ПОСТРОЕНИЕ РЕДУЦИРОВАННЫХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С АФФИННЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Краснов Д. В.[1]

(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Объектом исследования являются линейные одноканальные системы с аффинными параметрическими и внешними возмущениями, представленные в так называемой треугольной форме «вход – выход». Относительный порядок по управлению равен размерности вектора состояния и не меняется при переходе к канонической форме «вход – выход» в предположении о гладкости внешних возмущений. Известно, что для таких систем только по измерениям выходной переменной можно построить наблюдатель смешанных переменных и восстановить линейные комбинации переменных состояния и внешних воздействий с заданной точностью. Полученных оценок достаточно для синтеза динамической обратной связи, обеспечивающей отслеживание выходной переменной заданного сигнала. В работе рассматривается важный практический случай, когда при некотором наборе датчиков выходная (регулируемая) переменная не измеряется. Нужно построить редуцированный наблюдатель состояния для ее оценивания, чтобы перейти к построению наблюдателя смешанных переменных. Вначале рассматриваются мотивирующие примеры систем второго порядка с различными измерениями и различными каналами действия внешних возмущений. Показано, что при измерении обеих переменных состояния с помощью кусочно-линейных корректирующих воздействий наблюдателя состояния можно восстановить внешние возмущения по их влиянию на систему (т.е. без использования динамического генератора возмущений). Формулируются условия, при которых этот принцип можно также использовать в системе с внешними возмущениями и неполными измерениями для восстановления неизмеряемой переменной состояния. Полученные результаты распространяются на конечномерные одноканальные системы произвольного порядка с аффинными возмущениями, в которых выходная переменная не измеряется. Формализованы условия существования и метод синтеза редуцированного наблюдателя с кусочно-линейным корректирующим воздействием, дающим оценку выходной переменной. Разработанный подход не требует идентификации внешних возмущений и решает задачу наблюдения выходной переменной с любой заданной точностью.

Ключевые слова: линейные системы, возмущения, редуцированный наблюдатель состояния, кусочно-линейная коррекция.

---

[1] *Дмитрий Валентинович Краснов, научный сотрудник* (*dim93kr@mail.ru*).

1. Введение

В управляемых системах автоматического управления обычно предполагается наличие полного комплекта измерительных устройств. Это дает возможность реализации программного управления и различных законов управления по обратной связи, обеспечивающих в замкнутой системе требуемые показатели переходных процессов. Однако на практике установка полного комплекта датчиков не всегда возможна. Более того, разработчики часто намерено сокращают количество датчиков для того чтобы удешевить и упростить конструкцию готового изделия. В таких случаях для формирования управляющих сигналов используют специальные алгоритмы, с помощью которых в реальном времени решается проблема восстановления неизмеряемых переменных состояния. Эти построения базируются на одном из разделов математической теории автоматического управления – теории динамических наблюдателей состояния. Данная теория в настоящее время хорошо разработана применительно к линейным и квазилинейным объектам автоматического управления в условиях определенности.

Как известно, классический полноразмерный наблюдатель состояния строится как копия математической модели объекта управления и имеет такую же размерность. Для наблюдаемых и параметрически определенных систем наблюдатели с линейными корректирующими воздействиями дают асимптотические оценки переменных состояния. При наличии шумов в измерениях полноразмерный наблюдатель может также выполнять функции фильтра Калмана. Если шумы в измерениях отсутствуют, то для упрощения алгоритма и сокращения времени счета используют редуцированные наблюдатели состояния: их размерность меньше, чем динамический порядок объекта управления [16].

Построение классических полноразмерных и, особенно, редуцированных наблюдателей состояния требует точного знания динамической модели объекта управления и ее параметров. Случаи параметрической неопределенности, а также действия на объект управления внешних возмущений требуют специального рассмотрения и использования наблюдателей с нелинейными корректирующими воздействиями. Как правило, задача наблюдения неизмеряемых переменных состояния в узкой постановке (т.е. без ввода динамических генераторов возмущении идентификаторов неизвестных параметров [12]) имеет решение, если возмущения действуют на объект управления только по определенным каналам. В математической модели объекта управления должны быть уравнения, на которые возмущения не действуют непосредственно.

В данной работе рассматриваются проблемы наблюдения переменных состояния линейных одноканальных систем автоматического управления с аффинным вхождением параметрических и внешних возмущений. Предполагается, что модель объекта представлена в так называемой треугольной (по составу переменных в каждом уравнении) форме «вход – выход». Цель управления – с помощью обратной связи обеспечить заданное поведение выходной переменной (поддержание заданного уровня или отслеживание заданного сигнала). В типовом, наиболее изученном случае предполагается, что все параметрические неопределенности и внешние возмущения являются согласованными, т.е. действуют по одному каналу с управлением, выходная (регулируемая) переменная измеряется. Для систем указанной структуры это означает наблюдаемость и управляемость инвариантно по отношению к внешним возмущениям. Для таких систем в рамках различных подходов [9, 10, 13–15] разработаны методы синтеза динамической обратной связи, включая построение полноразмерного наблюдателя состояния с неизвестным входом. При этом не принципиально, имеются ли в системе датчики других переменных состояния. Для восстановления и переменных состояния, и согласованных возмущений достаточно измерений только выходной переменной [9].

