ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОЖЕСТВ РЕШЕНИЙ МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА СТАТИЧЕСКИХ РЕГУЛЯТОРОВ

Мухин А. В.[1]
(*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород*)

Рассмотрены некоторые возможные описания множеств решений матричных неравенств Ляпунова в задачах синтеза статических регуляторов по состоянию и по выходу для линейных непрерывных стационарных управляемых систем. Для каждого неравенства с заданной матрицей системы в общем случае существует свое множество решений, представляющее собой множество положительно определенных матриц функции Ляпунова. Показаны условия разрешимости неравенств Ляпунова в разных базисах в зависимости от выбранных невырожденных матриц преобразования. Если выполнить преобразование подобия для матрицы системы, то для разрешимости неравенства Ляпунова достаточно, чтобы в соответствующем базисе матрица функции Ляпунова была конгруэнтна к одноименной матрице в исходном базисе. Показано, что в определенных случаях множества решений матричных неравенств для статического регулятора по состоянию и по выходу могут совпадать, что позволяет свести задачу синтеза статического регулятора по выходу к задаче синтеза статического регулятора по состоянию. Условия реализации таких случаев подразумевают определенную структуру матриц входа и выхода, а также наличие одного устойчивого диагонального блока ненулевой размерности в исходной матрице системы.

Ключевые слова: статический регулятор, неравенство Ляпунова, гурвицева матрица, конгруэнтные матрицы, матричные неравенства.

1. Введение

Неравенство Ляпунова и вытекающие из него билинейные матричные неравенства [1, 5, 18] занимают центральное место в задачах синтеза регуляторов различного типа. Большой интерес для ряда задач управления представляет задача синтеза статических регуляторов [2, 4, 6, 8–14]. В случае статического регулятора по состоянию задача синтеза сводится к линейному матричному неравенству и поэтому может быть решена без особых трудностей. Если обратная связь не полная, то соответ-

[1] *Алексей Валерьевич Мухин, аспирант* (*muhin-aleksei@yandex.ru*).

ствующее неравенство представляет собой уже билинейное матричное неравенство, что в силу невыпуклости [6, 15] усложняет его решение по сравнению с линейным матричным неравенством. Вместе с тем именно такой способ организации управления является наиболее предпочтительным на практике. В работе [16] представлены условия, при которых задача синтеза стабилизирующих статических регуляторов по выходу является выпуклой и может быть решена в рамках линейных матричных неравенств. В общем случае для каждого из неравенств можно выделить свое множество решений. В связи с этим возникает вопрос относительно пересечения этих множеств и существования общей положительно определенной матрицы, которая будет обеспечивать разрешимость обоих неравенств. Если такая матрица или множество матриц существует и их нахождение является выпуклой задачей, то задачу синтеза статических регуляторов по выходу таким образом можно заметно упростить.

В статье рассмотрены случаи, в которых множества решений билинейных матричных неравенств в виде множества матриц функции Ляпунова в задачах синтеза статических регуляторов по состоянию и по выходу совпадают. Условия реализации таких случаев подразумевают блочно-однородное представление матриц входа и выхода [4], а также наличие одного устойчивого диагонального блока ненулевой размерности в исходной матрице системы.

Структура статьи стандартная. Второй раздел содержит постановку задачи. В третьем разделе показаны некоторые возможные описания множеств неравенств Ляпунова в зависимости от изменения матрицы системы и матрицы функции Ляпунова. В четвертом разделе представлено решение задачи. Заключительные выводы даны в последнем разделе.

2. Формулировка задачи

Рассмотрим линейную непрерывную стационарную управляемую и наблюдаемую систему

$$(1)\quad \begin{aligned} & x = Ax + Bu,\ \ x(0) = x_0, \\ & y = Cx, \end{aligned}$$

где $x \in R^n$ – состояние; $u \in R^m$ – вход; $y \in R^p$ – измеряемый выход; $A \in R^{n\times n}$ – матрица системы; $B \in R^{n\times m}$ – матрица входа; $C \in R^{p\times n}$ – матрица выхода.

