L_1 - УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРЕХОДНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ ВОЗМУЩЕННЫХ ВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФУЗИЙ[1]

Биттер И. И.[2]
(*Международная лаборатория стохастического анализа и его приложений, НИУ ВШЭ, Москва*)

Получен результат об L_1-устойчивости возмущений вырожденных диффузии при слабых условиях регулярности на коэффициенты. В частности, рассматриваемые коэффициенты сноса могут быть неограниченными с не более чем линейным ростом, и оценки отображают перенос начальных условий неограниченным сносом через соответствующий детерминированный поток. Подход основан на изучении расстояния в L_1-L_1-метрике между переходными плотностями исходного и возмущенного вырожденных диффузионных процессов с использованием метода параметрикса в форме МакКина – Зингера.

Ключевые слова: вырожденный диффузионный процесс, неограниченный тренд, параметрикс, возмущенная диффузия, плотность.

1. Введение

1.1. Постановка задачи

Для фиксированного временного горизонта $T > 0$ будем рассматривать вырожденный диффузионный процесс на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, определенный системой уравнений

$$(1)\qquad \begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t, Y_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t, Y_t\right) dW_t, \\ dY_t = X_t dt, t \in [0, T], \end{cases}$$

где W_t – d-мерное броуновское движение на некотором полном вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$, удовлетворяющем стандартным условиям. Инфинитезимальный генератор процесса (1) в момент времени u для всех функций $\varphi \in C_0^2\left(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R}\right)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, определен следующим образом:

---

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант №20-11-20119. Автор выражает благодарность Конакову В.Д. за ценное обсуждение содержания статьи.*

[2] *Илья Игоревич Биттер,* (*ilya.bitter@yandex.ru*).

$$L_u\varphi(x,y)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}(u,(x,y))\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x_i\partial x_j}+$$
$$+\sum_{i=1}^{d}b_i(u,(x,y))\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{d}x_i\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y_i}.$$

Для заданного параметра $\varepsilon>0$ введём возмущенный аналог процесса (1) с динамикой

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon=b_\varepsilon\left(t,X_t^\varepsilon,Y_t^\varepsilon\right)dt+\sigma_\varepsilon\left(t,X_t^\varepsilon,Y_t^\varepsilon\right)dW_t, \\ dY_t^\varepsilon=X_t^\varepsilon dt, t\in[0,T]. \end{cases} \tag{2}$$

Коэффициенты $b_\varepsilon,\sigma_\varepsilon$ удовлетворяют по меньшей мере тем же предположениям, что и b,σ, а также в некотором смысле близки к ним, когда ε мал.

Известно, что при сформулированных ниже условиях существует единственное слабое решение (1), которое допускает переходную плотность $p(t,s,(x,y),(x',y'))$ [4]. Более того, применяя метод параметрикса [3, 6, 7], можно показать [4], что переходная плотность удовлетворяет двусторонней гауссовской оценке с $C\geqslant 1$

$$p_{C^{-1}}(t,s,(x,y),(x',y'))\leqslant p(t,s,(x,y),(x',y'))\leqslant$$
$$\leqslant p_C(t,s,(x,y),(x',y')),$$

где

$$p_C(t,s,(x,y),(x',y'))=$$
$$=\frac{C}{(s-t)^{2d}}\exp\left(\frac{-\left|\theta^1_{t,s}(x',y')-x\right|^2}{C(s-t)}+\frac{-\left|\theta^2_{t,s}(x',y')-y\right|^2}{C(s-t)^3}\right),$$

а поток $\theta_{t,s}(x',y')=\left(\theta^1_{t,s}(x',y'),\theta^2_{t,s}(x',y')\right)$ при фиксированных $s\in[0,T]$, $(x',y')\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ и $t\leqslant s$ удовлетворяет системе ОДУ

$$\begin{cases} \dot\theta^1_{t,s}(x',y')=b\left(t,\theta_{t,s}(x',y')\right), \\ \dot\theta^2_{t,s}(x',y')=\theta^1_{t,s}(x',y'), \\ \theta^1_{s,s}(x',y')=x',\ \theta^2_{s,s}(x',y')=y'. \end{cases}$$

Диффузии с динамикой (1) и неограниченным сносом появляются во многих прикладных задачах. Важное приложение имеется, например, в финансовой математике. Часто очень полезно знать, как изменение волатильности σ воздействует на плотность, и, тем самым, на цену соответствующего азиатского опциона [5]. Другое важное приложение включает случай сглаживания с помощью операции свёртки. Этот особый вид возмущений полезен для изучения ошибки между плотностями вырожденной диффузии типа (1) с гёльдеровыми коэффициентами (или кусочно гладким ограниченными сносом) и её схемы Эйлера – Маруямы. Для этой задачи некоторые результаты о сходимости могут быть найдены в [10], а также в [1, 6] для процессов с невырожденной динамикой. Таким образом, результаты об устойчивости полезны в любой прикладной области, где коэффициенты диффузии и сноса могут быть неверно специфицированы.

Целью настоящей работы является расширение результатов [9] на случай нелинейного неограниченного сноса с не более чем линейным ростом. Более того, условие L_∞-близости коэффициентов заменяется более слабым, а именно L_1-близостью.

1.2. Предположения и основной результат

Основным объектом исследования является разность между переходыми плотностями процесса (1) и его возмущённого аналога (2). Похожая проблема для процессов с ограниченным сносом изучалась в [6]. В настоящей работе рассматривается более широкий класс процессов с неограниченным коэффициентом сноса. В данной постановке доказывается, что разность между p и p_ε допускает верхнюю оценку в терминах L_1-L_1-нормы. Для вероятностной меры $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ на $\mathbb{R}^{2d}$ определим

$$||f\left((x,y),(x',y')\right)||_{L_1^{\mu}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d, L_1(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d))} = \tag{3}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} \left|f\left((x,y),(x',y')\right)\right| dx'dy'\mu_1(dx)\mu_2(dy).$$

В дальнейшем для краткости будем обозначать пространство $L_1^{\mu}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, L_1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$ как L_1. Введем также величины, отвечающие за отклонения коэффициентов:

$$\Delta_{\varepsilon,b}(t,s) = ||\mathbb{E}_{\mathfrak{B}}\left(|(b-b_\varepsilon)|_1 (u,\theta_{u,s}(x',y'))\right)\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))||_{L_1}$$
$$\Delta_{\varepsilon,\sigma}(t,s) = ||\mathbb{E}_{\mathfrak{B}}\left(|(\sigma-\sigma_\varepsilon)|_\gamma (u,\theta_{u,s}(x',y'))\right)\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))||_{L_1},$$

где
$$\mathbb{E}_{\mathfrak{B}}(\phi(u)) = \int_t^s \mathfrak{B}(u;1,\frac{\gamma}{2})\phi(u)\,du,$$

а для произвольного положительного параметра β

$$|f(x,y)|_\beta = |f(x,y)| + \sup_{(x',y')\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d,(x',y')\neq(x,y)} \frac{|f(x',y')-f(x,y)|}{|x-x'|^\beta + |y-y'|^{\beta/3}}.$$

Здесь $\mathfrak{B}(u;1,\frac{\gamma}{2})$ – плотность бета-распределения на отрезке $[t,s]$, $0 \leqslant t < s \leqslant T$, а $\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))$ – переходная плотность некоторого вспомогательного диффузионного процесса. Отметим, что

$$\mathfrak{B}(u;\alpha,\beta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}(u-t)^{\alpha-1}(s-u)^{\beta-1}(s-t)^{1-\alpha-\beta},\ u\in[t,s],$$

где $B(\alpha,\beta)$ – бета-функция. В данном случае естественно рассматривать возмущения в смысле метрики L_1 и использовать бета-плотность в качестве весовой функции по временной переменной. Этот выбор согласован с бета-функцией, появляющейся в верхних оценках для членов ряда параметрикса. В силу неравенства Йенсена при $\alpha \leqslant 1$

$$|| \left[\mathbb{E}_{\mathfrak{B}}\left(|(b-b_\varepsilon)|_1 (u,\theta_{u,s}(x',y'))\right)\right]^\alpha \bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))||_{L_1} \leqslant$$
$$\leqslant (s-t)^\alpha \Delta_{\varepsilon,b}^\alpha.$$

Аналогичное соотношение верно и для $\Delta_{\varepsilon,\sigma}$.

Перечислим необходимые условия на коэффициенты процессов (1) и (2). Предположения будут выполняться для всех (x,y), $(x',y')\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$, $t\leqslant s\in[0,T]$.