В реальных системах, как правило, возмущения не являются согласованными, что приводит к частичной потере наблюдаемости переменных состояния, без знания которых нельзя сформировать обратную связь. Классический подход состоит в расширении пространства состояний с помощью экзогенных динамических моделей, имитирующих внешние возмущения [11, 12]. Тогда с помощью наблюдателя повышенной размерности можно получить оценки и неизмеряемых переменных состояния, и внешних возмущений. Однако составление адекватной экзогенной модели не всегда возможно и сильно сужает класс допустимых возмущений.

Для систем, где возмущения полагаются гладкими функциями времени, предложен универсальный подход, не требующий индивидуального оценивания возмущений [7]. Он состоит в переходе к координатному базису смешанных переменных (линейных комбинаций переменных состояния, внешних воздействий и их производных) и канонической форме «вход – выход» с согласованными неопределенностями, действующими по входу. Такое представление сводит проблему синтеза следящей системы к применению известных методов с построением полноразмерного наблюдателя смешанных переменных по измерениям только выходной переменной (или ошибки слежения).

Заметим, что измерение именно выходной переменной является необходимым условием для реализации указанного универсального подхода. В данной работе рассматривается мало изученный в теории, но распространенный в практических приложениях случай, когда в системе с несогласованными, но гладкими возмущениями, комплект датчиков не полный и выходная (регулируемая) переменная по тем или иным причинам не может быть измерена [3]. Для того чтобы использовать преимущества универсального подхода к построению инвариантной системы слежения, требуется предварительно восстановить выходную переменную.

В данной работе для указанного класса линейных систем сформулированы условия существования физически реализуемого редуцированного наблюдателя выходной переменной. Задача рассматривается в узкой постановке, т.е. проблема дополнительной идентификации внешних возмущений не ставится и не решается. Тем не менее, методологической основой для данного исследования являются способы оценивания внешних возмущений по их воздействию на объект управления, не требующие составления динамических моделей внешних возмущений. В данных наблюдателях используются кусочно-линейные корректирующие воздействия, которые обеспечивают заданную точность оценочных сигналов при выполнении определенных условий [4, 7, 8]. В разделе 2 приводятся мотивирующие примеры линейных систем второго порядка при действии возмущений с детальным описанием условий применимости указанного метода для оценивания неизмеряемых переменных вектора состояния. В разделе 3 представлен основной результат. Для рассматриваемого класса одноканальных систем формализованы условия, при которых можно восстановить неизмеряемую выходную переменную в узкой постановке с помощью редуцированного наблюдателя с кусочно-линейными корректирующими воздействиями. В качестве примеров выполнения или не выполнения сформулированных условий рассмотрены математические модели однозвенных манипуляторов с различными наборами датчиков.

2. Мотивирующие примеры

Для пояснения используемого метода вначале рассмотрим линейную динамическую систему второго порядка, представленную в форме «вход – выход» следующего вида:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \eta_1(t), \\ &\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \eta_2(t) + bu, \end{aligned} \tag{1}$$

$$a_{12} \neq 0, \quad b = \text{const} \neq 0, \tag{2}$$

где $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in X \subset R^2$ – вектор состояния; X – открытая ограниченная область изменения переменных состояния в процессе регулирования; $x_1(t)$ – регулируемый выход; a_{ij}, b – известные константы; $\eta_i(t)$ – внешние неконтролируемые возмущения; u – управление (вход), которое полагается известной функцией времени.

Обратим внимание, что в стандартных построениях модель одноканальных систем «вход – выход» является канонической (в случае системы (1) это означает, что $a_{11} = 0$ и $a_{12} = 1$). С одной стороны, использование канонического представления позволяет вводить для различных систем универсальные законы управления. С другой стороны, представление в каноническом виде не отражает уникальных свойств конкретного объекта. Далее будет показано, что рассмотрение более полной формы «вход – выход» при определенных условиях может дать дополнительные преимущества при решении задачи наблюдения, когда регулируемая выходная переменная не измеряется.

В данной работе вопросы синтеза обратной связи не детализируются. Управление u полагается известной функцией времени. Все внутренние и внешние сигналы в замкнутой системе (1) полагаются ограниченными вместе со своими производными в процессе управления:

$$\begin{aligned} &|\eta_i(t)| \le \mathrm{H}_i, |\dot{\eta}_i(t)| \le \bar{\mathrm{H}}_i,\ i=1,2, \\ &|x_i(t)| \le X_i, |\dot{x}_i(t)| \le \bar{X}_i,\ t\in[0,T], \end{aligned} \tag{3}$$

где T – время регулирования, X_i, $\bar{X}_i$, H_i, $\bar{H}_i$ – известные константы.

Рассмотрим мотивирующие примеры – различные варианты измерений в системе (1) и условия физической реализуемости соответствующих наблюдателей переменных состояния и внешних возмущений.

