

## ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ MPC ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ ДУХКОЛЕСНОГО РОБОТА-БАЛАНСИРА

Ткаченко А. А.<sup>1</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В. А. Трапезникова РАН, Москва)

*Целью данной работы является решение задачи проектирования системы управления на основе Model Predictive Control (MPC) для линейной Multiple Input Multiple Output (МИМО)-системы двухколесного робота-балансира. В наши дни данные роботы стали популярными проектами многих крупных компаний. В их числе одна из самых известных компаний, занимающаяся разработкой человекоподобных роботов, – Boston Dynamics. Но идея создания подобного типа роботов не обошла стороной и инженеров-любителей со всего мира, которые стали разрабатывать двухколесных балансирующих роботов для использования в качестве офисных помощников, средств передвижения и просто ради академического интереса. В работе рассмотрен процесс построения математической модели механической системы робота, а также выполнена линеаризация полученной модели. Представлены основные принципы построения системы управления на основе MPC для линейных систем без внешних возмущений, а также с использованием наблюдателя для оценки состояний модели при влиянии аддитивных белых гауссовских шумов. Приведен пример реализации данного алгоритма управления в среде Matlab Simulink для случая МИМО-системы, в качестве которой выступает модель двухколесного робота.*

Ключевые слова: модель управления с прогнозированием, система управления, робот-балансира, математическая модель.

### 1. Введение

Управление с прогнозированием (MPC) – это усовершенствованный метод управления процессами, который используется при соблюдении набора ограничений. С инженерной точки зрения, MPC-метод проектирования систем управления является привлекательным по нескольким причинам. Во-первых, данный метод позволяет накладывать и обрабатывать как «мягкие» ограничения, так и более «жесткие» для многомерных систем

---

<sup>1</sup> Андрей Александрович Ткаченко, математик (tkachenko\_aa10@mail.ru).

управления. Это особенно необходимо на промышленных объектах, где неизбежно присутствуют различного рода ограничения для технологических процессов.

Во-вторых, с развитием и увеличением вычислительных способностей как ЭВМ, так и различных микроконтроллеров появилась возможность выполнять оптимизацию процессов в режиме реального времени.

Третьим аспектом привлекательности MPC является сравнительная простота проектирования структуры системы управления при решении сложных производственных задач.

MPC-метод схож с классическим синтезом системы управления на основе линейно-квадратичного регулятора (LQR). Ключевое различие между MPC и LQR заключается в том, что управление с прогнозированием решает задачу оптимизации в пределах скользящего временного горизонта, в то время как линейно-квадратичный метод использует для решения той же задачи фиксированное временное окно.

Целью работы является синтез системы управления для двухколесного робота-балансира, а также моделирование поведения робота в среде Matlab Simulink для дальнейшего тестирования алгоритма управления на реальной физической модели.

## **2. Математическая модель робота**

Для описания динамики движения робота-балансира в пространстве необходимо вывести математическую модель. В качестве обобщенных координат возьмем координату положения центра колеса  $x$  и угол отклонения робота от вертикали  $\varphi$ . Выражения, которые связывают их с декартовыми координатами центра масс «тела» робота  $(x_{cm}, y_{cm})$  и центра масс колес  $(x, y)$ , имеют следующий вид:

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= x^{(0)} + r\theta, \\ y &= r, \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} x_{cm} &= x + l \sin \varphi, \\ y_{cm} &= y + l \cos \varphi, \end{aligned}$$

где  $x^{(0)}$  – значение координаты  $x$  в начальный момент времени;  $r$  – радиус колеса,  $l$  – длина отрезка  $WB$ ,  $\theta$  – угол поворота колес.

На данном этапе предполагается, что робот способен совершать два типа движения: поступательное вдоль оси  $x$  и вращательное вокруг оси колеса.

Применяя второй закон Ньютона для поступательного и вращательного движения [1] к «телу» робота, получим уравнения

$$(3) \quad \begin{aligned} m_b \ddot{x}_{cm} &= 2N_x, \\ m_b \ddot{y}_{cm} &= 2N_y - m_b g, \\ J_b \ddot{\varphi} &= 2N_y l \sin \varphi - 2N_x l \cos \varphi - 2M, \end{aligned}$$

где  $m_b$  – масса «тела»;  $J_b$  – момент инерции «тела» относительно центра масс колеса;  $N_x$ ,  $N_y$  – реакции связей, действующих между колесом и «телом» в проекции на оси координат;  $M$  – момент, создаваемый вращением вала мотора.

