

## ОЦЕНКА СОБСТВЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ КИБЕРФИЗИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ СЕТЕВЫХ ИСЧИСЛЕНИЙ<sup>1</sup>

Промыслов В. Г.<sup>2</sup>, Семенков К. В.<sup>3</sup>, Жарко Е. Ф.<sup>4</sup>  
(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Рассматриваются подходы к решению частной задачи обеспечения безопасности киберфизических систем, к которым относятся многие объекты критической информационной инфраструктуры, включая такие сферы как транспорт, связь, энергетика и промышленность, а именно, к оценке доступности как максимальной задержки передачи и обработки данных. Анализируются способы оценки собственной характеристики киберфизических систем – так называемой кривой обслуживания, которая представляет собой детерминированные ограничения, связывающие вход системы и минимальный поток на выходе системы. Оценка кривой обслуживания рассматривается в рамках метода сетевых исчислений и подходов мини- и макси-плюс алгебры, которые составляют математическую основу метода. Для оценки кривой обслуживания взят один ранее разработанный метод, использующий свойство дуальности преобразований мини- и макси-плюс алгебры, и предложен новый метод, основанный на связи двух видов кривых обслуживания – мини- и макси-кривой обслуживания. Методы рассматриваются с учетом их применения для реальных систем и существующих ограничений на возможности измерения, в частности, конечности временного интервала измерений. На основе анализа двух методов делается вывод, что каждый из них дает возможную кривую обслуживания, но они требуют дополнительных данных для того, чтобы полученная кривая соответствовала режиму максимального быстрогодействия системы.*

Ключевые слова: киберфизическая система, моделирование, Network Calculus, теория сетевых исчислений, мини- и макси-плюс алгебра, кривая обслуживания, доступность, безопасность.

### 1. Введение

В современном мире киберфизические системы являются частью систем, выполняющих ключевые, критические функции

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-19-00338, <https://rscf.ru/project/23-19-00338/>.

<sup>2</sup> Виталий Георгиевич Промыслов, к.ф.-м.н., в.н.с. ([vp@ipu.ru](mailto:vp@ipu.ru)).

<sup>3</sup> Кирилл Валерьевич Семенков, к.ф.-м.н., с.н.с. ([semenkovk@ipu.ru](mailto:semenkovk@ipu.ru)).

<sup>4</sup> Елена Филипповна Жарко, к.т.н., с.н.с. ([zharko@ipu.ru](mailto:zharko@ipu.ru)).

для человека. Обеспечение безопасности управления в таких системах – это одна из ключевых задач, поэтому оценку и контроль характеристик безопасности нужно вести на всех этапах жизненного цикла таких систем. Одной из характеристик безопасности является доступность, и метрикой доступности может служить задержка передачи и обработки данных [4]. Для интеллектуальных транспортных систем, в приложении к которым авторы решают проблему оценки характеристик безопасности, доступность играет ключевое значение, особенно при использовании внешних каналов управления (оператор, диспетчер, элементы дорожной инфраструктуры).

Её оценка чаще всего проводится методами статистического анализа и теории систем массового обслуживания (СМО) [1, 2]. Однако для измерения характеристик киберфизических систем статистические методы оценки не всегда хорошо подходят. С одной стороны, трудно собрать корректную статистику, так как дополнительные тестовые программы, запущенные в системе, могут исказить результат. С другой стороны, процессы в киберфизических системах имеют специфические статистические свойства, они часто описываются сложными функциями распределения, например, многомодовыми или с тяжелыми хвостами [3].

В качестве одной из альтернатив статистическим методам при расчете характеристик потоков данных в компьютерных сетях применяется нестатистический метод анализа детерминированных систем Network Calculus, или теория сетевых исчислений (ТСИ) [9, 10]. Он базируется на мини-плюс алгебре [16] и во многих случаях позволяет линеаризовать системы, являющиеся нелинейными в «обычной» алгебре, а также получать детерминированные оценки таких важных параметров систем как задержка при обработке или размер буфера данных. Детерминированность получаемых оценок – это важный фактор, определяющий практическую привлекательность метода.

В инженерных задачах требования и критерии часто выражаются в виде детерминированных предельных величин, (например, максимального времени прохождения информации), т.е. характеристик, которые непосредственно определяются методами ТСИ. Поэтому алгоритмы ТСИ могут быть частью средств монито-

ринга безопасности системы и непрерывно выдавать эксплуатирующему систему персоналу диагностические данные о доступности и, что ещё важнее, прогноз доступности на некоторое время вперёд.

Для расчета параметров системы ТСИ использует специфические характеристики системы: кривую поступления (конверт) потока данных и кривую обслуживания [14]. Они не являются «обычными» характеристиками, которые можно найти в паспорте на систему, и их необходимо вычислить по имеющимся входным данным: кумулятивным (интегральным) кривым потоков, обрабатываемых в системе. Кривая поступления ограничивает изменение кумулятивного потока на временном интервале. Кривая обслуживания в ТСИ является аналогом передаточной функции системы в радиофизике – это внутренняя характеристика системы, определяющая реакцию системы на входной поток. Кривая поступления совместно с кривой обслуживания задают границы для расчета параметров системы.

Часто выделяют верхнюю и нижнюю кривые поступления и минимальную и максимальную кривую обслуживания. Однако для практического использования наиболее интересны верхняя кривая поступления и минимальная кривая обслуживания, так как из них можно оценить сверху время прохождения данных в системе и параметры буферизации. Формальное и детальное описание кривых поступления и обслуживания и дискуссию по ним можно найти в работе [17].

В литературе основное внимание уделяется вычислению кривой поступления. Данная тенденция, видимо, определяется двумя основными факторами: во-первых, кривая поступления в отличие от кривой обслуживания может использоваться самостоятельно, например, для диагностики состояния, и, во-вторых, для вычисления минимальной (верхней) кривой поступления, которая имеет наибольший практический интерес, существует хорошо обоснованная формула [12]. Основной проблемой для расчета кривой поступления является сложность  $O(N^2)$ , где  $N$  – размер выборки, что существенно замедляет расчеты на больших выборках или, что то же самое, на длительных интервалах непрерывной эксплуатации. Известен по крайней мере один алгоритм

быстрого приближенного вычисления кривой поступления, обладающий сложностью  $O(N)$  [7], хотя для указанного алгоритма проблема точности полученной оценки и выбора начального параметра всё ещё открыты.

