КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАТИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА ПО ВЫХОДУ

Мухин А. В.[1]

(*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород*)

Рассматривается задача поиска критериев существования стабилизирующих статических регуляторов по выходу для линейных непрерывных стационарных систем. Дело в том, что имеющиеся ранговые критерии существования статических регуляторов применимы только в тех случаях, когда одна из матриц входа или выхода имеет полный ранг. Во всех остальных случаях, как правило, чаще всего встречающихся на практике, эти критерии оказываются неприменимыми. Для решения задачи введен класс линейных систем, для которого критерий для обратной связи по выходу также существует и может быть сформулирован в виде необходимых и достаточных условий. Основная идея состоит в приведении посредством невырожденного линейного преобразования матрицы выхода к определенному блочному виду.

Ключевые слова: статический регулятор по выходу, гурвицева матрица, стабилизируемость, линейное преобразование.

1. Введение

Управление в форме статической обратной связи по выходу представляет собой наиболее востребованный на практике способ стабилизации линейных систем [1, 4]. Очевидным преимуществом такого подхода к стабилизации по сравнению со стабилизацией по состоянию является то, что для ее реализации не требуется весь вектор состояния. Однако NP-трудность задачи [14], а также отсутствие критериев существования заметно усложняют синтез таких регуляторов [9, 12 ,15, 16]. Изучены лишь некоторые частные случаи, в которых удается сформулировать критерии в виде необходимых и достаточных условий (например, [15]).

Статья посвящена решению задачи о существовании статического регулятора по выходу. Для решения задачи, так же как и в [6, 7], использовался вспомогательный класс матриц выхода, благодаря которому можно выделить класс линейных систем,

---

[1] *Алексей Валерьевич Мухин, аспирант* (*muhin-aleksei@yandex.ru*).

для которого удается сформулировать необходимые и достаточные условия существования статических регуляторов по выходу. Статья является продолжением работ [6, 7]. В отличие от последних никакие дополнительные требования к матрице входа или матрице системы не предъявлялись.

Остаточная часть статьи организована следующим образом. Во втором разделе сформулирована задача. В третьем разделе приведены используемые обозначения и показан выбор базиса, в котором матрица выхода принимает требуемый блочно-однородный вид. Четвертый раздел содержит доказательство теоремы, в которой сформулирован критерий существования статического регулятора по выходу для стабилизируемых по выходу линейных систем. В пятом разделе показано применение найденного критерия на нескольких примерах. Заключительные выводы даны в последнем разделе.

2. Формулировка задачи

Рассмотрим линейную непрерывную наблюдаемую стационарную систему

(1) $x = Ax + Bu,\ \ x(0) = x_0,$

$y = Cx,$

где $x \in \boldsymbol{R}^n$ – состояние; $u \in \boldsymbol{R}^m$ – вход; $y \in \boldsymbol{R}^p$ – измеряемый выход; $A \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ – матрица системы; $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{R}^{n\times m}$ – матрица входа; $\boldsymbol{C} \in \boldsymbol{R}^{p\times n}$ – матрица выхода.

Будем считать, что относительно матриц $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ выполняются естественные ранговые условия:

$rank(\boldsymbol{B}) = m,$

$rank(\boldsymbol{C}) = p,$

где $m, p < n$.

В противном случае требуется сначала избавиться от избыточности в системе (1). Для стабилизации системы применим закон управления из класса статических обратных связей по выходу. Уравнение соответствующего регулятора имеет вид

(2) $u = Ky,$

где $\boldsymbol{K} \in \boldsymbol{R}^{m\times p}$ – неизвестная матрица регулятора.