(A1) Матрицы $a=\sigma\sigma^*$ и $a_\varepsilon=\sigma_\varepsilon\sigma_\varepsilon^*$ равномерно эллиптичны с коэффициентом $\Lambda\geqslant 1$:
$$\Lambda^{-1}|w|^2 \leqslant \langle a(t,(x,y))w,w\rangle \leqslant \Lambda|w|^2, \quad \forall w\in\mathbb{R}^d.$$
$$\Lambda^{-1}|w|^2 \leqslant \langle a_\varepsilon(t,(x,y))w,w\rangle \leqslant \Lambda|w|^2, \quad \forall w\in\mathbb{R}^d.$$

(A2) Коэффициенты диффузии и сноса процессов (1) и (2) соответственно гёльдеровы и липшицевы в пространстве:

$$\left|\sigma(t,(x,y))-\sigma(t,(x',y'))\right|+\left|\sigma_\varepsilon(t,(x,y))-\sigma_\varepsilon(t,(x',y'))\right|\leqslant$$
$$\leqslant C\left(\left|x-x'\right|^\gamma+\left|y-y'\right|^{\gamma/3}\right),$$
$$\left|b(t,(x,y))-b(t,(x',y'))\right|+\left|b_\varepsilon(t,(x,y))-b_\varepsilon(t,(x',y'))\right|\leqslant$$
$$\leqslant C\left(\left|x-x'\right|+\left|y-y'\right|\right).$$

Кроме того, коэффициенты сноса ограничены в нуле:

$$|b(t,(\mathbf{0},\mathbf{0}))|+|b_\varepsilon(t,(\mathbf{0},\mathbf{0}))|\leqslant C,\ \mathbf{0}\in\mathbb{R}^d.$$

Очевидно, что при выполнении условия липшицевости ограниченность в нуле для коэффициентов b и b_ε эквивалентна не более чем линейной скорости роста по пространственной переменной:

$$|b(t,(x,y))|+|b_\varepsilon(t,(x,y))|\leqslant C\left(1+|x|+|y|\right).$$

Таким образом, каждая из следующих систем дифференциальных уравнений имеет единственное решение $\dot\theta_{t,s}(x,y) = (\dot\theta^1_{t,s}(x,y),\dot\theta^2_{t,s}(x,y))$ и $\theta^\varepsilon_{t,s}(x,y) = (\theta^{1,\varepsilon}_{t,s}(x,y),\theta^{2,\varepsilon}_{t,s}(x,y))$ соответственно:

$$\begin{cases} \dot\theta^1_{t,s}(x,y)=b\left(t,\theta_{t,s}(x,y)\right), \\ \dot\theta^2_{t,s}(x,y)=\theta^1_{t,s}(x,y), \\ \theta^1_{s,s}(x,y)=x,\ \theta^2_{s,s}(x,y)=y \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \dot\theta^{1,\varepsilon}_{t,s}(x,y)=b_\varepsilon\left(t,\theta^\varepsilon_{t,s}(x,y)\right), \\ \dot\theta^{2,\varepsilon}_{t,s}(x,y)=\theta^{1,\varepsilon}_{t,s}(x,y), \\ \theta^{1,\varepsilon}_{s,s}(x,y)=x,\ \theta^{2,\varepsilon}_{s,s}(x,y)=y. \end{cases}$$

(A3) (**Почти эквивалентность потоков.**)

Существует положительная константа C такая, что для $0\leqslant t\leqslant s\leqslant T$ равномерно по пространству

$$\int_t^s\left|(b_\varepsilon-b)\right|(u,(\theta_{u,s}(x',y')))du\leqslant C\sqrt{s-t}.$$

Отметим, что константы, появляющиеся в предположениях, не зависят от фиксированного параметра $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что **(A)** выполняется, когда условия **(A1)–(A3)** в силе.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть p и p_ε являются переходными плотностями вырожденных процессов* (1) *и* (2) *при выполнении условия **(A)**. Тогда существует константа $C > 0$, зависящая только от T, d и констант в предположениях, такая что для всех $(t, (x, y))$, $(s, (x', y')) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{2d}$, $t \leqslant s$*

$$|| \left(p - p_\varepsilon\right) \big(t, s, (x, y), (x', y')\big) ||_{L_1^\mu(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, L_1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))} \leqslant$$
$$\leqslant C(s-t)^{\gamma/2} \Bigg[\Big(M^1_{\varepsilon,\alpha,2\gamma/3} + \bar{M}^1_{\varepsilon,\alpha,2\gamma/3} \Big) +$$
$$+ \frac{1}{\delta - \gamma/2} \left(M^2_{\varepsilon,\alpha,\delta} + \bar{M}^2_{\varepsilon,\alpha,\delta} \right) + \left(M^3_{\varepsilon,\alpha} + \bar{M}^3_{\varepsilon,\alpha} \right) \Bigg].$$

Здесь для параметров $\alpha \geqslant 0$, $\delta \in (\gamma/2, \gamma)$ введены диагональные максимумы

$$M^1_{\varepsilon,\alpha,2\gamma/3} = \max_{(s-t) \leqslant \alpha} (s-t)^{\gamma/6} \Delta^{\gamma/3}_{\varepsilon,b},$$
$$M^2_{\varepsilon,\alpha,\delta} = \max_{(s-t) \leqslant \alpha} \Delta^{\gamma-\delta}_{\varepsilon,\sigma},$$
$$M^3_{\varepsilon,\alpha} = \max_{(s-t) \leqslant \alpha} (\Delta_{\varepsilon,b} + \Delta_{\varepsilon,\sigma}).$$

Кроме того, для каждого максимума $\bar{M}^i = \max\limits_{(s-t) > \alpha} \ldots$ – соответствующие внедиагональные максимумы.

Замечание 1. Предположим, что $\Delta_{\varepsilon,b} + \Delta_{\varepsilon,\sigma} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$. Тогда правая часть последнего неравенства стремится к 0 при подходящем выборе $\alpha(\varepsilon) \to 0$.

В дальнейшем будем обозначать $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $| \cdot |$ евклидово скалярное произведение и норму на $\mathbb{R}^d$. Также $D_x^\eta = \prod\limits_{i=1}^{d} D_{x_i}^{\eta_i}$ будет означать дифференцирование относительно мультииндекса $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_d) \in \mathbb{N}^d$, для которого $|\eta| = \sum_{i=1}^d \eta_i$. Обозначение C соответствует положительной константе, которая зависит только от введённых предположений и величин T, d; в контексте приводимых доказательств её значение может изменяться от строки к строке.

2. Метод параметрикса для плотностей вырожденных диффузий

Предположим, что выполняются **(A1)** и **(A2)**. Эти условия влекут существование переходных плотностей диффузий (1) и (2) (см. [4]). Более того, с помощью метода параметрикса указанные переходные плотности можно представить в виде суммы бесконечных рядов, члены которых допускают гауссовские верхние оценки [4, 6, 9]. В данном разделе приведены основные шаги построения ряда параметрикса для процесса (1).

2.1. Аппроксимирующий процесс

Зафиксируем точку $(x', y') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ и рассмотрим процесс $(\tilde{X}_u, \tilde{Y}_u)_{u \in [t,s]}$ с динамикой

$$\begin{cases} d\tilde{X}_u = b\left(u, \theta_{u,s}(x', y')\right) du + \sigma\left(u, \theta_{u,s}(x', y')\right) dW_u, \\ d\tilde{Y}_u = \tilde{X}_u du, \\ \tilde{X}_t = x, \, \tilde{Y}_t = y. \end{cases} \tag{4}$$

Этот процесс имеет генератор

$$\tilde{L}_u \phi(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(u, \theta_{u,s}(x', y')) \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{d} b_i(u, \theta_{u,s}(x', y')) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{d} x_i \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y_i}.$$

Переходная плотность $\tilde{p}$ процесса (4) является гауссовской с ковариационной матрицей

$$\tilde{\mathcal{C}}_u(x', y') = \begin{pmatrix} \int_t^u a(v, \theta_{v,s}(x', y')) dv & \int_t^u (u - v) a(v, \theta_{v,s}(x', y')) dv \\ \int_t^u (u - v) a(v, \theta_{v,s}(x', y')) dv & \int_t^u (u - v)^2 a(v, \theta_{v,s}(x', y')) dv \end{pmatrix}$$

и средним

$$\tilde{\theta}_u(x',y') = \begin{pmatrix} x + \int_t^u b(v,\theta_{v,s}(x',y'))\,dv \\ y + x(u-t) + \int_t^u \int_t^v b(w,\theta_{w,s}(x',y'))\,dw\,dv \end{pmatrix},$$

а также удовлетворяет обратному уравнению Колмогорова:

$$(5)\quad \begin{cases} \partial_u \tilde{p}(u,s,(x,y),(x',y')) + \tilde{L}_u \tilde{p}(u,s,(x,y),(x',y')) = 0, \\ \tilde{p}(u,s,(x,y),(x',y')) \underset{u\uparrow s}{\longrightarrow} \delta_{(x',y')}(\cdot). \end{cases}$$

Если коэффициенты процесса (1) гладкие, то из теоремы Хёрмандера следует, что переходная плотность $p(u,s,(x,y),(x',y'))$ является гладкой [4] и удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова:

$$(6)\quad \begin{cases} \partial_u p(t,u,(x,y),(x',y')) + L_u^* p(t,u,(x,y),(x',y')) = 0, \\ \tilde{p}(t,u,(x,y),(x',y')) \underset{u\downarrow t}{\longrightarrow} \delta_{(x,y)}(\cdot), \end{cases}$$

где L^* – сопряженный оператор инфинитезимального генератора (1).

Определим теперь операцию типа свертки

$$f \otimes g(t,s,(x,y),(x',y')) =$$
$$= \int_t^s du \int_{\mathbb{R}^{2d}} dz\,dw f(t,u,(x,y),(w,z)) g(u,s,(w,z),(x',y')),$$

а также ядро параметрикса

$$H(u,s,(x,y),(x',y')) = (L_u - \tilde{L}_u)\tilde{p}(u,s,(x,y),(x',y')).$$

Уравнения (5), (6) приводят к соотношению [4, 6, 9]

$$(7)\quad p(u,s,(x,y),(x',y')) =$$
$$= \tilde{p}(u,s,(x,y),(x',y')) + p \otimes H(u,s,(x,y),(x',y')).$$

В случае, когда диффузия и снос в (1) не являются гладкими, используется процедура сглаживания коэффициентов, что в конечном итоге после предельного перехода приводит к соотношению (7) [6, 9].

2.2. Вспомогательный процесс

Напомним, что при определении коэффициентов отклонения $\Delta_{\varepsilon,b}$ и $\Delta_{\varepsilon,\sigma}$ в качестве весовой функции была использована переходная плотность $\bar{p}$ некоторого вспомогательного диффузионного процесса. В этой части работы приводится (неявно) конструкция указанного вспомогательного процесса, а также описываются основные свойства переходной плотности $\bar{p}$.