Оценка минимальной кривой обслуживания (далее слово «минимальная» мы, как правило, будем опускать) является более сложной задачей, и для нее пока нам не известно полного теоретического обоснования или общепринятого алгоритма. Особенностью ТСИ является то, что связь между входом и выходом системы часто задается неравенствами, поэтому в качестве кривой обслуживания необходимо рассматривать множество решений, удовлетворяющих неравенству, т.е. решение не является единственным, а кривая обслуживания, полученная на конкретной реализации процесса обработки, не обязательно станет «наилучшей».

Подробный обзор оценки кривых обслуживания как в детерминированном, так и в стохастическом ТСИ был проведен Фидлером [11]. В его работе рассматриваются различные методы оценки кривой обслуживания и области их применения. Фидлер и некоторые другие авторы [5, 8] предлагают наряду с пассивными подходами, связанными с анализом реализаций алгоритмов на конкретных системах обработки и восстановления кривой обслуживания в аналитическом виде, использовать для оценки кривых обслуживания и активные методы измерения с использованием тестовых последовательностей. В работах рассматриваются активные методы измерения для систем специального вида, с разделяемым ресурсом. Эти методы редко можно применить для оценки кривой обслуживания в системах потоковой передачи.

Другой подход для проведения оценки кривой обслуживания с применением тестовой последовательности приведен в статье [3] и использует двойственность описания процессов в мини-и макси-плюс алгебре [13]. В работе [6] доказано слабое свойство макси-плюс алгебры, которое позволяет рассчитать кривую обслуживания, если для системы известны входной и выходной потоки. Однако в работе приведены ограниченные сценарии применения доказанного свойства для оценки кривой обслуживания.

Отсутствие практических методов, позволяющих достоверно измерить кривую обслуживания реальной системы, является преградой для применения ТСИ. Те немногие группы, которые работают с ТСИ (прежде всего группа Ле Будека), уделяют основное внимание теоретическим проблемам сетевых исчислений, почти не занимаясь вопросами измерения характеристик в реальных системах.

Настоящая работа посвящена поиску эффективных практических методов оценки кривой обслуживания [3]. В разделе 2 приводятся необходимые теоретические обоснования известные в ТСИ для кривой обслуживания, и выводится ряд дополнительных следствий. Расчёты кривых обслуживания для простоты проводятся на примере кусочно-линейных входных и выходных потоков. Отдельно рассматривается проблема, которую мало затрагивают: выполнение расчётов на конечном интервале измерений – и предлагаются способы проведения таких расчётов. В работе анализируются существующие методы оценки кривой обслуживания и предлагается альтернативный метод, который применим, если известны максимальная кривая обслуживания и кривая поступления на входе и выходе системы. Проводится сравнительный анализ корректности оценки кривой обслуживания двумя методами на примере системы с известной кривой обслуживания.

## **2. Связь обратной макси-плюс свертки и мини-плюс свертки**

Будем рассматривать, как это принято в ТСИ, пассивную систему без потерь, которая на входе получает некий поток информации, обрабатывает его и выдает на выход. Под пассивной системой понимается такая система, где в выходной поток не «добавляются» никакие данные, помимо полученных на входе и где выходной поток никогда не превышает входного. В реальной пассивной системе без потерь в конечном итоге входной и выходной потоки сравниваются, так как система обрабатывает все входные данные. С математической точки зрения, в ТСИ потоком называется любая неотрицательная неубывающая функция, определенная при неотрицательном значении аргумента.

Для таких систем рассмотрим связь обратной макси-плюс свёртки (деконволюции) и мини-плюс свертки (конволюции) [3]:

**Свойство 1.** Пусть функции  $A(t)$  и  $B(t)$  являются потоками, а  $C(t)$  – некоторая функция. Тогда если

$$(1) \quad C \leq B \overline{\oslash} A,$$

то  $B \geq A \otimes C$ , где  $\overline{\oslash}$ ,  $\otimes$  – операторы обратной макси-плюс свертки и мини-плюс свертки соответственно [12].

Для свойства 1 доказана его справедливость только в одну сторону.

Проведём ряд вспомогательных рассуждений и для наглядности дальнейших выкладок развернем операторы  $\overline{\oslash}$  и  $\otimes$  в свойстве 1:

$$(2) \quad \begin{aligned} C(t) &\leq \inf_{s \geq 0} (B(t+s) - A(s)), \\ B(t) &\geq \inf_{0 \leq s \leq t} (A(t-s) + C(s)). \end{aligned}$$

Применительно к исследуемым ТСИ системам свойство 1 связывает входной поток  $A(t)$ , выходной поток  $B(t)$  и минимальную кривую обслуживания  $C(t)$ . В свойстве 1 левая часть первого неравенства может принимать отрицательные значения, что для кривой обслуживания реальной системы не имеет физического смысла. Поэтому в дальнейшем мы часто будем использовать только неотрицательные части соответствующих неубывающих функций  $f(t)$ , обозначаемые как  $f(t)^+$ .

Рассмотрим более подробно некоторые простые следствия формулы (1), необходимые для практической оценки минимальной кривой обслуживания. Они напрямую следуют из свойств макси-плюс свертки [13].

**Свойство 2.** Пусть функции  $A$  и  $B$  – потоки и  $C \leq B \overline{\oslash} A$ . Тогда  $C \leq B$ .

Доказательство непосредственно вытекает из анализа выражения (2). В самом деле, в силу неотрицательности  $A(t)$  имеем  $B(t) \geq B(t+s) - A(s)$  при любых  $t \geq 0$  и  $s \geq 0$ . Это неравенство будет справедливо и для точной нижней грани, а значит  $B(t) \geq C(t)$ . Что и требовалось доказать.

Отсюда также следует, что если  $A(t) \geq B(t)$  при  $t \geq 0$ , то  $C(t) \leq A(t)$  при  $t \geq 0$ .

**Свойство 3.** Если  $A(t)$  и  $B(t)$  являются потоками, то  $C(t)$  – неубывающая функция.

**Доказательство:**

Так как  $A(t)$  и  $B(t)$  – потоки, то при  $t_1 \leq t_2$  и  $s \in \mathbb{R}^+$ :

$$B(t_1 + s) - A(s) \leq B(t_2 + s) - A(s),$$

следовательно

$$\inf_{s \geq 0} (B(t_1 + s) - A(s)) \leq \inf_{s \geq 0} (B(t_2 + s) - A(s)),$$

т.е.  $\overline{B \otimes A}(t_1) \leq \overline{B \otimes A}(t_2)$  для  $0 \leq t_1 \leq t_2$ . Что и требовалось доказать.

Из того, что  $C(t)$  – неубывающая функция, следует, что  $C(t)^+$  также является потоком.

