

## СОВОКУПНОСТИ МНОГОМЕРНЫХ РЫНКОВ ОПЦИОНОВ В ОПТИМИЗАЦИИ ПО CC-VAR

Агасандян Г. А.<sup>1</sup>

(ФИЦ «Информатика и управление» РАН, Москва)

*Работа продолжает исследование проблем применения континуального критерия VaR (CC-VaR) на совокупности финансовых рынков. Теоретическая универсальность подхода, предложенного ранее, на этот раз проверяется на более сложной совокупности трех многомерных теоретических рынков опционов – одного трехмерного и двух двумерных. Однако теперь решаются некоторые принципиально новые технические проблемы. Рандомизация структуры базиса остается необходимой для реализуемости модели, но уже проводится для двумерных рынков. При формировании исходных данных с их полным аналитическим описанием используется эконометрический подход, дополненный эвристическими построениями. Здесь решается более подходящая для критерия CC-VaR задача СВ, в которой начальная сумма инвестиции не задается, функция рискованных предпочтений (ф.р.п.) инвестора не зависит от ее масштаба, а требуется найти регулярный комбинированный портфель с наименьшей общей стоимостью и полным выдерживанием CC-VaR. В целях иллюстрации методики для маргинальных случайных величин, описывающих прогнозные и стоимостные характеристики задачи, используются бета-распределения. Формируется и скомбинированная из инструментов рынков разных размерностей идеалистичная версия оптимального портфеля. Она позволяет строить единые графики двумерных поверхностей его доходов, в которых совмещаются двумерные части оптимального портфеля и произвольные двумерные сечения его трехмерной части.*

Ключевые слова: базовые активы, континуальный критерий VaR (CC-VaR), функция рискованных предпочтений (ф.р.п.), стоимостная и прогнозная плотности, функция относительных доходов, процедура Неймана – Пирсона, комбинированный портфель, рандомизация, идеалистичный портфель.

### 1. Введение

Продолжаются исследования по применению континуального критерия VaR (CC-VaR), введенного автором [1–6],

---

<sup>1</sup> Геннадий Аршавинович Агасандян, д.ф.-м.н. (agasand17@yandex.ru).

на совокупности нескольких рынков, вообще говоря, разных размерностей, частично связанных базовыми активами [3–5].

Вновь рассматривается задача сочетания инструментариев трех теоретических рынков опционов, но на этот раз всех многомерных – одного трехмерного и двух двумерных. Проблема технически усложняется, но для ее относительного упрощения решается традиционно принятая в задачах с  $CC-VaR$  задача  $CB$ , в которой начальная сумма инвестиции не задана, а *функция рискованных предпочтений* (ф.р.п.) инвестора не зависит от ее масштаба. Ищется невырожденный комбинированный портфель с наименьшей общей стоимостью при выполнении  $CC-VaR$ .

Предлагаемую континуальную теоретическую задачу также приходится решать алгоритмом оптимизации для дискретного аналога теоретической модели с достаточно высокой степенью дискретизации, поскольку получить аналитическое решение, как и для многих иных задач с  $CC-VaR$ , не удастся.

## 2. Инструментарий комбинируемых рынков

Напоминаем, что при намечаемом решении задачи  $CB$  критерий  $CC-VaR$  требует, чтобы портфель инвестора порождал доход  $q$ , удовлетворяющий неравенствам

$$(1) \quad P\{q \geq \phi(\varepsilon)\} \geq 1 - \varepsilon \text{ сразу для всех } \varepsilon \in [0, 1],$$

где  $\phi(\varepsilon)$  – неотрицательная монотонно возрастающая и непрерывная *функция рискованных предпочтений* (ф.р.п.) инвестора.

Рассматривается совокупность трех рынков, один из которых трехмерный – рынок #0 с тремя базовыми активами  $X, Y, Z$ , а два других – двумерные рынки #XY и #XZ с активами  $X, Y$  и  $X, Z$  соответственно. Как обычно для задач с  $CC-VaR$ , все рынки сначала предполагаются однопериодными, теоретическими и идеальными. Ищется комбинированный портфель, составленный из трех портфелей, каждый на своем рынке.

Если не оговорено противное, цены трех базовых активов (в конце периода) обозначаются  $x, y, z$ , параметры инструментов –  $r, s, t$ , при этом  $x, r \in X, y, s \in Y, z, t \in Z$ .

Для трехмерного рынка #0 на начало периода заданы прогнозная  $p(x, y, z)$  и стоимостная  $c(x, y, z)$  плотности, порождающие меры  $\mathbf{P}\{\cdot\}$  и  $\mathbf{C}\{\cdot\}$  соответственно и относительный доход  $\rho(\cdot, \cdot, \cdot) = p(\cdot, \cdot, \cdot)/c(\cdot, \cdot, \cdot)$ .

От этих трехмерных плотностей образуются важные для подготовки исходных данных две пары маргинальных двумерных плотностей для пар  $(x, y)$  и  $(x, z)$ : соответственно  $p_{12}(x, y)$ ,  $p_{13}(x, z)$  и  $c_{12}(x, y)$ ,  $c_{13}(x, z)$ .

Произвольный инструмент  $\mathbf{G}$  теоретического рынка #0 задается измеримой неотрицательной платежной функцией  $g(x, y, z) = \pi(x, y, z; \mathbf{G})$ , определяющей его доходы.

Стоимость инструмента  $\mathbf{G}$  записывается как  $|\mathbf{G}|$  и задается в начале периода, а средний доход записывается как  $\|\mathbf{G}\|$ , рассчитывается также в начале периода, но по прогнозу цены на его конец. Базис образуют  $\delta$ -инструменты  $\mathbf{D}(r, s, t)$  со случайным доходом, равным  $\delta$ -функции  $\delta(x - r, y - s, z - t)$ . При этом

$$(2) \quad |\mathbf{D}(r, s, t)| = c(r, s, t), \quad \|\mathbf{D}(r, s, t)\| = p(r, s, t),$$

$$(3) \quad \mathbf{G} = \int_{x \times y \times z} g(r, s, t) \mathbf{D}(r, s, t) dr ds dt.$$

Для двумерного рынка #XY заданы плотности  $p_{XY}(x, y)$  и  $c_{XY}(x, y)$ , порождающие меры  $\mathbf{P}_{XY}\{\cdot\}$  и  $\mathbf{C}_{XY}\{\cdot\}$  соответственно и относительный доход  $\rho_{XY}(x, y) = p_{XY}(x, y)/c_{XY}(x, y)$ .

Произвольный инструмент  $\mathbf{G}_{XY}$  определяется своей платежной функцией  $g_{XY}(x, y) = \pi_{XY}(x, y; \mathbf{G}_{XY})$ , базис образуют инструменты  $\mathbf{D}_{XY}(r, s)$ ,  $\pi_{XY}(x, y; \mathbf{D}_{XY}(r, s)) = \delta(x - r, y - s)$ , и

$$|\mathbf{D}_{XY}(r, s)| = c_{XY}(r, s), \quad \|\mathbf{D}_{XY}(r, s)\| = p_{XY}(r, s),$$

при этом

$$\mathbf{G}_{XY} = \int_{x \times y} g_{XY}(r, s) \mathbf{D}_{XY}(r, s) dr ds.$$

Так же вводятся аналогичные агрегаты для рынка #XZ с заменами  $Y \rightarrow Z$ ,  $y \rightarrow z$ ,  $\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Z}$ ,  $s \rightarrow t$ ,  $\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Z}$ .

Для трехмерных плотностей  $p(\cdot, \cdot, \cdot)$  и  $c(\cdot, \cdot, \cdot)$  рынка #0 выполняются равенства

$$(4) \quad \int_{x \times y} p(x, y, z) dx dy dz = 1, \quad \int_{x \times y} c(x, y, z) dx dy dz = 1,$$

второе из которых означает равенство единице безрискового относительного дохода за период для рынка #0, что принимается для простоты изложения, но и без ущерба для общности.