Тогда (1) с учетом (2) примет замкнутый вид:

(3) $\dot{x} = \left(A + BKC\right)x = \widehat{A_c}x$.
Задача состоит в поиске критериев, позволяющих сделать вывод относительно существования матрицы K, обеспечивающей устойчивость матрицы замкнутой системы (3). Стандартная математическая формулировка задачи звучит так [9]: *существует ли такая матрица* K*, которая для заданных матриц* A*,* B *и* C *обеспечивает устойчивость матрицы замкнутой системы* (3)*?*

3. Преобразование базиса

Введем используемые обозначения. Правую комплексную полуплоскость будем обозначать $\mathbb{C}^+$, а левую полуплоскость – $\mathbb{C}^-$. Если $\lambda \in \mathbb{C}^-$, то $Re\lambda < 0$. Спектральную абсциссу квадратной матрицы $\mathscr{M}$, определяемую как $\max\limits_{1 \le i \le n}\{Re\lambda_i(\mathscr{M})\}$, обозначим $spa(\mathscr{M})$. Это обозначение позаимствовано из [8]. Если $\mathscr{M}$ гурвицева, то $spa(\mathscr{M}) < 0$. Ядра матриц B^{T} и C будем обозначать $\mathscr{N}_{B^{\mathrm{T}}} \in R^{n\times(n-m)}$ и $\mathscr{N}_C \in R^{n\times(n-p)}$ соответственно. Их можно найти из уравнений [11]

$$B^{\mathrm{T}}\mathscr{N}_{B^{\mathrm{T}}} = 0,$$
$$C\mathscr{N}_C = 0.$$

Для решения задачи введем вспомогательный класс матриц выхода, который назовем блочно-однородным. С этой целью выполним линейное преобразование системы (3) посредством невырожденной матрицы $S \in R^{n\times n}$ так, чтобы в новом базисе матрица выхода C приняла один из видов:
(4) $C = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p\times(n-p)} \end{pmatrix}$,
(5) $C = \begin{pmatrix} 0_{p\times(n-p)} & I_p \end{pmatrix}$.
Матрица C является блочно-однородной, если она имеет вид (4) или (5). В новом базисе матрица замкнутой системы будет равна
(6) $A_c = S\left(A + BKC\right)S^{-1} = A + BKC$.
В силу подобия спектры матриц $\widehat{A_c}$ и A_c совпадают [11]. Матрица преобразования может быть найдена из совместной системы уравнений
(7) $CS^{-1} = C$.

Таким образом, любую матрицу выхода всегда можно привести к любому из видов (4) или (5). Отметим, что если C является блочно-однородной, то и матрица $\mathcal{N}_C$ может быть записана в блочно-однородном виде:

$$\mathcal{N}_C = \begin{pmatrix} 0_{p\times(n-p)} \\ I_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Заметим также, что

$$CC^{\mathrm{T}} = I_p,$$
$$\mathcal{N}_C^{\mathrm{T}} \mathcal{N}_C = I_{n-p}.$$

Произведение матриц CB является инвариантным по отношению к выбранному базису. В общем случае ранг произведения матриц CB заключен в следующий диапазон:

$$0 \le rank(CB) \le min\{m, p\}.$$

Равенство $rank(CB) = 0$ реализуется в некоторых частных случаях, когда, например, C имеет вид (4), а B^{T} – вид (5). Пусть матрица выхода приведена к виду (4). Матрицу входа в новом базисе можно представить в блочном виде как

(8) $$B = SB = \begin{pmatrix} CB \\ \mathcal{N}_C^{\mathrm{T}} B \end{pmatrix},$$

где $B_{11} \in R^{p\times m}$ и $B_{21} \in R^{(n-p)\times m}$,

а матрицу системы в виде

(9) $$A = SAS^{-1}.$$

Так как C имеет вид (4), то блоки B_{11} и B_{21} в (8) можно определить следующим образом:

$$B_{11} = CB,$$
$$B_{21} = \mathcal{N}_C^{\mathrm{T}} B.$$

Введем новую матрицу

$$K_n = \begin{pmatrix} K & 0_{m\times(n-p)} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрицу (6) можно переписать в виде