Принимая во внимания (2), получим

$$(4) \quad \begin{aligned} m_b (\ddot{x} + \ddot{\varphi} l \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 l \sin \varphi) &= 2N_x, \\ m_b (-\ddot{\varphi} l \sin \varphi - \dot{\varphi}^2 l \cos \varphi) &= 2N_y - m_b g, \\ J_b \ddot{\varphi} &= 2N_y l \sin \varphi - 2N_x l \cos \varphi - 2M. \end{aligned}$$

Теперь сделаем аналогичные действия для колеса робота.

Имеем

$$(5) \quad \begin{aligned} m_w \ddot{x} &= F_{fr} - N_x, \\ J_w \ddot{\theta} &= M - F_{fr} r, \end{aligned}$$

где  $m_w$  – масса одного колеса;  $J_w$  – моменты инерции колеса;  $N_x$ ,  $N_y$  – реакции связей, действующих между колесом и «телом» в проекции на оси координат;  $M$  – момент, создаваемый вращением вала мотора;  $F_{fr}$  – сила трения, действующая на колеса.

Далее, производя поэтапное выражение необходимых компонент и поочередно подставляя их в соответствующие выражения, получим систему, являющуюся математической моделью рассматриваемого робота.

Полагая, что при малых значениях  $\varphi$  имеют место равенства

$$(6) \quad \sin \varphi \approx \varphi, \quad \cos \varphi \approx 1, \quad \dot{\varphi} \approx 0,$$

запишем систему следующим образом:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = \frac{-\frac{(m_b l)^2 g \varphi}{J_b + m_b l^2} + \left(\frac{2}{r} + \frac{2m_b l}{J_b + m_b l^2}\right) M}{m_b + 2\left(\frac{1}{r^2} J_w + m_w\right) - \frac{(m_b l)^2}{J_b + m_b l^2}}, \\ \ddot{\varphi} = \frac{m_b g l \varphi - \left(\frac{2m_b l}{m_b r + 2\left(\frac{1}{r} J_w + m_w r\right)} + 2\right) M}{J_b + m_b l^2 - \frac{(m_b l)^2}{m_b + 2\left(\frac{1}{r^2} J_w + m_w\right)}}. \end{array} \right.$$

Введем вектор состояний

$$(8) \quad \bar{x} = [x \quad \dot{x} \quad \varphi \quad \dot{\varphi}]^T.$$

Теперь, используя ряд обозначений для более компактной записи, получим систему в матричной форме:

$$(9) \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C_2 \\ 0 \\ -C_4 \end{bmatrix} M.$$

### 3. Уточнение модели

Полученную математическую модель можно уточнить, поскольку управляющее воздействие, в качестве которого выступает момент  $M$ , создаваемый вращением вала мотора, имеет зависимость от напряжения, подаваемого на двигатели [2].

Для данного робота могут быть использованы разные типы силовых установок. Далее будет рассмотрен вариант уточнения математической модели при использовании в качестве такой установки двигателей постоянного тока с редуктором.

Основными элементами двигателя постоянного тока являются статор и ротор. Статор – неподвижная часть двигателя, на которой располагаются постоянные магниты или электромагниты с обмотками. Ротор же – это та часть двигателя, которая приводится во вращение. Ротор может состоять из большого количества катушек, на которые подается питание, в зависимости от угла поворота ротора относительно статора.

Схему электрической цепи двигателя постоянного тока можно представить в виде схемы, изображенной на рис. 1.

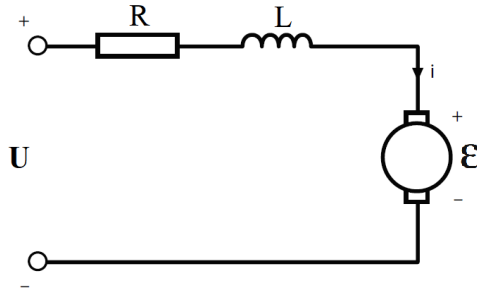


Рис. 1. Схема электрической цепи DC двигателя

В этой схеме  $U$  – напряжение источника тока,  $R$ ,  $L$  – сопротивление и индуктивность обмоток ротора соответственно,  $\varepsilon$  – обратная ЭДС индукции, возникающая в обмотке ротора.

