

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ УЗЛОВ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ

Крыгин А. А.<sup>1</sup>, Куприянов Б. В.<sup>2</sup>  
(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Рассматривается задача нахождения критических узлов транспортной сети. Построена математическая модель транспортной сети, учитывающая стоимость поездок и потребности в движении между узлами сети. Описана методика определения всех параметров математической модели и обоснована ее корректность. Сформулирована задача оптимизации, которая сведена к задаче линейного программирования.*

Ключевые слова: транспортные сети, поиск критических узлов, линейное программирование.

### 1. Введение

Исследование сетей большой размерности начало активно развиваться в конце 90-х годов прошлого века. Одним из основных направлений в этих исследованиях является определение критических узлов сети, которое в литературе также встречается под названиями «уязвимость», «безопасность» сети и «устойчивости сети к дестабилизирующим факторам». Подавляющее большинство работ в этой области моделирует сеть в виде невзвешенного и неориентированного графа (топологическое описание), а базовая постановка задачи нахождения критических узлов выглядит следующим образом. Задан неориентированный связный граф  $G = (V, E)$  без петель и кратных ребер,  $|V| = n$ ,  $|E| = m$ . Заданы некоторое число  $q < n$  – количество удаляемых вершин – и функция-критерий, областью определения которой является множество графов, а областью значений – неотрицательные числа. Требуется найти подмножество  $A \subset V$ ,  $|A| \leq q$ , такое, что при удалении из графа подмножества  $A$  на оставшемся подграфе функция-критерий достигает своего максимума (или ми-

<sup>1</sup> Андрей Александрович Крыгин, к.т.н., (andreyakr@yandex.ru).

<sup>2</sup> Борис Васильевич Куприянов, к.т.н., (kuprianovb@mail.ru).

нимума). Наиболее часто в качестве функции-критерия используются:

- размер наибольшей компоненты связности (ищется минимум);
- количество компонент связности (ищется максимум);
- количество связных пар вершин среди всех возможных пар (ищется минимум).

Аналогичная постановка формулируется и для поиска критических ребер. Такие и схожие задачи успешно решались для сетей различного вида (сетей связи, интернет сетей, энергетических, газовых, водных сетей, сетей теплоснабжения и др.), но этот подход оказался неприменимым при исследовании транспортнх сетей. Основные трудности заключаются в том, что моделирование этих сетей в виде невзвешенного графа и использования вышеприведенных критериев не достаточно для адекватного описания. Рассмотрим, например, критерий минимального количества связных пар. В такой постановке не учитывается ряд обстоятельств при воздействии дестабилизирующих факторов на транспортную сеть:

- две вершины могут оставаться связными, но кратчайшее расстояние между ними после воздействия увеличится настолько, что поездка между двумя пунктами, соответствующими этим вершинам, станет неприемлемой для большинства перевозок;

- воздействие может привести к резкому сокращению пропускной способности сети, образованию пробок, и поездка между двумя пунктами также станет неприемлемой;

- кратчайшее расстояние между двумя пунктами исходной сети настолько большое, что поездки между ними практически не совершаются. После воздействия эти вершины перестали быть связными, но сколько-нибудь серьезного урона объем перевозок не понес.

Дальнейшие исследования подходов в задаче нахождения критических узлов показали, что топологического описания транспортной сети недостаточно. В [8] приводится ряд характеристик топологической модели, которые имеют мало общего

с самой транспортной сетью. Например, кратчайший путь определяется как путь между двумя заданными вершинами, содержащий наименьшее количество вершин. Но для транспортной сети логично его определять как путь, в котором достигается минимум затрат какого-либо ресурса: времени, расстояния, стоимости поездки. Поэтому для транспортных сетей не имеет практического смысла такая характеристика вершины, как промежуточная центральность. А эта характеристика встречается во многих работах нахождения критических узлов. В [11] показано, что для двух транспортных сетей с одинаковыми значениями промежуточной центральности в топологическом смысле значения производительности (величины, аналогичной промежуточной центральности, но учитывающей расстояния между вершинами) могут сильно различаться.

В данной статье рассматриваются автомобильные транспортные сети, которые далее для краткости называются *сеть*.

Основное множество работ, посвященных нахождению критических узлов можно разделить на три направления.

Первое направление [3] развивает вероятностный подход, в котором некоторые характеристики имеют вероятностную природу, так же как и результирующие показатели. Основной недостаток такого подхода – необходимость каким-то способом достоверно определять вероятностные характеристики в большом количестве (например, для каждого ребра или вершины графа). Задача осложняется тем, что данные характеристики могут изменяться во времени.

Второе направление [13, 14, 15, 16] основывается на структурных свойствах графов, представляющих сети. Количество характеристик сети, которые могут быть вычислены при данном подходе, меньше, но их адекватность, как правило, наглядна.

Третье направление [6] основано на исследованиях потоков в сетях. Рассматриваются различные постановки задач на вычисление дуг, удаление которых максимально снизит поток в сети. Данный подход предполагает знание потоков по всем дугам сети.

Интенсивность исследований в этих направлениях не спадает и до настоящего времени публикуется множество работ, например [4, 5, 7, 9, 10, 12].

Анализ этих работ показал, что функция-критерий для задачи нахождения критических узлов должна обладать следующими свойствами:

1. Быть адекватной; в модели должны учитываться реальные расстояния, потребности в движении, возможности возникновения пробок и другие особенности транспортной сети. Лучше всего для этих целей подходят потоковые модели.

2. Для всех параметров функции должна существовать корректная методика их определения.

3. Так как в дальнейшем будет определяться подмножество объектов, при удалении которого из сети функция-критерий достигает своего максимума или минимума, время вычисления этой функции должно быть приемлемым. Этому свойству лучше всего удовлетворяют модели, построенные на основе структурных свойств графов и хуже всего потоковые модели.