Для стабилизации (1) применим законы управления из класса статических обратных связей по состоянию и по выходу. Запишем соответствующие матрицы замкнутых систем:

(2) $A_1 = A + BK_1$,

(3) $A_2 = A + BK_2C$.

Размерности матриц регуляторов равны $K_1 \in R^{m\times n}$ и $K_2 \in R^{m\times p}$. Если обе матрицы A_i гурвицевы, то существуют такие матрицы $Y_i = Y_i^{\mathrm{T}} > 0$, которые обеспечивают разрешимость матричных неравенств [1, 18]

(4) $A_iY_i + Y_iA_i^{\mathrm{T}} < 0$,

где $i = 1, 2$.

Для каждого из неравенств (4) существует свое множество решений. Определим эти множества при заданных устойчивых матрицах A_i следующим образом:

(5) $\mathbb{Y}_i = \left\{Y_i = Y_i^{\mathrm{T}} > 0 \colon A_iY_i + Y_iA_i^{\mathrm{T}} < 0\right\}$.

Если $\mathbb{Y}_1 \cap \mathbb{Y}_2 \neq \varnothing$ и существует по крайней мере одна матрица $Y \in \{\mathbb{Y}_1 \cap \mathbb{Y}_2\}$, то эта матрица будет обеспечивать совместную разрешимость системы (4). Определим условия, при которых возможно совместное решение неравенств (4). Таким образом, задача состоит в поиске условий, при которых существует такая общая матрица $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$ или их множество, которые обеспечивают разрешимость системы (4).

3. Множества решений неравенства Ляпунова

Рассмотрим сначала общие вопросы, связанные с множествами решений неравенств Ляпунова и их возможными описаниями. Пусть некоторая неособенная матрица $A \in R^{n\times n}$ гурвицева. Тогда существует матрица $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$, которая удовлетворяет неравенству Ляпунова

(6) $AY + YA^{\mathrm{T}} < 0$.

По аналогии с (5) определим множество решений (6):

(7) $\mathbb{Y} = \left\{Y = Y^{\mathrm{T}} > 0 \colon AY + YA^{\mathrm{T}} < 0\right\}$.

Зададим семейство матриц, подобных данной гурвицевой матрице A, в виде множества

(8) $\mathscr{A} = \left\{SAS^{-1}\colon S \in R^{n\times n}\right\}$.

В силу подобия матриц A и SAS^{-1}, из гурвицевости A следует гурвицевость SAS^{-1}. Рассмотрим разрешимость неравенства (6) в новом базисе в зависимости от матрицы S. Докажем лемму:

Лемма 1. *Если матрица $A \in \mathscr{A}$, то для разрешимости неравенства* (6) *достаточно, чтобы в соответствующем базисе матрица функции Ляпунова Y_s была конгруэнтна к матрице функции Ляпунова $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$ в исходном базисе.*

Доказательство. Перепишем неравенство (6) с новой матрицей SAS^{-1}

(9) $SAS^{-1}Y_s + Y_s\left(S^{-1}\right)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}} < 0$.

Пусть матрица Y_s будет конгруэнтной [7] к исходной матрице $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$:

(10) $Y_s = SYS^{\mathrm{T}}$.

Преобразование (10) сохраняет условие положительной определенности. Действительно, квадратичную форму с Y_s и вектором $x \neq 0$ можно представить в виде

(11) $x^{\mathrm{T}}Y_sx = \left(S^{\mathrm{T}}x\right)^{\mathrm{T}}Y\left(S^{\mathrm{T}}x\right) = y^{\mathrm{T}}Yy > 0$.

После подстановки (10) в (9) получим неравенство в новом базисе:

(12) $S\left(AY + YA^{\mathrm{T}}\right)S^{\mathrm{T}} < 0$.