**Свойство 4.** Пусть функции  $A$  и  $B$  – потоки,  $A(0) = 0$  и  $B(0) = 0$  и  $C \leq \overline{B \otimes A}$ . Тогда будет верно неравенство  $B \geq A \otimes C^+$ .

**Доказательство:**

Согласно свойству 1,  $B \geq A \otimes C$ , а по свойству (2),  $C \leq B$ . Так как  $B$  – поток, то  $B \geq C^+$ . По свойству мини-плюс свертки [12, п. 3.1.6] если  $f, g$  потоки и  $f(0) = 0, g(0) = 0$ , то  $f \otimes g \leq f \wedge g$ , т.е.  $A \otimes C_1^+ \leq B$ . Что и требовалось доказать.

Свойства (1)–(4) предлагается использовать для оценки кривой обслуживания в рамках ТСИ.

### 3. Примеры расчета обратной макси-плюс свертки для кусочно-линейных функций

В практическом смысле свойство 1 означает, что если найдена некоторая кривая обслуживания  $\beta' = \overline{B \otimes A}$ , то она для данного  $A$  обеспечит выполнение неравенства  $B' \leq B$ , где  $B' = A \otimes \beta'$ . Иными словами, используя свойство 1, можно по входному и выходному потокам найти некоторую кривую обслуживания системы. К сожалению, нельзя гарантировать, что найденная кривая обслуживания будет «наилучшей», т.е. будет соответствовать сценарию наибольшего быстрогодействия системы, при сохранении ограничений на выходной поток, однако некоторые свойства системы она позволяет описать.

Проанализируем ограничения и применимость формулы (1) на примерах. В примерах будут использованы кусочно-линейные представления потоков и кривой обслуживания в виде аффинных функций:

$$(3) \quad \varphi(t) = \begin{cases} R(t-T), & t > T, \\ 0, & t \leq T; \end{cases}$$

$$(4) \quad \gamma(t)_{r,b} = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ rt + b, & t \geq 0. \end{cases}$$

В формулах (3), (4) применительно к описанию систем постоянные параметры  $T$ ,  $R$ ,  $r$ ,  $b$  – это задержка и скорость обработки данных в системе, скорость поступления и максимальная неравномерность во входном потоке соответственно.

Эти функции являются базовыми и могут быть найдены почти в любой литературе по ТСИ, например, в [1, 11, 12]. Преимущество кусочно-линейных функций по сравнению с гладкими заключается в том, что результаты для них получаются аналитически и нет необходимости прямого вычисления свёртки или обратной свёртки в мини/макси-плюс алгебре [18]. Недостатком является то, что кусочно-линейные кривые могут дать более консервативные результаты, чем гладкие функции, т.е. полученный диапазон ограничений может быть шире. Для расчета в примерах использовалась библиотека по ТСИ [15].

**Пример 1.** Пусть входной и выходной потоки описываются линейными функциями  $A(t) = kt + b_1$ ,  $B(t) = kt + b_2$ , и  $k$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  – константы.

Тогда обратная макси-плюс свертка имеет вид:

$$\inf_{s \geq 0} (k(t+s) + b_2 - ks - b_1) = kt + (b_2 - b_1).$$

Для случая  $b_1 > b_2$  вид  $\beta(t)$  приведен на рис. 1.

Данный пример может описывать систему, где скорость обработки близка скорости, с которой поступают данные, или равна ей.



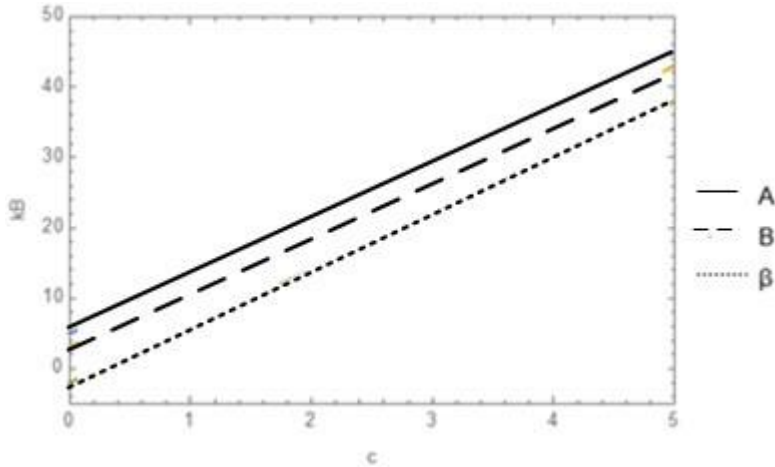


Рис. 1. Вид  $\beta(t)$  при  $k = 8, b_1 = 5, b_2 = 3$

**Пример 2.** Пусть потоки заданы функциями вида  $A(t) = kt + b_1, B(t) = k(t - T)^+$ , и  $T, b_1, k$  – константы. Тогда

$$\begin{aligned} \inf_{s \geq 0} (k(t - T + s)^+ - ks - b_1) &= \\ &= \inf_{0 \leq s < T} (k(t - T + s)^+ - ks - b_1) \wedge \inf_{s \geq T} (k(t + s) - ks - b_1) = k(t - T) - b_1. \end{aligned}$$

Для случая  $b_1 \geq 0$  вид  $\beta(t)$  приведен на рис. 2.

Данный пример является продолжением примера 1, однако здесь учитывается то, что в любой реальной системе обслуживание входного потока происходит не мгновенно, и тогда выходной поток всегда будет иметь большую неравномерность, чем входной [10]. Полученная кривая обслуживания  $\beta'(t)$  не имеет физического смысла при  $\beta' < 0$ , поэтому вместо неё в качестве кривой обслуживания следует использовать  $\beta'(t)^+$ .

**Пример 3.** Пусть  $A(t) = k_1t + b_1, B(t) = k_2(t - T)^+$ , где  $k_1, b_1, k_2$  – константы и  $b_1 \geq 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \inf_{s \geq 0} (k_2(t - T + s)^+ - k_1s - b_1) &= \\ &= \inf_{0 \leq s < T} (k_2(t - T + s)^+ - k_1s - b_1) \wedge \inf_{s \geq T} (k_2(t + s) - k_1s - b_1) = \\ &= \begin{cases} k_2(t - T) - b_1, & t > T, \\ k_1(t - T) - b_1, & t \leq T. \end{cases} \end{aligned}$$

В данном примере нарушается условие о пассивности системы, однако он будет использоваться далее для иллюстрации расчёта кривой обслуживания на ограниченном по времени наборе экспериментальных данных, что будет рассмотрено в разделе 4.

Вид  $\beta'(t)$  приведен на рис. 3.