## **2. Модель транспортной сети**

В данной работе используется следующий подход к нахождению критических узлов, имеющий много общего с [16] и относящийся ко второму направлению. Моделью сети является связный, без петель, неориентированный взвешенный граф  $G = (V, E)$ , множеству ребер  $E$  соответствуют однородные и неветвящиеся участки дорог: мосты, туннели, автострады. Ребро графа, соединяющее вершины  $i$  и  $j$ , обозначим как  $e_{i,j}$ . Поставим в соответствие множеству вершин  $V$  населенные пункты, перекрестки и границы смены дорог разного типа, например, автострады, переходящей в туннель. Каждой паре вершин  $(i, j)$  ставится в соответствие два числа:  $c_{i,j}$  и  $d_{i,j}$ . Величина  $c_{i,j}$  характеризует стоимость поездки от узла  $i$  к узлу  $j$ , а  $d_{i,j}$  характеризует потребность в движении (спрос на поездку), т.е. количество поездок от узла  $i$  к узлу  $j$  за единицу времени. Ниже в отдельном подразделе описана методика определения этих величин и обоснована

ее корректность.

Предполагается (ниже это будет обосновано), что  $c_{i,j} = c_{j,i}$  и  $d_{i,j} = d_{j,i}$ . Тогда для всей сети можно определить функцию, называемую «общая стоимость поездок»:

$$S(G) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} c_{i,j} d_{i,j}.$$

Эта функция была выбрана в качестве критерия в задаче нахождения критических узлов, так как она обладает почти всеми требуемыми свойствами. При удалении из графа подмножества ребер для некоторых пар узлов может измениться (увеличиться) величина  $c_{i,j}$  и изменится общая стоимость поездок. Вычисление  $S(G)$  занимает приемлемое время. В ней учитываются расстояния и потребности в движении, но не учитывается величина максимального потока и зависимость  $c_{i,j}$  от величины потока. В общем случае  $c_{i,j}$ , если, например, ее оценивать как время, необходимое для поездки из  $i$  в  $j$ , зависит от величины потоков на ребрах графа, по которым эта поездка совершается. Можно утверждать, что критические ребра, найденные с помощью  $S(G)$ , будут на самом деле критическими, так как при закрытии движения по дорогам, соответствующим этим ребрам, общая стоимость поездок максимально возрастет.

Определим величину *ущерба*  $\Delta S_A$  при удалении множества ребер  $A$  как разницу общих стоимостей поездок в сети с удаленным множеством ребер и в исходной сети:

$$\Delta S_A = S(G(V, E \setminus A)) - S(G(V, E)).$$

Постановку задачи нахождения критических ребер сети можно сформулировать следующим образом. Для заданного  $q < m$  необходимо найти подмножество ребер  $A \subset E$ ,  $|A| \leq q$ , такое что ущерб (или  $S(G(V, E \setminus A))$ ) будет максимальным среди всех подмножеств ребер, мощность которых не превышает  $q$ .

### 3. Методика определения стоимости поездки и потребности в движении

Задача нахождения критических ребер сети по сути является задачей их упорядочивания по степени критичности. Поэтому достаточно вычислять относительные значения величин, а не абсолютные, так как  $d_{i,j}$  или  $c_{i,j}$  используются только для сравнения между собой и выстраивания порядка.

Определим  $X_{i,j} = (e_{i,k}, e_{k,l}, \dots, e_{h,j})$  как путь от вершины  $i$  до  $j$  и  $\tilde{X}_{i,j}$  – путь минимальной стоимости между вершинами  $i$  и  $j$  (кратчайший путь). Наиболее простой и естественной мерой стоимости пути является его длина (в км). Остальные определения могут быть производными от длины, например время в пути, расход топлива и т.п. Если рассмотреть некоторое множество поездок  $(i, j)$ , то очевидно, что они будут совершаться по разным путям в силу разных обстоятельств. Однако естественно предположить, что большинство поездок статистически совершаются по пути минимальной стоимости. Поэтому стоимость пути  $c_{i,j}$  определим как кратчайшее расстояние между  $i$  и  $j$ .

Обозначим:  $c_{i,j}^{(0)}$  – стоимость пути (далее просто стоимость) из  $i$ -го узла в  $j$ -й в исходном графе  $G = (V, E)$ ;  $c_{i,j}^A$  – стоимость пути из  $i$ -го узла в  $j$ -й в графе  $G_A = (V, E \setminus A)$ , если из графа удалено множество ребер  $A$ .

Далее будем считать, что стоимость пути  $c_{i,j}$  конечна, если путь  $(i, j)$  существует, и равна бесконечности, если путь отсутствует. Случай, когда стоимость равна бесконечности и поездка  $(i, j)$  невозможна, в работах [14] интерпретируется как *неудовлетворенный спрос* и характеризуется некоторой константой  $a_{i,j}$ . Неудовлетворенный спрос – величина, принципиально отличная от стоимости поездки. До тех пор, пока удаление ребер не приводит отсутствию пути между двумя вершинами, мера ущерба определяется увеличением длины пути. Если между двумя вершинами отсутствует путь, то поездка в принципе невозможна и ущерб может измеряться только экономическими показателями. У такого подхода два существенных недостатка:

— необходимо для  $n(n - 1)/2$  пар вершин определить константы  $a_{i,j}$  экономического ущерба, на значения которых влияет множество трудноформализуемых факторов;

— при наличии двух показателей (длина пути и экономический эффект) существует проблема объединения в единую целевую функцию стоимостей перевозок и неудовлетворенного спроса.

В статье ставится задача дать неудовлетворенному спросу меру, сопоставимую со стоимостью поездки, для решения задачи упорядочивания ребер.