(10) $$A_c = A + BK_n.$$

Матрицу (10) можно также представить в блочном виде. С этой целью разобьем матрицу A на блоки с квадратными диагональными блоками $A_{11} \in R^{p\times p}$ и $A_{22} \in R^{(n-p)\times(n-p)}$. Тогда (10) можно также записать в виде суммы двух блочных матриц:

$$A_c = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} CBK & 0 \\ \mathcal{N}_C^{\mathrm{T}} BK & 0 \end{pmatrix}.$$

С учетом того, что
$$A_{11} + CBK = CAC^{\mathrm{T}} + CBKCC^{\mathrm{T}} = C(A + BKC)C^{\mathrm{T}},$$
то A_c можно записать следующим образом:
$$A_c = \begin{pmatrix} CA_cC^{\mathrm{T}} & A_{12} \\ A_{21} + \mathcal{N}_C^{\mathrm{T}}BK & \mathcal{N}_C^{\mathrm{T}}A\mathcal{N}_C \end{pmatrix}.$$
В некоторых случаях такое представление удобно при решении задачи синтеза [7]. Если матрица $\widehat{A_c}$ в исходном базисе устойчива, то в силу подобия матрица A_c также устойчива. Аналогичную матрицу замкнутой системы можно получить и в случае, когда матрица выхода приведена к (5).

4. *Необходимые и достаточные условия существования статического регулятора по выходу*

Напомним, что система с обратной связью по состоянию, определяемая парой произвольных матриц (A, B), стабилизируема, если (например, [3])
$$\forall\lambda \in \mathbb{C}^{+} \rightarrow rank(\lambda I - A \quad B) = n.$$
Стабилизируемость системы является необходимым и достаточным условием существования статического регулятора по состоянию [4, 13]. Обратимся к матрице (10). В соответствии с формулой Бине – Коши [11] определитель произведения двух матриц
$$(\lambda I - A \quad B)\begin{pmatrix} I \\ -K_n \end{pmatrix}$$
равен сумме произведения всевозможных миноров $det\left(\mathscr{A}_i^n(\lambda)\right)$ порядка n матрицы $(\lambda I - A \quad B)$ на соответствующие миноры такого же порядка $det\left(K_i^n\right)$ матрицы $\begin{pmatrix} I \\ -K_n \end{pmatrix}$:

(11) $det\left((\lambda I - A \quad B)\begin{pmatrix} I \\ -K_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{N_0} det\left(\mathscr{A}_i^n(\lambda)\right) det\left(K_i^n\right),$

где $N_0 = \frac{(n+m)!}{m!n!}$ – число сочетаний из $(n+m)$ по n.

Так как матрица K_n содержит нулевой блок, то количество ненулевых миноров в матрице $\begin{pmatrix} I \\ -K_n \end{pmatrix}$ будет меньше N_0. Запишем матрицу $\begin{pmatrix} I \\ -K_n \end{pmatrix}$ в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} I_n \\ -\begin{pmatrix} K & 0_{m\times(n-p)} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_{11} & -k_{12} & \dots & -k_{1p} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -k_{m1} & -k_{m2} & \dots & -k_{mp} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $k_{ij} \neq 0$.

Для дальнейшего рассмотрения ограничим размерность выхода:

$p < n - 1$.

Это ограничение не является принципиальным и наложено лишь с целью уменьшения количества невырожденных $n \times n$ подматриц в матрице $\begin{pmatrix} I \\ -K_n \end{pmatrix}$. Количество таких подматриц, состоящих из последовательно расположенных строк, начиная со второй строки в этом случае, не превышает m:

(12) $N \leq m$,

а все остальные $n \times n$ подматрицы будут вырожденными. Если $p \geq m$, то $N = m$. С учетом этого перепишем (11) в виде суммы многочленов:

(13) $P^n(\lambda) + \sum_{i=1}^{min\{m,p\}} P_i^{n_i}(\lambda)\, det\big(K_i^n\big) = 0,$

в которой

$P^n(\lambda) = det(\lambda I - A)$ – многочлен степени n;

$P_i^{n_i}(\lambda) = det\big(\mathscr{A}_i^n(\lambda)\big)$ – многочлены степени $n_i \leq n - 1$.