Пример 1. Если в системе (1) обе переменные состояния $x_1(t)$, $x_2(t)$ измеряются, то можно восстановить и оба внешних возмущения с помощью двух автономных наблюдателей первого порядка:

$$\begin{aligned} &\dot{z}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + v_1, \\ &\dot{z}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + bu + v_2, \end{aligned} \tag{4}$$

где $z_i \in R$ – переменные состояния наблюдателя, $v_i \in R$ – его корректирующие воздействия, i = 1, 2. С учетом (1), (4) система относительно ошибок наблюдения $\varepsilon_i = x_i - z_i \in R$ примет следующий вид

$$\dot{\varepsilon}_i = \eta_i(t) - v_i,\ i=1,2. \tag{5}$$

Синтез наблюдателя (4) заключается в выборе параметров кусочно-линейных корректирующих воздействий

$$v_i = m_i \mathrm{sat}(l_i\varepsilon_i) = \begin{bmatrix} m_i \mathrm{sign}(\varepsilon_i), |\varepsilon_i| > 1/l_i,\ i=1,2, \\ m_i l_i \varepsilon_i, |\varepsilon_i| \le 1/l_i,\ \ m_i, l_i = \mathrm{const} > 0, \end{bmatrix} \tag{6}$$

стабилизирующих с заданной точностью ошибки наблюдения и их производные

(7) $\quad \left|\varepsilon_i(t)\right| \le \delta_i \Rightarrow \left|\dot{\varepsilon}_i(t)\right| \le \Delta_i \Rightarrow \eta_i(t) \approx v_i(t) \pm \Delta_i,\ i = 1, 2,\ t_0 < t \le T.$

Из выражений (7) следует, что оценочными сигналами для внешних возмущений являются корректирующий воздействия наблюдателей. Учитывая, что вектор состояния измеряется, в системах (4), (5) установим начальные значения:

$$z_i(0) = x_i(0) \Rightarrow \varepsilon_i(0) = 0 \Leftrightarrow \left|\varepsilon_i(0)\right| \le 1 / l_i,\ i = 1, 2.$$

Обеспечим $|\varepsilon_i (t)| \le 1/l_i$ при $t \in [0,\ T]$ выбором амплитуд m_i, $i = 1, 2$, корректирующих воздействий (6) на основе неравенств, полученных с помощью второго метода Ляпунова на основе представления замкнутой системы (5)–(6) вне линейных зон, т.е. при $|\varepsilon_i(t)| > 1/l_i$:

(8) $\quad m_i > \mathrm{H}_i \Rightarrow \varepsilon_i \dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_i(\eta_i - m_i \mathrm{sign}(\varepsilon_i)) \le \left|\varepsilon_i\right|(\mathrm{H}_i - m_i) < 0,\ i = 1, 2.$

При выполнении условий (8) ошибки наблюдения не выйдут из линейных зон $|\varepsilon_i(t)| \le 1/l_i$, в которых уравнения (5)–(6) и их производные принимают вид

$$\dot{\varepsilon}_i = \eta_i(t) - m_i l_i \varepsilon_i, \ddot{\varepsilon}_i = \dot{\eta}_i(t) - m_i l_i \dot{\varepsilon}_i,\ i = 1, 2.$$

Из данных уравнений следует, что переменные состояния $\varepsilon_i (t)$, $\dot{\varepsilon}_i(t)$ сойдутся в заданные области (7) за конечное время $t_0 : 0 \le t_0 << T$ при выполнении условий

$$l_i \ge \mathrm{H}_i / (m_i \delta_i) \Rightarrow \varepsilon_i \dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_i(\eta_i(t) - m_i l_i \varepsilon_i) \le \left|\varepsilon_i\right|(\mathrm{H}_i - m_i l_i \left|\varepsilon_i\right|) < 0;$$

(9) $\quad l_i \ge \bar{\mathrm{H}}_i / (m_i \Delta_i) \Rightarrow \dot{\varepsilon}_i \ddot{\varepsilon}_i = \dot{\varepsilon}_i(\dot{\eta}_i(t) - m_i l_i \dot{\varepsilon}_i) \le$

$$\le \left|\dot{\varepsilon}_i\right|(\bar{\mathrm{H}}_i - m_i l_i \left|\dot{\varepsilon}_i\right|) < 0,\ i = 1, 2.$$

Одновременное выполнение условий (8)–(9) обеспечит решение поставленной задачи оценивания возмущений (7).

Пример 2. Рассмотрим варианты, когда в системе (1) измеряется только одна переменная состояния и в правой части дифференциального уравнения для измеряемой переменной внешнее возмущение отсутствует.

