МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ИНСТИТУТОВ РЫНКОВ ЖИЛЬЯ НА ОСНОВЕ СТЕПЕННЫХ, ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ИЗДЕРЖЕК

Гераськин М. И.[1], Иванова М. В.[2]
(*Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королёва, Самара*)

Представлена система условий оптимальности агентов рынка жилья (риелтора, банка и страховщика) при степенных, экспоненциальных и логарифмических функциях издержек, соответствующих различным типам эффекта масштаба. Представлены результаты численных экспериментов, демонстрирующие характер взаимозависимостей цен на этом рынке при различных видах функций. В отличие от исследования системы «риелтор – банк – страховщик» на основе линейных функций издержек данная работа представляет следующие выводы: во-первых, в случае, когда все агенты имеют вогнутые функции издержек, цена недвижимости, процентная ставка по ипотечному кредиту и тариф страхования ниже, чем в случае, когда агенты имеют выпуклые функции издержек; во-вторых, рост ставки внутрисистемной комиссии приводит к росту цены того агента, который платит комиссию, и снижению цены того агента, который ее получает; в-третьих, увеличение ставки комиссии ведет к более резкому снижению цены агента в том случае, когда он имеет выпуклую функцию издержек, а контрагент – вогнутую, чем в противном случае. При сравнении эффективности применения разных типов функций издержек было выявлено, что логарифмические и экспоненциальные функции дают большую точность, чем степенные.

Ключевые слова: оптимальная стратегия, риелтор, банк, страховщик.

1. Введение

Исследуется роль системы «риелтор – банк – страховщик» в процессе ценообразования на рынке жилья. В случае степенных, экспоненциальных и логарифмических функций издержек этих агентов рынка цены на жилье могут изменяться более или менее резко в результате повышения процентных ставок банковских кредитов и страховых тарифов. В свою очередь, изме-

[1] *Михаил Иванович Гераськин, д.э.н., профессор* (*innovation@ssau.ru*).
[2] *Мария Владимировна Иванова, студент 2 курса магистратуры* (*ivanova.maria.ami@gmail.com*).

нение цен жилья также приводит к изменениям цен банковских и страховых услуг [13, 16, 17].

В системе агенты рынка жилья взаимодействуют между собой. При приобретении жилья у покупателя есть два варианта: использование собственных наличных сбережений или средств ипотечного кредита. Во втором случае банк может предложить кредит по сниженной ставке, но необходимым условием для этого будет являться страхование покупателем объекта залога кредита. Поэтому рассматриваемые товар (недвижимость) и услуги (ипотечный кредит и страхование) могут являться комплементарными, требующими их одновременного совместного использования. Более того, эти блага усиливают полезность от их одновременного потребления [14].

В децентрализованной системе агенты принимают решения независимо друг от друга, стремясь максимизировать собственную прибыль индивидуально [18]. В централизованной системе для выполнения условия индивидуальной рациональности, т.е. когда агентам выгодно участие в рассматриваемой системе, необходимо перераспределение прибыли или выручки.

При моделировании оптимальных стратегий фирм исследователи зачастую базируются на линейных функциях издержек [2, 3, 7], что, как правило, снижает адекватность модели, поскольку реальные процессы не линейны; применение степенных функций [1] делает модели более точными. В нашей работе ставится цель расширить диапазон видов функций издержек, обогащая инструментарий исследования и позволив приблизить результаты моделирования к реальной экономике.

2. Методы

Рассмотрим функции прибыли агентов децентрализованной системы «риелтор – банк – страховщик» в общем виде [15]:

(1) $$\pi_k = A_k Q_k^{B_k+1}\left[(1-\alpha_k)^{B_k+1} + \bar{\gamma}_k \alpha_k^{B_k+1}\right] - C_k(Q_k),\ k = 1, 2, 3,$$
$$\bar{\gamma}_k = (1+u_k)\gamma_k,$$

где A_k, B_k – коэффициенты функции спроса k-го агента вида $p_k = A_k Q_k^{B_k}, A_k > 0,\ B_k < 0, |B_k| < 1, Q_k > 0$, и введены следующие обозначения k = 1 – риелтор, k = 2 – банк, k = 3 – страховщик; γ_k – отношение цены товара (услуги) k-го агента внутри системы к цене вне этой системы, т.е. в случае свободной конкуренции; $C_k(Q_k)$ – функция издержек k-го агента; u_k[3] – коэффициент распределения выручки k-го агента; Q_k – объем продаж k-го агента системы; α_k – коэффициент внутрисистемного оборота k-го агента (доля продаж агента внутри системы к его общему объему продаж).

В статье [15] эта функция рассмотрена для случая линейных функций издержек:

$$C_k = c_k Q_k,$$

где c_k – предельные издержки k-го агента.