Как и в [6], плотности  $c_{XY}(x, y)$  и  $c_{XZ}(x, z)$  могут отличаться от маргинальных для рынка #0 плотностей  $c_{12}(x, y)$  и  $c_{13}(x, z)$  соответственно. Более того, стоимости  $\chi_{XY}$  и  $\chi_{XZ}$  единичных безрисковых активов (как и обратные к ним безрисковые ставки относительного дохода) для рынков #XY и #XZ уже могут, вообще говоря, от единицы отличаться и

$$(5) \int_{X \times Y} c_{XY}(x, y) dx dy = \chi_{XY}, \quad \int_{X \times Z} c_{XZ}(x, z) dx dz = \chi_{XZ}.$$

Но при этом, тем не менее, естественно считать, что

$$(6) p_{XY}(x, y) \equiv p_{12}(x, y), \quad p_{XZ}(x, z) \equiv p_{13}(x, z).$$

Инвестиционная сумма  $A$ , средний доход  $R$  и средняя доходность  $y$  образуют запись результатов  $L = \langle A, R, y \rangle$ , где

$$(7) A = \int_0^1 \phi(\varepsilon) d\gamma(\varepsilon), \quad R = \int_0^1 \phi(\varepsilon) d\varepsilon, \quad y = R/A - 1 > 0.$$

### 3. Оптимизация комбинированного портфеля

Поскольку аналитического решения рассматриваемой континуальной задачи получить не удастся, задача решается на дискретной (сценарной) модели с достаточно большим (по возможности) количеством сценариев. В таком случае для упрощения системы обозначений имеет смысл ограничиться заданием по каждому измерению одного и того же количества  $n$  сценариев, что, разумеется, не умаляет общности последующих выводов. Более того, принимается  $X = Y = Z = [0, 1)$ .

Сценарная дискретизация вводится равномерным разбиением множества  $X$  на  $n$  сценариев  $R_i = [x_{i-1}, x_i) \subset X$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_i = x_0 + i/n$ ,  $i \in I = \{1, \dots, n\}$ . Аналогично проводится разбиение множеств  $Y$  и  $Z$  с очевидными заменами  $\{R \rightarrow S, x \rightarrow y, i \rightarrow j, I \rightarrow J, X \rightarrow Y\}$  и  $\{R \rightarrow T, x \rightarrow z, i \rightarrow k, I \rightarrow K, X \rightarrow Z\}$  соответственно. Если не оговорено противное, считаем  $i \in I, j \in J, k \in K$ .

Прямым произведением введенных одномерных сценариев получаются  $n \times n \times n$  трехмерных сценариев, базис образуют индикаторы  $D_{ijk} = H\{R_i \times S_j \times T_k\}$  (см [2, 6]), интегралы заменя-

ются суммами, плотности заменяются вероятностями (или стоимостями) для сценариев. В частности, аналогом (2), (3) будут

$$(8) \quad |D_{ijk}| = c_{ijk} = \int_{R_i \times S_j \times T_k} c(r, s, t) dr ds dt,$$

$$\|D_{ijk}\| = p_{ijk} = \int_{R_i \times S_j \times T_k} p(r, s, t) dr ds dt;$$

$$(9) \quad G = \sum_{ijk} g_{ijk} D_{ijk}.$$

Из (8) вычисляется и относительный доход  $\rho_{ijk} = p_{ijk}/c_{ijk}$

Отмечаем, что введенные характеристики стоимости и прогнозных вероятностей образуют (в отличие от матриц в [3, 4]) трехмерные тензоры, что не только повышает сложность процедуры формирования исходных данных, громоздкость расчетов и многих важных промежуточных результатов, но и сказывается на трудностях с изображением графиков.

### 3.1. ПРАВИЛА ОПТИМАЛЬНОГО КОМБИНИРОВАНИЯ РЫНКОВ

Построение оптимального комбинированного портфеля ведется стандартным дискретным алгоритм решения задачи *СВ* (см. [2, 4]) на основе процедуры Неймана – Пирсона [8]. Для этого формируется единый для всей совокупности рынков тензор относительных доходов.

Однако в алгоритме основные агрегаты, включая введенные матрицы и тензоры, участвуют в векторной форме (в работе – и для двумерных, и трехмерного рынков). В краткой форме алгоритм записывается последовательностью операций:

$$(10) \quad \rho = p/c, \quad \xi = O(\rho), \quad \eta = O(\xi), \quad d = p(\xi), \quad \varepsilon = Td;$$

$$(11) \quad b = \phi(\varepsilon), \quad g = b(\eta), \quad A = (g, c), \quad R = (g, p), \quad y = R/A - 1.$$

Здесь  $p$  и  $c$  – лексикографически упорядоченные векторы прогнозных вероятностей сценариев и стоимостей индикаторов;  $\rho$  – вектор относительных доходов;  $O$  – оператор упорядочения вектора-операнда по возрастанию его компонент;  $d$  – подстановка вектора  $p$ , упорядоченная по возрастанию компонент вектора  $\rho$ ;  $g$  – вектор весов индикаторов в оптимальном портфеле; при этом  $T$  – нижняя треугольная матрица, состоящая

из нулей (выше диагонали) и единиц и надлежащим образом суммирующая компоненты векторов  $\boldsymbol{\rho}$  и  $\boldsymbol{d}$ . Так, при  $n$  сценариях (12)  $\boldsymbol{T} = \{\tau_{\mu\nu} = \{0, \mu < \nu; 1, \mu \geq \nu\}, \mu, \nu = 1, \dots, n\}$ .

С надеждой не вносить диссонанс в восприятие текста читателем в ряде случаев сохраняются некоторые векторные символы для матриц и тензоров. Это делается так, чтобы избежать усложнения системы обозначений, поскольку их в алгоритме часто приходится интерпретировать в качестве векторов с лексикографическим порядком элементов.

Для оптимизации комбинированного портфеля формируется единый тензор относительных доходов путем замены значений  $\rho_{ijk}$  тензора  $\boldsymbol{\rho}$  рынка #0 для всех тех трехмерных сценариев и теми значениями  $\rho_{XY:ij}$  или  $\rho_{XZ:jk}$  матриц  $\boldsymbol{\rho}_{XY}$  или  $\boldsymbol{\rho}_{XZ}$  для рынков #XY и #XZ с сопоставимыми вероятностями, когда последние окажутся наибольшими (см. также [3, 4]).

Формально правила замещения определяются разделением множества  $I \times J \times K$  всех сценариев на три подмножества  $M_0, M_1, M_2$ , состоящие из тех и только тех троек  $(i, j, k)$ ,  $i \in I, j \in J, k \in K$ , для которых максимальным является относительный доход соответственно на рынках #0, #XY, #XZ:

$$(13) M_0 = \{(i, j, k) \mid \rho_{ijk} \geq \rho_{XY:ij} \ \& \ \rho_{ijk} \geq \rho_{XZ:ik}\},$$

$$(14) M_1 = \{(i, j, k) \mid \rho_{XY:ij} > \rho_{ijk} \ \& \ \rho_{XY:ij} \geq \rho_{XZ:ik}\},$$

$$(15) M_2 = \{(i, j, k) \mid \rho_{XZ:ik} > \rho_{ijk} \ \& \ \rho_{XZ:ik} \geq \rho_{XY:ij}\}.$$

Множества  $M_0, M_1$  и  $M_2$  взаимно не пересекаются и в объединении дают полное множество  $X \times Y \times Z$ . Эти правила замещения могут быть записаны в виде *тензора замещений*, помечающего сценарии из  $I \times J \times K$  символами 0, 1, 2:

$$(16) \mathbf{A} = \|\|a_{ijk}\|\|, \quad a_{ijk} = l \Leftrightarrow (i, j, k) \in M_l, \quad l = 0, 1, 2.$$

Уже на данной стадии решения проблемы после получения разделения (13)–(15) строится упрощенная, но не реализуемая *суррогатная* версия комбинированного портфеля. Для этого с учетом цен на рынках #XY, #XZ достаточно провести формальную коррекцию цен во *всех* базисных инструментах рынка #0.