Если в системе (1)–(2) измеряется только выходная переменная $x_1 (t)$ и $\eta_1 (t) \equiv 0$, то тогда, аналогично (4), можно восстановить другую переменную состояния $x_2 (t)$ с помощью редуцированного наблюдателя, построенного на основе первого уравнения системы (1) в виде

(10) $\quad \dot{z}_1 = a_{11} x_1 + v_1,\ v_1 = m_1 \mathrm{sat}(l_1 \varepsilon_1),\quad \varepsilon_1 = x_1 - z_1,\ \dot{\varepsilon}_1 = a_{12} x_2 - v_1.$

После анализа виртуальной системы

$$|\varepsilon_1| > 1/l_1 : \dot{\varepsilon}_1 = a_{12}x_2 - m_1 \mathrm{sign}(\varepsilon_1);`$$

$$|\varepsilon_1| \le 1/l_1 : \dot{\varepsilon}_1 = a_{12}x_2 - m_1 l_1 \varepsilon_1, \quad \ddot{\varepsilon}_1 = a_{12}\dot{x}_2 - m_1 l_1 \dot{\varepsilon}_1$$

получим неравенства для выбора параметров наблюдателя (10) аналогично (8)–(9) в виде

$$(11)\ m_1 > |a_{12}| X_2, \quad l_1 \ge \frac{|a_{12}|}{m_1} \max\left\{\frac{X_2}{\delta_1}, \frac{\bar{X}_2}{\Delta_1}\right\},$$

что обеспечивает

$$|\varepsilon_1(t)| \le \delta_1 \Rightarrow |\dot{\varepsilon}_1(t)| = |a_{12}x_2 - v_1| \le \Delta_1$$

и, следовательно,

$$(12)\ a_{12}x_2 \approx v_1 \pm \Delta_1 \Rightarrow x_2(t) \approx v_1 / a_{12}, \ \ t_0 < t \le T.$$

Таким образом, показано, что методика оценивания внешних возмущений, представленная в первом примере, применена для восстановления неизмеряемой переменной состояния $x_2(t)$. Ее оценкой является корректирующее воздействие редуцированного наблюдателя (10), построенного на основе дифференциального уравнения измеряемой переменной $x_1(t)$, на которое возмущение не действует. Заметим, что второе уравнение системы (2), которое зависит от возмущения, не использовалось в явном виде для решения задачи наблюдения, поэтому дополнительная идентификация $\eta_2(t) \ne 0$ не потребовалась. Основное ограничение данного подхода состоит в том, что на этапе проектирования надо получить оценки X_2, $\bar{X}_2$ (3), необходимые для настройки наблюдателя (10), с учетом конкретного закона управления и допустимой области начальных значений переменных состояния.

Следует отметить, что в данном случае стандартный редуцированный наблюдатель, который строится на основе дифференциального уравнения неизмеряемой переменной [16], в узкой постановке физически нереализуем, так как второе уравнение системы (1) находится под воздействием внешнего неконтролируемого возмущения.

Обратим внимание, что при измерениях $x_1(t)$ и $\eta_1(t) \equiv 0$ в системе (1) возмущение $\eta_2(t)$ действует по одну каналу с управлением u (т.е. является согласованным) и не влияет на возможность восстановить $x_2\,(t)$. Это означает, что с помощью указанной методики можно восстановить с заданной точностью и переменную u состояния $x_2\,(t)$, и возмущение $\eta_2\,(t) \neq 0$ без наличия его динамической модели, если использовать полноразмерный наблюдатель второго порядка

$$
\begin{aligned}
&\dot{z}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}z_2 + v_1,\\
&\dot{z}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}z_2 + bu + v_2.
\end{aligned} \tag{13}
$$

С учетом (1), (13) система относительно ошибок наблюдения $\varepsilon_i = x_i - z_i \in R$ принимает вид

$$
\begin{aligned}
&\dot{\varepsilon}_1 = a_{12}\varepsilon_2 - v_1,\ v_1 = m_1\mathrm{sat}(l_1\varepsilon_1),\\
&\dot{\varepsilon}_2 = a_{22}\varepsilon_2 + \eta_2(t) - v_2,\ v_2 = m_2\mathrm{sat}(l_2 v_1 / a_{12}),\\
&m_i, l_i = \mathrm{const} > 0,\quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{14}
$$

Выбором параметров корректирующих воздействий в системе (14) последовательно, сверху вниз, обеспечивается стабилизация ошибок наблюдения и их производных:

$$
\begin{aligned}
&|\varepsilon_1(t)| \le \delta_1 \Rightarrow |\dot{\varepsilon}_1(t)| = |a_{12}\varepsilon_2 - v_1| \le \Delta_1 \Rightarrow\\
&\Rightarrow |\varepsilon_2(t)| \le \delta_2 \Rightarrow |\dot{\varepsilon}_2(t)| = |a_{22}\varepsilon_2 + \eta_2 - v_2| \le \Delta_2 \Rightarrow\\
&\Rightarrow x_2(t) \approx z_2(t) \pm \delta_2,\ \ \eta_2(t) \approx v_2(t) \pm (|a_{22}|\delta_2 + \Delta_2).
\end{aligned} \tag{15}
$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда измеряется только $x_2\,(t)$ и $\eta_2\,(t) \equiv 0$. Условием наблюдаемости регулируемой переменной $x_1\,(t)$ является требование $a_{21} \neq 0$. Тогда можно восстановить $x_1\,(t)$ с помощью корректирующего воздействия редуцированного наблюдателя, построенного на основе второго уравнения системы (1) в виде, аналогичном (10), а именно:

$$
\dot{z}_2 = a_{22}x_2 + bu + v_2,\ \ v_2 = m_2\mathrm{sat}(l_2\varepsilon_2). \tag{16}
$$