Далее будем рассматривать функцию (1) с учетом нелинейной зависимости издержек от объема продаж, т.е. с учетом эффекта расширения масштаба. Обозначим рассматриваемые случаи функций издержек следующим образом:

– степенная функция $t = 1$,
– логарифмическая функция $t = 2$,
– экспоненциальная функция $t = 3$.

Тогда в этих случаях зависимости издержек от объемов продаж примут вид

$$C_{k1} = c_{k1} Q_k^{\rho_k},\ C_{k2} = c_{k2} lnQ_k + d_{k2},\ C_{k3} = c_{k3} e^{\delta_{k3} Q_k}.$$

При $t = 1$ функция (1) имеет вид

$$\pi_k = A_k Q_k^{B_k+1}\left[(1-\alpha_k)^{B_k+1} + \bar{\gamma}_k \alpha_k^{B_k+1}\right] - c_{k1} Q_k^{\rho_k}, \tag{2}$$

где ρ_k – коэффициент масштаба k-го агента, при $\rho_k \in (1, 2)$ имеет место отрицательный эффект масштаба (выпуклая функция), при $\rho_k \in (0, 1)$ – положительный эффект масштаба (вогнутая функция).

При t= 2 функция (1) имеет вид

$$\pi_k = A_k Q_k^{B_k+1}\left[(1-\alpha_k)^{B_k+1} + \bar{\gamma}_k \alpha_k^{B_k+1}\right] - c_{k2} lnQ_k - d_{k2}. \tag{3}$$

При $t = 3$ функция (1) имеет вид

[3] *В частности: u_1 – доля товарооборота риелтора, перераспределяемая между ним и банком; $u_2 = u_{21} + u_{23}$ – доля дохода банка, перераспределяемая с риелтором и страховщиком, u_{21} – доля дохода банка, перераспределяемая между ним и риелтором; u_{23} – доля дохода банка, перераспределяемая между ним и страховщиком; u_3 – доля товарооборота страховщика, перераспределяемая между ним и банком.*

(4) $\pi_k = A_k Q_k^{B_k+1}\left[(1-\alpha_k)^{B_k+1} + \bar{\gamma}_k \alpha_k^{B_k+1}\right] - c_{k3}e^{\delta_{k3}Q_k}$.

Тогда задачи агентов в децентрализованной системе представляются в виде

$$\max_{Q_k>0,\alpha_k\in(0;1)} \pi_k,$$

где агенты находят оптимальные объемы продаж и оптимальные доли продаж внутри системы.

3. Теоретический анализ модели

Для нахождения оптимального объема продаж и оптимального коэффициента внутрисистемного оборота проанализируем целевые функции (2)–(4). Рассмотрим случай со степенной зависимостью издержек от объема продаж и запишем условие максимума первого порядка (индекс k опущен):

$$\pi'_Q = A(B+1)Q^B[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] - c\rho Q^{\rho-1} = 0,$$
$$\pi'_\alpha = A(B+1)Q^{B+1}[-(1-\alpha)^B + \bar{\gamma}\alpha^B] = 0.$$

Так как $Q > 0$, то из второго уравнения следует:

$$-(1-\alpha)^B + \bar{\gamma} * \alpha^B = 0,$$

тогда если обозначить $\bar{\gamma}^{-\frac{1}{B}} \equiv \phi$, то оптимальная доля внутрисистемного оборота вычисляется по формуле

$$\alpha^* = \frac{\phi}{1+\phi}.$$

Подставим в первое уравнение $\alpha^* = \frac{\phi}{1+\phi}$, получим уравнение, решение которого определяет оптимальный объем Q^*:

(6) $A(B+1)Q^{*B}\left[\left(1-\frac{\phi}{1+\phi}\right)^{B+1} + \bar{\gamma}\left(\frac{\phi}{1+\phi}\right)^{B+1}\right] - c\rho Q^{*\rho-1} = 0.$

Представленные выше формулы справедливы в случае, когда агенты взаимодействуют друг с другом, т.е. $\gamma > 1$. Но в случае $\gamma = 1$ агенты системы не взаимодействуют и $\alpha^* = 0$.

Таким образом, оптимальный объем продаж находится из уравнения (6), а оптимальный коэффициент внутрисистемного оборота – из следующего выражения:

(7) $\alpha^* = \begin{cases} 0, \text{при } \gamma = 1, \\ \frac{\phi}{1+\phi}, \text{при } \gamma > 1. \end{cases}$

Матрица Гессе для целевой функции (2) имеет вид

$H = \begin{pmatrix} \pi''_{QQ} & \pi''_{Q\alpha} \\ \pi''_{\alpha Q} & \pi''_{\alpha\alpha} \end{pmatrix}.$

Элементы матрицы рассчитываются следующим образом:

$\pi''_{QQ} = A(B+1)BQ^{B-1}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] - c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2}$,

$\pi''_{Q\alpha} = \pi''_{\alpha Q} = A(B+1)^2 Q^B[-(1-\alpha)^B + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}]$,

$\pi''_{\alpha\alpha} = A(B+1)BQ^{B+1}[(1-\alpha)^{B-1} + \bar{\gamma}\alpha^{B-1}]$.