Естественно, что транспортная перевозка связана с перемещением грузов или пассажиров. В обоих случаях стоимость поездки является включенной составной частью стоимости экономической потребности, которую удовлетворяет данная поездка. Если есть потребность в станке или топливе, то стоимость станка или перевозимого топлива включает в себя стоимость перевозки. Из этого следует, что стоимость экономической потребности не может быть меньше стоимости перевозки. Полная стоимость экономической потребности неизвестна, но известно ее нижнее ограничение. Определим величину неудовлетворенного спроса  $a_{i,j} \geq c_{i,j}^{(0)}$ . Так как решения о поездке принимаются до трансформации графа, стоимость поездки вычисляется в исходном графе. Поскольку исходный граф является связным, значение  $c_{i,j}$  будет конечным. Положим  $a_{i,j} = c_{i,j}^{(0)}$  и рассмотрим ситуацию на рис. 1.

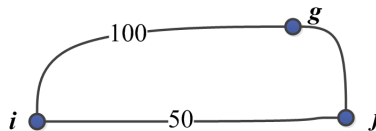


Рис. 1. Пример нескольких путей

Пусть вершины  $i$  и  $j$  графа соединены только двумя путями. Длина первого пути  $(e_{i,j})$  равна 50, а второго  $(e_{i,g}, e_{g,j})$  – 100. Других инцидентных вершине  $j$  ребер нет. В исходном графе 200

стоимость кратчайшего пути  $\hat{X}_{i,j}$  равна 50. Если из графа удалить ребро  $e_{i,j}$ , то стоимость кратчайшего пути будет равна 100. Если из исходного графа удалить ребра  $e_{i,j}$  и  $e_{j,g}$ , то вершина  $j$  станет изолированной,  $c_{i,j} = \infty$  и  $a_{i,j} = 50$ . В этом случае стоимость неудовлетворенного спроса, соответствующая изолированной вершине  $j$ , будет меньше стоимости пути во втором случае. И если предположить, что поездки должны совершаться по пути любой стоимости (экономика должна функционировать), то получится, что ущерб от удаления двух ребер меньше, чем от удаления одного ребра. Возникает противоречие и, следовательно, величина неудовлетворенного спроса  $a_{i,j}$  должна быть больше стоимости максимального пути между  $i$  и  $j$ . В данной статье  $a_{i,j}$  определена как стоимость максимального пути плюс 1.

$$a_{i,j} = \max_{A, c_{i,j}^A \neq \infty} c_{i,j}^A + 1.$$

В этом случае при каждом удалении ребра величина ущерба не убывает и стоимость неудовлетворенного спроса соотнесена со стоимостью пути достаточно корректно для осуществления упорядочивания ребер.

Рассмотрим методы вычисления потребности в движении  $d_{i,j}$ . Выделим следующие свойства  $d_{i,j}$ .

1. Будем считать, что потребность в движении является величиной, не зависящей от календарного времени. Поэтому под интервалом времени следует рассматривать такой интервал, который:

- достаточно большой с точки зрения народно хозяйственного значения, т.е. количество перевозок в течении данного интервала имеет существенное для экономики региона значение;
- должен не реагировать на колебания спроса суточные (поздки на работу и с работы), недельные (поездки на выходные за город и обратно) и сезонные;
- не может значительно превышать ожидаемое время восстановления сети.

Из этого следует, что  $d_{i,j} = d_{j,i}$ , так как в противном случае будет накопление транспорта в некоторой вершине. Такие накопления могут быть в реальности, например поездки населения



на личном транспорте на выходные на дачу, но их продолжительность значительно меньше рассматриваемого интервала.

2. В соответствии с экономикой, транспортные расходы на поездку линейно возрастают при увеличении расстояния. Поэтому будем считать, что потребность в движении обратно пропорциональна расстоянию.

3. Рассмотрим множество населенных пунктов, расстояние которых до заданного находится в интервале от  $R$  до  $R + \Delta r$ , где  $R \gg \Delta r$ . Будем считать, что населенные пункты распределены равномерно. То есть количество населенных пунктов, находящихся в заданной области, пропорционально ее площади. В этом случае количество рассматриваемых населенных пунктов пропорционально  $(R + \Delta r)^2 - R^2 = 2R\Delta r + \Delta r^2 \approx 2\Delta r R$ . Тогда доля общего количества поездок, совершаемых на заданный интервал в конкретный населенный пункт, обратно пропорциональна расстоянию. В итоге, учитывая предыдущее свойство, потребность в движении обратно пропорциональна квадрату расстояния.

4. Рассмотрим два населенных пункта, находящихся на одинаковом расстоянии от заданного. Очевидно, что потребности в движении к этим пунктам могут быть различными. Это обуславливается несколькими факторами, например, численностью населенных пунктов и их экономикой.

Для нахождения схожих характеристик во многих работах используется численность населенных пунктов. Например, часто цитируемый индекс Хансена [1, 14].

$$H_i = \sum_{j \neq i} B_j f(c_{i,j}),$$

где  $B_j$  – численность населенного пункта  $j$  и  $f(c_{i,j})$  – сопротивление движению, величина, обратная к  $c_{i,j}$ . Если пользоваться этим подходом, то логично положить величину  $d_{i,j}$  пропорциональной  $B_i B_j$ . Достоинством данного определения является легкость получения значений коэффициентов достаточной точности непосредственно из данных географических карт.