Используя второй закон Кирхгофа, получим следующее выражение

$$(10) \quad U = RI + L \frac{\partial I}{\partial t} + \varepsilon,$$

где  $I$  – сила тока в обмотках.

Обратная ЭДС индукции связана с угловой скоростью тела робота и угловой скоростью колес следующим образом:

$$(11) \quad \varepsilon = k_e (\dot{\theta} - \dot{\varphi}),$$

где величина  $k_e$  – конструкторивная постоянная двигателя.

Крутящий момент  $M_r$ , создаваемый ротором двигателя, пропорционален силе тока  $I$  в обмотках:

$$(12) \quad M_r = k_m I,$$

где  $k_m$  также является конструктивной постоянной двигателя.

Поскольку используется редуктор, то связь между моментом  $M$ , порожденным внешним валом двигателя, и моментом  $M_r$  ротора внутри будет иметь вид

$$(13) M = N_G M_r,$$

где  $N_G$  – передаточное отношение.

Принимая во внимание факт, что внешняя механическая система изменяет свое состояние во много раз медленнее, чем электрическая система внутри двигателя, можно пренебречь переходным процессом для силы тока. Таким образом, искомая зависимость имеет следующий вид:

$$(14) M = \frac{N_G k_m k_e}{R} \dot{\varphi} - \frac{N_G k_m k_e}{rR} \dot{x} + \frac{N_G k_m}{R} U,$$

Подставляя выражение для  $M$  в систему и вводя также ряд обозначений, получим

$$(15) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -C_2\alpha & -C_1 & C_2r\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & C_4\alpha & C_3 & -C_4r\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C_2\beta \\ 0 \\ -C_4\beta \end{bmatrix} U.$$

Таким образом, получена линейная модель системы робота с мотор-редуктором постоянного тока.

#### 4. MPC для системы робота

Далее будет приводиться описание построения системы управления на основе MPC непосредственно для выведенной ранее математической модели робота с соответствующими матрицами. При использовании модели пространства состояний текущая информация, необходимая для прогнозирования, представлена переменной состояния в текущий момент времени.

##### 3.1. ФОРМИРОВАНИЕ РАСШИРЕННОЙ МОДЕЛИ

Принцип построения системы управления на основе MPC базируется на формировании новой расширенной модели исходной системы [3].

Пусть имеется система дискретного времени с  $m$ -мерным входом  $u$ , выходом  $y$  размера  $q$  и  $n$ -мерным вектором состояний  $x_m$ :

$$(16) \quad x_m[k+1] = A_m x_m[k] + B_m u[k],$$

$$(17) \quad y[k] = C_m x_m[k].$$

Вычтем из (16) предыдущее состояние системы:

$$(18) \quad x_m[k+1] - x_m[k] = A(x_m[k] - x_m[k-1]) + B_m(u[k] - u[k-1]).$$

Введя обозначения для разностей

$$(19) \quad \Delta x_m[k+1] = x_m[k+1] - x_m[k],$$

$$\Delta u[k] = u[k] - u[k-1],$$

перепишем исходное уравнение пространства состояний следующим образом:

$$(20) \quad \Delta x_m[k+1] = A_m \Delta x_m[k] + B_m \Delta u[k].$$

Свяжем выходной сигнал  $y[k]$  с вектором состояний  $\Delta x_m[k]$ :

$$(21) \quad y[k+1] - y[k] = C_m \Delta x_m[k+1] = C_m A_m \Delta x_m[k] + C_m B_m \Delta u[k].$$

Теперь определим новый вектор состояний

$$(22) \quad x[k] = \begin{bmatrix} \Delta x_m[k] \\ y[k] \end{bmatrix}.$$

Таким образом, общий вид расширенной системы примет вид

$$(23) \quad \begin{bmatrix} \Delta x_m[k+1] \\ y[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_m & o_m^T \\ C_m A_m & I_{q \times q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_m[k] \\ y[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_m \\ C_m B_m \end{bmatrix} \Delta u[k],$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} o_m & I_{q \times q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_m[k] \\ y[k] \end{bmatrix},$$

где  $I_{q \times q}$  – единичная матрица размерности  $q \times q$ , а  $o_m$  – нулевая матрица размерности  $q \times n$ .