Как было отмечено в предыдущем разделе, переходная плотность $\tilde{p}$ аппроксимирующего процесса (4) является гауссовской, поэтому удовлетворяет оценке (см. [4])

$$\left|D_x^{\nu} D_y^{\eta} \tilde{p}(t,s,(x,y),(x',y'))\right| \leqslant \tag{8}$$
$$\leqslant \frac{C}{(s-t)^{|\nu|/2+3|\eta|/2+2d}} \exp\left(\frac{-\left|\theta_{t,s}^1(x',y')-x\right|^2}{C(s-t)} + \frac{-\left|\theta_{t,s}^2(x',y')-y\right|^2}{C(s-t)^3}\right).$$

Рассмотрим диффузионный процесс с постоянным коэффициентом диффузии

$$\begin{cases} d\bar{X}_t = b\left(t,\bar{X}_t,\bar{Y}_t\right)dt + \lambda\mathbb{I}dW_t, \\ d\bar{Y}_t = \bar{X}_t dt, t \in [0,T], \end{cases} \tag{9}$$

Справедлива следующая

Лемма 1. *При всех $\lambda > 0$ уравнение (9) имеет единственное слабое решение, допускающее переходную плотность $\bar{p}$. Более того, для всякого $C_0 > 0$ выражение*

$$\frac{C_0}{(s-t)^{2d}} \exp\left(\frac{-\left|\theta_{t,s}^1(x',y')-x\right|^2}{C_0(s-t)} + \frac{-\left|\theta_{t,s}^2(x',y')-y\right|^2}{C_0(s-t)^3}\right)$$

является нижней оценкой плотности $\bar{p}$ при подходящем выборе λ. В то же время

$$\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y')) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C}{(s-t)^{2d}} \exp\left(\frac{-\left|\theta_{t,s}^1(x',y')-x\right|^2}{C(s-t)} + \frac{-\left|\theta_{t,s}^2(x',y')-y\right|^2}{C(s-t)^3}\right)$$

для некоторой $C > 0$, зависящей от констант в предположениях и λ.

Доказательство.

Справедливость данной леммы следует из ряда результатов статьи [4]. Подробный план доказательства аналогичного утверждения для невырожденных диффузий приведен в [2]. Ниже мы повторим основные шаги указанного плана, внося необходимые изменения, соответствующие вырожденной специфике рассматриваемого случая.

Уравнение (9) может быть переписано в краткой форме:

$$dZ_t = \mathbf{b}(t, Z_t)\,dt + \lambda B\,dW_t,$$

где $Z_t = (\bar{X}_t, \bar{Y}_t)$, $\mathbf{b} = (b, f)^*$ с $f(u,(w,z)) = w$ и $B = (\mathbb{I}_d, 0)^*$. Согласно [2], рассмотрим сначала процесс G с линейным сносом $\mathbf{b}(t,x) = L_t x$, где L_t – матрица размера $2d \times 2d$:

$$L_t = \begin{pmatrix} (L_t)_{11} & (L_t)_{12} \\ (L_t)_{21} & (L_t)_{22} \end{pmatrix},$$

а компонента L_{21} у нее невырождена. Ковариационная функция K_s гауссовского процесса G_t имеет вид

$$K_s = \lambda^2 \int_t^s R(s,u) B B^* R^*(s,u)\,du := \lambda^2 \bar{R}(s,t),$$

где $R(s,t)_{0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T}$ – резольвента, ассоциированная с L_t, задаваемая формулой $R(s,t)x = \theta_{s,t}(x)$, где $x = (x_1, x_2)$. Переходная плотность $\bar{p}(t,s,x,y)$ с $x = (x_1,x_2)$ и $y = (y_1,y_2)$ задается формулой

$$\bar{p}(t,s,x,y) =$$

$$= \frac{\det^{-\frac{1}{2}}\left(\bar{R}(s,t)\right)}{(2\pi)^d \lambda^{2d}} \exp\left(-\frac{1}{2\lambda^2}\left\langle \bar{R}(s,t)^{-1}(\theta_{s,t}(x) - y), \theta_{s,t}(x) - y\right\rangle\right).$$

Из Proposition 3.4 статьи [4] следует, что ковариационная функция K_s допускает для любого $y \in \mathbb{R}^{2d}$ двустороннюю оценку

$$c^{-1}\left(\frac{|y_1|^2}{s-t} + \frac{|y_2|^2}{(s-t)^3}\right) \leqslant \langle y, K_s^{-1} y\rangle \leqslant c\left(\frac{|y_1|^2}{s-t} + \frac{|y_2|^2}{(s-t)^3}\right)$$

для некоторой константы $c \geqslant 1$. Отсюда

$$\bar{p}(t,s,x,y) \geqslant C_1\,\lambda^{-2d}\,(s-t)^{-2d} \exp\left(\frac{-\left|\theta^1_{s,t}(x)-y_1\right|^2}{\lambda^2 C_2(s-t)} + \frac{-\left|\theta^2_{s,t}(x)-y_2\right|^2}{\lambda^2 C_2(s-t)^3}\right).$$

Зафиксируем константу $C_T > 0$. Выбирая такие λ и $\bar{C}$, что $2\lambda^2\,C_2 > C_T$ и $\bar{C}\,C_1\,\lambda^{-2d} > C_T$, окончательно получаем

$$\bar{C}\bar{p}(t,s,x,y) \geqslant C_T\,(s-t)^{-2d} \exp\left(\frac{-\left|\theta^1_{s,t}(x)-y_1\right|^2}{C_T(s-t)} + \frac{-\left|\theta^2_{s,t}(x)-y_2\right|^2}{C_T(s-t)^3}\right).$$

Ниже и до конца доказательства нумерация формул и ссылки на используемые предложения относятся к [4]. В общем случае используется линеаризация коэффициента сноса. Приведем ключевые утверждения, позволяющие завершить обоснование справедливости данной леммы.

Так, неравенство в предложении 4.2 в нашем случае записывается следующим образом:

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t} |\varphi_s|^2 \leqslant \frac{C}{\lambda^2}\cdot\left(\frac{\left|\theta^1_{s,t}(x)-y_1\right|^2}{(s-t)^2} + \frac{\left|\theta^2_{s,t}(x)-y_2\right|^2}{(s-t)^4}\right)$$

с константой C, зависящей только от предположений и T. Оценка в предложении 4.3 имеет форму

$$\mathbb{P}\left\{\forall t\in[0,T-\varepsilon],\quad \begin{aligned} \left|\mathbb{T}^{-1}_{T-t}\right|\Theta_t-\Gamma_t\big| &\leqslant C(\mu)(T-t)^{-\frac{3}{8}} \\ \left|v^0_t-\gamma_t\right| &\leqslant \frac{C(\mu)}{\lambda^2}(T-t)^{-\frac{3}{8}} \end{aligned}\right\} \geqslant 1-\mu,$$

где матрица

$$\mathbb{T}_t = \begin{pmatrix} t\mathbb{I}_d & 0 \\ 0 & t^2\mathbb{I}_d \end{pmatrix}.$$

(4.27) и (4.29) принимают вид

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\bar{C}}\sum_{i=1}^{6} R^i_{T-\varepsilon}\right) \leqslant \left(1+\frac{\left|\theta^1_T(x)-y_1\right|^2}{\lambda^2(s-t)} + \frac{\left|\theta^2_T(x)-y_2\right|^2}{\lambda^2(s-t)^3}\right),$$

$$-\ln \bar{p}(t,s,x,y) \leqslant$$
$$\leqslant 2d\ln(s-t) - \ln\lambda^{2d} + \left(1 + \frac{\left|\theta^1_T(x)-y_1\right|^2}{\lambda^2(s-t)} + \frac{\left|\theta^2_T(x)-y_2\right|^2}{\lambda^2(s-t)^3}\right),$$

откуда следует

$$\bar{p}(t,s,x,y) \geqslant$$
$$\geqslant e^{C(1+\lambda^{-2d})}(s-t)^{-2d}\exp\left(\frac{-C\left|\theta^1_{s,t}(x)-y_1\right|^2}{\lambda^2(s-t)} + \frac{-C\left|\theta^2_{s,t}(x)-y_2\right|^2}{\lambda^2(s-t)^3}\right).$$

Выбирая теперь λ и $\bar{C}$ для фиксированного $C_T > 0$ так, что $C_T < \dfrac{\lambda^2}{C}$ и $\bar{C}e^{C(1+\lambda^{-2d})} > C_T$, получаем

$$\bar{C}\bar{p}(t,s,x,y) \geqslant C_T\,(s-t)^{-2d}\exp\left(\frac{-\left|\theta^1_{s,t}(x)-y_1\right|^2}{C_T(s-t)} + \frac{-\left|\theta^2_{s,t}(x)-y_2\right|^2}{C_T(s-t)^3}\right).$$

Замечание 2. В приведенном выше доказательстве параметр $\varepsilon > 0$ понимается в смысле статьи [4] и не имеет отношения к возмущенному процессу (2).

Теперь оценка (8) принимает следующий вид.