На рис. 2 приведены примеры условных обозначений населенных пунктов. Существуют карты с 9-ю градациями населен-

202

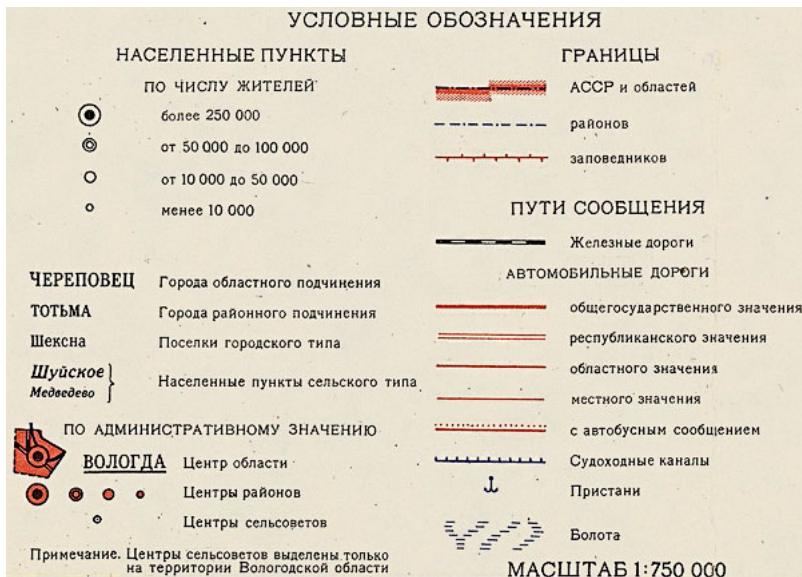


Рис. 2. Условные обозначения на картах

ных пунктов. Нас интересуют относительные величины, поэтому можно использовать вместо показателя численности порядковый номер категории населенного пункта от 1 до 9. Данный подход не учитывает такой фактор как наличие в населенном пункте большого предприятия или торгового центра, которое «притягивает» население и обслуживающие подсистемы из других пунктов. В реальности существуют населенные пункты, которые имеют особый статус из-за наличия производственного, торгового, военного или другого объекта. В таких населенных пунктах численность населения и объем поездок может не соответствовать его картографическому статусу.

В данной статье метод определения  $d_{i,j}$  связан с категориями дорог. Для каждой категории дорог [2] определена интенсивность движения (тыс.машин в сутки). Если в графе кратчайший путь  $\hat{X}_{i,j}$  состоит из единственного ребра, то потребность в движении от вершины  $i$  до вершины  $j$  прямо пропорциональна интенсивности движения для данной категории автомобильной до-

роги, соответствующей ребру  $(i, j)$  в соответствии с картографическим классификатором дорог (см. рис. 2.). Так как дороги являются очень дорогостоящим сооружением, то естественно предположить, что они проектируются под определенные потоки, и линейная связь между интенсивностью движения и потребностью в движении представляется естественной. В общем случае  $\hat{X}_{i,j}$  состоит из ребер разных категорий. Тогда потребность в движении логично определить как

$$d_{i,j} = \min_{e_{k,l} \in \hat{X}_{i,j}} d_{k,l}.$$

Очевидно, что потребность в движении между двумя перекрестками и между перекрестком и населенным пунктом равна нулю, т.е. когда  $B_i B_j = 0$ . Окончательно можно положить

$$d_{i,j} = \begin{cases} g_{i,j}/c_{i,j}^2, & \text{если } \{e_{i,j}\} = \hat{X}_{i,j} \text{ и } B_i B_j \neq 0, \\ \min_{e_{k,l} \in \hat{X}_{i,j}} (g_{k,l})/c_{i,j}^2, & \text{если } B_i B_j \neq 0, \\ 0, & \text{если } B_i B_j = 0. \end{cases}$$

где  $g_{i,j}$  – интенсивность движения для данной категории дороги по картографическим данным, соответствующей ребру между вершинами  $i$  и  $j$ .

#### **4. Решение задачи вычисления ущерба методом линейного программирования**

Общий алгоритм сведения этой задачи к задаче линейного программирования (ЛП) достаточно громоздкий. Опишем принцип сведения.

1. Очевидно, что если есть способ описать величину  $c_{i,j}^A$  в терминах ЛП, то можно по аналогии описать и всю задачу. Покажем, как описать  $c_{i,j}^A$  на следующем примере. Пусть между вершинами  $i$  и  $j$  есть 3 возможных пути и пусть первый путь состоит из четырех ребер 1, 2, 3, 4.

2. Введем булевские переменные  $w_1, w_2, w_3$ . Будем считать, что  $w_1 = 1$ , если ни одно ребро первого пути не принадлежит А (А не перекрывает первый путь). Пусть  $c_1, c_2, c_3$  – стоимости поездок по путям 1, 2, 3. Не нарушая общности, примем 204

$c_1 < c_2 < c_3$ . Пусть  $c_4$  – величина неудовлетворенного спроса  $a_{i,j}$ .

3. Тогда

$$c_{i,j}^A = c_1 w_1 + (1 - w_1) w_2 c_2 + (1 - w_1)(1 - w_2) w_3 c_3 + \\ (1 - w_1)(1 - w_2)(1 - w_3) w_4 c_4.$$

Это уравнение означает, что если первый путь не перекрыт множеством  $A$  ( $w_1 = 1$ ), то движение пойдет по этому пути и его стоимость будет равняться  $c_1$ , так как в этом случае все остальные слагаемые, кроме  $c_1 w_1$ , будут равны нулю. Если первый путь перекрыт множеством  $A$  ( $w_1 = 0$ ), но второй путь не перекрыт ( $w_2 = 1$ ), то движение пойдет по второму пути и его стоимость будет равняться  $c_2$ , так как только слагаемое  $(1 - w_1) w_2 c_2$  будет ненулевым в этой сумме. Аналогичное рассуждение справедливо и для остальных слагаемых.

4. Чтобы представить это выражение в виде ЛП, необходимо избавиться от операции умножения. Рассмотрим, как это делается на примере третьего слагаемого  $(1 - w_1)(1 - w_2) w_3$ . Введем булевскую переменную  $\alpha = (1 - w_1)(1 - w_2) w_3$ , тогда  $\alpha = 1$ , если  $1 - w_1 = 1$ ,  $1 - w_2 = 1$ ,  $w_3 = 1$ , в противном случае  $\alpha = 0$ . Это эквивалентно следующей группе условий:

$$\alpha + (1 - (1 - w_1)) + (1 - (1 - w_2)) + (1 - w_3) \geq 1, \\ \alpha \leq 1 - w_1, \\ \alpha \leq 1 - w_2, \\ \alpha \leq w_3$$

. Первое условие задает, что  $\alpha = 1$ , если  $w_1 = 0$  (или  $1 - w_1 = 1$ ),  $w_2 = 0$ ,  $w_3 = 1$ , остальные условия задают, что  $\alpha = 0$ , если хотя бы одно из выражений  $1 - w_1$ ,  $1 - w_2$ ,  $w_3$  равно 0.