Перепишем систему в более удобном и привычном виде:

$$(24) \quad x[k+1] = Ax[k] + B\Delta u[k],$$

$$y[k] = Cx[k],$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – матрицы, соответствующие новой расширенной системе.

Принимая во внимание то, что в нашем случае матрицы дискретного аналога системы (15) таковы, что

$$(25) \quad A_m = \begin{bmatrix} 1 & 0,0212 & 0,0007 & 0,0031 \\ 0 & 0,1695 & 0,0637 & 0,0339 \\ 0 & 0,4193 & 1,1833 & 0,0896 \\ 0 & 4,8881 & 3,5254 & 0,9878 \end{bmatrix}, B_m = \begin{bmatrix} 0,0183 \\ 0,1928 \\ -0,0973 \\ -1,1348 \end{bmatrix},$$

$$C_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

искомые матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , соответствующие расширенной модели, имеют вид

$$(26) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0,0212 & 0,0007 & 0,0031 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1695 & 0,0637 & 0,0339 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4193 & 1,1833 & 0,0896 & 0 & 0 \\ 0 & 4,8881 & 3,5254 & 0,9878 & 0 & 0 \\ 1 & 0,0212 & 0,0007 & 0,0031 & 1 & 0 \\ 0 & 0,4193 & 1,1833 & 0,0896 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0,0183 \\ 0,1928 \\ -0,0973 \\ -1,1348 \\ 0,0183 \\ -0,0973 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 3.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРОГНОЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ

После формулировки расширенной модели следующим шагом в проектировании системы прогнозирующего управления является расчет будущего выхода системы. Этот процесс описывается в окне оптимизации. Далее будет подробно рассмотрена оптимизация, выполняемая в этом окне. Будем полагать, что текущий момент  $k_i$ , а  $N_p$  – длина оптимизационного окна (горизонт прогнозирования), определяющая количество будущих состояний.

Пусть вектор состояний  $x[k_i]$  полностью известен из измерений. Прогнозируемую траекторию управления можно представить следующим образом:

$$(27) \quad \Delta u[k_i], \Delta u[k_i + 1], \dots, \Delta u[k_i + N_c - 1],$$



где  $N_c$  – горизонт управления, определяющий количество параметров, используемых для построения траектории управления.

Набор значений

$$(28) \quad x[k_i + 1 | k_i], x[k_i + 2 | k_i], \dots, x[k_i + N_p | k_i]$$

определяет прогнозируемые состояния системы с использованием информации о текущем состоянии  $x[k_i]$ .

Важно отметить, что  $N_c \leq N_p$ .

На основе расширенной модели выражения для вычисления набора будущих состояний системы имеют вид

$$(29) \quad \begin{aligned} x[k_i + 1 | k_i] &= Ax[k_i] + B\Delta u[k_i], \\ x[k_i + 2 | k_i] &= A^2x[k_i] + AB\Delta u[k_i] + B\Delta u[k_i + 1], \\ &\vdots \\ x[k_i + N_p | k_i] &= A^{N_p}x[k_i] + A^{N_p-1}B\Delta u[k_i] + \\ &\quad + \dots + A^{N_p-N_c}B\Delta u[k_i + N_c - 1]. \end{aligned}$$

С помощью набора (25) можно спрогнозировать выходы для системы:

$$(30) \quad \begin{aligned} y[k_i + 1 | k_i] &= CAx[k_i] + CB\Delta u[k_i], \\ y[k_i + 2 | k_i] &= CA^2x[k_i] + CAB\Delta u[k_i] + CB\Delta u[k_i + 1], \\ &\vdots \\ y[k_i + N_p | k_i] &= CA^{N_p}x[k_i] + CA^{N_p-1}B\Delta u[k_i] + \\ &\quad + \dots + CA^{N_p-N_c}B\Delta u[k_i + N_c - 1]. \end{aligned}$$

Определим векторы

$$(31) \quad Y = \begin{bmatrix} y[k_i + 1 | k_i] & y[k_i + 2 | k_i] & \dots & y[k_i + N_p | k_i] \end{bmatrix}^T$$

и

$$(32) \quad \Delta U = \begin{bmatrix} \Delta u[k_i]^T & \Delta u[k_i + 1]^T & \dots & \Delta u[k_i + N_c - 1]^T \end{bmatrix}^T,$$

где  $N_p$  и  $N_c$  – размерности  $Y$  и  $\Delta U$  соответственно.