Многочлены $P_i^{n_i}(\lambda)$ появляются из уравнений определителей $det\big(\mathscr{A}_i^n(\lambda)\big)$, которые находятся в соответствии с определителями $det\big(K_i^n\big)$. Перегруппируем слагаемые в (13) и приведем его к единому многочлену:

(14) $\lambda^n + \Big(a_{0(n-1)} + \sum_{i=1}^{min\{m,p\}} \mathscr{a}_{i(n-1)}\, det\big(K_i^n\big)\Big)\lambda^{n-1} + \dots +$

$$+\left(a_{00} + \sum_{i=1}^{min\{m,p\}} \mathscr{a}_{i0}\, det\big(K_i^n\big)\right) = 0,$$

где $\mathscr{a}_{i(n-j)}$ – элементы многочленов $P_i^{n_i}(\lambda)$.

В соответствии с теоремой Стодолы [10], для устойчивости многочлена (14) необходимо, чтобы все его коэффициенты были положительными. Для определенности положим, что $min\{m, p\} = m$, и запишем необходимое условие устойчивости многочлена (14):

$$\begin{pmatrix} a_{0(n-1)} \\ a_{0(n-2)} \\ \cdots \\ a_{00} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathscr{a}_{1(n-1)} \\ \mathscr{a}_{1(n-2)} \\ \cdots \\ \mathscr{a}_{10} \end{pmatrix} det\left(K_1^n\right) + \ldots + \begin{pmatrix} \mathscr{a}_{m(n-1)} \\ \mathscr{a}_{m(n-2)} \\ \cdots \\ \mathscr{a}_{m0} \end{pmatrix} det(K_m^n) > 0.$$

Эти неравенства можно переписать в компактном виде:

(15) $a^0 + \mathscr{a}^1\, det\left(K_1^n\right) + \cdots + \mathscr{a}^m\, det(K_m^n) > 0.$

Получаем систему, состоящую из n линейных неравенств с m неизвестными. Элементами векторов в (15) являются коэффициенты многочленов соответствующих подматриц матрицы Хаутуса. Такая система будет гарантированно совместной, когда $m = n$. Добавим, что коэффициенты многочлена (14) должны также удовлетворять условиям теоремы Гурвица [5], поэтому в правую часть (15) необходимо добавить некоторый вектор, элементы которого являются коэффициентами устойчивого многочлена. Однако проверка совместности системы (15) в таком случае может оказаться затруднительной ввиду того, что правые части неизвестны. Введем класс линейных систем, для которых неравенства (15) будут выполняться при условии $m < n$ независимо от их правых частей: *систему с обратной связью по выходу* (10) *будем называть стабилизируемой по выходу, если в соответствующей матрице Хаутуса*

(16) $(\lambda I - A \quad B)$,

существует хотя бы одна квадратная подматрица $\mathscr{A}_i^n(\lambda)$ размерности $n \times n$, состоящая из последовательно расположенных столбцов, начиная со второго столбца, определитель которой обращается в ноль только при значениях $\lambda \in \mathbb{C}^-$.

Количество таких подматриц равно m. Первый столбец опускается, так как подматрица $(\lambda I - A)$ неустойчива. Для нумерации этих подматриц определим индекс $i \in [1, m]$. Из стабилизируемости по выходу следует, что

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^+ \to rank\left(\mathscr{A}_i^n(\lambda)\right) = n,$$

откуда вытекает стабилизируемость пары $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Таким образом, из стабилизируемости по выходу следует стабилизируемость пары $(A, \boldsymbol{B})$. Обратное, вообще говоря, неверно. Для нумерации этих подматриц определим индекс $i \in [1, m]$. Для введенного класса линейных систем сформулируем и докажем следующий результат:

Теорема. *Если линейная система* (10) *стабилизируема по выходу, то для существования статического регулятора по выходу необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $p \geq i_{min}$.