Целевая функция (2) примет максимальное значение при соблюдении следующих условий:

– определитель первого порядка матрицы Гессе:

$$\pi''_{QQ} = A(B+1)BQ^{B-1}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] - c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2} < 0 \tag{8}$$

– определитель второго порядка матрицы Гессе:

$$\pi''_{QQ}\pi''_{\alpha\alpha} - (\pi''_{Q\alpha})^2 = (A^2(B+1)^2B^2Q^{2B}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] - c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2})[(1-\alpha)^{B-1} + \bar{\gamma}\alpha^{B-1}] - A^2(B+1)^4Q^{2B}[-(1-\alpha)^B + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}]^2 > 0\,. \tag{9}$$

В статье [15] было доказано, что

$A(B+1)BQ^{B-1}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] < 0.$

Тогда если $\rho > 1$, эффект расширения масштаба отрицательный, то $c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2} > 0$, поэтому

$A(B+1)BQ^{B-1}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] - c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2} < 0,$

значит, условие (8) выполняется.

Если $\rho < 1$, эффект расширения масштаба положительный, то $c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2} < 0$, поэтому условие (8) верно, если

$c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2} > A(B+1)BQ^{B-1}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}].$

В статье [15] было доказано, что

$(A^2(B+1)^2B^2Q^{2B}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}])[(1-\alpha)^{B-1} + \bar{\gamma}\alpha^{B-1}] - A^2(B+1)^4Q^{2B}[-(1-\alpha)^B + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}]^2 > 0.$

Тогда если $\rho < 1$, эффект расширения масштаба положительный, то $c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2} < 0$, поэтому

$(A^2(B+1)^2B^2Q^{2B}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] - c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2})[(1-\alpha)^{B-1} + \bar{\gamma}\alpha^{B-1}] - A^2(B+1)^4Q^{2B}[-(1-\alpha)^B + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}]^2 > 0,$

следовательно, условие (9) выполняется.

Если $\rho > 1$, эффект расширения масштаба отрицательный, то $c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2} > 0$, поэтому условие (9) верно, если

$c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2} < (A^2(B+1)^2B^2Q^{2B}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] - A^2(B+1)^4Q^{2B}[-(1-\alpha)^B + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}]^2/[(1-\alpha)^{B-1} + \bar{\gamma}\alpha^{B-1}].$

Обозначим: $x = A(B+1)BQ^{B-1}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] < 0$,
$y = (A^2(B+1)^2B^2Q^{2B}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] -$
$-A^2(B+1)^4Q^{2B}[-(1-\alpha)^B + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}]^2/[(1-\alpha)^{B-1} + \bar{\gamma}\alpha^{B-1}] > 0$.

Тогда представим варианты эффекта масштаба для $C(Q) = cQ^\rho$ в таблице 1.

Таблица 1. Условия максимума для степенной функции издержек

Условия	$\rho > 1$	$\rho < 1$
$\pi''_{QQ} < 0$	$\forall\rho > 1, \forall Q > 0$	$\forall\rho, Q\text{: } c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2} > x$
$\pi''_{QQ}\pi''_{\alpha\alpha} - \left(\pi''_{Q\alpha}\right)^2 > 0$	$\forall\rho, Q\text{: } c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2} < y$	$\forall\rho < 1, \forall Q > 0$

Для случая логарифмической зависимости издержек при проведении аналогичных преобразований для формулы (3) производная прибыли по α остается неизменной, а производная по Q дает уравнение для нахождения оптимального объема продаж Q*:

(10) $\pi'_Q = A(B+1)Q^B[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] - \frac{c}{Q} = 0$.

При расчете элементов матрицы Гессе для целевой функции (3) вторая производная по $Q\alpha$, равная второй производной по αQ, и вторая производная по $\alpha\alpha$ остаются неизменными, а вторая производная по QQ примет вид

$$\pi''_{QQ} = A(B+1)BQ^{B-1}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] + \frac{c}{Q^2}.$$

Целевая функция (3) примет максимальное значение при соблюдении следующих условий:

– определитель первого порядка матрицы Гессе:

(11) $\pi''_{QQ} = A(B+1)BQ^{B-1}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] + \frac{c}{Q^2} < 0$,

– определитель второго порядка матрицы Гессе:

(12) $\pi''_{QQ}\pi''_{\alpha\alpha} - \left(\pi''_{Q\alpha}\right)^2 =$
$= (A^2(B+1)^2B^2Q^{2B}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] + \frac{c}{Q^2})[(1-\alpha)^{B-1} +$
$+\bar{\gamma}\alpha^{B-1}] - A^2(B+1)^4Q^{2B}[-(1-\alpha)^B + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}]^2 > 0.$

Тогда так как $\frac{c}{Q^2} > 0$, то условие (11) верно, если

$$|A(B+1)BQ^{B-1}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}]| > \frac{c}{Q^2}.$$