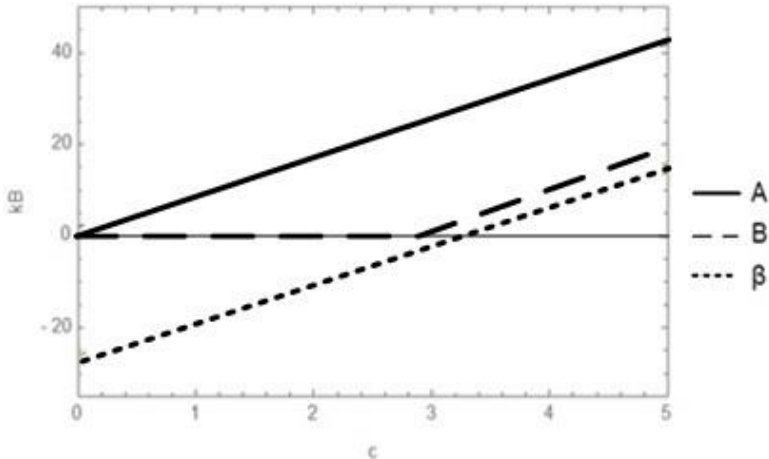


Рис. 2. Вид  $\beta(t)$  для случая  $k = 8, b_1 = 0, T = 3$

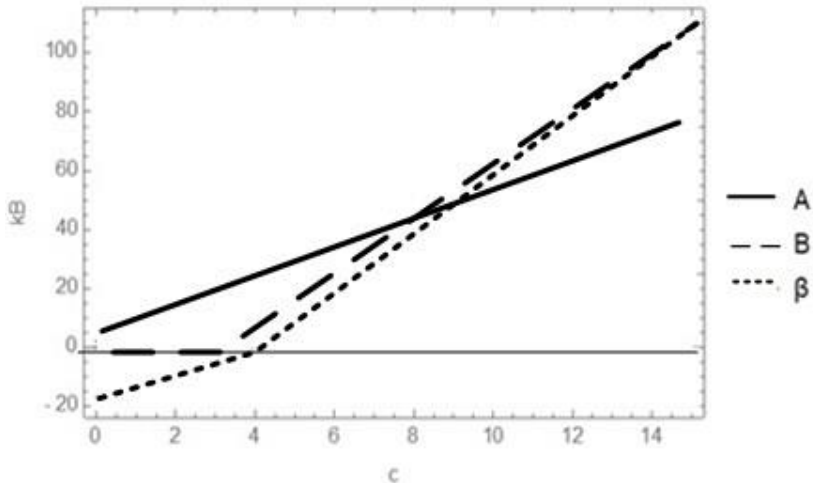


Рис. 3. Вид  $\beta(t)$  случая  $k_1=5, k_2=9, b_1 = 2$

#### 4. Эффект конечности экспериментальных данных

Свойства и примеры, приведенные выше, рассматривались без учета того, что в любой реальной системе данные ограничены по времени. Поэтому полезно определить, как само понятие ограничения на время для потока, так и рассмотреть свойства уравнения (1) потока с ограниченным временем наблюдения.

*Определение.* Если функция потока  $A(t)$  ограничена по времени наблюдения  $[S, T]$ , где  $S, T \geq 0$ , то будем считать, что вне его она постоянна:  $A(t) = A(S)$  при  $t < S$ , и  $A(t) = A(T)$  при  $t > T$ , где  $A(S)$  и  $A(T)$  понимаются в смысле правого и левого пределов соответственно [12].

Рассмотрим проблему ограниченного времени при экспериментальном измерении входного и выходного потока для уравнения (1).

Пусть имеются потоки  $A(t)$ ,  $B(t)$  с ограниченным временем наблюдения. Предположим, что система является пассивной. Тогда если в какой-то момент времени  $v_0$  данные перестают поступать на вход, то выходной поток через какое-то время станет постоянным и равным входному потоку:  $A(t)_{t > v_0} = Q$ ,  $B(t)_{t > v_1} = Q$ ,  $B(t)_{t < v_1} \leq A(t)$ ,  $v_1 \geq v_0$ .

В таком случае кривая обслуживания системы будет равна нулю для  $t \leq v_1$ . Это логически вытекает из понятия «минимальности» кривой обслуживания. Для ограниченного во времени сигнала, по свойству 1, получим кривую обслуживания  $\beta(t) \leq 0$ , что формально удовлетворяет правой части неравенства, но является тривиальным результатом и в практическом смысле ничего не дает.

Проблема измерения кривой обслуживания состоит в том, что, в отличие от входного и выходного потока, которые могут иметь конечную длительность, кривая обслуживания является свойством самой системы и должна быть определена для любого момента времени. Для её вычисления формально необходим входной сигнал бесконечной длительности, что невозможно в реальности. Поэтому мы рассмотрим подходы, направленные на то, чтобы ослабить влияние конечного интервала измерений на оценку кривой обслуживания.

Опишем первый из них. Пусть входной и выходной потоки  $A(t)$  и  $B(t)$  – кусочно-линейные функции, определенные при  $t \geq 0$ .

Вместо выходного потока  $B$  будем обрабатывать приведенный выходной поток  $B'$ , который определим следующим образом:

$$B'(t) = \begin{cases} B(t), & t \leq v_1, \\ +\infty, & t > v_1. \end{cases}$$

Введём  $\beta' = B' \bar{\otimes} A$ ,  $\beta' \leq B'$ . Такой прием использует положение о бесконечности выходного потока при конечности входного потока, и работает наподобие фильтра, отсекающего влияние на кривую обслуживания работы системы на холостом ходу.

Тогда, воспользовавшись свойством 1, зададим  $B'' = A \otimes \beta'$  и, учитывая свойство (8) из работы [12] ( $f \otimes g \leq f \wedge g$  для  $f(0) = 0$ ,  $g(0) = 0$ ), получим:

$$B'' \leq \beta' \wedge A \Rightarrow B' \geq B'' \Rightarrow B'' \leq B \text{ для } t < v_1.$$

Таким образом, получена кривая обслуживания, которая удовлетворяет условию  $B \geq A \otimes \beta$  для  $t \leq v_1$ . Пример с иллюстрацией подхода показан на рис. 4.