Эти инструменты для суррогатного портфеля со своими ценами записываются при  $a_{ijk} = 0, 1, 2$  соответственно как

$$D_{ijk}^{srg}, c_{ijk}^{srg} = |D_{ijk}^{srg}| = c_{ijk}, p_{ijk} / \rho_{XY:ij}, p_{ijk} / \rho_{XZ:ik}.$$

Затем образуется новый тензор относительных доходов, а алгоритм (10), (11) находит тензор весов  $g^{srg}$  и портфель

$$(17) \mathbf{G}^{srg} = \sum_{i \in I, j \in J, k \in K} g_{ijk}^{srg} D_{ijk}^{srg}.$$

Доходы суррогатного портфеля близки к оптимальным, и потому он может служить вспомогательным средством проверки правильности алгоритма.

### 3.2. КОНСТРУИРОВАНИЕ РАНДОМИЗАЦИИ

Для построения оптимального комбинированного портфеля нужно сформировать единый тензор относительных доходов с предварительной заменой значения  $\rho_{ijk}$  тензора  $\rho$  рынка #0 значением  $\rho_{XY:ij}$  или  $\rho_{XZ:jk}$  (из матриц  $\rho_{XY}$ ,  $\rho_{XZ}$  рынков #XY и #XZ) для всех тех трехмерных сценариев, для которых значение двумерного рынка наибольшим из трех (см. также [3, 4]).

Для реализации этого плана согласно классификации (13)–(15) сценарные индикаторы рынка #0 для множества  $M_0$  следовало бы заместить сценарными инструментами рынков #XY или #XZ, притом с сопоставимыми вероятностями, для чего идеально подошли бы инструменты

$$(18) M_{XY:ij}^* = D_{12:ij} \times H_3 \{M_{12:ij}\}, \quad M_{XZ:ik}^* = D_{12:ik} \times H_2 \{M_{13:ik}\}.$$

Здесь  $M_{12:ij} \subset K$ ,  $M_{13:ik} \subset J$ , – множества соответственно по третьей и второй координатам рынка #0,  $H_2\{\cdot\}$ ,  $H_3\{\cdot\}$  – инструментальные индикаторы множеств, а  $D_{12:ij}$ ,  $D_{13:ik}$  – маргинальные двумерные сценарные индикаторы, которые пришлось бы замещать базисными инструментами  $D_{XY}$ ,  $D_{XZ}$  рынков #XY, #XZ.

Но из имеющихся на рынках #XY и #XZ инструментов связанными с проблемой замещения могут быть лишь инструменты

$$(19) M_{XY:ij} = D_{XY:ij} \times H_3 \{M_{12:ij}\}, \quad M_{XZ:ik} = D_{XZ:ik} \times H_2 \{M_{13:ik}\}.$$

Хотя они и сохраняют вероятности замещения, но в точности таких инструментов рассматриваемая совокупность рынков не имеет. А подбором инструментов  $D_{XY:ij}$  и  $D_{XZ:ik}$  в подходящем

количестве можно добиться лишь сохранения средних доходов, но не адекватного распределения вероятности.

Как и в [3–5], выход видится в применении на рынках #XY и #XZ *рандомизации*, делающей случайными в комбинированном портфеле сами (уже двумерные) базисные инструменты. Для каждого сценария  $(i, j)$  на рынке #XY и  $(i, k)$  на рынке #XZ вводятся соответственно взаимонезависимые *биномиальные* случайные величины  $\vartheta_{XY;ij}$ ,  $\vartheta_{XZ;ik}$ , задаваемыми *матрицами*  $\Theta_{XY}$ ,  $\Theta_{XZ}$  вероятностей замещения (*успеха*)  $\theta_{XY;ij}$ ,  $\theta_{XZ;ik}$ :

$$(20) \Theta_{XY} = \{\theta_{XY;ij}\}, \quad \theta_{XY;ij} = P\{M_{XY;ij} | i, j\} = \sum_{k \in M_{XY;ij}} P_{ijk} / p_{XY;ij};$$

$$(21) \Theta_{XZ} = \{\theta_{XZ;ik}\}, \quad \theta_{XZ;ik} = P\{M_{XZ;ik} | i, k\} = \sum_{j \in M_{XZ;ik}} P_{ijk} / p_{XZ;ik}.$$

Параметры  $\theta_{XY;ij}$ ,  $\theta_{XZ;ik}$  – условные вероятности замещения для рынков #XY и #XZ при реализации двумерных сценариев  $(i, j)$  и  $(i, k)$  соответственно. Формально базисные инструменты для каждого сценария на рынках #XY и #XZ вводятся как

$$(22) D_{XY;ij}^{cmb} = \vartheta_{XY;ij} D_{XY;ij}, \quad D_{XZ;ik}^{cmb} = \vartheta_{XZ;ik} D_{XZ;ik}.$$

Они совпадают с инструментами  $D_{XY;ij}$ ,  $D_{XZ;ik}$  лишь с вероятностями  $\theta_{XY;ij}$ ,  $\theta_{XZ;ik}$ , а с вероятностями  $1 - \theta_{XY;ij}$ ,  $1 - \theta_{XZ;ik}$  становятся *нулевыми* инструментами  $N_{XY;ij}$ ,  $N_{XZ;ik}$  (с нулевой ценой и приносящими нулевой доход). Их стоимости и средние доходы (совпадающими в этом случае с вероятностями)

$$(23) |D_{X;i}^{cmb}| = c_{X;i}^{cmb} = \theta_{X;i} c_{X;i}, \quad \|D_{X;i}^{cmb}\| = p_{X;i}^{cmb} = \theta_{X;i} p_{1;i};$$

$$(24) |D_{Y;j}^{cmb}| = c_{Y;j}^{cmb} = \theta_{Y;j} c_{Y;j}, \quad \|D_{Y;j}^{cmb}\| = p_{Y;j}^{cmb} = \theta_{Y;j} p_{2;j}.$$

Вторые соотношения в (23) и (24) показывают, что матричные параметры  $\Theta_{XY}$  (20) и  $\Theta_{XZ}$  (21) уравнивают вероятности, связанные с инструментальными индикаторами в (19).

Инструменты (22) рынков #XY и #XZ вместе с инструментами  $D_{ijk}$  рынка #0, на которые замещение не распространилось, с характеристиками (23), (24) и (8) соответственно образуют весь *комбинированный* базис.

Для этого базиса формируется единая функция *относительных доходов*, и к ней применяется тот же дискретный алгоритм оптимизации. В результате его работы производится новое

назначение всех вероятностей, и строится новая весовая функция базисных инструментов. А оптимальный *комбинированный* (и *случайный*) портфель приобретает вид

$$(25) \mathbf{G}^{cmb} = \sum_{(i,j,k) \in M_0} g_{ijk}^{cmb} \mathbf{D}_{ijk} + \sum_{i \in I, j \in J} g_{XY:ij}^{cmb} \mathcal{G}_{XY:ij} \mathbf{D}_{XY:ij} + \\ + \sum_{i \in I, k \in K} g_{XZ:ik}^{cmb} \mathcal{G}_{XZ:ik} \mathbf{D}_{XZ:ik} .$$

Во втором и третьем слагаемых суммирование должно вестись по множествам  $M_1$  и  $M_2$ . Но по правилам замещения на множествах  $M_{12:ij}$  и  $M_{13:ik}$  веса инструментов постоянны, и потому оба суммирования сводятся к двукратным.