Виртуальная система относительно ошибки наблюдения $\varepsilon_2 = x_2 - z_2$ при использовании редуцированного наблюдателя (16) примет следующий вид:

$$
\varepsilon_2 = x_2 - z_2,\ \ \dot{\varepsilon}_2 = a_{21}x_1 - v_2.
$$

Выполнение условий, аналогичных (12), обеспечит

$$
x_1(t) \approx v_2 / a_{21},\ \ t_0 < t \le T.
$$

Кроме того, с помощью полноразмерного наблюдателя, аналогичного (13), можно восстановить и $x_1(t)$, и $\eta_1(t) \neq 0$.

Пример 3. Если в системе (1) измеряется только $x_1(t)$, но $\eta_1(t) \neq 0$, то в узкой постановке, т.е. без ввода динамической модели $\eta_1(t)$, решить задачу оценивания по отдельности переменной $x_2(t)$ и внешних возмущений нельзя.

И, наоборот, если только $x_2(t)$ измеряется, но $\eta_2(t) \neq 0$, то даже при $a_{21} \neq 0$ в узкой постановке решить задачу оценивания по отдельности и $x_1(t)$, и $\eta_1(t) \neq 0$ не представляется возможным.

В следующем разделе представленные результаты используются для формализации условий наблюдаемости выходной регулируемой переменной одноканальной системы произвольного порядка.

3. Основной результат

Рассмотрим линейную конечномерную систему произвольного порядка с аффинными возмущениями, представимую в треугольной форме «вход – выход»

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{i,i+1}x_{i+1} + \eta_i(x_1, x_2, \ldots, x_i, t), \;\; i = \overline{1, n-1}; \\ &\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + \eta_n(x, t) + bu, \end{aligned} \tag{17}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in X \subset R^n$ – вектор состояния; $x_1 \in R$ – регулируемый выход; $u \in R$ – управление; a_{ij}, b – известные константы; аддитивные члены η_i содержат все неопределенности модели объекта и внешние возмущения. Предполагается, что не все уравнения системы (17) содержат неопределенные члены и есть уравнения, в которых все параметры известны. Треугольный состав аргументов функций $\eta_i(x_1, x_2, \ldots, x_i, t)$, $i = 1, \ldots, n-1$, означает, что при приведении системы (17) к каноническому виду выход x_1 от входа u с ненулевым коэффициентом усиления будет отделен n интеграторами. Другими словами, относительный порядок системы (17) при приведении ее к каноническому виду не изменится и останется равным n [7, 12].

Следует отметить, что матрица коэффициентов системы (17) не является треугольной. Здесь термин «треугольная система» имеет следующий смысл: все $a_{ij} = 0$, где $j = i + 2, i + 3, \ldots, n$. При этом элементы a_{ij}, где $i \geq j$, $i = 1, \ldots, n$, могут принимать любые значения (и нулевые, и ненулевые). В контексте решаемой проблемы необходимо, чтобы $a_{i1} \neq \vec{0}$, т.е. в первом столбце матрицы коэффициентов системы должны быть ненулевые элементы.

Для треугольных систем вида (17) выполнение условий

(18) $a_{i,i+1} \neq 0,\ \ i = \overline{1, n-1};\ \ b \neq 0$

является необходимым и достаточным для того, чтобы при отсутствии возмущений система (17)–(18) была наблюдаема относительно выхода, а выход управляем относительно входа. Без детализации закона управления будем полагать, что в процессе управления все внутренние и внешние сигналы в замкнутой системе (17) ограничены, для границ их изменения используются обозначения, аналогичные (3).

В узкой постановке, когда идентификация неизвестных параметров и построение генераторов внешних возмущений не предусмотрены или невозможны, имеются два варианта синтеза обратной связи в системе (17)–(18), обеспечивающей отслеживание выходной переменной $x_1(t)$ заданного сигнала $g(t)$.

Первый вариант [7]: при выполнении условий $\eta_i \in C^{n-i}$, $i = 1, \ldots, n-1$, и $g(t) \in C^n$ система (17) представима в каноническом базисе смешанных переменных относительно ошибки слежения $x_1(t) - g(t)$. Для оценивания смешанных переменных достаточно измерений $x_1(t)$ и $g(t)$, при этом с помощью динамической обратной связи можно обеспечить

$$\lim_{t \to \infty} x_1(t) = g(t).$$

Второй вариант [2]: если функции $\eta_i(t)$, $\dot{g}(t)$ не являются гладкими, то при измерении $x_1, \ldots, x_n$ и $g(t)$ с помощью статической обратной связи можно обеспечить заданную точность ошибки слежения. При неполном комплекте датчиков возможность оценивания переменных состояния, необходимых для синтеза обратной связи, зависит от структуры наблюдаемости системы (17) относительно измеряемых переменных и от отсутствия возмущений $\eta_j(t) \equiv 0$ в конкретных j-х уравнениях.