В силу разрешимости исходного неравенства (6) неравенство (12) будет также разрешимо, что и доказывает условие леммы.

Рассмотрим теперь множество решений неравенства (6) при заданной матрице $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$. Для этого выполним тождественное преобразование $Y_s = SYS^{\mathrm{T}} = Y$. Определим соответствующее множество невырожденных квадратных матриц преобразования как

(13) $\mathbb{S} = \left\{S \in R^{n\times n}\colon SYS^{\mathrm{T}} = Y, Y \in \mathbb{Y}\right\}$.

Из леммы следует, что матрица системы в таком случае должна быть равна SAS^{-1}, и неравенство Ляпунова тогда примет вид

(14) $SAS^{-1}Y + Y\left(S^{-1}\right)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}} < 0$.

Определим соответствующее подмножество множества всех подобных матрице A матриц как

(15) $\mathscr{A}_S = \left\{SAS^{-1}: S \in \mathbb{S}\right\}$.

Таким образом, при заданной матрице $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$ неравенство Ляпунова (6) будет гарантированно разрешимо для любой матрицы $A \in \mathscr{A}_S$. В тривиальном случае, когда $S = cI$, получаем исходное неравенство (6). Отметим, что рассмотренные множества решений являются только некоторыми подмножествами множеств всех решений.

4. Решение задачи

Будем считать, в исходной неустойчивой матрице системы A существует один устойчивый диагональный блок. В соответствии с этим представим ее в блочном виде с двумя квадратными диагональными блоками:

(16) $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$.

Отметим, что в случае, когда в исходной матрице нет ни одного устойчивого диагонального блока, стабилизация такой матрицы возможна статическим регулятором только по состоянию[4]. Так что это вполне естественное требование для задач управления по выходу. Для определенности будем считать, что блок A_{22} гурвицев. Положим, что размерность неустойчивого блока равна $A_{11} \in \boldsymbol{R}^{k\times k}$, $1 \le k \le n-1$. Тогда $A_{22} \in \boldsymbol{R}^{(n-k)\times(n-k)}$. Зададим размерность выхода равной размерности неустойчивого блока:

(17) $p = k$.

Зададим еще одно условие, которое выражается в том, что существует такой базис, в котором матрицу входа, обеспечивающую управляемость пары $(A, \boldsymbol{B})$, и матрицу выхода можно представить в виде блочных матриц [4] следующим образом:

(18) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_m \\ 0_{(n-m)\times m} \end{pmatrix}$,

(19) $\boldsymbol{C} = \left(\boldsymbol{C}_p 0_{p\times(n-p)}\right)$,

где $\boldsymbol{B}_m \in \boldsymbol{R}^{m\times m}$ и $\boldsymbol{C}_p \in \boldsymbol{R}^{p\times p}$ – неособенные матрицы.

Если, например, в управлении задействованы m, а в измерении – p первых компонент вектора состояния x, то матрицы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ примут вид

(20) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m \\ 0_{(n-m)\times m} \end{pmatrix}$,

(21) $\boldsymbol{C} = \left(\boldsymbol{I}_p 0_{p\times(n-p)}\right)$.

Если условия (18) и (19) выполнимы, то справедливы также представления $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0_{(n-m)\times m} \\ \boldsymbol{B}_m \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{C} = \left(0_{p\times(n-p)}\boldsymbol{C}_p\right)$. Обозначим ядра матриц $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{C}$ как $\mathcal{N}_{B^T}$и $\mathcal{N}_C$ соответственно. Без потери общности будем считать, что матрица входа удовлетворяет виду (20), а матрица выхода – виду (21). Так как уравнение $\boldsymbol{K}^* = \boldsymbol{B}_m\boldsymbol{K}\boldsymbol{C}_p$ разрешимо относительно матрицы $\boldsymbol{K}$ [4], то замена матриц $\boldsymbol{B}_m$ и $\boldsymbol{C}_p$ единичными матрицами соответствующих размерностей непринципиальна для дальнейших выкладок. Представим матрицу входа (20) в виде $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} \\ 0_{(n-k)\times m} \end{pmatrix}$, где $\boldsymbol{B}_{11} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m \\ 0_{(k-m)\times m} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{k\times m}$. На размерность входа m наложим требование управляемости пары $(\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{B}_{11})$:

(22) $rank\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11} & \dots & \boldsymbol{A}_{11}^{k-m}\boldsymbol{B}_{11}\end{pmatrix} = k$.

Условия (17) и (22) устанавливают соотношения между величинами p, k и m. Считая эти условия выполненными, докажем следующую теорему:

Теорема 1. *Если матрицы входа и выхода можно представить в виде* (*20*) *и* (*21*) *соответственно, то любое решение линейного матричного неравенства*

(23) $\mathcal{N}_{B^{\mathrm{T}}}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)\mathcal{N}_{B^T} < 0$

будет обеспечивать разрешимость системы (*4*).

Доказательство. Матрицу замкнутой системы со статическим регулятором по выходу вида (3) с учетом(20) и (21) можно записать в виде блочной матрицы

(24) $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{B}_{11}\boldsymbol{K} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$.

Заметим, что если $k = m$, то $\boldsymbol{B}_{11} = \boldsymbol{I}_m$. В таком случае получаем квадратную матрицу регулятора. Если значение входа, обеспечивающее условие (22), равно m_1, а значение входа, обеспечивающее разрешимость (23), отличается и равно m_2, то в качестве m примем величину

(25) $m = max\{m_1, m_2\} \leq k.$

Вследствие гурвицевости блокаA_{22} и управляемости пары (A_{11}, B_{11}) решение задачи можно рассмотреть в классе блочно-диагональных матриц $Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & 0 \\ 0 & Y_{22} \end{pmatrix}$[4]. Обратимся теперь к неравенству Ляпунова с матрицей A_2 вида (24), которое можно записать в виде симметрической матрицы

(26) $A_2 Y + Y A_2^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \mathscr{H}_{11} & \mathscr{H}_{12} \\ \mathscr{H}_{12}^T & \mathscr{H}_{22} \end{pmatrix} < 0.$

Блоки матрицы $\mathscr{H}$ определяются следующим образом:

(27) $\mathscr{H}_{11} = A_{11} Y_{11} + Y_{11} A_{11}^{\mathrm{T}} + B_{11} K Y_{11} + Y_{11} K^{\mathrm{T}} B_{11}^{\mathrm{T}},$

(28) $\mathscr{H}_{12} = A_{12} Y_{22} + Y_{11} A_{21}^{\mathrm{T}},$

(29) $\mathscr{H}_{22} = A_{22} Y_{22} + Y_{22} A_{22}^{\mathrm{T}},$

где $Y_{ii} > 0$.

Рассмотрим необходимые и достаточные условия разрешимости матричного неравенства (26). Известно [2, 13], что матричное неравенство с двумя переменными разрешимо тогда и только тогда, когда разрешимы неравенства

(30) $\mathscr{N}_C^{\mathrm{T}} \left(Y^{-1} A + A^{\mathrm{T}} Y^{-1} \right) \mathscr{N}_C < 0,$

$\mathscr{N}_{B^{\mathrm{T}}}^{\mathrm{T}} \left(AY + YA^{\mathrm{T}} \right) \mathscr{N}_{B^{\mathrm{T}}} < 0.$

Введем блочно-диагональную матрицу $X = Y^{-1} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix}$ и запишем матрицу $XA + A^{\mathrm{T}} X$ в виде