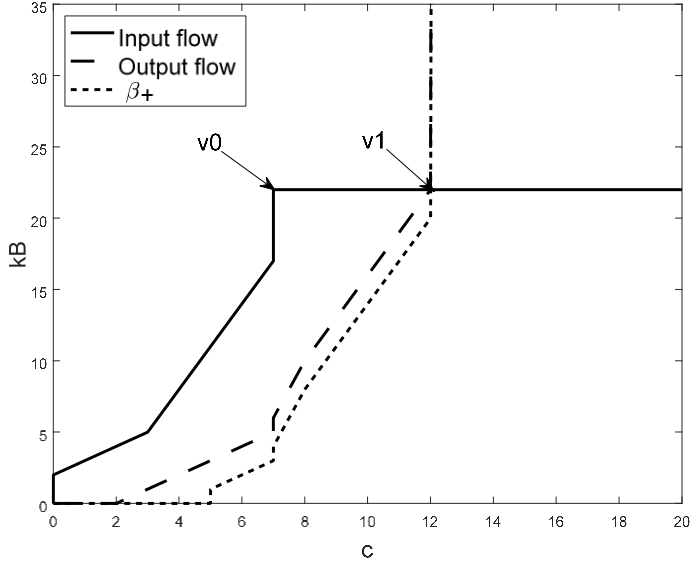


Рис. 4. Применение приведенного выходного потока для расчета кривой обслуживания

Второй подход заключается в том, чтобы остановить работу системы в момент времени  $v_0 \leq v_1$  и далее распространить состояние системы в точке  $v_0$  на интервал  $(v_0, +\infty)$ , сохраняя разность между входным и выходным потоком на том уровне, который был в точке  $v_0$ .

Пример для минимальной кривой обслуживания, иллюстрирующий второй подход, приведен на рис. 5. В нём для времени  $t > v_0$  используется линейная экстраполяция входного и выходного потока.

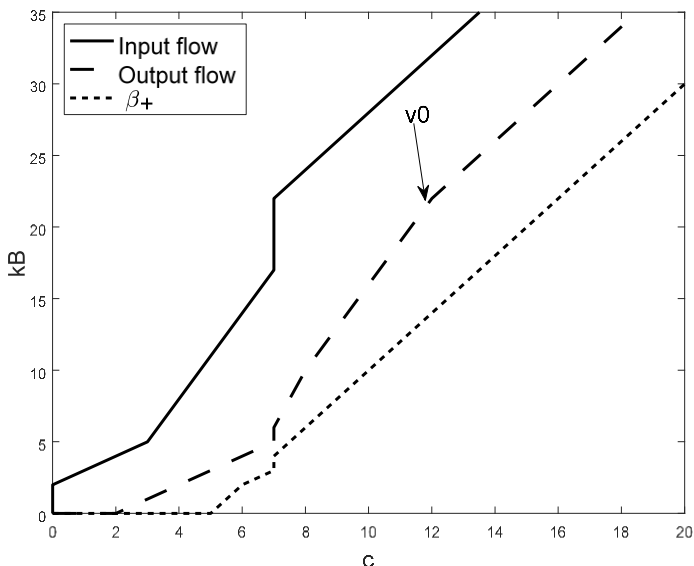


Рис. 5. Применение экстраполяции потоков для расчета кривой обслуживания

## 5. Поток и кривая поступления в оценке кривой обслуживания

Кроме уже указанных недостатков, применение уравнения (2) свойства (1) имеет особенность в том, что зависит от конкретной реализации потока, который всегда в реальном случае будет определен на ограниченной области определения и может вполне

оказаться, что выбранный интервал не в полной мере характеризует систему.

Для того чтобы уйти от отдельной реализации потока, ТСИ предлагает описание в виде кривой поступления [9]. В зависимости от того, ограничен поток кривой поступления сверху или снизу, говорят о верхней или нижней кривой поступления по аналогии с максимальной и минимальной кривой обслуживания. Чтобы в формуле (2) перейти к кривой поступления, докажем свойство монотонности оператора макси-плюс обратной свертки.

Пусть  $A_1(t)$ ,  $B_1(t)$  и  $A_2(t)$ ,  $B_2(t)$  – потоки и  $B_1(t) \leq B_2(t)$ ,  $A_1(t) \geq A_2(t)$ , тогда  $B_1 \bar{\circ} A_1 \leq B_2 \bar{\circ} A_1$  и  $B_1 \bar{\circ} A_1 \leq B_1 \bar{\circ} A_2$ .

Для доказательства достаточно рассмотреть уравнение (2) для каждой пары функций, в первом случае это будет  $\inf_{s \geq 0} (B_1(t+s) - A_1(s)) \leq \inf_{s \geq 0} (B_2(t+s) - A_1(s))$ . Второй случай доказывается аналогично.

С учетом монотонности оператора обратной свертки можно сформулировать следствие для свойства 1:

**Свойство 1 (модифицированное).** Пусть  $A(t)$ ,  $B(t)$  – входной и выходной потоки в системе,  $a$ ,  $b$  – минимальная нижняя и верхняя кривые поступления для входного и выходного потоков соответственно,  $\beta$  – кривая обслуживания системы. Тогда из  $B \bar{\circ} A \geq \beta$  следует, что  $b \bar{\circ} a \geq \beta$ .

Доказательство очевидно из свойства монотонности оператора  $\bar{\circ}$ .

Применение кривой поступления вместо реализаций потока позволяет восстановить характеристики системы без прямых измерений потоков, если известны оценки кривой поступления, полученные, например, из теоретических предпосылок; можно заметить, что замена потоков на их огибающие приведет к менее консервативной оценке кривой обслуживания.

## **6. Оценка минимальной кривой обслуживания для известных кривых поступления**

Подход к оценке кривой обслуживания, основанный на слабом свойстве, связывающем обратную макси-плюс и прямую

мини-плюс свертки, который, как показано в разделах 2 и 3, имеет ограниченное применение на практике.

Рассмотрим подход, который лишён указанных недостатков и позволяет получить оценку для кривой обслуживания, если известны максимальная кривая обслуживания и кривые поступления.

Для этого приведем теорему, связывающую кривую поступления на входе и выходе системы с кривыми обслуживания [12, теорема 1.6.2].

**Теорема 1.** Пусть входной поток с кривой поступления  $\alpha$  попадает в систему, имеющую максимальную кривую обслуживания  $\gamma$  и кривую обслуживания  $\beta$ . Тогда выходной поток будет ограничен кривой поступления  $\alpha^*$  равной:

$$(5) \quad \alpha^* = (\alpha \otimes \gamma) \oslash \beta.$$

**Доказательство.** см. [12].

**Замечание 1.** Равенство левой и правой части в данной теореме нужно понимать в контексте того, что результатом расчета для ТСИ является ограничение на некоторую характеристику. В доказательстве данной теоремы [12] указано, что

$$(6) \quad \underline{\alpha}^* \leq (\alpha \otimes \gamma) \oslash \beta,$$

где  $\underline{\alpha}^*$  минимальная верхняя («наилучшая») кривая поступления выходного потока, соответственно кривая поступления выходного потока, рассчитанная по формуле (5) в общем случае, не является «наилучшей» кривой поступления. Физический смысл уравнения (5) состоит в том, что если известны кривая поступления входного потока и кривые обслуживания, то можно рассчитать кривую поступления выходного потока. Однако данная кривая поступления не является единственно возможной и «наилучшим» в силу неравенства (6).