Пусть для системы (17)–(18) применяется первый вариант синтеза обратной связи, но при этом регулируемая переменная $x_1(t)$ не измеряется. Сформулируем условия ее наблюдаемости в узкой постановке независимо от внешних возмущений, опираясь на мотивирующие примеры 2 и 3.

Лемма. Если в системе (17)–(18) найдется хотя бы одно i-е уравнение, $i = 2, \ldots, n$, такое что:

1) $\eta_i(t) \equiv 0$, $a_{i1} \neq 0$;
2) $x_{i+1}(t)$ измеряется ($x_{n+1}(t) \equiv 0$);
3) $x_i(t)$ измеряется или наблюдается независимо от возмущений;
4) для всех $j = 2, \ldots, i-1$ выполняются условия: или $x_j(t)$ измеряется (или наблюдается независимо от возмущений), или $a_{ij} = 0$,

то тогда для оценивания $x_1(t)$ можно построить физически реализуемый редуцированный наблюдатель состояния.

Доказательство. Условия, сформулированные в лемме, продиктованы треугольным видом рассматриваемой системы (17)–(18). В самом простом случае, когда в i-м уравнении ($i = 2, \ldots, n$) выполняются первые два условия леммы, $x_i(t)$ измеряется, а также измеряются переменные $x_2(t), \ldots, x_{i-1}(t)$ (или $a_{i2} = 0, \ldots, a_{i,i-1} = 0$), то тогда оценку $x_1(t)$ можно получить с помощью корректирующего воздействия наблюдателя первого порядка, построенного на основе i-го уравнения системы (17) аналогично (16). Если $i \neq n$, то этот наблюдатель имеет вид

$$\dot{z}_i = a_{i2}x_2 + \ldots + a_{i,i+1}x_{i+1} + v_i, \quad z_i \in R,$$

если $i = n$, то тогда

$$\dot{z}_i = a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ii}x_i + bu + v_i, \quad z_i \in R.$$

В обоих случаях относительно ошибки слежения $\varepsilon_i = x_i - z_i$ получим виртуальную систему

$$\dot{\varepsilon}_i = a_{i1}x_1 - v_i, \;\; v_i = m_i \mathrm{sat}(l_i\varepsilon_i), \;\; m_i, l_i = \mathrm{const} > 0.$$

При выполнении условий, аналогичных (11), за конечное время обеспечивается стабилизация ошибки слежения и ее производной, а корректирующее воздействие с заданной точностью воспроизводит неизмеряемую переменную $x_1(t)$:

$$\left|\varepsilon_i(t)\right| \le \delta_i \Rightarrow \left|\dot{\varepsilon}_i(t)\right| = \left|a_{i1}x_1 - v_i\right| \le \Delta_i \Rightarrow x_1(t) \approx v_i / a_{i1}, \;\; t_0 < t \le T.$$

Условия построения физически реализуемых наблюдателей для неизмеряемых переменных, требуемых для восстановления $x_1(t)$, аналогичны сформулированным в лемме. Например, если в системе (17)–(18) $x_2(t)$ измеряется, то при выполнении условий $\eta_j(t) \equiv 0$, $a_{j1} = 0$, $j = 2, \ldots, k$, $k \le i - 1$, на основе j-х уравнений можно построить физически реализуемый наблюдатель для оценивания $x_3(t), \ldots, x_{k+1}(t)$ аналогично (13)–(15) и т.п.

Лемма доказана.

Как следствие из леммы, выделим некоторые частные случаи системы (17)–(18), в которых используемый подход к оцениванию выходной неизмеряемой переменной $x_1(t)$ неприменим при любом составе измеряемых переменных:

– если все $\eta_i(t) \ne 0$, $i = 2, \ldots, n$, то тогда независимо от наличия ненулевых элементов в первом столбце матрицы коэффициентов системы $a_{i1} \ne 0$ в узкой постановке восстановить $x_1(t)$ нельзя;

– если система (17)–(18) является канонической и нейтральной, т.е. все $a_{ij} = 0$, $i \ge j$, $i = 1, \ldots, n$, то тогда независимо от наличия уравнений без неопределенностей, где $\eta_i(t) \equiv 0$, восстановить $x_1(t)$ нельзя.

Заметим, что в случае стандартной канонической системы при действии возмущений, а именно

$$\dot{x}_i = x_{i+1} + \eta_i(x_1, x_2, \ldots, x_i, t), \;\; i = \overline{1, n-1};$$
$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + \eta_n(x,t) + bu,$$

условия, при выполнении которых для оценивания $x_1(t)$ можно построить физически реализуемый редуцированный наблюдатель состояния, имеют вид: $\eta_n(t) \equiv 0$, $a_{n1} \ne 0$; $x_n(t)$ измеряется или наблюдается независимо от возмущений; для всех $j = 2, \ldots, n - 1$ выполняются условия: или $x_j(t)$ измеряется (или наблюдается независимо от возмущений), или $a_{nj} = 0$.