(31) $XA + A^{\mathrm{T}} X = \begin{pmatrix} X_{11} A_{11} + A_{11}^{\mathrm{T}} X_{11} & X_{11} A_{12} + A_{21}^{\mathrm{T}} X_{22} \\ \left(X_{11} A_{12} + A_{21}^{\mathrm{T}} X_{22} \right)^T & X_{22} A_{22} + A_{22}^{\mathrm{T}} X_{22} \end{pmatrix}.$

Так как матрица C удовлетворяет виду (21), то в качестве ядра этой матрицы можно взять $\mathscr{N}_C = \begin{pmatrix} 0_{p \times (n-p)} \\ I_{n-p} \end{pmatrix}$. С учетом этого, а также условия (17) система (30) примет вид

(32) $X_{22} A_{22} + A_{22}^{\mathrm{T}} X_{22} < 0,$

$\mathscr{N}_{B^{\mathrm{T}}}^{\mathrm{T}} \left(AY + YA^{\mathrm{T}} \right) \mathscr{N}_{B^{\mathrm{T}}} < 0.$

Умножим первое неравенство (32) справа и слева на матрицу $X_{22}^{-1} = Y_{22}$ и получим

(33) $A_{22}Y_{22} + Y_{22}A_{22}^{\mathrm{T}} < 0,$

$$\mathcal{N}_{B^{\mathrm{T}}}^{\mathrm{T}}\left(AY + YA^{\mathrm{T}}\right)\mathcal{N}_{B^{\mathrm{T}}} < 0.$$

Отметим, что в силу леммы 1 умножение первого неравенства (32) на матрицу $X_{22}^{-1} = Y_{22}$ равносильно переходу к новому базису с матрицей преобразования $S = Y_{22}$. Рассмотрим теперь второе неравенство (33). Так как $m \le k$, то в качестве $\mathcal{N}_{B^{\mathrm{T}}}$ можно взять матрицу, которая может быть перегруппирована как

(34) $\mathcal{N}_{B^{\mathrm{T}}} = \begin{pmatrix} 0_{m\times(n-m)} \\ I_{n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_0 & 0_{k\times(n-k)} \\ 0_{(n-k)\times(k-m)} & I_{n-k} \end{pmatrix},$

где $\mathcal{N}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}_{k\times(k-m)}$.

После подстановки (34) в (33) система примет следующий вид:

(35) $A_{22}Y_{22} + Y_{22}A_{22}^{\mathrm{T}} < 0,$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{N}_0^{\mathrm{T}}\left(A_{11}Y_{11} + Y_{11}A_{11}^{\mathrm{T}}\right)\mathcal{N}_0 & \mathcal{N}_0^{\mathrm{T}}\left(A_{12}Y_{22} + Y_{11}A_{21}^{\mathrm{T}}\right) \\ \left(\mathcal{N}_0^{\mathrm{T}}\left(A_{12}Y_{22} + Y_{11}A_{21}^{\mathrm{T}}\right)\right)^T & A_{22}Y_{22} + Y_{22}A_{22}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} < 0.$$

Так как первое неравенство (35) является необходимым условием разрешимости второго неравенства, то вместо исходной нелинейной системы (30) получаем одно линейное матричное неравенство, которое определяется в соответствии с (23). Рассмотрим теперь неравенство Ляпунова с матрицей A_1 вида (2). Известно [1], что это неравенство можно привести к виду

(36) $AY + YA^{\mathrm{T}} + BZ + Z^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} < 0,$

где $Z = K_1Y$.

Необходимым и достаточным условием разрешимости последнего также является разрешимость неравенства (23). Тогда получаем, что условие существования матрицы функции Ляпунова, обеспечивающей разрешимость системы (4), выражается в виде одного линейного матричного неравенства вида (23), что и доказывает теорему.