Нереализуемая на рынке, но удобная для иллюстрации упрощенная *идеалистичная* версия портфеля (25) имеет вид

$$(26) \mathbf{G}^{idl} = \sum_{(i,j,k) \in M_0} g_{ijk}^{cmb} \mathbf{D}_{ijk} + \sum_{i \in I, j \in J} g_{XY:ij}^{cmb} \mathbf{M}_{XY:ij} + \\ + \sum_{i \in I, k \in K} g_{XZ:ik}^{cmb} \mathbf{M}_{XZ:ik} .$$

При построении графика доходов *комбинированного* портфеля (25) в идеалистичной форме (26) можно использовать представление этих доходов в виде поверхности, описываемой функцией трех переменных

$$(27) \pi(x, y, z; \mathbf{G}^{idl}) = \max \left( g_{ijk}^{cmb} \pi(x, y, z; \mathbf{D}_{ijk}), \right. \\ \left. g_{XY:ij}^{cmb} \pi(x, y; \mathbf{D}_{XY:ij}), g_{XZ:ik}^{cmb} \pi(x, z; \mathbf{D}_{XZ:ik}) \right) .$$

Это представление доходов идеалистичной версии *комбинированного* портфеля позволяет строить графики произвольных двумерных сечений единой трехмерной функции.

### 3.3. ОСОБЕННОСТИ ЗАДАНИЯ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Методология выбора прогнозных и стоимостных распределений для теоретического рынка, удобная для полного аналитического описания задач с *CC-VaR*, является некоторым усложнением подхода, предложенного в [5].

Сначала на кубе  $Q = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  задается равномерное распределение, которое затем слегка подправляется введением корреляции в простейшем для целей анализа виде таким образом, чтобы оно осталось распределением и чтобы все три

его одномерных маргинальных распределения сохраняли свойство равномерности на  $[0, 1]$ .

В работе подобная конструкция, в эконометрике называемая *копулой* [7], используется при построении трехмерных распределений для обеих мер – прогнозной и стоимостной. За основу принимается функция (равномерность одномерных маргинальных распределений для них легко проверяется)

$$(28) \Phi(u, v, w) = uvw(1 + \kappa_1(1-v))(1-w) + \\ + \kappa_2(1-u)(1-w) + \kappa_3(1-u)(1-v)), \quad u, v, w \in [0, 1].$$

Эта функция (если она – функция распределения) имеет плотность – смешанную производную по всем трем переменным –

$$(29) D(u, v, w) = uvw(1 + \kappa_1(1-2v))(1-2w) + \\ + \kappa_2(1-2u)(1-2w) + \kappa_3(1-2u)(1-2v)).$$

Для получения желаемых трехмерных распределений нужно, во-первых, вместо переменных  $u, v, w$  подставить в качестве новых маргинальных какие-нибудь одномерные функции распределения, во-вторых, подобрать параметры  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ , которые будут отвечать за корреляцию между компонентами, не нарушая при этом свойства функций распределения.

Следует иметь в виду, что эти две процедуры взаимосвязаны: множество допустимых троек параметров зависит от выбора маргинальных функций распределения. При этом допустимость понимается в том смысле, что в результате должны получаться функции распределения со всеми своими свойствами.

Некоторая несогласованность возникает и при дискретизации модели, к которой приходится прибегать, поскольку полностью аналитически задачу решить не удастся. Тем не менее некоторый анализ модели (28) вполне уместен, поскольку мог бы служить ориентиром при подборе параметров.

Даже для исходной простой модели (28), (29) не любая тройка параметров  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$  порождает полностью соответствующую всем требованиям на функцию распределения.

Легко проверяется, что функция (28) перестает быть неотрицательной, если хотя бы один элемент тройки меньше  $-1$  (например, при  $\kappa_1 < -1$  и  $u = 1, v = w = 0$ ), а функция (29) – если

больше +1 (например, при  $\kappa_3 > 1$  и  $u = 1, v = 0, w = 1/2$ ). Поэтому принимается (еще и для определенности), что

$$(30) \quad -1 \leq \kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \kappa_3 \leq 1.$$

Не будем пытаться получить строгие условия на допустимость набора параметров для модели (28) (хотя бы в силу ограниченности ее значения для окончательного выбора параметров, ведь может потребоваться проведение коррекции). А воспользуемся результатами вычислительных экспериментов по поиску допустимых наборов, породившими вывод, что минимальное значение функции (29) определяется формулой

$$(31) \quad \min D(u, v, w) = 1 + \kappa_1 - |\Delta|, \quad \Delta = \kappa_2 + \kappa_3.$$

В ней параметр  $\Delta$  приобретает особое значение. Именно от его модуля зависит минимум плотности. Во всяком случае, ни в одном из многочисленных проведенных экспериментов формула (31) не была нарушена. Эта формула позволила для достаточно грубой решетки значений параметров корреляции определить подходящие для модели (28), (29) их сочетания. Полученные наборы послужили основой для последующего определения параметров корреляции в иллюстративных целях уже при их использовании в предлагаемых примерах.

Произвольным заданием тройки одномерных функций распределения в качестве аргументов  $u, v, w$  в (28) и подходящим назначением параметров  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  получаются функции из широкого класса трехмерных функций распределения. Так, из трех одномерных функций строится трехмерное распределение

$$(32) \quad F(x, y, z) = \Phi(F_X(x), F_Y(y), F_Z(z)) = \\ = F_X(x)F_Y(y)F_Z(z) \left( (1 + \kappa_1(1 - F_Y(y))(1 - F_Z(z))) + \right. \\ \left. + \kappa_2(1 - F_X(x))(1 - F_Z(z)) + \kappa_3(1 - F_X(x))(1 - F_Y(y)) \right).$$

В работе в качестве всех одномерных функций распределения (притом по каждой координате) берутся функции бета-распределения, часто применяемые в статистике. Общее представление их плотности дается правилом

$$(33) \quad \beta(z; u, v) = z^{u-1} (1-z)^{v-1} / B(u, v), \quad z \in [0, 1), u, v > 1, \text{ где}$$

$$B(u, v) = \int_0^1 x^{u-1} (1-x)^{v-1} dx = \Gamma(u)\Gamma(v)/\Gamma(u+v),$$

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty x^{u-1} \exp(-x) dx -$$

соответственно бета- и гамма-функции.

#### 4. Иллюстративный пример

В дискретной модели непрерывные функции заменяются векторами, матрицами и тензорами. Для получения дискретного аналога формул (28) и (32) для сценарного рывка отправляемся от плотностей вероятности распределений.

Хотя предлагаемый подход с (28) предполагает естественным непосредственное использование функций бета-распределения, но они в отличие от плотности (33) не представимы, за некоторыми исключениями, в виде конечных функций, и потому их применение технически сложнее.

В иллюстративном примере бета-распределенными берутся *одномерные* маргинальные плотности распределения для обеих трехмерных функций распределения рынка #0 – прогнозной и стоимостной. В обозначениях (33) принимается:

$$(34) p_1(x) = \beta(x; 3,6; 2,6); p_2(y) = \beta(y; 3,4; 2,4); p_3(z) = \beta(z; 3,2; 2,2);$$

$$(35) c_1(x) = \beta(x; 3,2; 2,2); c_2(y) = \beta(y; 3,0; 2,0); c_3(z) = \beta(z; 2,8; 1,8).$$

Поскольку по каждой координате выбранные прогнозные параметры бета-распределений в (34) превосходят соответствующие стоимостные параметры в (35), то дисперсии распределений в (34) ниже, чем в (35). Поэтому в терминологии, принятой среди участников финансовых рынков, речь в примере идет, как это часто делалось и ранее, о *продаже волатильности*.