Таким образом, имеем

$$(33) \quad Y = Fx[k_i] + \Phi\Delta U,$$

где

$$(34) F = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N_p} \end{bmatrix}, \Phi = \begin{bmatrix} CB & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{N_p-1}B & CA^{N_p-2}B & \dots & CA^{N_p-N_c}B \end{bmatrix}.$$

Оптимальный вектор управления в оптимизационном окне задается следующим образом [4]:

$$(35) \Delta U = (\Phi^T \Phi + R)^{-1} (\Phi^T R_s r[k_i] - \Phi^T Fx[k_i]),$$

где  $R$  – диагональная матрица, содержащая весовой параметр  $r_w$  и определяемая как  $R = r_w I$ , где матрица  $I$ , как и  $\Phi^T \Phi$ , имеет размерность  $mN_c \times mN_c$ ,  $\Phi^T F$  имеет размерность  $mN_c \times n$ , а  $\Phi^T R_s$  соответствует последним  $q$  столбцам  $\Phi^T F$ . Матрица  $R_s$  определяется как  $R_s = [I_{q \times q} \ I_{q \times q} \ \dots \ I_{q \times q}]^T$  и имеет размер  $1 \times N_p$ . Желаемый сигнал уставки имеет вид:  $r[k_i] = [r_1[k_i] \ r_2[k_i] \ \dots \ r_q[k_i]]^T$ .

Так как принцип управления со скользящим горизонтом подразумевает использование только первого элемента вектора  $\Delta U$  в момент времени  $k_i$  в качестве управляющего воздействия, то получим

$$(36) \Delta u[k_i] = [I_m \ o_m \ \dots \ o_m] (\Phi^T \Phi + R)^{-1} \times \\ \times (\Phi^T R_s r[k_i] - \Phi^T Fx[k_i]) = K_y r[k_i] - K_{mpc} x[k_i].$$

Для проектирования системы управления воспользуемся полученными ранее выкладками. Положим  $N_c = 10$ ,  $N_p = 20$ , значение уставки на всем временном отрезке равно  $r = [1 \ 0]^T$ , т.е. наша цель – добиться нулевого отклонения тела робота от вертикали и сместить его на 1 м. Вектор состояний исходной системы, а также вектор состояний расширенной модели примем в начальный момент нулевыми. Определим оптимальное решение  $\Delta U$  при  $r_w = 0,5$ .

Для начала получим значения коэффициентов обратной связи  $K_y$  и  $K_{mpc}$ :

$$(37) K_y = [I_m \ o_m \ \dots \ o_m] (\Phi^T \Phi + R)^{-1} \Phi^T R_s = [-0,6831 \ 0,0222], \\ K_{mpc} = [I_m \ o_m \ \dots \ o_m] (\Phi^T \Phi + R)^{-1} \Phi^T F = \\ = [-8,4162 \ -9,6840 \ -12,8237 \ -1,9801 \ -0,6831 \ 0,0222].$$

Тогда значения  $\Delta u[k_i]$  оптимального управления могут быть определены исходя из выражения (36).

Из приведенных на рис. 2 графиков следует, что выходной сигнал  $y$  достигает и принимает значение заданной величины параметра уставки, т.е. угол отклонения робота от вертикали  $\varphi = 0$ , а положения центра масс  $x = 1$ .

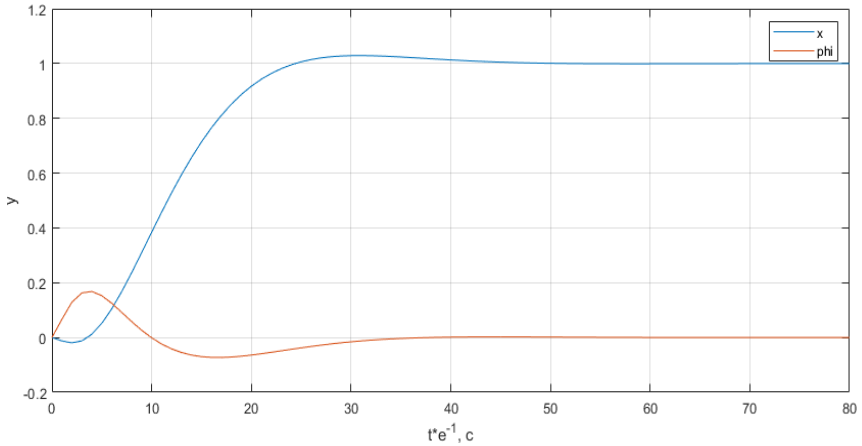


Рис. 2. Изменение значений выходного сигнала  $y$

Теперь рассмотрим случай, когда в системе присутствуют шумы:

$$(38) \quad \begin{aligned} x_m[k+1] &= A_m x_m[k] + B_m u[k] + d[k], \\ y[k] &= C_m x_m[k] + \varepsilon[k]. \end{aligned}$$

Предполагается, что на вход объекта управления подается гауссовский белый шум  $d$  с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $Q_d = 10^{-3}$ , который суммируется с управляющим воздействием  $u$ . Измерение выходного сигнала объекта также содержит аддитивный белый шум  $\varepsilon$  с нормальным распределением, нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $R_\varepsilon = 10^{-4}$ . Для того чтобы оценить вектор состояния динамической системы, используя ряд зашумленных измерений, необходимо спроектировать наблюдатель. Наблюдатель на основе

фильтра Калмана задается с использованием матриц расширенной системы и значений дисперсий шумов  $Q_d$  и  $R_e$ . Результаты моделирования процесса стабилизации робота в среде Matlab Simulink отражены на графике (рис. 3), на котором отображено изменение выхода системы  $y$  при значении весового параметра  $r_w = 0,5$ .

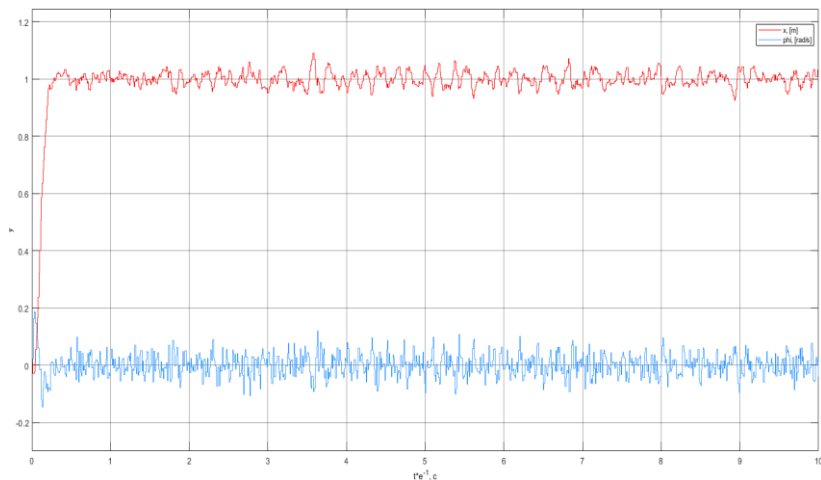


Рис. 3. Изменение выходного сигнала  $y$

## 5. Имитационное моделирование

Для визуализации проведенных расчетов выполним имитационное моделирование. Для этого воспользуемся дополнительным пакетом Simscape Multibody для Matlab Simulink. Эта среда моделирования для трехмерных механических систем, таких как роботы, подвески транспортных средств, строительного оборудования и т.д. Многосоставные системы моделируются при помощи блоков, описывающих тела, суставы, связи, ограничения, силы и датчики. Simscape Multibody позволяет формулировать и решать уравнения движения для всей механической системы. С помощью гибкой настройки модели можно импортировать полные сборки из систем автоматизированного проектирования, включая все инертные свойства объектов: все

массы, инерции, соединения, ограничения и трехмерную геометрию. Также пакет позволяет генерировать 3D-анимацию для демонстрации динамики системы.

Для начала необходимо создать 3D-модель робота. При построении модели будем учитывать все параметры системы робота.