***Следствие* 1.**

$$(10)\qquad \left|D^\nu_x D^\eta_y \tilde{p}(t,s,(x,y),(x',y'))\right| \leqslant \frac{C\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))}{(s-t)^{|\nu|/2+3|\eta|/2}}.$$

Замечание 3. В дальнейшем при некоторых преобразованиях будем автоматически обновлять мажорирующую плотность $\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))$, имея в виду следующую последовательность неравенств при $\alpha,\beta > 0$:

$$\left(\frac{\left|\theta^1_{t,s}(x',y')-x\right|^\beta}{(s-t)^{\beta/2}} + \frac{\left|\theta^2_{t,s}(x',y')-y\right|^\alpha}{(s-t)^{3\alpha/2}}\right)\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y')) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{\left|\theta^1_{t,s}(x',y')-x\right|^\beta}{(s-t)^{\beta/2}} + \frac{\left|\theta^2_{t,s}(x',y')-y\right|^\alpha}{(s-t)^{3\alpha/2}}\right)\times$$

$$\times \frac{C}{(s-t)^{2d}} \exp\left(\frac{-\left|\theta^1_{t,s}(x',y') - x\right|^2}{C(s-t)} + \frac{-\left|\theta^2_{t,s}(x',y') - y\right|^2}{C(s-t)^3} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_0}{(s-t)^{2d}} \exp\left(\frac{-\left|\theta^1_{t,s}(x',y') - x\right|^2}{C_0(s-t)} + \frac{-\left|\theta^2_{t,s}(x',y') - y\right|^2}{C_0(s-t)^3} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \bar{p}(t,s,(x,y),(x',y')).$$

2.3. Сходимость ряда параметрикса

Соотношение (7) формально разворачивается в ряд

$$p(t,s,(x,y),(x',y')) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p} \otimes H^n(t,s,(x,y),(x',y')), \tag{11}$$

где $\tilde{p} \otimes H^0 = \tilde{p}$, а остальные члены ряда определены по индукции $\tilde{p} \otimes H^n = \left(\tilde{p} \otimes H^{n-1}\right) \otimes H$. Напомним, что по определению

$$H(t,s,(x,y),(x',y')) = \left(L_t - \tilde{L}_t\right) \tilde{p}(t,s,(x,y),(x',y')) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \left(a_{ij}(t,(x,y)) - a_{ij}(t,\theta_{t,s}(x',y'))\right) D^2_x \tilde{p}(t,s,(x,y),(x',y')) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{d} \left(b_i(t,(x,y)) - b_i(t,\theta_{t,s}(x',y'))\right) D_x \tilde{p}(t,s,(x,y),(x',y')).$$

Используя предположение **(A2)** и оценку (10), несложно видеть, что выполняется

$$\left|H(t,s,(x,y),(x',y'))\right| \leqslant \frac{C}{(s-t)^{1-\gamma/2}} \bar{p}(t,s,(x,y),(x',y')). \tag{12}$$

Следующий шаг состоит в оценке свёрток высшего порядка.

Предложение 1. *Существует константа $C > 0$ такая, что для всех $n \geqslant 0$, $t \leqslant s \leqslant T$ и (x,y), $(x',y') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$*

$$\left|\tilde{p} \otimes H^n\right|(t,s,(x,y),(x',y')) \leqslant$$

$$\leqslant C^{n+1} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)^n}{\Gamma(1+\frac{n\gamma}{2})} (s-t)^{\frac{n\gamma}{2}} \cdot \bar{p}(t,s,(x,y),(x',y')).$$

Доказательство. Доказательство будем вести по индукции. Оценка для $n = 0$ является частным случаем (10). Используя уравнение Колмогорова – Чэпмена, предположение индукции и оценку (12), имеем

$$\left|\tilde{p} \otimes H^{n+1}\right|(t, s, (x, y), (x', y')) \leqslant$$

$$\leqslant C^{n+2} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)^n}{\Gamma(1 + \frac{n\gamma}{2})} \tilde{p}(t, s, (x, y), (x', y')) \int_t^s (u-t)^{\frac{n\gamma}{2}} (s-u)^{\frac{\gamma}{2}-1}\, du =$$
$$= C^{n+2} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)^n}{\Gamma(1 + \frac{n\gamma}{2})} \tilde{p}(t, s, (x, y), (x', y')) B(n\gamma/2 + 1, \gamma/2)(s-t)^{\frac{(n+1)\gamma}{2}} =$$
$$= C^{n+2} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{n+1}}{\Gamma(1 + \frac{(n+1)\gamma}{2})} \tilde{p}(t, s, (x, y), (x', y'))(s-t)^{\frac{(n+1)\gamma}{2}}.$$

Таким образом, в силу сверхэкспоненциального роста гамма-функции бесконечный ряд в (11) сходится, а его сумма представляет переходную плотность процесса (1). Аналогичное разложение в ряд параметрикса справедливо и для переходной плотности возмущенного процесса (2).

3. Устойчивость вырожденных диффузиий при неравномерных возмущениях

Предположим, что выполняется условие **(A)**. При фиксированном значении параметра $\varepsilon > 0$ переходные плотности процессов (1) и (2) допускают разложение в ряд параметрикса (11). Рассмотрим разность соответствующих представлений:

(13) $$\left|p(t, s, (x, y), (x', y')) - p_\varepsilon(t, s, (x, y), (x', y'))\right| =$$

$$= \left|\sum_{r=0}^{\infty} \tilde{p} \otimes H^n(t, s, (x, y), (x', y')) - \tilde{p}_\varepsilon \otimes H^n_\varepsilon(t, s, (x, y), (x', y'))\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\tilde{p}(t, s, (x, y), (x', y')) - \tilde{p}_\varepsilon(t, s, (x, y), (x', y'))\right| +$$
$$+ \sum_{r=1}^{\infty} \left|\tilde{p} \otimes H^n(t, s, (x, y), (x', y')) - \tilde{p}_\varepsilon \otimes H^n_\varepsilon(t, s, (x, y), (x', y'))\right|.$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1, необходимо установить некоторые свойства потока $\theta_{t,s}(x', y')$ и его возмущенного аналога $\theta^{\varepsilon}_{t,s}(x', y')$.

Предложение 2.

$$\left|\theta^2_{t,s}(x', y') - \theta^{2,\varepsilon}_{t,s}(x', y')\right| \leqslant \int_t^s \left|\theta^1_{u,s}(x', y') - \theta^{1,\varepsilon}_{u,s}(x', y')\right| du.$$

Доказательство. Очевидно.

Предложение 3. *Существует константа* $C > 0$ *такая, что*

$$\left|\theta^1_{t,s}(x', y') - \theta^{1,\varepsilon}_{t,s}(x', y')\right| \leqslant C \int_t^s |b - b_\varepsilon|\,(u, \theta_{u,s}(x', y'))du.$$

Доказательство. Из определения первой компоненты потока, **(A2)** и предложения 2

$$\left|\theta^1_{t,s}(x', y') - \theta^{1,\varepsilon}_{t,s}(x', y')\right| \leqslant \int_t^s \left|b(\theta_{u,s}(x', y')) - b_\varepsilon(\theta^\varepsilon_{u,s}(x', y'))\right| du \leqslant$$
$$\leqslant \int_t^s \left|b(\theta_{u,s}(x', y')) - b_\varepsilon(\theta_{u,s}(x', y'))\right| du +$$
$$+ \int_t^s \left|b(\theta_{u,s}(x', y')) - b(\theta^\varepsilon_{u,s}(x', y'))\right| du \leqslant$$
$$\leqslant \int_t^s \left|b(\theta_{u,s}(x', y')) - b_\varepsilon(\theta_{u,s}(x', y'))\right| du +$$
$$+ C \int_t^s \left(\left|\theta^1_{u,s}(x', y') - \theta^{1,\varepsilon}_{u,s}(x', y')\right| + \left|\theta^2_{u,s}(x', y') - \theta^{2,\varepsilon}_{u,s}(x', y')\right|\right) du \leqslant$$
$$\leqslant \int_t^s \left|b(\theta_{u,s}(x', y')) - b_\varepsilon(\theta_{u,s}(x', y'))\right| du +$$
$$+ C \int_t^s \left|\theta^1_{u,s}(x', y') - \theta^{1,\varepsilon}_{u,s}(x', y')\right| du,$$

и из неравенства Гронуолла следует требуемое.

Хорошо известно [4], что при выполнении условия **(A2)** потоки $\theta_{t,s}(x', y')$ и $\theta^\varepsilon_{t,s}(x', y')$ липшицевы по пространственной переменной, имеют липшицевы обратные и удовлетворяют полугрупповому свойству:

$$\theta_{t,s}\left(\theta_{s,u}(x',y')\right)=\theta_{t,u}(x',y'),$$
$$\theta_{s,t}\left(\theta_{t,u}(x',y')\right)=\theta_{s,u}(x',y').$$

Когда $t=u$ или $s=u$, соответственно, равенства выше принимают вид

$$\theta_{t,s}\left(\theta_{s,t}(x',y')\right)=(x',y'),\ \theta_{s,t}\left(\theta_{t,s}(x',y')\right)=(x',y').$$

Прямым следствием полугруппового свойства является (см. [4]):

Предложение 4. *Поток $\theta_{u,s}(\cdot)$ обладает би-липшицевым свойством, т.е. существует константа $C \geqslant 1$ такая, что*

$$C^{-1}\left(\frac{\left|\theta^1_{t,s}(x',y')-x\right|^2}{s-t}+\frac{\left|\theta^2_{t,s}(x',y')-y\right|^2}{(s-t)^3}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\left|\theta^1_{s,t}(x,y)-x'\right|^2}{s-t}+\frac{\left|\theta^2_{s,t}(x,y)-y'\right|^2}{(s-t)^3}\leqslant$$
$$\leqslant C\left(\frac{\left|\theta^1_{t,s}(x',y')-x\right|^2}{s-t}+\frac{\left|\theta^2_{t,s}(x',y')-y\right|^2}{(s-t)^3}\right).$$

Следующее важное для дальнейшего анализа утверждение показывает, что при выполнении **(A3)** переходные плотности $\tilde{p}_\varepsilon$ и $\tilde{p}$ и их производные допускают общую мажорирующую плотность.