На практике реальная кривая поступления часто неизвестна, и в качестве оценки кривой поступления для входного  $\alpha$  и выходного  $\alpha^*$  потоков и максимальной кривой обслуживания  $\gamma$  применяют формулы

$$(7) \quad \underline{\alpha} = A \oslash A,$$

$$(8) \quad \underline{\alpha}^* = B \oslash B,$$

$$(9) \quad \gamma' = B \oslash A.$$

**Следствие 1.** Если на вход системы без потерь подается поток  $A$  с кривой поступления  $\alpha$ , на выходе регистрируется поток  $B$  с кривой поступления  $\alpha^*$ , определяемый теоремой 1, и максимальная кривая обслуживания  $\gamma$  системы выше, чем минимальная оценка  $\gamma'$  по формуле (9), то кривая обслуживания системы  $\beta$  будет не хуже, чем

$$(10) \beta \geq (\alpha \otimes \gamma') \oslash \alpha^* .$$

**Доказательство.** Рассмотрим уравнение (5). С учетом изотонности операторов прямой и обратной свертки и условия  $\gamma \geq \gamma'$ , будет справедливо неравенство:  $\alpha^* \geq (\alpha \otimes \gamma') \oslash \beta$ .

Далее воспользуемся свойством мини-плюс алгебры, связывающих прямую и обратные свертки [12]: если,  $f, g, h$  – потоки, то  $f \oslash g \leq h$  тогда и только тогда, когда  $f \leq g \otimes h$ . Сделаем замены  $h = \beta, f = (\alpha \otimes \gamma'), g = \alpha^*$  и учтём, что если  $\alpha, \gamma$  – потоки то  $\alpha \otimes \gamma'$  – также поток. Тогда получим, что  $\beta \geq (\alpha \otimes \gamma') \oslash \alpha^*$ . Что и требовалось доказать.

Уравнения (7), (8) дают минимальные оценки соответствующих величин. Поэтому, с учетом замечания 1, полученная оценка для кривой обслуживания по формуле (10) не является строгой. Кривая поступления выходного потока, полученная, например, по формуле (8) на некоторой реализации входного потока, может не совпадать с кривой поступления, рассчитанной по формуле (6). Следовательно, минимальную кривую поступления выходного потока нельзя без предварительного критического анализа использовать для расчета кривой обслуживания.

Напомним, что на практике используются не кривые поступления и кривые обслуживания, рассчитанные на бесконечной области по формулам прямой и обратной свертки, а их оценки, полученные на конечном интервале времени. Исключением может быть лишь кривая поступления входного потока, где можно сформировать данные (входной поток) с наперед известными характеристиками.

Покажем, что в этом случае следствие 1 остается верным.

**Лемма 1.** Неравенство  $\beta \geq (\alpha \otimes \gamma') \oslash \alpha^*$  в следствии 1 остается верным, если вместо истинных значений используются



оценки кривой поступления потока и максимальной кривой обслуживания, полученные на ограниченном интервале наблюдений.

**Доказательство.**

Пусть в системе в течение ограниченного времени наблюдается поток  $A$  и выходной поток  $B$ . Обозначим потоки с областью определения  $t \in [0, T]$  как  $A'$  и  $B'$ . Очевидно, что на этом интервале  $A = A'$  и  $B = B'$ .

В операции обратной свертки  $(f \oslash g)(t) = \sup_{u \geq 0} (f(t+u) - g(u))$  включён и интервал  $t \in [0, T]$ .

Тогда  $A \oslash A \geq A' \oslash A'$ ,

$B \oslash B \geq B' \oslash B'$ ,

$B \oslash A \geq B' \oslash A'$ .

Обозначим полученные оценки как  $\alpha'$ ,  $\alpha^{*}$ ,  $\gamma'$ ; они также ограничены по времени наблюдения на интервале  $t \in [0, T]$ .

Так как операторы прямой и обратной свертки являются изотонными [12] и операция обратной свертки включает интервал  $t \in [0, T]$ , то  $\beta \geq (\alpha \otimes \gamma') \oslash \alpha^{*} \geq (\alpha' \otimes \gamma') \oslash \alpha^{*}$ . Что и требовалось доказать.

На графике (рис. 6) приведен пример расчета кривой обслуживания с применением следствия 1 и леммы 1. В примере учитывается ограничение на область определения потоков, время измерений составляет 8 с.

Серым цветом и толщиной выделены величины максимальной задержки, вычисленной непосредственно по входному и выходному потоку (внизу графика) и по минимальной кривой обслуживания и кривой поступления потока (вверху). Они составляют 1,5 с и 1,33 с соответственно. Отличие является результатом использования оценок кривой поступления входного потока и кривых обслуживания вместо их реальных значений.

На практике для потоков с ограниченным временем наблюдения оценка для кривой обслуживания, полученная по следствию 1, часто совпадает с минимальной оценкой максимальной кривой обслуживания. Это является результатом того, что для обеих величин рассчитывается минимальная граница, которая для неполных данных может совпадать.

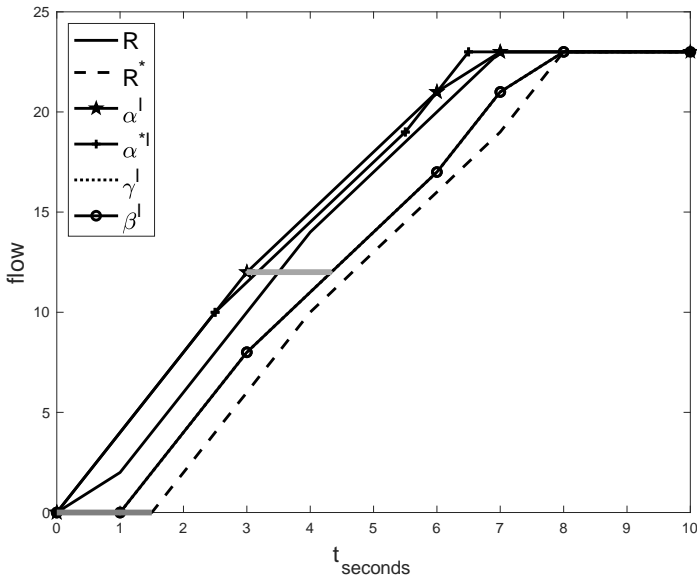


Рис. 6. Пример расчета минимальной кривой обслуживания

## 7. Сравнение методов оценки кривой обслуживания

Приведем сравнительный анализ двух методов расчета кривой обслуживания, для чего рассмотрим систему с известной заранее кривой обслуживания.