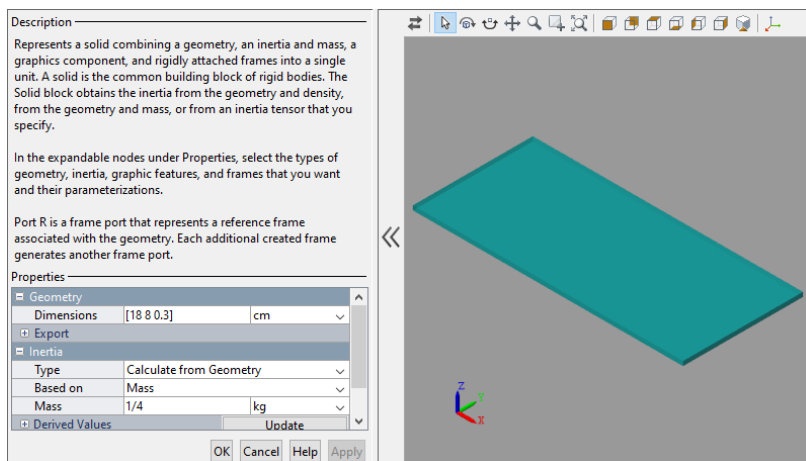


Рис. 4. Окно создания пластины основания

В параметрах окна настроек необходимо также указать массу каждой пластины (рис. 4.).

После создания всех трех частей основания нужно определить их взаимное расположение относительно друг друга. Это возможно сделать при помощи блока Rigid Transform, который позволяет однозначно определить положение объектов в пространстве, перемещать, а также вращать заготовки.

Креплениями, соединяющими платформы, будут служить четыре расположенных по углам стржня. Их можно создать при помощи блоков Cylindrical Solid. Укажем параметры каждого из стержней в блоке настроек, задав их размеры, а также массы. В итоге, вновь воспользовавшись Rigid Transform для расстановки всех элементов модели по местам, получим «тело» робота, как показано на рис. 5.

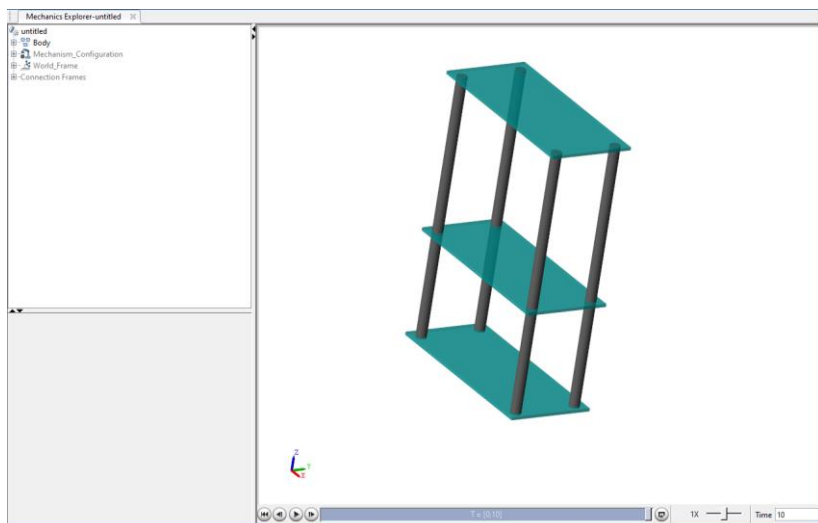


Рис. 5. Основание робота

Когда основание готово, приступим к созданию колесной базы робота. Для этого с помощью Cylindrical Solid создадим два колеса с заданными параметрами, задаем зависимость расположения колес друг относительно друга, а затем объединяем с основанием. В итоге получим 3D-модель робота с заданными инертными свойствами. Результат представлен на рис. 6.

Для того чтобы добавить полученной системе две степени свободы, обеспечивающие вращение тела вокруг оси, проходящей через центр колесной базы, и поступательного движения, воспользуемся блоками Prismatic Joint и Revolute Joint. Блок-схема модели представлена на рис. 7.

