *Исследование операций.* – М.: Академия, 2008. – 170 с.
3. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С. *Теория вероятностей.* – М.: Академия, 2003. – 576 с.
4. ЗАДЕ Л.А. *Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений.* – М.: Мир, 1976. – 123 с.
5. КАРТВЕЛИШВИЛИ В.М., СВИРИДОВА О.А. *Риск-менеджмент. Методы оценки риска.* – М.: Изд-во РЭУ им. Г.В. Плеханова, 2017. – 120 с.
6. КОРНЕЕНКО В.П. *Методы оптимизации.* – М.: Высш. шк., 2007. – 664 с.
7. КОРНЕЕНКО В.П. *Метод аппроксимационной матрицы формирования весов объектов в многокритериальных задачах выбора // Вестник кибернетики.* – 2021. – №1(41). – С. 51–62.
8. ПЛЭТТ В. *Информационная работа стратегической разведки. Основные принципы.* – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – 342 с.
9. ПФАНЦАГЛЬ И. *Теория измерений.* – М.: Мир, 1976. – 247 с.
10. ХАББАРД Д.У. *Как измерить всё, что угодно. Оценка стоимости нематериального в бизнесе.* – М.: ЗАО «Олимп – бизнес», 2009. – 320 с.
11. ЮЩУК Е.Л., ПЕТРЯШОВ Д.В., КУЗИН А.В. и др. *Конкурентная разведка.* – Е.: Урал. гос. экон. ун-т., 2015. – Ч. 1. – 210 с.
12. BEYNON M., CURRY B., MORGAN P. *The Dempster-Shafer theory of evidence: an alternative approach to multicriteria decision modeling // Int. Journal Omega.* – 2000. – Vol. 28. – P. 37–50.
13. FIGUEIRA J., GRECO S., EHNGOTT M. *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys multiple criteria decision analysis: state of the art surveys.* – Springer, 2005. – 1048 p.
14. SAATY T.L. *Axiomatic foundation of the Analytic Hierarchy*

Process // Management Scienc. – 1986. – Vol. 32, No. 7. – P. 841–855.

15. SIGFORD S.V., PARVIN R.H. *Project PATTERN a methodology for delernining relevance in complex decision-making // IEEE Trans.* – 1965. – Vol. 12, No. 1. – P. 9–13.
16. YAZDIA M., HAFEZIB P., ABBASSIC R. *A methodology for enhancing the reliability of expert system applications in probabilistic risk assessment // Journal of Loss Prevention in the Process Industries.* – 2019. – Vol. 58: – P. 51–59.

METHOD FOR CONSTRUCTING THE RESULTS SCALE FOR OBJECTS IN ORDERAL SCALES TAKING INTO ACCOUNT THEIR EXPERT PROBABILITY

Viktor Korneenko, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Senior Researcher, Ph.D (vkorn@ipu.ru).

Abstract: When solving multi-criteria problems for the correct application of the additive integral aggregation mechanism, the problem arises of converting the initial estimates of objects in ordinal measurement scales, taking into account their expert probability, into point estimates of the resulting difference scale. The essence of the method of transition from the initial estimates of objects in ordinal scales, taking into account their expert probability, initially reduces to the transition of estimates in the point scale to interval gradations of the division of the intermediate quantitative scale. Then, taking into account the subjective probability, a transition is made to a point estimate on the interval of splitting the resulting difference scale. The article proves that the proposed approach ensures the preservation of the ordering of objects in the initial and resulting scales. The idea of the method is shown by the example of solving the problem of multi-criteria evaluation of the value of information and analytical materials, the initial estimates of which are presented in point gradations and the corresponding subjective (expert) probability.

Keywords: measurement scale, resulting scale, expert probability.

УДК 519.8

ББК 22.18

DOI: 10.25728/ubs.2021.94.5

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Э.Ю. Калимулиной.

Поступила в редакцию 06.07.2021.

Опубликована 30.11.2021.