Лемма 2. *Существует вспомогательный процесс* (9) *с переходной плотностью $\bar{p}$ такой, что для некоторой константы $C>0$ и мультииндексов ν, η с $|\nu|$, $|\eta|\leqslant 4$ выполняется*

$$\left|D^\nu_x D^\eta_y \tilde{p}(t,s,(x,y),(x',y'))\right|+\left|D^\nu_x D^\eta_y \tilde{p}_\varepsilon(t,s,(x,y),(x',y'))\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{C\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))}{(s-t)^{|\nu|/2+3|\eta|/2}}. \tag{14}$$

Доказательство. Применяя неравенство Йенсена $a^2\geqslant\dfrac{(a+b)^2}{2}-b^2$ к экспоненциальной части оценки (8), имеем:

$$\exp\left(\frac{-\left|\theta^{1,\varepsilon}_{t,s}(x',y')-x\right|^2}{C(s-t)}+\frac{-\left|\theta^{2,\varepsilon}_{t,s}(x',y')-y\right|^2}{C(s-t)^3}\right)=$$

$$=\exp\left(\frac{-\left|\theta^{1,\varepsilon}_{t,s}(x',y')-\theta^{1}_{t,s}(x',y')+\theta^{1}_{t,s}(x',y')-x\right|^2}{C(s-t)}+\right.$$

$$\left.+\frac{-\left|\theta^{2,\varepsilon}_{t,s}(x',y')-\theta^{2}_{t,s}(x',y')+\theta^{2}_{t,s}(x',y')-y\right|^2}{C(s-t)^3}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left(\frac{-\left|\theta^{1}_{t,s}(x',y')-x\right|^2}{2C(s-t)}+\frac{-\left|\theta^{2}_{t,s}(x',y')-y\right|^2}{2C(s-t)^3}\right)\times$$

$$\times\exp\left(\frac{\left|\theta^{1}_{t,s}(x',y')-\theta^{1,\varepsilon}_{t,s}(x',y')\right|^2}{C(s-t)}+\frac{\left|\theta^{2}_{t,s}(x',y')-\theta^{2,\varepsilon}_{t,s}(x',y')\right|^2}{C(s-t)^3}\right).$$

Последний множитель ограничен благодаря предположению **(A3)**, в то время как оставшаяся часть с точностью до домножения на $\dfrac{2C}{(s-t)^{2d}}$ может рассматриваться как нижняя оценка мажорирующей плотности.

Следствие 2. *Существует константа $C>0$ такая, что*

$$\left|H_\varepsilon(t,s,(x,y),(x',y'))\right|\leqslant\frac{C}{(s-t)^{1-\gamma/2}}\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y')).$$

Следствие 3. *Существует константа $C>0$ такая, что*

$$|\tilde{p}_\varepsilon\otimes H^n_\varepsilon|\,(t,s,(x,y),(x',y'))\leqslant\tag{15}$$

$$\leqslant C^{n+1}\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)^n}{\Gamma(1+\frac{n\gamma}{2})}(s-t)^{\frac{n\gamma}{2}}\cdot\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y')).$$

Перейдем теперь к почленной оценке ряда (13).

Лемма 3. *Существует константа $C > 0$ такая, что для мультииндекса ν с $|\nu| \leqslant 4$ справедлива оценка*

$$|D_x^\nu \tilde{p} - D_x^\nu \tilde{p}_\varepsilon| (t, s, (x, y), (x', y')) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C}{(s-t)^{|\nu|/2}} \bar{p}(t, s, (x, y), (x', y')) \times$$
$$\times \left(\frac{\left(\int_t^s |(b - b_\varepsilon)| (u, \theta_{u,s}(x', y')) du\right)^{\gamma/3}}{(s-t)^{\gamma/6}} + \frac{\int_t^s |(\sigma - \sigma_\varepsilon)| (u, \theta_{u,s}(x', y')) du}{s-t} \right).$$

Предыдущее утверждение оценивает разность главных членов разложений. Следующая лемма показывает, что подобная оценка может быть получена и для разности ядер параметрикса $H(t, s, (x, y), (x', y'))$ и $H_\varepsilon(t, s, (x, y), (x', y'))$.

Лемма 4. *Выберем произвольное $\delta \in (\gamma/2, \gamma)$. Тогда существует константа $C > 0$ такая, что*

$$|H - H_\varepsilon| (t, s, (x, y), (x', y')) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C\bar{p}(t, s, (x, y), (x', y'))}{(s-t)^{1-\gamma/3}} \left(\int_t^s |(b - b_\varepsilon)| (u, \theta_{u,s}(x', y')) du \right)^{\gamma/3} +$$
$$+ \frac{C\bar{p}(t, s, (x, y), (x', y'))}{(s-t)^{1+\gamma/2-\delta}} \left(\int_t^s |(\sigma - \sigma_\varepsilon)| (u, \theta_{u,s}(x', y')) du \right)^{\gamma-\delta} +$$
$$+ \frac{C\bar{p}(t, s, (x, y), (x', y'))}{(s-t)^{1-\gamma/2}} \left(|(b - b_\varepsilon)| + |(\sigma - \sigma_\varepsilon)|\right) \left(t, \theta_{t,s}(x', y')\right).$$

Доказательства Лемм 3 и 4 приводятся в Приложении.

Для завершения доказательства основной теоремы необходимо наличие оценок разностей свёрток высшего порядка. Для этого разложим каждую такую разность на две составляющие:

$$\left|\tilde{p} \otimes H^{n+1} - \tilde{p}_\varepsilon \otimes H_\varepsilon^{n+1}\right| (t, s, (x, y), (x', y')) \leqslant \tag{16}$$
$$\leqslant |(\tilde{p}_\varepsilon \otimes H_\varepsilon^n) \otimes (H - H_\varepsilon)| (t, s, (x, y), (x', y')) +$$
$$+ |(\tilde{p} \otimes H^n - \tilde{p}_\varepsilon \otimes H_\varepsilon^n) \otimes H| (t, s, (x, y), (x', y')).$$

Первое слагаемое правой части в (16) удается контролировать без особого труда.

Лемма 5.

$$\left|(\tilde{p}_\varepsilon \otimes H_\varepsilon^n) \otimes (H - H_\varepsilon)\right| (t, s, (x, y), (x', y')) \leqslant$$
$$\leqslant C^{n+2} \frac{\Gamma^n(\frac{\gamma}{2})}{\Gamma(1 + \frac{n\gamma}{2})} \bar{p}(t, s, (x, y), (x', y'))(s - t)^{n\gamma/2} \times$$
$$\times \left[(s - t)^{\gamma/3} B(\frac{n\gamma}{2} + 1, \frac{\gamma}{3}) \left(\int\limits_t^s \left|(b - b_\varepsilon)\right| (u, \theta_{u,s}(x', y'))du \right)^{\gamma/3} + \right.$$
$$+ (s - t)^{\delta - \gamma/2} B(\frac{n\gamma}{2} + 1, \delta - \frac{\gamma}{2}) \left(\int\limits_t^s \left|(\sigma - \sigma_\varepsilon)\right| (u, \theta_{u,s}(x', y'))du \right)^{\gamma - \delta} +$$
$$\left. + \int\limits_t^s \frac{\left|(b - b_\varepsilon)\,(u, \theta_{u,s}(x', y'))\right| + \left|(\sigma - \sigma_\varepsilon)\,(u, \theta_{u,s}(x', y'))\right|}{(s - u)^{1 - \gamma/2}} du \right].$$

Доказательство. Доказательство следует из оценки (15), леммы 4 и тождества для бета-функции

$$\int_t^s (u - t)^x (s - u)^y du = (s - t)^{x + y + 1} B(1 + x, 1 + y).$$

Ввиду отсутствия возможности получить подобную оценку для второго слагаемого в (16), в дальнейшем приходится итерировать указанное неравенство. Для этого необходимо оценить разность свёрток первого порядка.

Лемма 6.

$$\left|\tilde{p} \otimes H - \tilde{p}_\varepsilon \otimes H_\varepsilon\right| (t, s, (x, y), (x', y')) \leqslant$$
$$\leqslant C^2 \bar{p}(t, s, (x, y), (x', y')) \times$$
$$\times \left[\left\{ B(1 - \frac{\gamma}{6}, \frac{\gamma}{2}) + B(1, \frac{\gamma}{3}) \right\} (s - t)^{\frac{\gamma}{3}} \left(\int\limits_t^s \left|(b - b_\varepsilon)\right|_1 (u, \theta_{u,s}(x', y'))du \right)^{\frac{\gamma}{3}} + \right.$$

$$+\left\{B(1+\delta-\gamma,\frac{\gamma}{2})+B(1,\delta-\frac{\gamma}{2})\right\}\left(\int\limits_t^s\left|(\sigma-\sigma_\varepsilon)\right|_\gamma(u,\theta_{u,s}(x',y'))du\right)^{\gamma-\delta}\times$$

$$\times(s-t)^{\delta-\frac{\gamma}{2}}+\int\limits_t^s\frac{\psi(u,s;(x',y'))}{(s-u)^{1-\gamma/2}}du\Bigg],$$

где

$$\psi(t,s;(x',y'))=\left|(b-b_\varepsilon)\left(t,\theta_{t,s}(x',y')\right)\right|_1+\left|(\sigma-\sigma_\varepsilon)\left(t,\theta_{t,s}(x',y')\right)\right|_\gamma.$$

Доказательство. Поскольку

$$|\tilde p\otimes H-\tilde p_\varepsilon\otimes H_\varepsilon|\leqslant$$

$$\leqslant|(\tilde p-\tilde p_\varepsilon)\otimes H|+|\tilde p_\varepsilon\otimes(H-H_\varepsilon)|,$$

то, учитывая предыдущую лемму с $n=0$, достаточно оценить первое слагаемое.