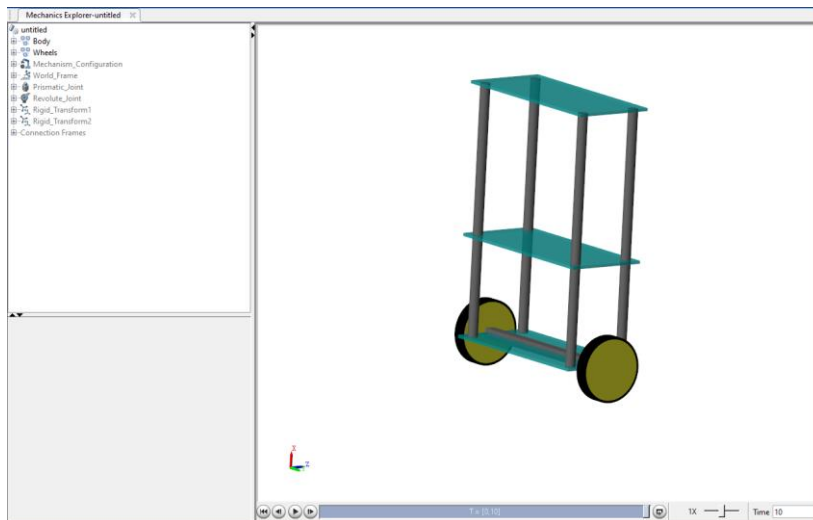


Рис. 6. 3D-модель робота-балансира

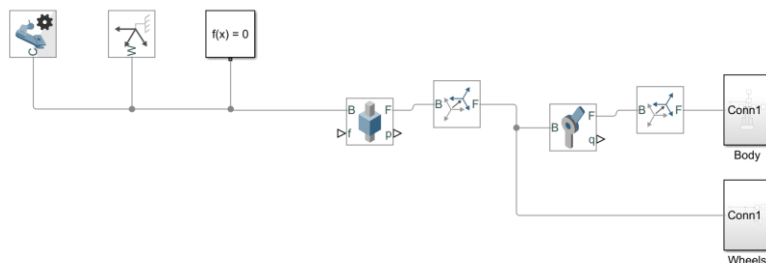


Рис. 7. Блок-схема для 3D-модели робота

## 6. Заключение

В данной работе была выведена и уточнена математическая модель, описывающая динамику движения двухколесного робота-балансира. Затем был реализован синтез оптимального управления для стабилизации робота на основе Model Predictive Control (MPC) при влиянии аддитивных белых гауссовских шумов.

Важной особенностью данной работы, подчеркивающей ее актуальность, является возможность применения данного метода управления с использованием MPC к небольшим роботам-помощникам.

### Литература

1. ДРОНГ В.И., ДУБИНИН В.В., ИЛЬИН М.М. и др. *Курс теоретической механики: Учебник для вузов* / Под общ. ред. КОЛЕСНИКОВА К.С. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 736 с.
2. ИРОДОВ И.Е. *Электромагнетизм. Основные законы*. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. – 319 с.
3. LIUPING WANG *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB*. – Springer-Verlag London Limited, 2009. – 403 p.
4. RIDONG ZHANG, ANKE XUE, FURONG GAO *Model Predictive Control. Approaches Based on the Extended State Space Model and Extended Non-minimal State Space Model*. – Springer Nature Singapore Pte Ltd. 2019. – 143 p.

### DESIGN OF MPC-BASED CONTROL SYSTEM FOR STABILIZING A TWO-WHEELED SELF-BALANCING ROBOT

**Andrew Tkachenko**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, student (tkachenko\_aa10@mail.ru)

*Abstract: The purpose of this work is solving the problem of designing a control system based on Model Predictive Control (MPC) for a linear Multiple Input Multiple Output (MIMO) system of a two-wheeled self-balancing robot. These robots have become popular projects of many companies nowadays. One of the most famous companies engaged in the development of humanoid robots Boston Dynamics among them. Nevertheless, the idea of creating such type of robots did not pass by amateur engineers from all over the world, who began develop two-wheeled self-balancing robot for use as office assistants, vehicles and just for academic interest. The paper considers the process of constructing a mathematical model of the robot's mechanical system and linearization of the resulting model is performed. The basic principles of constructing an MPC-based control system for linear systems without external disturbances, as well as using an observer to evaluate the states*



*of the model under the influence of additive white Gaussian noise are presented. Examples of implementation in the Matlab/Simulink environment for the case of a MIMO system, which is a model of a two-wheeled robot, are given.*

Keywords: model predictive control, control system, self-balancing robot, mathematical model.

УДК 519.71

ББК 22.182

DOI: 10.25728/ubs.2022.95.7

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии В.Г. Лебедевым.*

*Поступила в редакцию 10.11.2021.*

*Опубликована 31.01.2022.*