Исходные векторы прогнозных и стоимостных *сценарных вероятностей* размерности  $n = 10$  задаются для всех трех координат трехмерного рынка #0. Они обозначаются соответственно (36)  $\mathbf{p}_{b;1}, \mathbf{p}_{b;2}, \mathbf{p}_{b;3}, \mathbf{c}_{b;1}, \mathbf{c}_{b;2}, \mathbf{c}_{b;3}$ ,

а находятся интегрированием функций (34) и (35) в пределах сценариев. Так, прогнозный вектор вероятностей сценариев по первой координате определяется согласно (34) соотношением

$$(37) \mathbf{p}_{b;i} = \left\{ p_{b;i} = \int_{S_i} p_1(x) dx, i \in I \right\}.$$

Так же строятся и остальные векторы из (36).

Одномерные функции распределения, соответствующие векторам (36), записываются векторами размерности  $n + 1$ :

$$(38) \mathbf{p}_{t,1}, \mathbf{p}_{t,2}, \mathbf{p}_{t,3}, \mathbf{c}_{t,1}, \mathbf{c}_{t,2}, \mathbf{c}_{t,3}.$$

Они определяются значениями в граничных точках сценариев, притом крайней левой точке придается значение нуль.

Компонентами первого вектора из (38) будут

$$(39) p_{t,1;0} = 0, \quad p_{t,1;i} = \sum_{l \leq i} p_{b;1;l}, \quad i \in I.$$

Подобно строятся и остальные векторы из (38). Преобразования по типу (39) в алгоритме осуществляются нижними треугольными матрицами (12).

При дискретизации соотношения (32) проводятся операции внешнего перемножения  $\mathbf{E}(\cdot, \cdot)$  двух и трех векторов, возможно, разных размеров. Например, если  $\mathbf{a} = \{a_i, i \in I_0\}$ ,  $\mathbf{b} = \{b_j, j \in J_0\}$ ,  $\mathbf{c} = \{c_k, k \in K_0\}$ , где  $I_0 = \{0\} \cup I$ ,  $J_0 = \{0\} \cup J$ ,  $K_0 = \{0\} \cup K$ , то

$$\mathbf{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{a_i b_j, i \in I_0, j \in J_0\};$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \{a_i b_j c_k, i \in I_0, j \in J_0, k \in K_0\}.$$

В результате дискретным аналогом трехмерных функций распределения для рынка #0 становятся тензоры размером  $(n + 1) \times (n + 1) \times (n + 1)$

$$(40) \mathbf{P}_{F,0} = \mathbf{E}(\mathbf{p}_{t,1}, \mathbf{p}_{t,2}, \mathbf{p}_{t,3}) (1 + \kappa_{P1} \mathbf{E}(1 - \mathbf{p}_{t,2}, 1 - \mathbf{p}_{t,3}) + \kappa_{P2} \mathbf{E}(1 - \mathbf{p}_{t,1}, 1 - \mathbf{p}_{t,3}) + \kappa_{P3} \mathbf{E}(1 - \mathbf{p}_{t,1}, 1 - \mathbf{p}_{t,2})),$$

$$(41) \mathbf{C}_{F,0} = \mathbf{E}(\mathbf{c}_{t,1}, \mathbf{c}_{t,2}, \mathbf{c}_{t,3}) (1 + \kappa_{C1} \mathbf{E}(1 - \mathbf{c}_{t,2}, 1 - \mathbf{c}_{t,3}) + \kappa_{C2} \mathbf{E}(1 - \mathbf{c}_{t,1}, 1 - \mathbf{c}_{t,3}) + \kappa_{C3} \mathbf{E}(1 - \mathbf{p}_{t,1}, 1 - \mathbf{p}_{t,2})).$$

Здесь имеется в виду, что промежуточные матрицы и тензоры, порождаемые внешним умножением в (40) и (41), перемножать нужно непременно уже покомпонентно. Отмечаем, что индексация компонент полученных тензоров ведется от нуля, что находит отражение и в их обозначениях:

$$(42) \mathbf{P}_{F,0} = \{p_{F,0;ijk}, i \in I_0, j \in J_0, k \in K_0\},$$

$$(43) \mathbf{C}_{F,0} = \{c_{F,0;ijk}, i \in I_0, j \in J_0, k \in K_0\}.$$

Из тензоров, вводимых в (40)–(43), образованием первых смешанных разностей находятся тензоры вероятностей разме-

ром  $n \times n \times n$  для всех трехмерных сценариев (дискретного аналога трехмерных плотностей вероятности для рынка #0)

$$(44) P_{S,0} = \{p_{S,0;ijk}, i \in I, j \in J, k \in K\},$$

$$(45) C_{S,0} = \{c_{S,0;ijk}, i \in I, j \in J, k \in K\}.$$

При этом для всех  $i \in I, j \in J, k \in K$

$$(46) p_{S,0;ijk} = p_{F,0;i,j,k} - p_{F,0;i,j,k-1} - p_{F,0;i,j-1,k} + p_{F,0;i-1,j,k} + p_{F,0;i-1,j-1,k} - p_{F,0;i-1,j,k-1} - p_{F,0;i,j-1,k-1} + p_{F,0;i-1,j-1,k-1},$$

$$(47) c_{S,0;ijk} = c_{F,0;i,j,k} - c_{F,0;i,j,k-1} - c_{F,0;i,j-1,k} + c_{F,0;i-1,j,k} + c_{F,0;i-1,j-1,k} - c_{F,0;i-1,j,k-1} - c_{F,0;i,j-1,k-1} + c_{F,0;i-1,j-1,k-1}.$$

В вероятностных тензорах (44) и (45) индексация компонент ведется уже от единицы.

Как уже говорилось выше, при переходе от равномерных распределений в (28) к бета-распределениям (33) применение правила (32) может породить функции, не являющиеся функциями распределения, – их плотность теряет свойство неотрицательности. Поэтому на данной стадии расчетов стоит проверить результаты и при наличии в тензорах отрицательных элементов провести коррекцию параметров корреляции с повтором расчетов. В иллюстративном примере полагаем

$$(48) \kappa_{P;1} = \kappa_{C;1} = -0,2, \kappa_{P;2} = \kappa_{C;2} = 0,2, \kappa_{P;3} = \kappa_{C;3} = 0,4,$$

и в таком случае согласно (31)  $\Delta_P = \Delta_C = 0,6 > 0$ .

Покомпонентным делением (46) на (47) определяется тензор относительных доходов для рынка #0

$$R_{S,0} = P_{S,0} / C_{S,0}.$$

Для сценарных рынков #XY и #XZ формируются вероятностные *матрицы* (дискретный аналог двумерных плотностей) с понятными обозначениями  $P_{S,XY}, P_{S,XZ}, C_{S,XY}, C_{S,XZ}$ .