5. Осталось привязать пути к ребрам, покажем это на примере первого пути, состоящего из четырех ребер. Введем булевские переменные  $e_1, e_2, e_3, e_4$ . Положим  $e_1 = 1$ , если первое ребро принадлежит  $A$ . Тогда  $w_1 = (1 - e_1)(1 - e_2)(1 - e_3)(1 - e_4)$  и опять нужно избавиться от операции умножения, введением следующих (аналогичных предыдущему пункту) ограничений:

$$\begin{aligned} w_1 + e_1 + e_2 + e_3 + e_4 &\geq 1, \\ w_1 + e_1 &\leq 1, \\ w_1 + e_2 &\leq 1, \\ w_1 + e_3 &\leq 1, \\ w_1 + e_4 &\leq 1. \end{aligned}$$

6. Последнее ограничение на мощность множества  $A$ :

$$\sum_{i \in E} e_i \leq q,$$

где  $q$  – максимальное количество удаляемых ребер.

К сожалению, задача ЛП, построенная описанным способом, имеет большую размерность и, соответственно, большую вычислительную сложность. Грубо оценим количество переменных и неравенств такой задачи. Примем следующие упрощения:

- количество путей между любыми двумя вершинами одинаково и равно  $k$ ;
- длина любого пути (измеряемая в количестве ребер) между двумя вершинами одинакова и равна  $l$ ;
- величина неудовлетворенного спроса  $a_{i,j} = 0$ .

Рассмотрим пару вершин  $i$  и  $j$ . По пункту 3 выражение для  $c_{i,j}^A$  содержит  $k$  слагаемых. Первое слагаемое не содержит операции умножения переменных, второе слагаемое содержит одно умножение переменных, третье – 2,  $k$ -е слагаемое содержит  $k - 1$  операцию умножения переменных. Если слагаемое содержит  $r$  операций умножения переменных, то для его описания потребуется  $r + 1$  неравенство. Тогда общее количество неравенств при описании  $c_{i,j}^A$  для одной пары вершин является суммой арифметической прогрессии и оценивается как  $O(k^2)$ . Количество переменных типа  $w_r$  равняется  $k$  и еще (по пункту 4) необходимо ввести  $k - 1$  переменную типа  $\alpha$ . Каждый путь  $w_r$  состоит из  $l$  ребер и (по пункту 5) для его описания потребуется  $l + 1$  неравенство, а общее количество переменных типа  $e_r$  равно числу ребер  $m$ . Итого, для одной пары вершин потребуется  $O(k^2 + kl)$  неравенств и  $O(k)$  переменных. Количество различных пар вершин равно  $(n(n - 1))/2 = O(n^2)$ . Соответственно, общее количество неравенств в задаче ЛП составит  $O(n^2k^2 + n^2kl)$ , а общее количество переменных –  $O(n^2k + m)$ .

## 5. Пример

Рассмотрим применение метода на примере. На рис. 3 приведен пример графа, у которого пронумерованы вершины и ребра. Кроме того, на ребрах (рядом с ними) указаны веса – расстояния. Список упорядоченных путей, выписанный через вершины:

1. (0,1) : 0-1, 0-2-3-1, 0-2-1.
2. (0,2) : 0-2, 0-1-3-2, 0-1-2.
3. (0,3) : 0-2-3, 0-1-3, 0-1-2-3, 0-2-1-3.
4. (1,2) : 1-3-2, 1-2, 1-0-2.
5. (1,3) : 1-3, 1-2-3, 1-0-2-3.
6. (2,3) : 2-3, 2-1-3, 2-0-1-3.

Всего 19 путей.

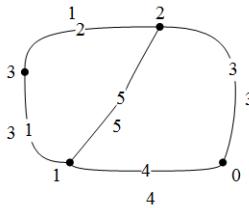


Рис. 3. Пример графа с указанием номеров вершин, номеров ребер и весов ребер.

Список упорядоченных путей, выписанный через ребра с весами (в скобках):

1. (0,1) : 4(4), 3(3)-2(1)-1(3), 3(3)-5(5).
2. (0,2) : 3(3), 4(4)-1(3)-2(1), 4(4)-5(5).
3. (0,3) : 3(3)-2(1), 4(4)-1(3), 4(4)-5(5)-2(1), 3(3)-5(5)-1(3).
4. (1,2) : 1(3)-2(1), 5(5), 4(4)-3(3).
5. (1,3) : 1(3), 5(5)-2(1), 4(4)-3(3)-2(1).
6. (2,3) : 2(1), 5(5)-1(3), 3(3)-4(4)-1(3).

По пункту 3 для каждого пути распишем соответствующие формулы:

$$c_{01} = 4w_1 + 7\bar{w}_1w_2 + 8\bar{w}_1\bar{w}_2w_3,$$

$$c_{02} = 3w_4 + 8\bar{w}_4w_5 + 9\bar{w}_4\bar{w}_5w_6,$$

$$c_{03} = 4w_7 + 7\bar{w}_7w_8 + 10\bar{w}_7\bar{w}_8w_9 + 11\bar{w}_7\bar{w}_8\bar{w}_9w_{10},$$

$$c_{12} = 4w_{11} + 5\bar{w}_{11}w_{12} + 7\bar{w}_{11}\bar{w}_{12}w_{13},$$

$$c_{13} = 3w_{14} + 6\bar{w}_{14}w_{15} + 8\bar{w}_{14}\bar{w}_{15}w_{16},$$

$$c_{23} = w_{17} + 8\bar{w}_{17}w_{18} + 10\bar{w}_{17}\bar{w}_{18}w_{19}.$$

Для второго слагаемого первого пути обозначим  $\alpha_1 = \bar{w}_1w_2$ .