Используя полугрупповое свойство потока, имеем

$$|b-b_\varepsilon|(v,\theta_{v,u}(w,z))\bar p(u,s,(w,z),(x',y'))\leqslant$$
$$\leqslant\Big[\left|(b-b_\varepsilon)(v,\theta_{v,s}(\theta_{s,u}(w,z)))-(b-b_\varepsilon)(v,\theta_{v,s}(x',y'))\right|+$$
$$+\left|(b-b_\varepsilon)(v,\theta_{v,s}(x',y'))\right|\Big]\bar p(u,s,(w,z),(x',y'))\leqslant$$

$$\leqslant C\left(1+\left|\theta^1_{s,u}(w,z)-x'\right|+\left|\theta^2_{s,u}(w,z)-y'\right|^{1/3}\right)\times$$
$$\times\left|(b-b_\varepsilon)(v,\theta_{v,s}(x',y'))\right|_1\bar p(u,s,(w,z),(x',y'))\leqslant$$
$$\leqslant C\left|(b-b_\varepsilon)(v,\theta_{v,s}(x',y'))\right|_1\bar p(u,s,(w,z),(x',y')).$$

Таким образом, из Следствия 2

$$|(\tilde p-\tilde p_\varepsilon)\otimes H|(t,s,(x,y),(x',y'))\leqslant$$

$$\leqslant C^2\int_{\mathbb{R}^{2d}}\int_t^s\left[\frac{\left(\int_t^u|(b-b_\varepsilon)|(v,\theta_{v,u}(w,z))du\right)^{\gamma/3}}{(u-t)^{\gamma/6}}+\right.$$

$$+\frac{\left(\int_t^u |(\sigma-\sigma_\varepsilon)|\,(v,\theta_{v,s}(x',y'))dv\right)^{\gamma-\delta}}{(u-t)^{\gamma-\delta}}\Bigg]\bar{p}(t,u,(x,y),(w,z))\times$$

$$\times\frac{\bar{p}(u,s,(w,z),(x',y'))}{(s-u)^{1-\gamma/2}}du\,dw\,dz\leqslant C^2\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))\times$$

$$\times\left[\left(\int_t^s |(b-b_\varepsilon)|_1\,(u,\theta_{u,s}(x',y'))du\right)^{\gamma/3}(s-t)^{\gamma/3}B(1-\gamma/6,\gamma/2)+\right.$$

$$\left.+\left(\int_t^s |(\sigma-\sigma_\varepsilon)|_\gamma\,(u,\theta_{u,s}(x',y'))du\right)^{\gamma-\delta}(s-t)^{\delta-\gamma/2}B(1+\delta-\gamma,\gamma/2)\right],$$

откуда следует требуемое.

Следующие утверждения предоставляют очевидные аналоги лемм 5 и 6 в терминах L_1-нормы (3).

Лемма 7.

$$\begin{gathered}||\left(\tilde{p}\otimes H-\tilde{p}_\varepsilon\otimes H_\varepsilon\right)\big(t,s,(x,y),(x',y')\big)\,||_{L_1}\leqslant\\ \leqslant C^2\Big[\Delta_{\varepsilon,b}^{\gamma/3}(s-t)^{\gamma/2+\gamma/6}\left\{B(1-\gamma/6,\gamma/2)+B(1,\gamma/3)\right\}+\\ +\Delta_{\varepsilon,\sigma}^{\gamma-\delta}(s-t)^{\gamma/2}\left\{B(1+\delta-\gamma,\gamma/2)+B(1,\delta-\gamma/2)\right\}+\\ +(\Delta_{\varepsilon,b}+\Delta_{\varepsilon,\sigma})(s-t)^{\gamma/2}\Big].\end{gathered}$$

Лемма 8.

$$\begin{gathered}||\left((\tilde{p}_\varepsilon\otimes H_\varepsilon^n)\otimes(H-H_\varepsilon)\right)\big(t,s,(x,y),(x',y')\big)\,||_{L_1}\leqslant\\ \leqslant C^{n+2}\frac{\Gamma^n(\frac{\gamma}{2})}{\Gamma(1+\frac{n\gamma}{2})}\Big[(s-t)^{(n+1)\gamma/2+\gamma/6}B(n\gamma/2+1,\gamma/3)\Delta_{\varepsilon,b}^{\gamma/3}+\\ +(s-t)^{(n+1)\gamma/2}B(n\gamma/2+1,\delta-\gamma/2)\Delta_{\varepsilon,\sigma}^{\gamma-\delta}+\\ +(s-t)^{(n+1)\gamma/2}(\Delta_{\varepsilon,b}+\Delta_{\varepsilon,\sigma})\Big].\end{gathered}$$

Теперь мы готовы перейти к оценке разностей сверток высшего порядка.

<u>Лемма 9.</u>

$$|| \left(\tilde{p} \otimes H^{n+1} - \tilde{p}_\varepsilon \otimes H_\varepsilon^{n+1}\right) \left(t, s, (x, y), (x', y')\right) ||_{L_1} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n} C^{n+2} \frac{\Gamma^n(\gamma/2)\Gamma(1 + (n-i+1)\gamma/2)}{\Gamma(1 + (n-i)\gamma/2)\Gamma(1 + (n+1)\gamma/2)} (s-t)^{(n+1)\gamma/2} \times$$

$$\times \Big[\{B(1 - \gamma/6, \gamma/2) + B((n-i)\gamma/2 + 1, \gamma/3)\} \left(M^1_{\varepsilon,\alpha,2\gamma/3} + \bar{M}^1_{\varepsilon,\alpha,2\gamma/3}\right) +$$

$$+ \{B(1 + \delta - \gamma, \gamma/2) + B((n-i)\gamma/2 + 1, \delta - \gamma/2)\} \left(M^2_{\varepsilon,\alpha,\delta} + \bar{M}^2_{\varepsilon,\alpha,\delta}\right) +$$

$$+ \left(M^3_{\varepsilon,\alpha} + \bar{M}^3_{\varepsilon,\alpha}\right)\Big].$$

Доказательство. Используя разложение

$$\left|\tilde{p} \otimes H^{n+1} - \tilde{p}_\varepsilon \otimes H_\varepsilon^{n+1}\right| (t, s, (x, y), (x', y')) \leqslant$$

$$\leqslant |(\tilde{p}_\varepsilon \otimes H_\varepsilon^n) \otimes (H - H_\varepsilon)| (t, s, (x, y), (x', y')) +$$

$$+ |(\tilde{p} \otimes H^n - \tilde{p}_\varepsilon \otimes H_\varepsilon^n) \otimes H| (t, s, (x, y), (x', y'))$$

и обозначая

$$S^{t,s}_{n+1} := C^{n+2} \frac{\Gamma^n(\frac{\gamma}{2})}{\Gamma(1 + \frac{n\gamma}{2})} \Big[(s-t)^{(n+1)\gamma/2 + \gamma/6} B(n\gamma/2 + 1, \gamma/3) \Delta^{\gamma/3}_{\varepsilon,b} +$$

$$+ (s-t)^{(n+1)\gamma/2} B(n\gamma/2 + 1, \delta - \gamma/2) \Delta^{\gamma-\delta}_{\varepsilon,\sigma} +$$

$$+ (s-t)^{(n+1)\gamma/2} (\Delta_{\varepsilon,b} + \Delta_{\varepsilon,\sigma})\Big],$$

мы можем осуществить спуск:

$$|| \left(\tilde{p} \otimes H^{n+1} - \tilde{p}_\varepsilon \otimes H_\varepsilon^{n+1}\right) \left(t, s, (x, y), (x', y')\right) ||_{L_1} \leqslant \tag{17}$$

$$\leqslant S^{t,s}_{n+1} + C \int_t^s \frac{|| (\tilde{p} \otimes H^n - \tilde{p}_\varepsilon \otimes H_\varepsilon^n) (t, s_1, (x, y), (x', y')) ||_{L_1}}{(s - s_1)^{1-\gamma/2}} \, ds_1 \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant S^{t,s}_{n+1} + \sum_{i=1}^{n-1} \int_t^s \frac{C^i}{(s - s_1)^{1-\gamma/2}} \ldots \int_t^{s_{i-1}} \frac{S^{t,s_i}_{n-i+1}}{(s_{i-1} - s_i)^{1-\gamma/2}} \, ds_i \, ds_{i-1} \ldots ds_1 +$$

$$+ C^n \int_t^s \frac{1}{(s - s_1)^{1-\gamma/2}} \ldots$$

$$\ldots \int_t^{s_{n-1}} \frac{|| (\tilde{p} \otimes H - \tilde{p}_\varepsilon \otimes H_\varepsilon) (t, s_n, (x, y), (x', y')) ||_{L_1}}{(s_{n-1} - s_n)^{1-\gamma/2}} \, ds_n \, ds_{n-1} \ldots ds_1.$$

Далее,

$$C^i \int_t^s \frac{1}{(s-s_1)^{1-\gamma/2}} \dots \int_t^{s_{i-1}} \frac{(s_i-t)^{(n-i+1)\gamma/2}}{(s_{i-1}-s_i)^{1-\gamma/2}}\, ds_i\, ds_{i-1}\dots ds_1 =$$

$$= \int\limits_t^s \frac{C^i B(1+\frac{(n-i+1)\gamma}{2}, \frac{\gamma}{2})}{(s-s_1)^{1-\gamma/2}} \dots \int\limits_t^{s_{i-2}} \frac{(s_{i-1}-t)^{(n-i+2)\gamma/2}}{(s_{i-2}-s_{i-1})^{1-\gamma/2}}\, ds_{i-1}\dots ds_1 =$$

$$= \int\limits_t^s \frac{C^i \Gamma^2(\frac{\gamma}{2})\Gamma(1+\frac{(n-i+1)\gamma}{2})}{\Gamma(1+\frac{(n-i+3)\gamma}{2})(s-s_1)^{1-\gamma/2}} \dots \int\limits_t^{s_{i-3}} \frac{(s_{i-2}-t)^{(n-i+3)\gamma/2}}{(s_{i-3}-s_{i-2})^{1-\gamma/2}}\, ds_{i-2}\dots ds_1 =$$

$$\dots = C^i \frac{\Gamma^i(\gamma/2)\Gamma(1+(n-i+1)\gamma/2)}{\Gamma(1+(n+1)\gamma/2)}(s-t)^{(n+1)\gamma/2}.$$

Таким образом,

$$C^i \int_t^s \frac{1}{(s-s_1)^{1-\gamma/2}} \dots \int_t^{s_{i-1}} \frac{S^{t,s_i}_{n-i+1}}{(s_{i-1}-s_i)^{1-\gamma/2}}\, ds_i\, ds_{i-1}\dots ds_1 \leqslant$$

$$\leqslant C^{n+2} \frac{\Gamma^n(\gamma/2)\Gamma(1+(n-i+1)\gamma/2)}{\Gamma(1+(n-i)\gamma/2)\Gamma(1+(n+1)\gamma/2)}(s-t)^{(n+1)\gamma/2}\times$$

$$\times \Big[B((n-i)\gamma/2+1, \gamma/3)\left(M^1_{\varepsilon,\alpha,2\gamma/3} + \bar{M}^1_{\varepsilon,\alpha,2\gamma/3}\right) +$$

$$+B((n-i)\gamma/2+1, \delta-\gamma/2)\left(M^2_{\varepsilon,\alpha,\delta} + \bar{M}^2_{\varepsilon,\alpha,\delta}\right) + \left(M^3_{\varepsilon,\alpha} + \bar{M}^3_{\varepsilon,\alpha}\right)\Big].$$

Аналогичные рассуждения применяются и для оценки последнего слагаемого спуска (17). Это завершает доказательство.