Просто обстоят дела с *матрицами*  $P_{S,XY}$  и  $P_{S,XZ}$ . Поскольку они производные от единого прогноза инвестора, их естественно строить по сценарным правилам из двумерных маргинальных функций распределения рынка #0 для двух пар величин по координатам  $(x, y)$  и  $(x, z)$ . И потому полагаем (как и в (6)) с сохранением преемственности в обозначениях

$$(49) P_{S,XY} = P_{S,0;12}, \quad P_{S,XZ} = P_{S,0;13}.$$

Маргинальные векторы  $p_{b;1}, p_{b;2}, p_{b;3}$  в (36) и  $p_{t;1}, p_{t;2}, p_{t;3}$  в (38) сами служили основой для построения тензоров  $P_{S,0}$  и  $P_{F,0}$

и потому согласованы с ними. Того же можно будет достичь, если в качестве матриц распределения для двумерных рынков #XY и #XZ выбирать двумерные маргинальные матрицы распределения соответственно для координат  $(x, y)$  и  $(x, z)$  трехмерного тензора распределения  $P_{F,0}$ . Вводя понятные обозначения, имеем

$$(50) P_{F,0;12} = \{p_{F,0;ijn}, i \in I_0, j \in J_0\}, P_{F,0;13} = \{p_{F,0;jnk}, i \in I_0, k \in K_0\}.$$

Им отвечают двумерные маргинальные вероятностные матрицы (аналог двумерных плотностей распределения)

$$P_{S,0;12} = \{p_{S,0;12;ij}, i \in I, j \in J\}, P_{S,0;13} = \{p_{S,0;13;jk}, i \in I, k \in K\},$$

элементы которых вычисляются из (50) применением первой смешанной разности по двум координатам

$$(51) p_{S,0;12;ij} = p_{F,0;12;ij} - p_{F,0;12;i,j-1} - p_{F,0;12;i-1,j} + p_{F,0;12;i-1,j-1},$$

$$(52) p_{S,0;13;ik} = p_{F,0;13;ik} - p_{F,0;13;i,k-1} - p_{F,0;13;i-1,k} + p_{F,0;13;i-1,k-1}.$$

Вследствие некоторой самостоятельности рынков полного аналога для стоимостных матриц  $C_{S,XY}$  и  $C_{S,XZ}$  в их родственных отношениях с двумерными маргинальными стоимостными матрицами  $C_{S,0;12}$  и  $C_{S,0;13}$ , возникающими на рынке #0 из трехмерных стоимостных тензоров, ожидать не следует.

Впрочем, поскольку рынки функционируют в едином экономическом пространстве, на определенную близость к аналогу можно и рассчитывать. Поэтому двумерные агрегаты  $C_{S,XY}$  и  $C_{S,XZ}$  (сценарный аналог плотностей  $c_{XY}(x, y)$  и  $c_{XZ}(x, z)$ ) строятся опосредованно, а не независимо (как, например, в [5] для двумерного рынка #0). Исходными будут служить именно двумерные маргинальные функции распределения для рынка #0.

Для них в сценарном варианте модели имеем матрицы

$$C_{S,0;12} = \{c_{S,0;12;ij}, i \in I, j \in J\}, C_{S,0;13} = \{c_{S,0;13;jk}, i \in I, k \in K\},$$

а их элементы образуются, как и в (51) и (52), применением первой смешанной разности по двум координатам:

$$(53) c_{S,0;12;ij} = c_{F,0;12;ij} - c_{F,0;12;i,j-1} - c_{F,0;12;i-1,j} + c_{F,0;12;i-1,j-1},$$

$$(54) c_{S,0;13;jk} = c_{F,0;13;jk} - c_{F,0;13;j,k-1} - c_{F,0;13;i-1,k} + c_{F,0;13;i-1,k-1}.$$

А упомянутая близость в примере моделируется правилами

$$(55) C_{S,XY} = v_{XY} C_{S,0;12} + (1 - v_{XY}) E(\omega_X, \omega_Y),$$

$$(56) C_{S,XZ} = v_{XZ} C_{S,0;13} + (1 - v_{XZ}) E(\omega_X, \omega_Z),$$

где  $v_{XY} = v_{XZ} = 0,9$ , а  $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$  – вероятностные векторы размерности  $n$ , получаемые аналогично векторам (36) (по формулам типа (37)) из плотностей (33)  $\beta(x; 2,0; 2,0)$ ,  $\beta(y; 2,0; 2,0)$ ,  $\beta(z; 2,0; 2,0)$  соответственно (разумеется, возможен и иной выбор параметров),  $E(\cdot, \cdot)$  – операция внешнего перемножения.

Такие правила моделируют отличие матриц  $C_{S,XY}, C_{S,XZ}$  для рынков #XY, #XZ от маргинальных для рынка #0 матриц  $C_{S,0;12}, C_{S,0;13}$ , притом свойство продажи волатильности для инвестиции лишь усиливается. Кроме того, возможно и последующее введение для рынков #XY и #XZ параметров  $\chi_{XY}$  и  $\chi_{XZ}$  (обратных к безрисковым относительным доходам  $r_{XY}$  и  $r_{XZ}$  (5)) с отличными, вообще говоря, от единицы значениями:

$$(57) \chi_{XY} = 1/r_{XY}, \chi_{XZ} = 1/r_{XZ}.$$

Наконец, находятся векторы относительных доходов из векторов  $p_{S,XY}, c_{S,XY}$  и  $p_{S,YZ}, c_{S,YZ}$ , получаемых трансформированием соответственно матриц  $P_{S,XY}, C_{S,XY}$  и  $P_{S,YZ}, C_{S,YZ}$ ,

$$\rho_{S,XY} = p_{S,XY} / c_{S,XY}, \rho_{S,YZ} = p_{S,YZ} / c_{S,YZ},$$

и к ним применяется стандартный алгоритм с ф.р.п.  $\phi(\varepsilon) = \varepsilon^2$ .

Ввиду громоздкости большинства промежуточных и окончательных результатов ограничиваемся лишь некоторыми.

Раздельное решение задачи  $CB$  для рынков #0, #XY, #XZ (т.е. при  $\chi_{XY} = \chi_{XZ} = 1$ ) дает записи результатов (согласно (7))

$$(58) L_0 = \langle 0,280631; 0,335117; 0,194156 \rangle,$$

$$(59) L_{XY} = \langle 0,301695; 0,346391; 0,148147 \rangle,$$

$$(60) L_{XZ} = \langle 0,299488; 0,345842; 0,154779 \rangle.$$

Эти записи интересны лишь в отношении сравнения с таковыми для комбинированных портфелей. Необходимыми для построения оптимального комбинированного портфеля и его формальных версий будут матрицы и тензоры относительных доходов для сценариев – двумерных и трехмерных.

Результаты (59), (60) для рынков #XY, #XZ получены по правилам (55), (56) в предположении, что обе стоимостные плотности нормированы единицей. Но в решаемой задаче относительно самостоятельных рынков для рынков #XY, #XZ возможно иное нормирование.

Поэтому все стоимостные характеристики для этих рынков множатся на коэффициенты  $\chi_{XY}$  и  $\chi_{XZ}$  (57). На них должны делиться и все относительные доходы, а это повлечет изменение комбинированного портфеля и его итоговой доходности.

Также в *записях* результатов, полученных при  $\chi = 1$ , проводятся очевидные изменения при иных заданиях параметра  $\chi$ : сумма множится на  $\chi$ , средний доход не меняется, а доходность трансформируется в  $(1 + y)/\chi - 1$ . Разумеется, это потребует адекватного изменения *тензора*  $\mathbf{A}$  (16) и *матриц*  $\Theta_{XY}$ ,  $\Theta_{XZ}$  (20).

В рассматриваемом примере принимается

$$(61) \chi_{XY} = 1,1; \chi_{XZ} = 1,1.$$

Таким образом, при сохранении доходов все стоимости возрастают в 1,1 раза, и формулы (59), (60) корректируются:

$$(62) \mathbf{L}_{XY} = \langle 0,331865; 0,346391; 0,0437701 \rangle,$$

$$(63) \mathbf{L}_{XZ} = \langle 0,329437; 0,345842; 0,0497988 \rangle.$$

*Построение комбинированного портфеля* ведется на основе некоторых промежуточных и окончательных результатов раздельного решения задачи *СВ* для всех трех исходных рынков. При этом для двумерных рынков учитываются коррекции, вызванные принятыми параметрами (61).