При этом условие (12) будет соблюдаться:

$(A^2(B+1)^2B^2Q^{2B}[(1-\alpha)^{B+1}+\bar{\gamma}\alpha^{B+1}]+\frac{c}{Q^2})[(1-\alpha)^{B-1}+\bar{\gamma}\alpha^{B-1}]-$
$-A^2(B+1)^4Q^{2B}[-(1-\alpha)^B+\bar{\gamma}\alpha^{B+1}]^2>0.$

Для случая экспоненциальной зависимости издержек при проведении аналогичных преобразований для формулы (4) производная прибыли по α остается неизменной, по Q дает уравнение для нахождения оптимального объема продаж Q*:

(13) $\pi'_Q=A(B+1)Q^B[(1-\alpha)^{B+1}+\bar{\gamma}\alpha^{B+1}]-c\delta e^{\delta Q}=0.$

При расчете элементов матрицы Гессе для целевой функции (4) вторая производная по $Q\alpha$, равная второй производной по αQ, и вторая производная по $\alpha\alpha$ остаются неизменными, а вторая производная по QQ примет вид:

$$\pi''_{QQ}=A(B+1)BQ^{B-1}[(1-\alpha)^{B+1}+\bar{\gamma}\alpha^{B+1}]-c\delta^2e^{\delta Q}.$$

Целевая функция (4) примет максимальное значение при соблюдении следующих условий:

– определитель первого порядка матрицы Гессе:

(14) $\pi''_{QQ}=A(B+1)BQ^{B-1}[(1-\alpha)^{B+1}+\bar{\gamma}\alpha^{B+1}]-c\delta^2e^{\delta Q}<0,$

– определитель второго порядка матрицы Гессе:

(15) $\pi''_{QQ}\pi''_{\alpha\alpha}-\left(\pi''_{Q\alpha}\right)^2=$
$(A^2(B+1)^2B^2Q^{2B}[(1-\alpha)^{B+1}+\bar{\gamma}\alpha^{B+1}]-c\delta^2e^{\delta Q})[(1-\alpha)^{B-1}+\bar{\gamma}\alpha^{B-1}]-A^2(B+1)^4Q^{2B}[-(1-\alpha)^B+\bar{\gamma}\alpha^{B+1}]^2>0.$

Тогда так как $c\delta^2e^{\delta Q}>0$, условие (14) будет соблюдаться:

$$A(B+1)BQ^{B-1}[(1-\alpha)^{B+1}+\bar{\gamma}\alpha^{B+1}]-c\delta^2e^{\delta Q}<0.$$

Чтобы условие (15) было верным, необходимо, чтобы

$$c\delta^2e^{\delta Q}<A^2(B+1)^2B^2Q^{2B}[(1-\alpha)^{B+1}+\bar{\gamma}\alpha^{B+1}]-\\-\frac{A^2(B+1)^4Q^{2B}[-(1-\alpha)^B+\bar{\gamma}\alpha^{B+1}]^2}{[(1-\alpha)^{B-1}+\bar{\gamma}\alpha^{B-1}]}.$$

Очевидно, что для логарифмической функции элемент матрицы Гессе, зависящий от функции издержек (аналог $c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2}$) имеет вид $\frac{c}{Q^2}$, а для экспоненциальной $c\delta^2e^{\delta Q}$. Поэтому по аналогии представим таблицу 2 с вариантами эффекта масштаба для логарифмической и экспоненциальной функций издержек.

Таблица 2. Условия максимума для логарифмической и экспоненциальной функций издержек

Условия	Экспоненциальная функция	Логарифмическая функция
$\pi''_{QQ} < 0$	$\forall Q > 0$	$\forall$ Q: $\dfrac{c}{Q^2} < \lvert x \rvert$
$\pi''_{QQ}\pi''_{\alpha\alpha} - (\pi''_{Q\alpha})^2 > 0$	$\forall$Q: $c\delta^2 e^{\delta Q} < y$	$\forall Q > 0$

4. Результаты численных экспериментов

Проведем анализ возможных типов функций издержек для реальных агентов рынков жилья, ипотечного кредитования и ипотечного страхования. Было проведено сравнение точности аппроксимации с помощью степенной, логарифмической и экспоненциальной функций издержек.

Важно отметить, что для степенной функции в случае, если эмпирические данные не позволяют сформировать аппроксимирующую зависимость при помощи одной степенной функции, используются две степенные функции с различными коэффициентами эффекта масштаба.

На рис. 1 представлена зависимость себестоимости строительства от количества условных однокомнатных квартир (площадью 35 кв. м) для ГК «ПИК» [6] по 23 отчетным периодам (полугодиям) за 2007–2020 гг.; объем продаж риелтора рассчитан путем деления общей выручки фирмы на среднюю стоимость однокомнатной квартиры [9]. Все графики построены на основе данных таблицы 3.