Если условия леммы выполнены и оценка $x_1(t)$ может быть получена, то тогда для второго варианта синтеза системы слежения условия построения физически реализуемых наблюдателей для остальных неизмеряемых переменных относительно измеряемых (наблюдаемых) переменных проверяются аналогично. В частности, если $\eta_1(t) \equiv 0$, то тогда имеется возможность оценивания $x_2(t)$; если при этом $\eta_2(t) \equiv 0$, то и $x_3(t)$ и т.д.

В качестве примера применимости предлагаемого подхода рассмотрим две системы вида (17)–(18), которые описывают уравнения движений однозвенного манипулятор с учетом динамики исполнительного устройства – двигателя постоянного тока (ДПТ).

При эластичном типе сочленения манипулятора с валом ДПТ имеем динамическую систему 5-го порядка вида [17]:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2, \\
&\dot{x}_2 = \bar{a}_{21}(x_3 - x_1) - \bar{a}_{22}\sin x_1 + \eta(t), \\
(19)\quad &\dot{x}_3 = x_4, \\
&\dot{x}_4 = -a_{43}(x_3 - x_1) - a_{44}x_4 + a_{45}x_5, \\
&\dot{x}_5 = -\bar{a}_{54}x_4 - \bar{a}_{55}x_5 + bu,
\end{aligned}$$

где x_1, x_2 – угловые положение и скорость манипулятора; x_3, x_4 – угловые положение и скорость вала ДПТ; x_5 – ток якоря; u – напряжение питания якорной цепи; a_{ij}, b – конструктивные параметры (черта сверху означает, что данный параметр точно не известен); $\eta(t) \neq 0$.

Как видим, в системе (19) условия леммы выполнены при $i = 4$ и измерениях $x_3(t)$, $x_4(t)$, $x_5(t)$, тогда наблюдатель первого порядка, построенный на основе четвертого уравнения системы (19), даст оценку $x_1(t)$. Минимальный набор для оценивания $x_1(t)$ – датчики $x_3(t)$, $x_5(t)$, тогда наблюдатель второго порядка, построенный на основе третьего и четвертого уравнений системы (19), даст оценки и $x_4(t)$, и $x_1(t)$.

Измерения $x_3(t)$, $x_5(t)$ являются минимальным набором при отсутствии датчика $x_1(t)$ и для второго варианта синтеза, так как на основе первого уравнения системы (19) можно построить редуцированный наблюдатель для оценивания $x_2(t)$. Общий порядок наблюдателя при этом равен трем. Если $x_1(t)$ измеряется, то при дополнительных измерениях $x_3(t)$ с помощью наблюдателя третьего порядка можно получить оценки остальных переменных инвариантно к возмущениям.

При жестком типе сочленения манипулятора с валом двигателя учитываемую динамику исполнительного устройства можно сократить и в качестве уравнений движения рассматривать систему третьего порядка вида

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ (20)\quad &\dot{x}_2 = \bar{c}_{21}\sin x_1 - \bar{c}_{22}x_2 + \bar{c}_{23}x_3 + \eta(t), \\ &\dot{x}_3 = -\bar{c}_{32}x_2 - \bar{c}_{33}x_3 + bu, \end{aligned}$$

где x_1, x_2 – угловые положение и скорость манипулятора; x_3 – ток якоря; c_{ij}, b – конструктивные параметры (черта сверху означает, что данный параметр точно не известен); $\eta(t) \neq 0$.

Как видим, в системе (20) условия леммы не выполнены. Если регулируемая переменная $x_1(t)$ не измеряется, то в узкой постановке нельзя получить ее оценку по измерениям $x_2(t)$, $x_3(t)$. Даже при отсутствии неопределенностей, а именно c_{21}, c_{22}, c_{23}, $\eta(t) = 0$, с помощью наблюдателя первого порядка можно восстановить $c_{21} \sin x_1$. Но при этом нельзя однозначно определить положение манипулятора, так как данная функция не является монотонной и не имеет обратной на всей области определения.

Таким образом, для первого варианта синтеза системы слежения на основе модели объекта (20) требуется датчик $x_1(t)$. Для второго варианта синтеза следящей системы минимальный набор состоит из двух датчиков $x_1(t)$, $x_3(t)$, при этом на основе первого уравнения системы (20) можно построить редуцированный наблюдатель для оценивания $x_2(t)$.

Пример построения редуцированного наблюдателя для многозвенного манипулятора, движения которого описываются матричными уравнениями типа (20), представлен в работе [5].

Результаты моделирования замкнутых систем (19), (20) с различными комплектами датчиков и с соответствующими редуцированными наблюдателями подтвердили их работоспособность [1, 6, 7].