Пусть систему с истинной кривой обслуживания  $\beta_{true}$ , описываемую аффинной функцией по формуле (3), подается тестовый входной поток и пусть на выходе системы регистрируется выходной поток. По формулам (7), (8) рассчитаны оценки минимальных кривых поступления потоков (входного  $\underline{\alpha}$  и выходного  $\underline{\alpha}^*$ ) и наименьшей максимальной кривой обслуживания  $\gamma'$  (9), используемой в методе (10).

На рис. 7 приведены  $\underline{\alpha}$  и  $\underline{\alpha}^*$  для трех реализаций входных потоков. Наклон огибающей у этих потоков соответственно больше наклона кривой обслуживания, равен ей и меньше её. Истинная кривая обслуживания  $\beta_{true}$  приведена для сравнения. Далее для трех реализаций входных потоков по формуле (1) рассчитаны

кривые обслуживания  $\beta_1 \dots \beta_3$  и аналогично по формуле (10) рассчитаны кривые обслуживания  $\beta_{1a} \dots \beta_{3a}$  (рис. 7б); потоки в системе для последнего случая приводились к виду, учитывающему конечность интервала наблюдения (п. 4).

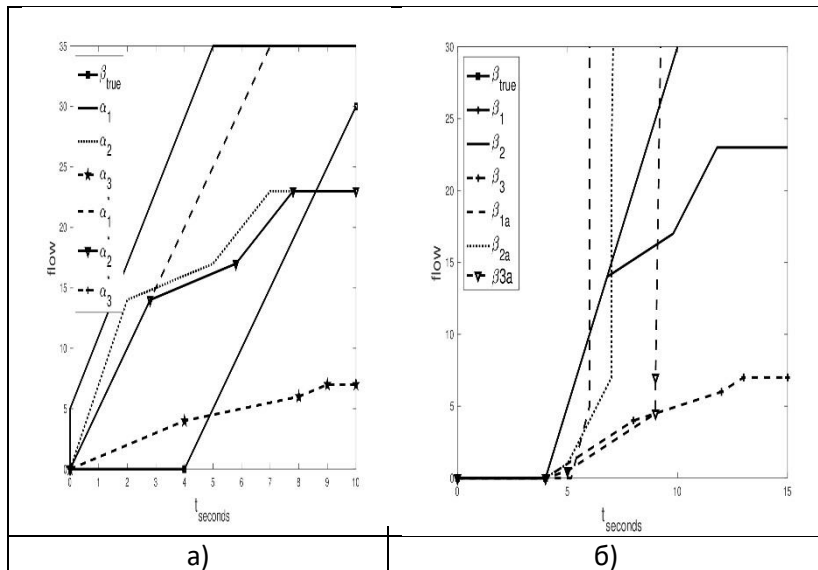


Рис. 7. Пример расчета минимальной кривой обслуживания: а) истинная кривая обслуживания и три реализации кривых поступлений; б) результаты расчета кривых обслуживания

На рис. 7б видно, что кривые обслуживания, рассчитанные по формуле (10), дают более близкую оценку для кривой обслуживания.

Однако, по нашим наблюдениям, на практике кривая обслуживания, рассчитанная по формуле (10), часто лежит левее реальной кривой обслуживания, что приводит к заниженной оценке характеристик, как это было в примере на рис. 6. Это может быть связано с тем, что рассчитанные оценки кривой поступления лежат выше минимальной верхней кривой поступления. Данного эффекта не наблюдалось для кривой обслуживания, посчитанной по формуле (1).

Также можно видеть, что если поток достаточно интенсивен, т.е. если на интервале наблюдения наклон его огибающей в основном больше, чем у кривой обслуживания, то, благодаря фильтрующему свойству мини-плюс свертки, получается лучшее соответствие с кривой обслуживания.

## **8. Заключение**

Задача оценки характеристик киберфизической системы в контексте выбора ее архитектуры и обоснование безопасности обычно решается на начальных этапах создания системы, в процессе ее разработки и испытания. Однако она и в дальнейшем не теряет своей актуальности и становится частью задач диагностики, обеспечения надежности и поддержания безопасности функционирования системы.

Одной из важнейших характеристик безопасности является доступность, а в качестве метрики доступности можно принять задержку передачи и обработки данных [4]. Например, в интеллектуальных транспортных системах, в приложении к которым решаются задачи оценки доступности, эта метрика в ряде приложений естественным образом определяет доступность. Нельзя допустить неконтролируемого ухода задержки за верхние границы; в случае превышения задержки система должна перейти в некоторое безопасное состояние: например, остановить транспортное средство, активизировать наиболее безопасный алгоритм автономного вождения и т.д. Это означает что временные параметры обработки информации и прохождения команд управления (задержки) в системах, обеспечивающих интеллектуальную транспортную среду, и им подобные должны быть заданы и должны постоянно контролироваться.

Кривая обслуживания в ТСИ – это одна из основных характеристик системы, определяющая её быстродействие, т.е. доступность, поэтому, зная кривую обслуживания, можно достаточно просто диагностировать состояние системы. Однако эта характеристика очень трудна для оценки.

В работе рассмотрено два метода оценки кривой обслуживания. Первый метод основан на использовании слабого свойства мини-плюс свертки (формула (1)), второй основан на доказанном

нами следствии из теоремы 1 (формула (10)), которая связывает реализацию кривой поступления выходного потока с максимальной кривой обслуживания и кривой поступления входного потока. Оба метода позволяют оценить кривую обслуживания. Первый метод на практике дает более «правую», консервативную границу для кривой обслуживания и завышенную оценку задержку. Второй метод для экспериментов с известной кривой обслуживания показал лучшее совпадение формы кривой обслуживания, но для некоторых тестовых последовательностей приводит к завышению оценки кривой обслуживания и занижению оценки задержки.

Отдельно рассматривается проблема проведения расчётов по данным измерений на конечном интервале времени, так как формулы мини- и макси-плюс свёрток предполагают проведение расчётов на бесконечном интервале времени. В работе предлагается два способа расчетов, которые не вносят искажений в имеющиеся данные. В обоих из них выходной поток доопределяется за пределами интервала измерений. В первом он заменяется на приведённый выходной поток с бесконечным большим значением за пределами интервала наблюдений. Во втором методе входной и выходной потоки экстраполируются за пределами интервала измерений.