По пункту 4 соответствующая система неравенств после раскрытия скобок задается следующим образом:

$$\alpha_1 - w_2 + w_1 \geq 0, \quad \alpha_1 + w_1 \leq 1, \quad \alpha_1 \leq w_2.$$

Аналогичные неравенства для остальных произведений приведены ниже.

$$\alpha_2 - w_3 + w_1 + w_2 \geq 0, \quad \alpha_2 + w_1 \leq 1,$$

$$\alpha_2 + w_2 \leq 1, \quad \alpha_2 \leq w_3,$$

$$\alpha_3 - w_5 + w_4 \geq 0, \quad \alpha_3 + w_4 \leq 1, \quad \alpha_3 \leq w_5,$$

$$\alpha_4 - w_6 + w_4 + w_5 \geq 0, \quad \alpha_4 + w_4 \leq 1,$$

$$\alpha_4 + w_5 \leq 1, \quad \alpha_4 \leq w_6,$$

$$\alpha_5 - w_8 + w_7 \geq 0, \quad \alpha_5 + w_7 \leq 1, \quad \alpha_5 \leq w_8,$$

$$\alpha_6 - w_9 + w_7 + w_8 \geq 0, \quad \alpha_6 + w_7 \leq 1,$$

$$\alpha_6 + w_8 \leq 1, \quad \alpha_6 \leq w_9,$$

$$\alpha_7 - w_{10} + w_7 + w_8 + w_9 \geq 0, \quad \alpha_7 + w_7 \leq 1,$$

$$\alpha_7 + w_8 \leq 1, \quad \alpha_7 + w_9 \leq 1, \quad \alpha_7 \leq w_{10},$$

$$\alpha_8 - w_{12} + w_{11} \geq 0, \quad \alpha_8 + w_{11} \leq 1, \quad \alpha_8 \leq w_{12},$$

$$\alpha_9 - w_{13} + w_{11} + w_{12} \geq 0,$$

$$\alpha_9 + w_{11} \leq 1, \quad \alpha_9 + w_{12} \leq 1, \quad \alpha_9 \leq w_{13},$$

$$\alpha_{10} - w_{15} + w_{14} \geq 0, \quad \alpha_{10} + w_{14} \leq 1, \quad \alpha_{10} \leq w_{15},$$

$$\alpha_{11} - w_{16} + w_{14} + w_{15} \geq 0,$$

$$\alpha_{11} + w_{14} \leq 1, \quad \alpha_{11} + w_{15} \leq 1, \quad \alpha_{11} \leq w_{16},$$

$$\alpha_{12} - w_{18} + w_{17} \geq 0, \quad \alpha_{12} + w_{17} \leq 1, \quad \alpha_{12} \leq w_{18},$$

$$\alpha_{13} - w_{19} + w_{17} + w_{18} \geq 0, \quad \alpha_{13} + w_{17} \leq 1,$$

$$\alpha_{13} + w_{18} \leq 1, \quad \alpha_{13} \leq w_{19}.$$

По пункту 5 ниже выписаны неравенства для каждого пути.

Пути (0,1).

$$w_1 + e_4 \geq 1, \quad w_1 + e_4 \leq 1,$$

$$w_2 + e_3 + e_2 + e_1 \geq 1, \quad w_2 + e_1 \leq 1,$$

$$w_2 + e_2 \leq 1, \quad w_2 + e_3 \leq 1,$$

$$w_3 + e_3 + e_5 \geq 1, \quad w_3 + e_3 \leq 1, \quad w_3 + e_5 \leq 1.$$

Пути (0,2).

$$\begin{aligned} w_4 + e_3 \geq 1, \quad w_4 + e_3 \leq 1, \quad w_5 + e_4 + e_2 + e_1 \geq 1, \\ w_5 + e_1 \leq 1, \quad w_5 + e_2 \leq 1, \quad w_5 + e_4 \leq 1, \quad w_6 + e_4 + e_5 \geq 1, \\ w_6 + e_4 \leq 1, \quad w_6 + e_5 \leq 1 \end{aligned}$$

Пути (0,3).

$$\begin{aligned} w_7 + e_3 + e_2 \geq 1, \quad w_7 + e_3 \leq 1, \quad w_7 + e_2 \leq 1, \\ w_8 + e_4 + e_1 \geq 1, \quad w_8 + e_4 \leq 1, \quad w_8 + e_1 \leq 1, \\ w_9 + e_4 + e_2 + e_5 \geq 1, \quad w_9 + e_5 \leq 1, \\ w_9 + e_2 \leq 1, \quad w_9 + e_4 \leq 1, \\ w_{10} + e_3 + e_5 + e_1 \geq 1, \quad w_{10} + e_1 \leq 1, \\ w_{10} + e_3 \leq 1, \quad w_{10} + e_5 \leq 1. \end{aligned}$$

Пути (1,2).  $w_{11} + e_5 \geq 1, \quad w_{11} + e_5 \leq 1,$

$$\begin{aligned} w_{12} + e_2 + e_1 \geq 1, \quad w_{12} + e_1 \leq 1, \quad w_{12} + e_2 \leq 1, \\ w_{13} + e_4 + e_3 \geq 1, \quad w_{13} + e_4 \leq 1, \quad w_{13} + e_3 \leq 1. \end{aligned}$$

Пути (1,3).