Литература

1. АНТИПОВ А.С., КРАСНОВ Д.В. *Синтез системы слежения для однозвенного бездатчикового манипулятора при воздействии негладких возмущений* // Проблемы управления. – 2022. – №3. – С. 3–15.
2. АНТИПОВ А.С., КРАСНОВА С.А., УТКИН В.А. *Синтез инвариантных нелинейных одноканальных систем слежения с сигмоидальными обратными связями с обеспечением заданной точности слежения* // Автоматика и телемеханика. – 2022. –№1. – С. 40–66.
3. БУСУРИН В.И., МЕДВЕДЕВ В.М., КАРАБИЦКИЙ А.С. *Особенности модульного построения систем контроля и диагностики инерциальных систем управления* // Труды МАИ. – 2017. – №92. – С. 19.
4. КОКУНЬКО Ю.Г., КРАСНОВА С.А., УТКИН В.А. *Каскадный синтез дифференциаторов с кусочно-линейными корректирующими воздействиями* // Автоматика и телемеханика. – 2021. – №7. – С. 37–68.
5. КРАСНОВ Д.В. *Синтез наблюдателя пониженного порядка для полноприводной электромеханической системы* // Управление большими системами. – 2022. – Вып. 96. – С. 31–48.
6. КРАСНОВ Д.В., АНТИПОВ А.С. *Синтез двухконтурного наблюдателя в задаче управления однозвенным манипулятором в условиях неопределенности* // Проблемы управления. – 2021. – №4. – С. 23–33.
7. КРАСНОВ Д.В., УТКИН А.В. *Синтез многофункциональной системы слежения в условиях неопределенности* // Управление большими системами. – 2017. – Вып. 69. – С. 29–49.
8. КРАСНОВА С.А. *Оценивание внешних возмущений на основе виртуальных динамических моделей* // Управление большими системами. – 2018. – Вып. 76. – С. 6–25.
9. КРАСНОВА С.А., УТКИН А.В. *Анализ и синтез минимально-фазовых нелинейных SISO систем при действии внешних*

несогласованных возмущений // Проблемы управления. – 2014. – №6. – С. 22–30.
10. МАЛИКОВ А.И. *Синтез наблюдателей состояния и неизвестных входов для нелинейных липшицевых систем с неопределенными возмущениями* // Автоматика и телемеханика. –2018. – №3. – С. 21–43.
11. НИКИФОРОВ В.О. *Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений*. – СПб.: Наука, 2003. – 282 с.
12. УОНЕМ У.М. *Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход*. – М.: Наука, 1980. – 376 с.
13. УТКИН В.А., УТКИН А.В. *Задача слежения в линейных системах с параметрическими неопределенностями при неустойчивой нулевой динамике* // Автоматика и телемеханика. – 2014. – №9. – С. 62–81.
14. ФОМИЧЕВ В.В., ВЫСОЦКИЙ А.О. *Каскадный метод построения наблюдателей для систем с неопределенностью* // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, №11. – С. 1533–1539.
15. LEVANT A. *Robust exact differentiation via sliding mode technique* // Automatica. – 1998. – Vol. 34, Iss. 3. – P. 379–384.
16. LUENBERGER D.B. *Observers of multivariable system*s // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1966. – Vol. 11, No. 2. – P. 190–197.
17. SPONG M., HUTCHINSON S., VIDYASAGAR M. *Robot Modeling and Control*. – New York: Wiley, 2005. – 496 p.

CONSTRUCTION OF REDUCED STATE OBSERVERS FOR SYSTEMS WITH AFFINE DISTURBANCES

Dmitry Krasnov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, researcher (dim93kr@mail.ru)

Abstract: The object of study is linear single-channel systems with affine parametric and external disturbances, presented in the so-called triangular form "input-output". The relative degree in control is equal to the dimension of the state vector and does not change upon transition to the canonical form "input-output" under the assumption of smoothness of external disturbances. It is known that for such systems, only by measuring the output variable, it is possible to construct an observer *of mixed variables and restore linear combinations of state variables and external influences with a given accuracy. The estimates obtained are sufficient for the synthesis of dynamic feedback, which provides tracking of the output variable of a given signal. The paper considers an important practical case when, for a certain set of sensors, the output (adjustable) variable is not measured. It is necessary to design a reduced state observer for its evaluation in order to proceed to the construction of a mixed variables observer. First, motivating examples of second-order systems with different dimensions and different channels of action of external disturbances are considered. It is shown that when measuring both state variables with the help of piecewise linear corrective actions of the state observer, it is possible to restore external disturbances by their influence on the system (i.e., without using a dynamic disturbance generator). Conditions are formulated under which this principle can also be used in a system with external disturbances and incomplete measurements to restore an unmeasured state variable. The results obtained are extended to finite-dimensional single-channel systems of arbitrary order with affine disturbances, in which the output variable is not measured. The conditions of existence and the method of synthesis of a reduced observer with a piecewise-linear corrective action, which gives an estimate of the output variable, are formalized. The developed approach does not require the identification of external disturbances and solves the problem of observing the output variable with any given accuracy.*

Keywords: linear systems, disturbances, reduced state observer, piecewise-linear correction.

УДК 62.50
ББК 32.817
DOI: 10.25728/ubs.2023.101.1

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.А. Уткиным.

Поступила в редакцию 10.12.2022.
Опубликована 31.01.2023.