Напомним, что результат теоремы будет справедливым и в более общем случае, когда матрицы B_m и C_p являются произвольными квадратными матрицами. Таким образом, приходим к выводу, что множества решений неравенств

(37) $(A+BK_1)Y+Y(A+BK_1)^{\mathrm{T}}<0,$

(38) $(A+BK_2C)Y+Y(A+BK_2C)^{\mathrm{T}}<0,$

с общей матрицей входа совпадают друг с другом. Это означает, что любое решение $Y=Y^{\mathrm{T}}>0$ неравенства (37) является решением и неравенства (38) и наоборот. Матрица статического регулятора по выходу K_2 может быть найдена в результате решения неравенства (38) с найденной матрицей $Y=Y^{\mathrm{T}}>0$. Другими словами, задача синтеза статического регулятора по выходу с размерностью выхода равной размерности неустойчивого блока в матрице системы эквивалентна задаче синтеза статического регулятора по состоянию с размерностью входа, обеспечивающей управляемость неустойчивого диагонального блока в матрице системы.

5. Пример

В качестве примера рассмотрим статическую стабилизацию тела, расположенного в электромагнитном подвесе [3]. Матрица A, описывающая линеаризованную систему уравнений электромагнитного подвеса, имеет вид

(39) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -7{,}5\end{pmatrix}.$

Так как нижний диагональный блок $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -7{,}5\end{pmatrix}$ является устойчивым, то размерность неустойчивого блока равна $k=1$. Следовательно, размерности входа и выхода достаточно положить равными $m=p=1$ и задать соответствующие матрицы в виде

(40) $B^{\mathrm{T}}=(1 \quad 0 \quad 0),$

(41) $C=B^{\mathrm{T}}.$

При такой организации управления и измерения схема подвеса является классической и предполагает наличие специального датчика положения вывешиваемого тела [18]. Для решения задачи синтеза статического регулятора по выходу применим теорему 1 и вычислим матрицу $Y=Y^{\mathrm{T}}>0$ из неравенства (23):

$$(42)\ Y = \begin{pmatrix} 1{,}1329 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}3116 & -0{,}1731 \\ 0 & -0{,}1731 & 0{,}1024 \end{pmatrix}.$$

Затем, решая линейное матричное неравенство (38), получим следующий регулятор:

$$(43)\ K = -8{,}355.$$

Убеждаемся, что матрица замкнутой системы является гурвицевой:

$$(44)\ \max_{1 \le i \le 3} \{Re\lambda_i(A + BKC)\} = -0{,}0137.$$

Таким образом, благодаря теореме 1 данную задачу удалось решить в рамках выпуклой оптимизации, хотя изначально такая задача представляется невыпуклой.

6. Заключение

В статье показано, что множества решений матричных неравенств в задачах синтеза статических регуляторов по состоянию и по выходу могут совпадать, что позволяет свести задачу синтеза статического регулятора по выходу к задаче синтеза статического регулятора по состоянию. Условия реализации таких случаев являются вполне естественными для задач управления по выходу и подразумевают определенную блочную структуру матриц входа и выхода, а также наличие одного устойчивого диагонального блока ненулевой размерности в исходной матрице системы.

Автор благодарит профессора кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Дмитрия Владимировича Баландина за проявленный интерес к работе и полезные замечания.

Литература

1. БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М.М. *Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств*. – М.: Физматлит, 2007. – 281 с.
2. БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М.М. *Синтез регуляторов на основе решения линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимно-обратных матриц* // Автоматика и телемеханика. – 2005. – №1. – С. 82–99.