$$\begin{aligned} w_{14} + e_1 \geq 1, \quad w_{14} + e_1 \leq 1, \\ w_{15} + e_2 + e_5 \geq 1, \quad w_{15} + e_2 \leq 1, \quad w_{15} + e_5 \leq 1, \\ w_{16} + e_3 + e_2 + e_4 \geq 1, \quad w_{16} + e_4 \leq 1, \\ w_{16} + e_2 \leq 1, \quad w_{16} + e_3 \leq 1. \end{aligned}$$

Пути (2,3).

$$\begin{aligned} w_{17} + e_2 \geq 1, \quad w_{17} + e_2 \leq 1, \\ w_{18} + e_1 + e_5 \geq 1, \quad w_{18} + e_1 \leq 1, \quad w_{18} + e_5 \leq 1, \\ w_{19} + e_3 + e_1 + e_4 \geq 1, \quad w_{19} + e_4 \leq 1, \\ w_{19} + e_1 \leq 1, \quad w_{19} + e_3 \leq 1. \end{aligned}$$

По пункту 6

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 \leq q.$$

Матрица потребностей в движении  $d_{i,j}$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 15 & 10 & 25 \\ 15 & 0 & 6 & 15 \\ 10 & 6 & 0 & 10 \\ 25 & 15 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если нумеровать строки и столбцы матрицы с нуля, то целевая функция

$$\max : d_{01}c_{01} + d_{02}c_{02} + d_{03}c_{03} + d_{12}c_{12} + d_{13}c_{13} + d_{23}c_{23}.$$



Данный пример решался методом линейного программирования, предложенным в данной статье и методом полного перебора. В обоих случаях были получены следующие результаты: в случае удаления одного ребра, критическим является ребро (2,3); в случае удаления пары ребер критической является пара (1,2) и (2,3).

## 6. Вариации задачи нахождения критических ребер

В рассмотренном примере задача ЛП содержит 117 неравенств. Главным недостатком метода сведения задачи нахождения критических ребер к задаче ЛП является большая размерность и вычислительная сложность. За приемлемое время этим методом можно находить решения для графов малой размерности. Очевидное достоинство метода заключается в том, что из-за широкого и продолжительного (около 70 лет) применения задач ЛП алгоритмы их решения успешно развивались и совершенствовались и в настоящее время работают за полиномиальное время. Существует множество специализированных программных пакетов для решения задач ЛП, в том числе работающих на вычислительных кластерах (IBM CPLEX), облегчающих разработку соответствующих приложений.

Другим достоинством этого метода является возможность за счет небольших изменений исходной задачи ЛП получать решения схожих задач. Выделим из текста постановки задачи ЛП целевую функцию

$$\max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} d_{i,j} c_{i,j}^A$$

и последнее неравенство на количество удаляемых ребер  $\sum e_i \leq q$ , а остальные неравенства будем называть «ограничения, определяющие сеть». Тогда можно построить следующие вариации исходной задачи.

### 6.1. Ограничения на множество удаляемых ребер

При решении задач нахождения критических узлов в транспортной сети достаточно часто встречается вариация, в которой

про некоторое подмножество узлов заранее известно, что оно не является критическим. Этому подмножеству обычно соответствуют участки дорог определенного типа. Например, дороги низших категорий (грунтовые) или дороги, восстановление которых может быть проведено за относительно короткое время, можно заранее считать некритическими. Такую постановку можно легко перенести в задачу ЛП. Пусть множество ребер  $Q \subset E$  – соответствует множеству некритических узлов. Добавление к существующей задаче ЛП ограничений вида  $e_i = 0$  для  $i \in Q$  задает условие некритичности ребер множества  $Q$ .

Алгоритмы большинства современных «решателей» задач ЛП состоят из трех крупных этапов:

- упрощение задачи, снижение ее размерности и заполнение необходимых структур данных;
- решение задачи без ограничения на целочисленность переменных;
- решение задачи с ограничениями на целочисленность.

Как показывает практика, выполнение последнего этапа занимает почти все время. Например, первые два этапа выполняются за полторы минуты, а третий этап – за 2 часа. Поэтому добавление ограничений некритичности ребер множества  $Q$  однозначно уменьшит время вычисления, несмотря на то, что общее количество ограничений возросло. Так как после первого этапа упрощения уменьшится как количество переменных, так и количество ограничений.

## 6.2. Обратная задача

Обозначим значение общей стоимости поездок  $S(G)$  исходного графа  $S_0$ . Рассмотрим следующую постановку задачи: требуется найти минимальное по мощности подмножество ребер  $A$ , при удалении которых общая стоимость поездок возрастет не менее чем в  $\beta$  раз, где параметр  $\beta > 1$ . Для ее решения поменяем местами целевую функцию и ограничение на количество удаляемых ребер:

$$\min \sum_{i \in E} e_i.$$

Ограничения, определяющие сеть и неравенство:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} d_{i,j} c_{i,j}^A \geq S_0 \beta.$$

### 6.3. Ограничение на стоимость удаления ребер

Для каждого ребра в исходной задаче зададим «стоимость» его удаления  $p_i$ , которая может характеризовать степень износа соответствующего элемента сети или его защищенность. Зададим величину  $D$  – общий «бюджет», который не может быть превышен при удалении ребер. Тогда формулировка задачи поиска критических ребер, общая стоимость которых не превышает  $D$  получается из исходной заменой ограничения  $\sum_i e_i \leq q$  на  $\sum_i e_i p_i \leq D$ .

### 6.4. Оптимальное строительство дорог

Рассмотренные вариации задачи достаточно стандартны, схожие примеры можно найти в работах по нахождению критических узлов или ребер не транспортных сетей методами ЛП. Рассмотрим задачу добавления ребер, которая характерна именно для транспортных сетей. Её можно сформулировать как поиск при ограниченном бюджете новых дорог, которые можно построить для максимального улучшения существующей транспортной сети. Формализуем эту постановку. Пусть  $E'$  ( $E' \cap E = \emptyset$ ) – множество ребер, соответствующее проектируемым новым дорогам,  $p_i$  – стоимость постройки  $i$ -й дороги,  $D$  – общий бюджет. Требуется найти подмножество  $A \subset E'$  такое, что

$$\sum_{i \in A} p_i \leq D,$$

при котором  $S(G(V, E \cup A))$  достигает своего минимума.