Сначала применением классифицирующих соотношений (13)–(15) находится разделение множества всех сценариев на подмножества  $M_k$ ,  $k = 0, 1, 2$ , а по нему строится тензор замещений  $\mathbf{A}$  (16). В рассматриваемом примере тензор насчитывает 507 нулей, 239 единиц и 254 двойки.

Затем из тройки тензоров  $\{C_{S,0}, P_{S,0}, R_{S,0}\}$  операцией обнуления всех его элементов  $(i, j, k)$ , для которых согласно (16)  $a_{ijk} \neq 0$ , 1, 2, строятся соответственно три тройки тензоров  $\{C_{N,0}, P_{N,0}, R_{N,0}\}$ ,  $\{C_{N,XY}, P_{N,XY}, R_{N,XY}\}$ ,  $\{C_{N,XZ}, P_{N,XZ}, R_{N,XZ}\}$ , каждая из которых отвечает за участие своего рынка в комбинации.

Теперь решаются вопросы рандомизации. Вычисляются:

- матрицы суммарных вероятностей замещения рынка #0 рынками #XY, #XZ согласно вторым соотношениям в (23), (24):

$$P_{M,XY} = \{p_{M,XY:ij} = P\{M_{1:ij}\}, i \in I, j \in J\},$$

$$P_{M,XZ} = \{p_{M,XZ:ik} = P\{M_{2:ik}\}, i \in I, k \in K\};$$

- матрицы  $\Theta_{XY}$ ,  $\Theta_{XZ}$  по формулам (20), (21);

▪ матрицы  $C_{M,XY}$ ,  $C_{M,XZ}$  с учетом первых соотношений в (23), (24), а затем в векторной форме и  $\rho_{M,XY}$ ,  $\rho_{M,XZ}$ .

При этом если  $\rho_{M,XY:ij} = 0$  для некоторой пары  $(i \in I, j \in J)$ , то принимается  $c_{M,XY:ij} = 0$ ,  $\rho_{M,XY:ij} = 0$ . Также если  $\rho_{M,XZ:ik} = 0$  для некоторой пары  $(i \in I, k \in K)$ , то  $c_{M,XZ:ik} = 0$ ,  $\rho_{M,XZ:ik} = 0$ .

Из всего перечисленного приведем лишь одну важную для процедуры рандомизации характеристику, которая поможет читателю получить адекватное представление о структуре случайности итогового портфеля. Речь идет о *матрице* биномиальных вероятностей, например, связанной с рынком #XZ:

$\Theta_{XZ} = \{ \{0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,02; 0,023\}, \{0; 0; 0; 0,02; 0,023; 0,023; 0,023; 0,097; 0,051\}, \{0; 0,021; 0,024; 0,024; 0,024; 0,101; 0,101; 0,128; 0,128; 0,024\}, \{0; 0,026; 0,026; 0,026; 0,108; 0,134; 0,134; 0,134; 0,134; 0,026\}, \{0; 0,029; 0,029; 0,145; 0,145; 0,145; 0,145; 0,145; 0,029\}, \{0; 0,033; 0,054; 0,158; 0,158; 0,158; 0,158; 0,158; 0,003\}, \{0,002; 0,038; 0,056; 0,174; 0,174; 0,174; 0,174; 0,056; 0,002\}, \{0,002; 0,041; 0,187; 0,187; 0,187; 0,187; 0,231; 0,101; 0,002\}, \{0,002; 0,044; 0,196; 0,196; 0,196; 0,196; 0,196; 0,196; 0,097; 0,002\}, \{0,002; 0,044; 0,196; 0,196; 0,196; 0,196; 0,196; 0,196; 0,057; 0,002\} \}$ .

Далее алгоритм преобразует *тензоры*  $C_{N,0}$ ,  $P_{N,0}$ ,  $R_{N,0}$  лексикографически соответственно в *векторы*  $c_{M,0}$ ,  $p_{M,0}$ ,  $\rho_{M,0}$ . Из них конкатенацией троек  $\{c_{M,0}, c_{M,XY}, c_{M,XZ}\}$ ,  $\{p_{M,0}, p_{M,XY}, p_{M,XZ}\}$ ,  $\{\rho_{M,0}, \rho_{M,XY}, \rho_{M,XZ}\}$  формируются уже три комбинированных *вектора*  $c_{cmb}$ ,  $p_{cmb}$ ,  $\rho_{cmb}$  размерности  $m = n^3 + 2n^2 = 1200$  каждый.

Наконец, применением стандартного алгоритма оптимизации к тройке векторов  $\{c_{cmb}, p_{cmb}, \rho_{cmb}\}$  находится вектор  $g_{cmb}$  весовых коэффициентов комбинированного портфеля той же размерности  $m = 1200$ . Для него *запись* результатов

$$L_{cmb} = \langle 0,279151; 0,335287; 0,201094 \rangle.$$

В примере доходность  $y_{cmb}$  (третий элемент) также, что естественно, превышает доходности в (58)–(60) и тем более в (62), (63) (даже при повышении стоимости их инструментария).

Использование нереализуемого суррогатного портфеля (17) в качестве косвенного средства проверки работы алгоритма дает запись результатов

$$L_{srg} = \langle 0,304823; 0,335002; 0,0990064 \rangle,$$

достаточно близкую к записи комбинированного портфеля.

Оптимальный портфель формируется разделением вектора  $g_{cmb}$  на три вектора  $g_{cmb,0}$ ,  $g_{cmb,XY}$ ,  $g_{cmb,XZ}$ . Здесь следует подчеркнуть, что первый из них вновь интерпретируется как тензор, а два других – как матрицы.

Графики, относящиеся к этому портфелю, приводятся на рис. 1, 2. На первых трех графиках изображены двумерные сечения платежной функция при  $x = 0,1; 0,9; 0,5$ . Характерно поведение ее поверхности для каждого из этих уровней. Максимальные значения она принимает в срединной части квадрата  $[0, 1] \times [0, 1]$  по переменным  $y$  и  $z$ , а это подтверждает нацеленность портфеля на продажу волатильности.

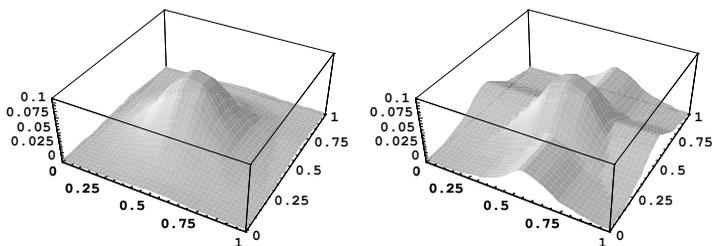


Рис. 1. Платежная функция комбинированного портфеля при  $x = 0,1$  (слева) и  $x = 0,9$  (справа)

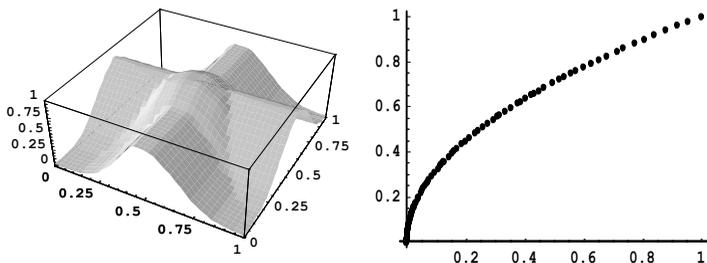


Рис. 2. Платежная функция комбинированного портфеля при  $x = 0,5$  (слева) и ее функция распределения (справа)

Более того, и по переменной  $x$  она ведет себя аналогично, о чем говорит сравнение трех графиков между собой. Судя по аппликатам, в выбранных точках  $x = 0,1; 0,9$  доходы не превышают 0,1, а при  $x = 0,5$  они приближаются к единице.