3. БАЛАНДИН Д.В., БИРЮКОВ Р.С., КОГАН М.М., ФЕДЮКОВ А.А. *Оптимальная стабилизация тела в электромагнитном подвесе без изменения его положения*// Известия РАН. ТиСУ. – 2017. – №3. – С. 12–24.
4. МУХИН А.В. *О существовании статических регуляторов по выходу* // Управление большими системами. – 2022. – Вып. 96. – С. 16–30.
5. ПОЛЯК Б.Т., ХЛЕБНИКОВ М.В., РАПОПОРТ Л.Б. *Математическая теория автоматического управления*. – М.: ЛЕНАНД, 2019.
6. ПОЛЯК Б.Т., ЩЕРБАКОВ П.С. *Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению*// Автоматика и телемеханика. – 2005. – №5. – С. 4–46.
7. ХОРН Р., ДЖОНСОН Ч. *Матричный анализ*. – М.: Мир, 1989.
8. ASTOLFI A., COLANERI P. *Static output feedback stabilization of linear and nonlinear systems* // 39th Conf. on Decision and Control, Sydney, Australia, 2000.
9. ASTOLFI A., COLANERI P. *An algebraic characterization for the static output feedback stabilization problem* // American Control Conference, Arlington, VA, 2001. –P. 1408–1413.
10. BYRNES C.I., ANDERSON B.D.O. *Output feedback and generic stability* // SIAM J. Contr. Optim. – 1984. –Vol. 11. –P. 362–380.
11. CAO Y.-Y., LAM J., SUN Y.-X. *Static output feedback stabilization: an ILMI approach* // Automatica. – 1998. –Vol. 34. –P. 1641–1645.
12. EL GHAOUI L., OUSTRY F., AITRAMI M. *A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems* // IEEE Trans.on Automatic Control. – 1997. –Vol. 42. – P. 1171–1176.
13. GAHINET P., APKARIAN P. *A linear matrix inequality approach to H∞ control* // Int. J. Robust and Nonlinear Control. – 1994. – Vol. 4. – P. 421–488.
14. HASSIBI A., HOW J., BOYD S. *A path following method for solving BMI problems in control* // Proc.of American Control Conference. – 1999. –Vol. 2. –P. 1385–1389.
15. NEMIROVSKII A.A. *Several NP-hard problem arising in robust stability analysis* // Math. Control, Signals, Systems. – 1994. – Vol. 6. – P. 99–105.
16. SADABADI M.S., PEAUCELLE D. *From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey* // Annual Reviews in Control. – 2016. –Vol. 42. –P. 11–26.

17. SYRMOS V.L, ABDALLAH C.T., DORATO P., GRIGORIADIS K. *Static Output Feedback. A Survey* // Automatica. – 1997. –Vol.33, №. 2. –P. 125–137.
18. VANANTWERP J.G., BRAATZ R.D. *A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities* // Journal of Process Control. – 2000. –Vol. 10. – P. 363-385.

INTERCEPTION OF MATRIX INEQUALITIES SOLUTION SETS IN PROBLEMS SYNTHESIS OF STATIC FEEDBACK CONTROLLERS

Aleksey Mukhin, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod, postgraduate student (myhin-aleksey@yandex.ru).

Abstract: The article considers some possible descriptions of Lyapunov matrix inequalities solutions sets in the problems of synthesis of static state and static output feedback controllers for linear continuous stationary controlled systems. For each inequality with a given matrix of the system, in general, there is its own set of solutions, which is a set of positive definite matrices of the Lyapunov function. The conditions for the solvability of Lyapunov inequalities in different bases are shown, depending on the selected non-degenerate transformation matrices. If we perform a similarity transformation for the matrix of the system, then for the solvability of the Lyapunov inequality, it is sufficient that in the corresponding basis the matrix of the Lyapunov function is congruent to the matrix of the same name in the original basis. It is shown that in some cases, the matrix inequalities solutions sets for a static state and static output feedback controllers may coincide, which allows us to reduce the static output feedback controller synthesis task to the static state feedback controller synthesis task. The conditions for the implementation of such cases imply a certain structure of the input and output matrices, as well as the presence of one stable diagonal block of nonzero dimension in the original matrix of the linear system.

Keywords: static controller, Lyapunov inequality, Hurvitz matrix, congruent matrices, matrix inequalities.

УДК 517.977
ББК 22.18
DOI: 10.25728/ubs.2022.100.5

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.А. Уткиным.

Поступила в редакцию 15.06.2022.
Опубликована 30.11.2022.