Для постановки задачи в терминах ЛП будем рассматривать граф  $G(V, E \cup E')$  и удалять ребра из множества  $E'$  так, чтобы сумма стоимостей оставшихся в  $E'$  ребер не превосходила величины бюджета. При этом будем минимизировать функцию  $S(G(V, E \cup A))$  и сделаем ребра множества  $E$  не критическими.

Тогда постановка задачи в формате ЛП будет выглядеть следующим образом.

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} d_{i,j} c_{i,j}^A.$$

Ограничения, определяющие сеть  $G(V, E \cup E')$ :

$$e_i = 0, \quad i \in E,$$

$$\sum_{i \in E'} e_i p_i \geq B - D, \quad \text{где } B = \sum_{i \in E'} p_i.$$

## 7. Заключение

В работе рассматривалась задача нахождения критических объектов транспортной сети. Была построена математическая модель транспортной сети, учитывающая стоимости поездок и потребности в движении между узлами сети. Описана методика определения всех параметров математической модели и обоснована ее корректность. Для нахождения критических объектов была сформулирована задача оптимизации в рамках построенной модели. Показано, как исходную постановку задачи нахождения критических объектов свести к эквивалентной задаче линейного программирования, для которой проведена грубая оценка количества переменных и ограничений. Предложен ряд модификаций задачи линейного программирования, включающий задачу добавления новых ребер. Такие задачи возникают при проектировании новых дорог.

## Литература

1. ИВАНОВ М.В. *Исследование понятийного аппарата транспортной доступности (зарубежный опыт)* // Вестник ВГАВТ. – 2013. – Вып. 37.
2. *Справочная энциклопедия дорожника. Т. 5* / Под ред. Г.А. Федотова, П.И. Пospelова. – М., 2007.
3. BELL M., PIDA Y. *Transportation Network Analysis*. – John Wiley and Sons, Chicester, 1997.

4. BELL M.G.H., KURAUCHI F., PERERA S. et al. *Investigating transport network vulnerability by capacity weighted spectral analysis* // Transportation Research Part B: Methodological. – 2017. – Vol. 99. – P. 251–266.
5. CHEHREGHANI M.H., BIFET A., ABDESSALEM T. *Discriminative Distance-Based Network Indices and the Tiny-World Property* // arXiv preprint arXiv:1703.06227. – 2017.
6. DAVID L.A., GERALD G.B., W. MATTHEW CARLYLE *Sometimes There Is No “Most-Vital” Arc: Assessing and Improving the Operational Resilience of Systems* // Military Operations Research. – 2013. – Vol. 18, No. 1. – DOI: 10.5711/1082598318121.
7. DENG Y., SONG L., ZHOU Z., LIU P. *Complexity and Vulnerability Analysis of Critical Infrastructures: A Methodological Approach* // Hindawi Mathematical Problems in Engineering. – Volume 2017. – Article ID 8673143. – 12 p.
8. GAO L., LIUA X., LIUB Y., WANGC P. et al. *Measuring Road Network Topology Vulnerability by Ricci Curvature* // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2019. – URL: <https://arxiv.org/abs/1811.05743>.
9. GUZE S. *An application of the selected graph theory domination concepts to transportation networks modelling* // Sci. J. Marit. – 2017. – Vol. 52. – P. 97–102.
10. GUZE S. *Graph Theory Approach to the Vulnerability of Transportation Networks. Department of Mathematics.* – Gdynia Maritime University, Gdynia, Poland. – P. 81–225.
11. MATTSSON L., JENELIUS E. *Vulnerability and resilience of transport systems A discussion of recent research* // Transportation Research Part A-policy and Practice. – 2015. – Vol. 81. – P. 16–34.
12. NEUMANN T., BEHRISCH M. *Terminal reliability of road networks with multiple destination options* // Int. J. of Safety and Security Eng. – 2018. – Vol. 8, No. 3. – P. 426–437.
13. QIANQIAN D., KUNIHIRO K., TAKASHI N. *Vulnerability Evaluation of Logistics Transportation Networks Under Seismic*

- Disasters* // Transportation Research Record Journal of the Transportation Research Board. – 2015. – Vol. 2532(1). – P. 45–55.
14. RAICU S., ROSCA E., RUSCA F. *Vulnerability of transcarpathians road network* // Scientific Bulletin of Mechanics and Technology. Automotive Series. – 2009, year XV. – No. 19, Vol. B.
  15. ROSCA E., POPA M., RUSCA F. *Transport networks reliability and vulnerability in large urban areas* // Mechanics Transport Communications. – 2008. – No. 3. – P. I-26–I-30.
  16. TAYLOR M., D'ESTE G. *Transport Network Vulnerability: a Method for Diagnosis of Critical Locations in Transport Infrastructure Systems*. – Springer Verlag, Berlin, 2007.

## **IDENTIFICATION OF CRITICAL NODES OF THE TRANSPORT NETWORK**

**Andrey Krygin**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (andreyakr@yandex.ru).

**Boris Kupriyanov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (kuprianovb@mail.ru).

*Abstract: The paper considers the problem of finding critical objects of the transport network. A mathematical model of the transport network is constructed, taking into account the cost of trips and the need for movement between network nodes. The method of determining all parameters of the mathematical model is described and its correctness is justified. The optimization problem is formulated, which is reduced to a linear programming problem.*

Keywords: transport networks, critical object search, linear programming.

УДК 338.49

ББК 39.311

DOI: 10.25728/ubs.2022.100.9

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А.А. Лазаревым.*

*Поступила в редакцию 05.10.2022.*

*Дата опубликования 30.11.2022.*