Утверждение теоремы 1 следует теперь из леммы 9, асимптотики гамма-функции и тождества

$$\Gamma(1+x) = x\Gamma(x).$$

4. Приложение

4.1. Доказательство леммы 3

Докажем утверждение леммы в случае, когда $|\nu| = 0$. Раскладывая разность переходных плотностей в ряд Тейлора до производных порядка 1 аналогично [2, 6] и применяя оценку (8), а также неравенства

$$\left| \int\limits_t^u (u-v)^n \left(a(v, \theta_{v,s}(x', y')) - a_\varepsilon(v, \theta^\varepsilon_{v,s}(x', y')) \right) dv \right| \leqslant$$

$$\leqslant (u-t)^n \int\limits_t^u \left| a(v, \theta_{v,s}(x', y')) - a_\varepsilon(v, \theta^\varepsilon_{v,s}(x', y')) \right| dv, \ n = 0, 1, 2$$

и

$$\exp\left(\frac{-\left| c\left(\theta^{1,\varepsilon}_{t,s}(x', y') - \theta^1_{t,s}(x', y')\right) + \theta^1_{t,s}(x', y') - x \right|^2}{C(s-t)} + \right.$$

$$\left. + \frac{-\left| c\left(\theta^{2,\varepsilon}_{t,s}(x', y') - \theta^2_{t,s}(x', y')\right) + \theta^2_{t,s}(x', y') - y \right|^2}{C(s-t)^3} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(\frac{-\left|\theta^1_{t,s}(x', y') - x\right|^2}{C(s-t)} + \frac{-\left|\theta^2_{t,s}(x', y') - y\right|^2}{C(s-t)^3} \right) \times$$

$$\times \exp\left(\frac{c^2 \left| \left(\theta^{1,\varepsilon}_{t,s}(x', y') - \theta^1_{t,s}(x', y')\right) \right|^2}{2C(s-t)} + \right.$$

$$\left. + \frac{c^2 \left| \left(\theta^{2,\varepsilon}_{t,s}(x', y') - \theta^2_{t,s}(x', y')\right) \right|^2}{2C(s-t)^3} \right) \leqslant$$

$$\leqslant C \exp\left(\frac{-\left|\theta^1_{t,s}(x', y') - x\right|^2}{C(s-t)} + \frac{-\left|\theta^2_{t,s}(x', y') - y\right|^2}{C(s-t)^3} \right),$$

верное в силу предложений 2 и 3 для любых констант $c \in [0, 1]$ и $C > 0$, мы получаем

$$\left|\tilde{p} - \tilde{p}_\varepsilon\right| (t, s, (x, y), (x', y')) \leqslant$$

$$\leqslant \left|\theta^{1,\varepsilon}_{t,s}(x',y') - \theta^{1}_{t,s}(x',y')\right| \cdot \frac{C}{\sqrt{s-t}}\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))+$$
$$+ \left|\theta^{2,\varepsilon}_{t,s}(x',y') - \theta^{2}_{t,s}(x',y')\right| \cdot \frac{C}{(s-t)^{3/2}}\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))+$$
$$+ \int\limits_t^s \left|a(v,\theta_{v,s}(x',y')) - a_\varepsilon(v,\theta^{\varepsilon}_{v,s}(x',y'))\right| \, dv \frac{C\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))}{s-t}+$$
$$+ (s-t)\int\limits_t^s \left|a(v,\theta_{v,s}(x',y')) - a_\varepsilon(v,\theta^{\varepsilon}_{v,s}(x',y'))\right| \, dv \frac{C\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))}{(s-t)^2}+$$
$$+ (s-t)^2\int\limits_t^s \left|a(v,\theta_{v,s}(x',y')) - a_\varepsilon(v,\theta^{\varepsilon}_{v,s}(x',y'))\right| \, dv \frac{C\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))}{(s-t)^3}.$$

Отметим, что гёльдеровость и ограниченность σ влечёт гёльдеровость (с тем же показателем) и ограниченность матрицы диффузии $a = \sigma\sigma^*$. То же верно и для возмущенных аналогов.

Снова пользуясь предложениями 2 и 3, имеем

$$\int_t^s \left|a(u,\theta_{u,s}(x',y')) - a^\varepsilon(u,\theta^{\varepsilon}_{u,s}(x',y'))\right| du \leqslant$$
$$\leqslant \int_t^s \left|a(u,\theta_{u,s}(x',y')) - a^\varepsilon(u,\theta_{u,s}(x',y'))\right| du+$$
$$+ \int_t^s \left|a^\varepsilon(u,\theta_{u,s}(x',y')) - a^\varepsilon(u,\theta^{\varepsilon}_{u,s}(x',y'))\right| du \leqslant$$
$$\leqslant C\int_t^s \left|(\sigma-\sigma_\varepsilon\right|(u,\theta_{u,s}(x',y'))du+$$
$$+ C\int_t^s \left(\left|\theta^1_{u,s}(x',y') - \theta^{1,\varepsilon}_{u,s}(x',y')\right|^\gamma + \left|\theta^2_{u,s}(x',y') - \theta^{2,\varepsilon}_{u,s}(x',y')\right|^{\gamma/3}\right) du \leqslant$$
$$\leqslant C\int_t^s \left|(\sigma-\sigma_\varepsilon)\right|(u,\theta_{u,s}(x',y'))du+$$
$$+ C(s-t)\left(\int_t^s \left|(b-b_\varepsilon)\right|(u,\theta_{u,s}(x',y'))du\right)^\gamma +$$
$$+ C(s-t)^{1+\gamma/3}\left(\int_t^s \left|(b-b_\varepsilon)\right|(u,\theta_{u,s}(x',y'))du\right)^{\gamma/3}.$$

Суммируя полученные оценки и уравнивая необходимые показатели степеней, окончательно получаем

$$|\tilde{p}-\tilde{p}_\varepsilon|\,(t,s,(x,y),(x',y'))\leqslant$$
$$\leqslant C\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))\times$$
$$\times\left(\frac{\left(\int_t^s|(b-b_\varepsilon)|\,(u,\theta_{u,s}(x',y'))du\right)^{\gamma/3}}{(s-t)^{\gamma/6}}+\frac{\int_t^s|(\sigma-\sigma_\varepsilon)|\,(u,\theta_{u,s}(x',y'))du}{s-t}\right).$$

Случай с $|\nu|\geqslant 1$ следует из аналогичных рассуждений с дифференцировнием разложения Тейлора и оценки (8).

4.2. Доказательство Леммы 4

Разложим разность ядер параметрикса следующим образом:

$$|H-H_\varepsilon|\,(t,s,(x,y),(x',y'))\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d\left|\left(a_{ij}-a_{ij}^\varepsilon\right)(t,(x,y))-\left(a_{ij}-a_{ij}^\varepsilon\right)(t,\theta_{t,s}(x',y'))\right|\times$$
$$\times\left|\frac{\partial^2\tilde{p}(t,s,(x,y),(x',y'))}{\partial x_i\partial x_j}\right|+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d\left|a_{ij}^\varepsilon(t,\theta_{t,s}^\varepsilon(x',y'))-a_{ij}^\varepsilon(t,\theta_{t,s}(x',y'))\right|\times$$
$$\times\left|\frac{\partial^2\tilde{p}(t,s,(x,y),(x',y'))}{\partial x_i\partial x_j}\right|+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d\left|a_{ij}^\varepsilon(t,(x,y))-a_{ij}^\varepsilon(t,\theta_{t,s}^\varepsilon(x',y'))\right|\times$$
$$\times\left|\frac{\partial^2\left(\tilde{p}(t,s,(x,y),(x',y'))-\tilde{p}_\varepsilon(t,s,(x,y),(x',y'))\right)}{\partial x_i\partial x_j}\right|+$$
$$+\sum_{i=1}^d\left|b_i(t,(x,y))-b_i(t,\theta_{t,s}(x',y'))-b_i^\varepsilon(t,(x,y))+b_i^\varepsilon(t,\theta_{t,s}(x',y'))\right|\times$$
$$\times\left|\frac{\partial\tilde{p}(t,s,(x,y),(x',y'))}{\partial x_i}\right|+\sum_{i=1}^d\left|b_i^\varepsilon(t,\theta_{t,s}^\varepsilon(x',y'))-b_i^\varepsilon(t,\theta_{t,s}(x',y'))\right|\times$$
$$\times\left|\frac{\partial\tilde{p}(t,s,(x,y),(x',y'))}{\partial x_i}\right|+\sum_{i=1}^d\left|b_i^\varepsilon(t,(x,y))-b_i^\varepsilon(t,\theta_{t,s}^\varepsilon(x',y'))\right|\times$$
$$\times\left|\frac{\partial\left(\tilde{p}-\tilde{p}_\varepsilon\right)(t,s,(x,y),(x',y'))}{\partial x_i}\right|:=i)+ii)+iii)+iv)+v)+vi).$$