Таблица 3. Данные о количестве проданных агентами рынка товаров и услуг и их себестоимости по периодам

№	Период	Количество однокомнат-ных квартир, шт.	Себестоимость строительных работ, млн $	Объем выданных банком креди-тов, млн $	Операционные расходы банка на выдачу кредитов, млн $	Период	Объем страхования имущества, млн $	Операционные расходы страховщика на выдачу полисов, млн $
1	I полугодие 2009	5 865	151,44	7 833,08	156,62	1-й кв-л 2013	119,37	23,63
2	II п-е 2009	16 476	382,78	8 139,48	178,76	2-й кв-л 2013	135,33	29,09
3	I п-е 2010	9 262	240,79	8 527,54	201,35	3-й кв-л 2013	128,41	28,46
4	II п-е 2010	14 046	317,90	10 562,03	259,73	4-й кв-л 2013	128,41	21,73
5	I п-е 2011	14 299	302,54	9 583,78	238,77	1-й кв-л 2014	107,18	24,98
6	II п-е 2011	14 864	278,22	12 339,00	270,00	3-й кв-л 2014	123,21	30,36
7	I п-е 2012	9 578	181,21	14 957,14	325,83	4-й кв-л 2014	136,63	34,31
8	II п-е 2012	31 788	641,06	18 149,21	403,69	1-й кв-л 2015	121,98	22,59
9	I п-е 2013	15 156	284,60	20 423,81	416,21	2-й кв-л 2015	142,59	27,13
10	II п-е 2013	23 146	427,83	24 904,76	507,14	3-й кв-л 2015	144,58	28,69
11	I п-е 2014	17 244	336,52	29012,70	511,55	4-й кв-л 2015	160,75	32,80
12	II п-е 2014	18 800	381,57	36028,57	587,26	1-й кв-л 2016	121,80	23,15
13	I п-е 2015	11 805	212,02	37769,84	608,15	2-й кв-л 2016	135,41	27,34
14	II п-е 2015	15 400	319,65	40549,21	686,05	3-й кв-л 2016	141,62	28,21
15	I п-е 2016	9 565	212,56	41866,67	680,91	4-й кв-л 2016	162,34	34,26

Таблица 3 (*продолжение*).

16	II п-е 2016	18 585	419,41	45141,27	731,77	1-й кв-л 2017	122,18	22,73
17	I п-е 2017	17 335	488,29	43665,08	853,90	2-й кв-л 2017	125,88	27,34
18	II п-е 2017	62 623	1840,94	50644,44	927,53	3-й кв-л 2017	136,33	28,64
19	I п-е 2018	41 985	1219,97	50703,95	868,46	4-й кв-л 2017	150,53	35,19
20	II п-е 2018	57 587	1820,16	57982,29	1094,97	1-й кв-л 2018	117,75	22,78
21	I п-е 2019	32 482	1314,86			2-й кв-л 2018	135,23	30,98
22	II п-е 2019	71 413	1937,97			3-й кв-л 2018	139,65	32,90
23	I п-е 2020	45 423	1645,29			1-й кв-л 2019	134,69	31,01
24	II п-е 2020	75 671	2100,37			2-й кв-л 2019	149,90	36,50
25	I п-е 2021	50 727	2274,00			3-й кв-л 2019	169,44	47,19
26	II п-е 2021	77 963	2235,52			4-й кв-л 2019	192,81	54,99
27						1-й кв-л 2020	149,89	37,15
28						2-й кв-л 2020	139,48	33,72
29						3-й кв-л 2020	182,45	50,45
30						4-й кв-л 2020	201,03	50,55

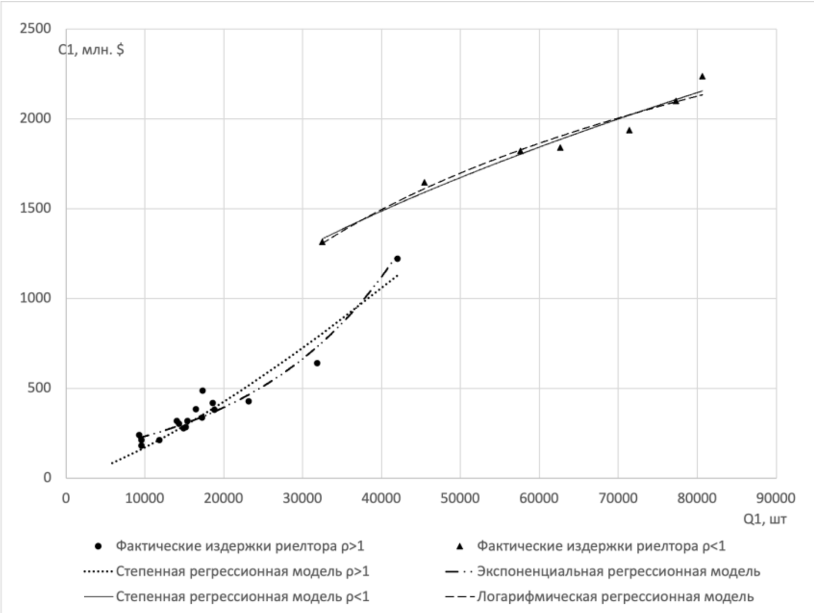

Рис. 1. Зависимость издержек риелтора от объема продаж квартир

Модель степенной функции издержек риелтора, рассчитанная методом наименьших квадратов, имеет вид:

$$C_1(Q) = \begin{cases} 1000{,}1Q_1^{1{,}33}, t = 2007 - 2016 \text{ гг.}, \\ 5000000Q_1^{0{,}5228}, t = 2017 - 2021 \text{ гг.} \end{cases}$$

Кривая издержек имеет характерный *S*-образный вид [19]. Однако в отличие от классической формы [19] при малых объемах продаж в 2007–2016 гг. кривая показывает отрицательный эффект расширения масштаба ($\rho > 1$), в то же время при больших объемах продаж в 2017–2020 гг. можно наблюдать положительный эффект расширения масштаба ($\rho < 1$). В первом случае средние издержки растут быстрее, чем объем продаж, а во втором случае средние издержки растут медленнее.

Также модель функции издержек риелтора можно представить при помощи логарифмической и экспоненциальной функции, тогда она примет вид:

$$C_1(Q) = \begin{cases} 100000000e^{0{,}00005Q_1}, t = 2007 - 2016 \text{ гг.}, \\ 900000000 \ln Q_1 - 8000000000, t = 2017 - 2021 \text{ гг.} \end{cases}$$

На рис. 2 представлена зависимость операционных издержек Сбербанка, которые относятся к обслуживанию ипотечных кредитов, от количества выданных ипотечных кредитов [10] по 20 отчетным периодам (полугодиям) за 2009–2018 гг. При этом объем кредитов, которые были выданы Сбербанком, рассчитан на основе доли ипотечных кредитов Сбербанка в общей сумме ипотечных кредитов, выданных в России за соответствующие периоды [11].

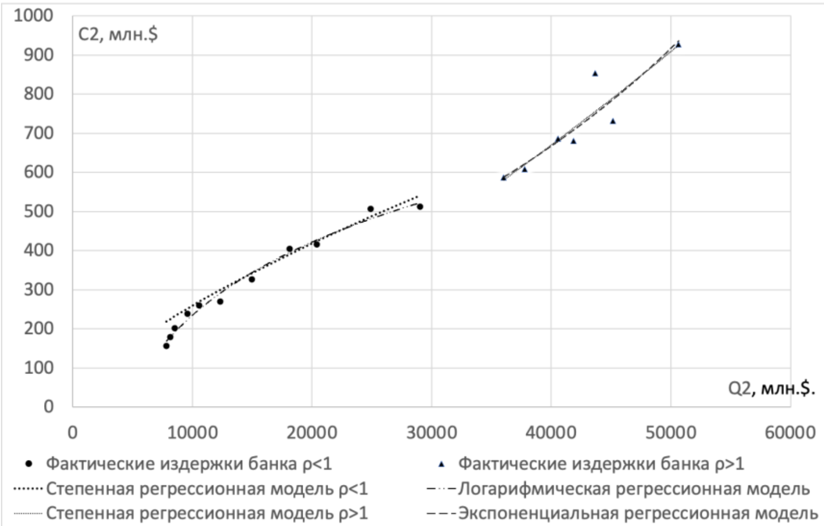

Рис. 2. Зависимость издержек банка от объема выданных кредитов

Модель функции издержек банка также имеет вид *S*-образной кривой с переменным эффектом расширения масштаба:

$$C_2(Q) = \begin{cases} 0{,}045Q_2^{0{,}69}, t = 2009 - 2014 \text{ гг.}, \\ 0{,}0003Q_2^{1{,}3662}, t = 2015 - 2018 \text{ гг.} \end{cases}$$

В 2009–2014 гг. эффект расширения масштаба от реализации услуг банком положительный ($\rho < 1$), а при больших объемах продаж в 2017–2020 гг. наблюдается отрицательный эффект расширения масштаба ($\rho < 1$). В первом случае средние издержки растут медленнее, чем объем продаж, а во втором средние издержки растут быстрее.

Также модель функции издержек банка можно представить при помощи логарифмической и экспоненциальной функции, тогда она примет вид

$$C_2(Q) = \begin{cases} 270{,}04 \ln Q_2 - 2252{,}9\,, t = 2009 - 2014 \text{ гг.}, \\ 186{,}64 e^{0{,}00003 Q_2}\,, t = 2015 - 2018 \text{ гг.} \end{cases}$$

На рис. 3 представлена зависимость аквизиционных издержек страховщика, которые относятся к обслуживанию операций по страхованию имущества, от объемов страхования имущества для ОАО «Ресо-Гарантия» [5, 8] по 23 отчетным периодам (кварталам) за 2013–2020 гг.; информация об объемах страхования имущества взята из статистики рейтингового агентства «РИА рейтинг» [4] и из отчетности ЦБ РФ [12].