Кстати, на первом графике при  $x = 0,1$  влияния двумерных рынков на участие в комбинации вообще не чувствуется. Такое влияние полностью раскрывается при  $x = 0,5$ , а при  $x = 0,9$  оно сохраняется, но при общем значительном снижении доходов.

Как и в [5], в этих графиках в качестве базисных платежных функций используются баттерфляи, которые всегда лучше подходят в качестве средства визуального отображения теоретических гладких функций – кривых и поверхностей.

На рис. 2 справа даются фактически получаемые в точках скачка значения ее функции распределения, лежащие на кривой  $\varepsilon^{1/2}$  ( $= \phi^{\leftarrow}(\varepsilon)$ ). При этом интерес может представить плотность их распределения на этой кривой, предопределенной критерием и алгоритмом.

Также были проведены все необходимые расчеты и для типичной альтернативной задачи с  $\Delta < 0$ . При прочих равных условиях она отличалась от основной задачи лишь иными параметрами корреляции. Для нее принималось

$$\kappa_{P;1} = \kappa_{C;1} = -0,4, \kappa_{P;2} = \kappa_{C;2} = -0,4, \kappa_{P;3} = \kappa_{C;3} = 0,$$

а в соответствии с (31)  $\Delta_P = \Delta_C = -0,4$ .

Функции доходов оптимальных портфелей для рынка #XY в обеих рассмотренных задачах сравниваются на рис. 3.

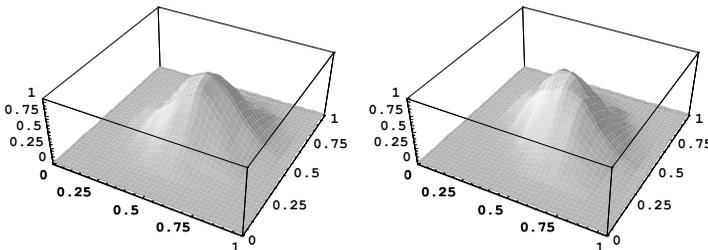


Рис. 3. Платежные функции оптимальных портфелей #XY в исходной задаче (слева) и альтернативной при  $\Delta < 0$  (справа)

На графике для альтернативной задачи отчетливо прослеживается повышенная отрицательная корреляция. Но подобные различия комбинируемых рынков в двух вариантах задач мало сказываются на доходах итоговых портфелей. Дело в том, что вклад двумерных рынков в комбинированный портфель в рассматриваемом примере вообще относительно небольшой.

Существенно и то, что большее значение для предъявляемых вниманию читателя рисунков имеет уровень замещающих относительных доходов, а он также незначителен (тем более с увеличенным для двумерных рынков общим уровнем цен). И заметить различия по графикам, аналогичным представленным на рис. 1 и 2, затруднительно. И потому они не приводятся.

## 5. Заключение

В работе изучаются вопросы оптимизации поведения инвестора, придерживающегося критерия  $CC-VaR$  на совокупности трех рынков опционов, притом всех – многомерных. Существенно, что рынки меньшей размерности, фактически используемые для замещения, на этот раз не являются одномерными. Построение оптимального комбинированного портфеля проводится замещением базисных инструментов трехмерного рынка более доходными инструментами двумерных рынков.

В целях реализуемости правил замещения рынков применяется рандомизация, осуществляемая *матрицей* взаимонезависимых биномиальных случайных величин с подходящими вероятностями успехов, обеспечивающими выполнение  $CC-VaR$ . Элементы этих матриц в модели и в реальных условиях должны стать параметрами взаимонезависимых последовательностей независимых между собой экспериментов – схем Бернулли.

Однако полноценного наглядного графического отображения результатов проведенных вычислительных экспериментов по соображениям размерности получить не удастся, и приходится довольствоваться графиками двумерных сечений трехмерных платежных функций комбинированного портфеля. Тем не менее и они свидетельствуют об адекватности постановки задачи и эффективности алгоритма ее решения.

Разумеется, на пути технической реализации развитой методологии для решения подобных задач с ростом их размерности возникают непреодолимые трудности, притом связанные не только с возможностями их практического решения, но даже с их адекватной постановкой в сфере ответственности инвестора.

В этом отношении представляется важным инвестору уметь ограничивать себя в выборе адекватной модели, прогнозирующей поведение базовых активов, формулируя более простые по размерности, но содержательные (возможно, агрегированные) модели. А задача аналитиков рынка – помочь им в этом.

### Литература

1. АГАСАНДЯН Г.А. *Континуальный критерий VaR и оптимальный портфель инвестора* // Управление большими системами. – 2018. – Вып. 73. – С. 6–26.
2. АГАСАНДЯН Г.А. *Континуальный критерий VaR на сценарных рынках* // Информатика и ее применения. – 2018. – Т. 12, Вып. 1. – С. 32–40.
3. АГАСАНДЯН Г.А. *Теоретические основы оптимизации по CC-VaR на совокупности рынков* // Информатика и ее применения. – 2019. – Т. 13, Вып. 4. – С. 38–43.
4. АГАСАНДЯН Г.А. *Вычислительные аспекты применения CC-VaR на совокупности рынков* // Информатика и ее применения. – 2020. – Т. 14, Вып. 3. – С. 62–70.
5. АГАСАНДЯН Г.А. *Многомерные рынки опционов и оптимизация по CC-VaR* // Управление большими системами. – 2020. – Вып. 88. – С. 5–25.
6. АГАСАНДЯН Г.А. *Проблемы оптимизации по CC-VaR на комбинации рынков опционов* // Управление большими системами. – 2022. – Вып. 98. – С. 22–43.
7. БЛАГОВЕЩЕНСКИЙ Ю.Н. *Основные элементы теории копул* // Прикладная эконометрика. – 2012. – Т. 26(2). – С. 113–130.
8. КРАМЕР Г. *Математические методы статистики*. – М.: Наука, 1975. – 750 с. (Перевод с англ.: Cramer H. *Mathematical methods of statistics*. – Princeton University Press, 1946.)

## **COLLECTIONS OF MULTIDIMENSIONAL OPTION MARKETS AND OPTIMIZATION ON CC-VAR**

**Gennady Agasandyan**, Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC  
RAS, Moscow, Doctor of Science, leading fellow  
([agasand17@yandex.ru](mailto:agasand17@yandex.ru)).

*Abstract: The work continues studying application of the continuous VaR-criterion (CC-VaR) in a collection of financial markets. This time the theoretical generality of the approach supposed before is tested on some more complicated collection of three multidimensional theoretical option markets, one of which is two-dimensional and two are two-dimensional. However, now some qualitative new in principle technical problems must to be solved. The randomization of basis structure for model feasibility is necessary as well, but is conducted for two-dimensional markets. At forming initial data with full analytical description, the econometric approach added by heuristic constructions is used. Here the more convenient for CC-VaR problem CB with the unknown initial investment amount and risk preferences functions not depended on scale parameter is solved. The regular combined portfolio that achieves the minimum of the general cost with fulfilling the CC-VaR need to be found. For purposes of methods illustration for marginal random values describing forecast and cost data of the problem, beta-distributions are used. In addition, an idealistic version of the optimal portfolio combined of instruments from markets of different dimensions is formed. It allows plotting two-dimension integrated surface income diagrams that overlap two-dimension parts of the optimal portfolio and arbitrary two-dimension sections of its three-dimension part.*

**Keywords:** underliers, continuous VaR-criterion (CC-VaR), risk preferences function (r.f.p.), forecast and cost densities, returns relative function, Newman-Pearson procedure, forecast and cost functions, randomization, combine portfolio, idealistic portfolio.

УДК 519.685

ББК 22.18

DOI: 10.25728/ubs.2022.100.2

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Ф.И. Ерешко.*

*Поступила в редакцию 21.10.2022.*

*Опубликована 30.11.2022.*