Доказательство. Предположим, что подматрица $\mathscr{A}_m^n(\lambda)$ устойчива. Это означает, что в (15) существует вектор $\mathscr{a}^m$, элементами которого являются коэффициенты устойчивого многочлена подматрицы $\mathscr{A}_m^n(\lambda)$ матрицы Хаутуса. Запишем соответствующую подматрицу $\boldsymbol{K}_m^n$ в матрице $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{K}_n \end{pmatrix}$:

$$\boldsymbol{K}_m^n = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_{11} & \dots & -k_{1p} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -k_{m1} & \dots & -k_{mp} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $p < m$. В таком случае подматрица $\boldsymbol{K}_m^n$ будет содержать $m - p$ нулевых столбцов. Следовательно, $det(\boldsymbol{K}_m^n) = 0$. Таким образом, если $p < i$, то статический регулятор не существует. Пусть $p \geq m$. Перепишем неравенства (15) за исключением первого неравенства в виде

(17) $\mathscr{a}^m \, det(\boldsymbol{K}_m^n) > -\left(a^0 + \mathscr{a}^1 \, det\left(\boldsymbol{K}_1^n\right) + \dots + \mathscr{a}^{m-1} \, det\left(\boldsymbol{K}_{m-1}^n\right)\right)$.

Видно, что за счет выбора элементов k_{m1}, k_{m2}, …, k_{mp} можно обеспечить такую величину $det(\boldsymbol{K}_m^n) \neq 0$, при которой система (17) будет разрешима. Если условие леммы выполняется в нескольких подматрицах $\mathscr{A}_i^n(\lambda)$, то $p \geq i_{min}$. Теорема доказана.

Следует осветить еще один вопрос, связанный с выбором матрицы преобразования в (7). Для перехода к новому базису, в котором $\boldsymbol{C}$ является блочно-однородной, существует, вообще говоря, множество невырожденных матриц $\boldsymbol{S} \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$. Так вот, если матрица $\boldsymbol{A}_c$ устойчива, то условие теоремы будет выполняться независимо от матрицы преобразования $\boldsymbol{S}$. Действительно, пусть при некоторой матрице преобразования S_i из (7) матрица A_c устойчива. Возьмем любую другую невырожденную матрицу S_j, так же как и S_i обеспечивающую блочно-однородный вид C. В силу подобия устойчивой будет и любая другая матрица $\widetilde{A_c}$ в базисе, определяемом матрицей S_j. Таким образом, условие теоремы не зависит от выбора матрицы преобразования S.

5. Примеры

Рассмотрим статическую стабилизацию тела, вывешенного в электромагнитном подвесе [2]. Тело находится в поле действия силы тяжести и силы магнитного притяжения, действующей со стороны электромагнита. Если геометрическая сумма сил равна нулю, то тело покоится. Матрица, описывающая уравнения линеаризованной системы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -7{,}5 \end{pmatrix}.$$

Зададим матрицу выхода

$$C = (1 \quad 0 \quad 0),$$

и матрицу входа

$$B^{\mathrm{T}} = (0 \quad 0 \quad 1),$$

и покажем, что задача статической стабилизации по выходу неразрешима. Матрица Хаутуса (16) примет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda + 7{,}5 & 1 \end{pmatrix},$$

а матрица $\begin{pmatrix} I \\ -K_n \end{pmatrix}$ –

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В такой матрице существует только одна невырожденная 3×3 подматрица, не считая единичной. Соответствующая подматрица в матрице Хаутуса будет равна

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 1 & \lambda + 7{,}5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой подматрицы равен единице $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. Откуда следует, что система не является стабилизируемой по выходу, хотя пара (A, B) стабилизируема. Убедимся, что задача неразрешима. Запишем соответствующую матрицу замкнутой системы:

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ k & -1 & -7{,}5 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен этой матрицы имеет вид:

$$\lambda^3 + 7{,}5\lambda^2 - k - 7{,}5 = 0.$$

С помощью теоремы Стодолы [10] видим, что данный многочлен невозможно сделать устойчивым ни при каком значении k. К такому же выводу можно прийти путем рассмотрения системы (15) с нулевыми правыми частями, из несовместности которой следует неразрешимость задачи. Следовательно, статический регулятор не существует. Этот пример показывает, что неправильная комбинация матриц C и B может привести к неразрешимости задачи, хотя, как будет показано ниже, при тех же размерностях задача разрешима. Зададим теперь матрицу входа в виде

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а матрицу выхода оставим в прежнем виде. Матрица Хаутуса в данном случае будет равна

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda + 7{,}5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\begin{pmatrix} I \\ -K_n \end{pmatrix}$ сохраняет прежний вид. Рассмотрим соответствующую квадратную подматрицу:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 1 & \lambda + 7{,}5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой подматрицы обращается в ноль при $\lambda = -7{,}5$, что обеспечивает условие стабилизируемости по выходу. В силу равенства p и i условие теоремы выполняется. Соответствующая матрица замкнутой системы примет вид

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k_{11}+1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -7{,}5 \end{pmatrix},$$

а ее характеристический многочлен

$$\lambda^3 + 7{,}5\lambda^2 - k\lambda - 7{,}5(k+1) = 0.$$

При $k < -1$ получаем устойчивый многочлен, а значит, и $spa(A_c) < 0$.

Рассмотрим еще один пример – статическую стабилизацию по выходу двухзвенного перевернутого маятника. Матрица такой системы равна [3]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зададим матрицу входа в виде

$$B^{\mathrm{T}} = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0),$$

а матрицу выхода в виде

$$C = (-18{,}0248 \quad 19{,}9613 \quad -4{,}0071 \quad 10{,}5928).$$

Приведем C к виду (4). В качестве матрицы преобразования можно взять

$$S = \begin{pmatrix} -18{,}0248 & 19{,}9613 & -4{,}0071 & 10{,}5928 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате матрица входа и матрица системы в новом базисе, определяемые по формулам (8) и (9) соответственно, будут равны:

$$B^{\mathrm{T}} = (-4{,}0071 \quad 0 \quad 0 \quad 1),$$

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}8844 & 4{,}7663 & -12{,}4226 & -10{,}4737 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}0944 & 1{,}7016 & -1{,}8844 & 0{,}3783 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу Хаутуса:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1{,}8844 & -4{,}7663 & 12{,}4226 & 10{,}4737 & -4{,}0071 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 & 0 \\ -0{,}0944 & -1{,}7016 & \lambda + 1{,}8844 & -0{,}3783 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем квадратную подматрицу:

$$\begin{pmatrix} -4{,}7663 & 12{,}4226 & 10{,}4737 & -4{,}0071 \\ \lambda & 0 & -1 & 0 \\ -1{,}7016 & \lambda + 1{,}8844 & -0{,}3783 & 0 \\ -2 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Функция определителя этой подматрицы, описывается многочленом

$$\lambda^3 + 4{,}5\lambda^2 + 3{,}29\lambda + 0{,}967 = 0.$$

Все коэффициенты этого многочлена положительные и, кроме того, удовлетворяют условиям теоремы Гурвица [5]. Приходим к выводу, что все корни такого многочлена расположены в $\mathbb{C}^-$. Условие теоремы также выполняется. Следовательно, статический регулятор по выходу существует. При $K = 1$ получаем $spa(A_c) < 0$.