Мы полагаем, что пути к улучшению методов оценки кривой обслуживания лежат в использовании дополнительных допущений, например, о виде функций, к которым принадлежат кривые обслуживания, или об априорных свойствах системы. Еще одним способом улучшения оценки может стать применение тестирующих потоков специального вида, с интенсивностью потока сравнимой с ожидаемым наклоном кривой обслуживания.

Чтобы разработать практически применимую методику, необходимо провести значительный объем экспериментов, в том числе измерений на реальных объектах, что составляет задачу отдельного исследования.

**Литература**

1. ВИШНЕВСКИЙ В.М., ДУДИН А.Н., КЛИМЕНОК В.И. *Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях.* – М.: «ТЕХНОСФЕРА», 2018. – 564 с.
2. КОВАЛЕНКО И.Н. *Расчет вероятностных характеристик систем. Задачи расчета вероятностных характеристик систем. Исследование систем в общем виде. Применение метода малого параметра.* – М.: URSS, 2023. – 104 с. – ISBN 978-5-9710-5094-0.
3. ПРОМЫСЛОВ В.Г., СЕМЕНКОВ К.В. *Применение метода Network Calculus для расчета временных характеристик систем управления с циклическим алгоритмом работы // Проблемы управления.* – 2021. – №4. – С. 50–65. – URL: [http://pu.mtas.ru/archive/Promyslov\\_pu\\_421.pdf](http://pu.mtas.ru/archive/Promyslov_pu_421.pdf).
4. BAYBULATOV A. PROMYSLOV V., *Industrial Control System Availability Assessment with a Metric Based on Delay and Dependency // IFAC-PapersOnLine.* – 2021. – Vol. 54, Iss. 13. – P. 472–476.
5. BOUILLARD A., *Individual Service Curves for Bandwidth-Sharing Policies Using Network Calculus // IEEE Networking Letters.* – 2021. – Vol. 3, No. 2. – P. 80–83. – DOI: 10.1109/LNET.2021.3067766.
6. BOUILLARD A., JOUHET L., THIERRY E., “Service curves in Network Calculus: dos and don’ts”. RR-7094, INRIA. 2009, pp.24. inria-00431674
7. BOUILLARD A. *Algorithms and efficiency of Network calculus.* – Paris: École Normale Supérieure, 2014.
8. BOYER M., DAIGMORTE H. *Improved Service Curve for Element With Known Transmission Rate // IEEE Networking Letters.* – 2023. – Vol. 5, No. 1. – P. 46–49. – DOI: 10.1109/LNET.2022.3150649.
9. CRUZ L. *A calculus for network delay. I. Network elements in isolation // IEEE Trans. Inform. Theory.* – 1991. – Vol. 37, No. 1. – P. 114–131. – DOI: 10.1109/18.61109.

10. CRUZ L. *A calculus for network delay. II. Network analysis* // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1991. – Vol. 37, No. 1. – P. 132–141. – DOI: 10.1109/18.61110.
11. FIDLER M. *Survey of deterministic and stochastic service curve models in the network calculus* // IEEE Commun. Surv. Tutorials. – 2010. – Vol. 12, No. 1. – P. 59–86. – DOI: 10.1109/SURV.2010.020110.00019.
12. LE BOUDEC J-Y., THIRAN P. *Network Calculus: A Theory of Deterministic Queuing Systems for the Internet*. – Springer Verlag, Online Version of the Book, LNCS 2022. – 245 p.
13. LIEBEHERR J. *Duality of the Max-Plus and Min-Plus Network-Calculus* // Foundations and Trends in Networking. – 2017. – Vol. 11, No. 3–4. – P. 139–282. – DOI: 10.1561/13000000059.
14. LIEBEHERR J., FIDLER M. AND VALAEE S. *A System-Theoretic Approach to Bandwidth Estimation* // IEEE/ACM Trans. on Networking. – 2010. – Vol. 18, No. 4. – P. 1040–1053. – DOI: 10.1109/TNET.2009.2035115.
15. *Modular Performance Analysis with Real-Time Calculus*. <https://www.mpa.ethz.ch> (дата обращения: 12.07.2023).
16. SIMON I. *Recognizable sets with multiplicities in the tropical semiring* // Mathematical Foundations of Computer Science. Lecture Notes in Computer Science. – 1988. – Vol. 324. – P. 107–120.
17. THIELE L., CHAKRABORTY S., NAEDELE M. *Real-time calculus for scheduling hard real-time systems* // Proc. of the IEEE Int. Symposium on Circuits and Systems. Emerging Technologies for the 21st Century. (IEEE Cat No.00CH36353), Geneva, Switzerland, 2000. – Vol. 4. – P. 101–104. – DOI: 10.1109/ISCAS.2000.858698.
18. ZHOU B., HOWENSTINE I., LIMPRAPAIPONG S., CHENG L. *A Survey on Network Calculus Tools for Network Infrastructure in Real-Time Systems* // IEEE Access. – 2020. – Vol. 8. – P. 223588–223605. – DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3043600.

## EVALUATION OF THE INTRINSIC CHARACTERISTICS OF A CYBERPHYSICAL SYSTEM BY THE METHOD OF NETWORK CALCULUS

**Vitaly Promyslov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Leading researcher (vp@ipu.ru).

**Kirill Semenkov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior researcher (semenkovk@ipu.ru).

**Elena Jharko**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Candidate of Technical Sciences, Senior researcher (zharko@ipu.ru).

*Abstract. The paper analyzes the evaluation of the system's own characteristics, the so-called service curve, set in the form of deterministic constraints linking the input of the system and the minimum flow at the output of the system. The service curve estimation is considered within the framework of the Network Calculus method and mini-maxi plus algebra approaches, which form the mathematical basis of the method. To evaluate the service curve, one previously developed method related to the duality of mini and maxi plus algebra transformations is taken, and a new method based on the connection of two types of mini and maxi service curves is proposed. The methods are considered taking into account their application to real systems and existing limitations on measurement capabilities, in particular the finiteness of the definition of the observed data flows. The analysis of the both methods shows that each of the them gives an acceptable service curve, but they need improvement for the calculated service curve to correspond to the maximum system performance mode.*

**Keywords:** cyberphysical system, Network Calculus, mini/maxi plus algebra, service curve, availability, safety and security.

УДК 519.6

ББК 30в6

DOI: 10.25728/ubs.2023.105.1

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.Г. Лебедевым.*

*Поступила в редакцию 21.07.2023.*

*Опубликована 30.09.2023.*