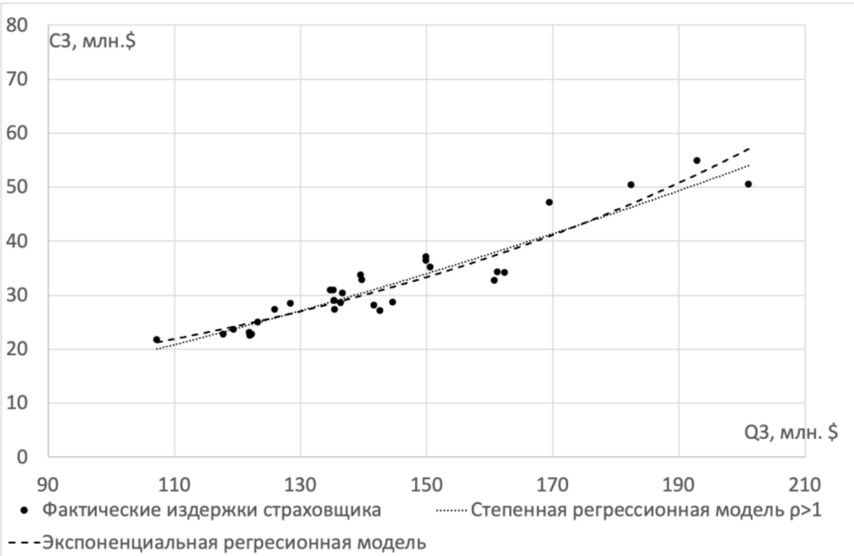

Рис. 3. Зависимость издержек страховщика от объемов страхования имущества

Модель функции издержек страховщика характеризуется отрицательным эффектом расширения масштаба ($\rho > 1$). Степенная функция издержек принимает вид

$$C_3(Q) = 0{,}0125Q_3^{1{,}5786}.$$

Экспоненциальная функция издержек принимает вид

$$C_3(Q) = 6{,}8722e^{0{,}0105Q_3}.$$

В таблице 2 представлены коэффициенты для оценки адекватности представленных регрессионных моделей.

Таблица 2. Статистические оценки регрессионных моделей

Агент	Регрессионная модель	Коэффициент детерминации	Критерий Фишера (расчетный)	Табличное значение критерия Фишера (при уровне значимости 0,05)
Риелтор	$C_1(Q) = 1000{,}1Q_1^{1{,}33}$	$R^2 = 0{,}9222$	$F = 190{,}18$	$F = 2{,}30$
	$C_1(Q) = 100000000e^{0{,}00005Q_1}$	$R^2 = 0{,}9562$	$F = 346{,}81$	$F = 2{,}30$
	$C_1(Q) = 5000000Q_1^{0{,}5228}$	$R^2 = 0{,}9656$	$F = 140{,}35$	$F = 4{,}88$
	$C_1(Q) = 900000000\ln(Q_1) - 8000000000$	$R^2 = 0{,}9584$	$F = 115{,}19$	$F = 4{,}88$
Банк	$C_2(Q) = 0{,}045Q_2^{0{,}69}$	$R^2 = 0{,}9218$	$F = 106{,}06$	$F = 3{,}10$
	$C_2(Q) = 270{,}04\ln(Q_2) - 2252{,}9$	$R^2 = 0{,}9855$	$F = 611{,}69$	$F = 3{,}10$
	$C_2(Q) = 0{,}0003Q_2^{1{,}3662}$	$R^2 = 0{,}8467$	$F = 38{,}66$	$F = 3{,}68$
	$C_2(Q) = 186{,}64e^{0{,}00003Q_2}$	$R^2 = 0{,}8423$	$F = 37{,}39$	$F = 3{,}68$
Страховщик	$C_3(Q) = 0{,}0125Q_3^{1{,}5786}$	$R^2 = 0{,}8881$	$F = 222{,}22$	$F = 1{,}87$
	$C_3(Q) = 6{,}8722e^{0{,}0105Q_3}$	$R^2 = 0{,}8824$	$F = 210{,}1$	$F = 1{,}87$

Таким образом, регрессионные модели являются адекватными и значимыми. При этом практически во всех случаях логарифмическая и экспоненциальная модели дают большую точность по сравнению со степенными моделями.

Далее исследуем зависимости объемов продаж и цен агентов от коэффициента комиссионного вознаграждения при различных эффектах расширения масштаба.

На рис. 4 представлены зависимости оптимальных объемов продаж риелтора и банка от коэффициента комиссии в паре «риелтор – банк»; на рис. 5 представлены зависимости оптимальных цен риелтора и банка. При этом случай $u_1 < 0$ означает, что риелтор платит комиссию банку, а случай $u_1 > 0$ подразумевает платеж банка риелтору.