Теперь из оценок (8), (10), (2) и предложений 2, 3 следует

$$i) \leqslant \frac{C\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))}{s-t}\left(\left|x-\theta^1_{t,s}(x',y')\right|^{\gamma}+\left|y-\theta^2_{t,s}(x',y')\right|^{\gamma/3}\right)\times$$

$$\times\left|(\sigma-\sigma_\varepsilon)\right|_{\gamma}(t,\theta_{t,s}(x',y'))\leqslant$$

$$\leqslant \frac{C\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))}{(s-t)^{1-\gamma/2}}\left|(\sigma-\sigma_\varepsilon)\right|_{\gamma}(t,\theta_{t,s}(x',y')),$$

$$ii) \leqslant \frac{C\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))}{s-t}\times$$

$$\times\left(\left|\theta^{1,\varepsilon}_{t,s}(x',y')-\theta^1_{t,s}(x',y')\right|^{\gamma}+\left|\theta^{2,\varepsilon}_{t,s}(x',y')-\theta^2_{t,s}(x',y')\right|^{\gamma/3}\right)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{C\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))}{(s-t)^{1-\gamma/3}}\left(\int_t^s\left|(b-b_\varepsilon)\right|(u,\theta_{u,s}(x',y'))du\right)^{\gamma/3},$$

$$iii) \leqslant \frac{C\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))}{s-t}\left(\frac{\left(\int_t^s\left|(b-b_\varepsilon)\right|(u,\theta_{u,s}(x',y'))du\right)^{\gamma/3}}{(s-t)^{\gamma/6}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\int_t^s\left|(\sigma-\sigma_\varepsilon)\right|(u,\theta_{u,s}(x',y'))du}{s-t}\right)\times$$

$$\times\left(\left|x-\theta^1_{t,s}(x',y')\right|^{\gamma}+\left|y-\theta^2_{t,s}(x',y')\right|^{\gamma/3}\right)\leqslant$$

$$\leqslant C\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))\times$$

$$\times\left(\frac{\left(\int_t^s\left|(b-b_\varepsilon)\right|(u,\theta_{u,s}(x',y'))du\right)^{\gamma/3}}{(s-t)^{2\gamma/3}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\int_t^s\left|(\sigma-\sigma_\varepsilon)\right|(u,\theta_{u,s}(x',y'))du}{(s-t)^{2-\gamma/2}}\right),$$

$$iv) \leqslant \frac{C\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))}{(s-t)^{1/2}}\left(\left|x-\theta^1_{t,s}(x',y')\right|+\left|y-\theta^2_{t,s}(x',y')\right|^{1/3}\right)\times$$

$$\times\left|(b-b_\varepsilon)\right|_{1}(t,\theta_{t,s}(x',y'))\leqslant$$

$$\leqslant C\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))\left|(b-b_\varepsilon)\right|_{1}(t,\theta_{t,s}(x',y')),$$

$$v)\ \leqslant \frac{C\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))}{(s-t)^{1/2}}\times$$

$$\times\left(\left|\theta^{1,\varepsilon}_{t,s}(x',y')-\theta^{1}_{t,s}(x',y')\right|+\left|\theta^{2,\varepsilon}_{t,s}(x',y')-\theta^{2}_{t,s}(x',y')\right|\right)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{C\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))}{(s-t)^{\gamma/6}}\left(\int_t^s |(b-b_\varepsilon)|\,(u,\theta_{u,s}(x',y'))du\right)^{\gamma/3},$$

$$vi)\ \leqslant \frac{C\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))}{(s-t)^{1/2}}\left(\frac{\left(\int_t^s |(b-b_\varepsilon)|\,(u,\theta_{u,s}(x',y'))du\right)^{\gamma/3}}{(s-t)^{\gamma/6}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\int_t^s |(\sigma-\sigma_\varepsilon)|\,(u,\theta_{u,s}(x',y'))du}{s-t}\right)\times$$

$$\times\left(\left|x-\theta^{1}_{t,s}(x',y')\right|+\left|y-\theta^{2}_{t,s}(x',y')\right|\right)\leqslant$$

$$\leqslant C\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))\times$$

$$\times\left(\frac{\left(\int_t^s |(b-b_\varepsilon)|\,(u,\theta_{u,s}(x',y'))du\right)^{\gamma/3}}{(s-t)^{\gamma/6}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\int_t^s |(\sigma-\sigma_\varepsilon)|\,(u,\theta_{u,s}(x',y'))du}{s-t}\right).$$

Суммируя, получаем

$$|H-H_\varepsilon|\,(t,s,(x,y),(x',y'))\leqslant$$

$$\leqslant \frac{C\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))}{(s-t)^{1-\gamma/3}}\left(\int_t^s |(b-b_\varepsilon)|\,(u,\theta_{u,s}(x',y'))du\right)^{\gamma/3}+$$

$$+\frac{C\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))}{(s-t)^{2-\gamma/2}}\int_t^s |(\sigma-\sigma_\varepsilon)|\,(u,\theta_{u,s}(x',y'))du+$$

$$+\frac{C\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))}{(s-t)^{1-\gamma/2}}\left(|(b-b_\varepsilon)|_1+|(\sigma-\sigma_\varepsilon)|_\gamma\right)\left(t,\theta_{t,s}(x',y')\right).$$

***<u>Замечание</u>* <u>4.</u>** В основном тексте работы использовалась ослабленная оценка с $\gamma/2 < \delta < \gamma$:

$$
\begin{aligned}
&|H - H_\varepsilon|\,(t,s,(x,y),(x',y')) \leqslant \\
&\leqslant \frac{C\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))}{(s-t)^{1-\gamma/3}}\left(\int_t^s |(b-b_\varepsilon)|\,(u,\theta_{u,s}(x',y'))du\right)^{\gamma/3} + \\
&+\frac{C\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))}{(s-t)^{1+\gamma/2-\delta}}\left(\int_t^s |(\sigma-\sigma_\varepsilon)|\,(u,\theta_{u,s}(x',y'))du\right)^{\gamma-\delta} + \\
&+\frac{C\bar{p}(t,s,(x,y),(x',y'))}{(s-t)^{1-\gamma/2}}\left(|(b-b_\varepsilon)|_1 + |(\sigma-\sigma_\varepsilon)|_\gamma\right)\left(t,\theta_{t,s}(x',y')\right).
\end{aligned}
$$

Это позволило избежать интегрирования сингулярности большой степени, возникающей в знаменателе второго слагаемого.

Литература

1. BENCHEIKH O., JOURDAIN B. *Convergence in total variation of the Euler-Maruyama scheme applied to diffusion processes with measurable drift coefficient and additive noise* // arXiv:2005.09354v1. – 2020.
2. BITTER I., KONAKOV V. *L_1 and L_∞ stability of transition densities of perturbed diffusions* // Random Oper. Stoch. Eq. – 2021. – Vol. 4, No. 29. – P. 287–308.
3. DECK T., KRUSE S. *Parabolic differential equations with Holder continuous and unbounded coefficients* // Acta Applicandae Mathematicae. – 2002. – Vol. 1, No. 74. – P. 71–91.
4. DELARUE F., MENOZZI S. *Density estimates for a random noise propagating through a chain of differential equations* // J. Funct. Anal. – 2010. – Vol. 6, No. 259. – P. 1577–1630.
5. DI FRANCESCO M., PASCUCCI A. *On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type* // AMRX Appl. Math. Res. Express – 2005. – No. 3. – P. 77–116.
6. KONAKOV V., KOZHINA A., MENOZZI S. *Stability of densities for perturbed diffusions and Markov chains* // ESAIM: Probability and Statistics. – 2017. – Vol. 21. – P. 88–112.

7. KONAKOV V., MENOZZI S., MOLCHANOV S. *Explicit parametrix and local limit theorems for some degenerate diffusion processes* // Annales de l'Institut Henri Poincare. – 2010. – No. 46. – P. 908–923.
8. KONAKOV V., MENOZZI S. *Weak error for the Euler scheme approximation of diffusions with non-smooth coefficients* // Electron. J. Probab. – 2017. – Vol. 22, No. 46.
9. KOZHINA A. *Stability of Densities for Perturbed Degenerate Diffusions* // Theory of Probability & Its Applications. – 2016. – Vol. 61, No. 3. – P. 570–579.
10. KOZHINA A. *Weak error for the Euler scheme approximation of degenerate diffusions with nonsmooth coefficients* // Fundam. Prikl. Mat.. – 2018. – Vol. 22, No. 3. – P. 91–118.

L_1 STABILITY OF TRANSITION DENSITIES OF PERTURBED DEGENERATE DIFFUSIONS

Ilya Bitter, Laboratory of Stochastic Analysis and its Applications, HSE University, Moscow, (ilya.bitter@yandex.ru).

Abstract: In this paper, we derive a stability result for L_1 perturbations of degenerate diffusions under weak regularity conditions on the coefficients. In particular, the drift terms we consider can be unbounded with at most linear growth, and the estimates reflect the transport of the initial condition by the unbounded drift through the corresponding flow. Our approach is based on the study of the distance in L_1-L_1 metric between the transition densities of a given diffusion and the perturbed one using the McKean – Singer parametrix expansion.

Keywords: degenerate diffusion process, unbounded drift, parametrix, perturbed diffusion, density.

УДК 519.7
ББК 32.81
DOI: 10.25728/ubs.2022.100.1

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Э.Ю. Калимулиной.

Поступила в редакцию 04.11.2022.
Дата опубликования 30.11.2022.