6. Заключение

В статье показано, что для линейных систем, удовлетворяющих условию стабилизируемости по выходу, можно сформулировать критерий существования статического регулятора по выходу. Проверка такого условия проста и может быть выполнена стандартными методами линейной алгебры. В общем случае, когда система не является стабилизируемой по выходу, вопрос о существовании статического регулятора остается открытым, что порождает необходимость поиска дополнительных критериев.

Автор благодарен Дмитрию Владимировичу Баландину за ценные советы.

Литература

1. АНДРЕЕВ Ю.А. *Управление конечномерными линейными объектами*. – М.: Наука, 1976.
2. БАЛАНДИН Д.В., БИРЮКОВ Р.С., КОГАН М.М., ФЕДЮКОВ А.А. *Оптимальная стабилизация тела в электромагнитном подвесе без изменения его положения* // Известия РАН. ТиСУ. – 2017. – №3. – С. 12–24.

3. БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М.М. *Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств*. – М.: Физматлит, 2007.
4. КВАКЕРНААК Х, СИВАН Р. *Линейные оптимальные системы управления*. – М.: Мир, 1977.
5. МАЛКИН И.Г. *Теория устойчивости движения*. – М.: Наука, 1966.
6. МУХИН А.В. *О существовании статических регуляторов по выходу* // Управление большими системами. – 2022. – Вып. 96. – С. 16–30.
7. МУХИН А.В. *Пресечение множеств решений матричных неравенств в задачах синтеза статических регуляторов* // Управление большими системами. – 2022. – Вып. 100. – С. 107–119.
8. ПЕРОВ А.И., КОСТРУБ И.Д. *О спектральной абсциссе и логарифмической норме* // Математические заметки. – 2017. – №101. – С. 562–575.
9. ПОЛЯК Б.Т., ЩЕРБАКОВ П.С. *Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению* // Автоматика и телемеханика. – 2005. – №5. – С. 4–46.
10. ПОСТНИКОВ М.М. *Устойчивые многочлены.* – М.: Наука, 1981.
11. ХОРН Р., ДЖОНСОН Ч. *Матричный анализ*. – М.: Мир, 1989.
12. ASTOLFI A., COLANERI P. *Static output feedback stabilization of linear and nonlinear systems* // 39th Conf. on Decision and Control, Sydney, Australia, 2000.
13. HAUTUS M.L.J. *Controllability and observability conditions of linear autonomous systems* // Nedert. Acad. Wetensch. – 1969. – Proc. Ser. A72. – P. 443–448.
14. NEMIROVSKII A.A. *Several NP-hard problem arising in robust stability analysis* // Math. Control, Signals, Systems. – 1994. – Vol. 6. – P. 99–105.
15. SADABADI M. S., PEAUCELLE D. *From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey* // Annual Reviews in Control. – 2016. –Vol. 42. – P. 11–26.

16. SYRMOS V.L, ABDALLAH C.T., DORATO P., GRIGORIADIS K. *Static Output Feedback. A Survey* // Automatica. – 1997. – Vol. 33, No. 2. – P. 125–137.

THE STATIC OUTPUT FEEDBACK EXISTENCE CRITERION

Aleksey Mukhin, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod, postgraduate student (myhin-aleksey@yandex.ru).

Abstract: The problem of finding criteria for the existence of stabilizing static output feedback for linear continuous stationary systems is considered. The fact is that the existing rank criteria for the existence of static state feedback are applicable only in cases where one of the input or output matrices has full rank. In all other cases, as a rule, frequent in practice, these criteria are not applicable. To solve the problem, a class of linear systems is introduced, for which a criterion for output feedback also exists and can be formulated as necessary and sufficient conditions. The main idea is to reduce the output matrix by means of a non-degenerate linear transformation to a certain block form.

Keywords: static output feedback, Hurvitz matrix, stabilizability.

УДК 517.977
ББК 22.18
DOI: 10.25728/ubs.2023.103.5

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким.

*Поступила в редакцию 02.04.2023.
Опубликована 31.05.2023.*