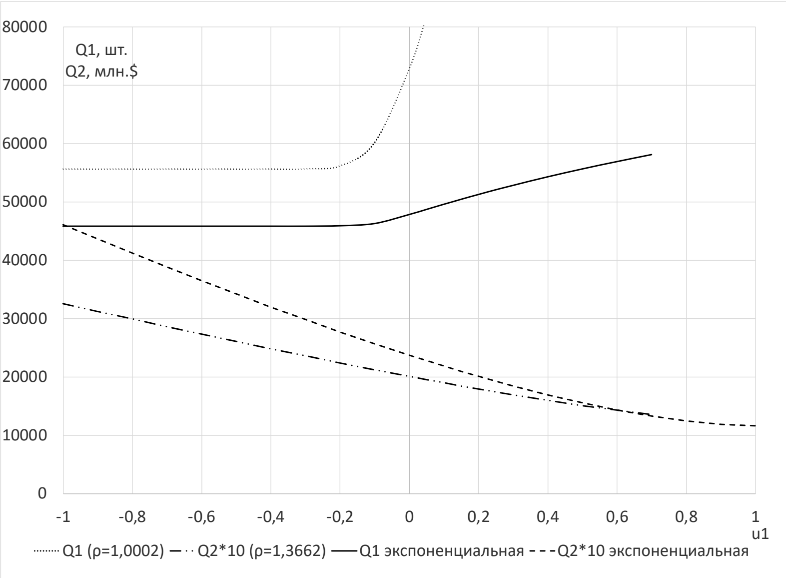

Рис. 4. Зависимость оптимального количества проданных квартир и объема выдачи кредитов от коэффициента комиссии при степенных и экспоненциальных функциях издержек

Так как при $\rho < 1$ и при логарифмической функции издержек условие второго порядка не соблюдается, т.е. невозможно найти максимум прибыли, на рисунках отражены зависимости только при отрицательном эффекте расширения масштаба ($\rho > 1$ и экспоненциальная функция издержек).

Проанализировав рис. 4 и 5, можно сделать вывод о том, что при отрицательном эффекте расширения масштаба с ростом коэффициента комиссии в паре «риелтор – банк» риелтору выгодно увеличивать объем продаж, а банку выгодно снижать объем продаж.

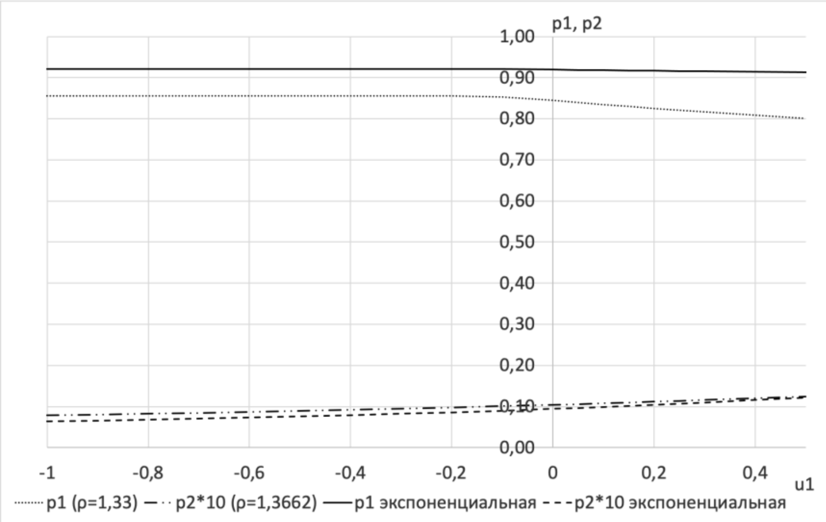

Рис. 5. Зависимость оптимальной цены на жилье (в долях от наибольшей цены) и ставки процента по ипотеке от коэффициента комиссии при степенных и экспоненциальных функциях издержек

Наряду с этим, начиная с некоторого значения u_1, риелтору выгодно снижать цены на жилье, а банку – повышать ставку ипотечного кредитования. Отметим, что снижение оптимальной цены на жилье и рост ипотечной ставки происходят уже при $u_1 < 0$, поскольку для риелтора растет, а для банка – снижается оптимальное значение доли внутреннего оборота α^*.

Также рассмотрены зависимости объемов продаж и цен на услуги для банка и страховщика от коэффициента комиссии в паре «банк – страховщик» при отрицательном эффекте расширения масштаба. При этом случай $u_{23} < 0$ означает, что банк платит комиссию страховщику, а случай $u_{23} > 0$ подразумевает платеж страховщика банку.

На рис. 6 представлены зависимости оптимальных объемов кредитования и страхования от коэффициента комиссии в паре «банк – страховщик»; на рис. 7 представлены зависимости оптимальных цен на услуги банка и страховщика.

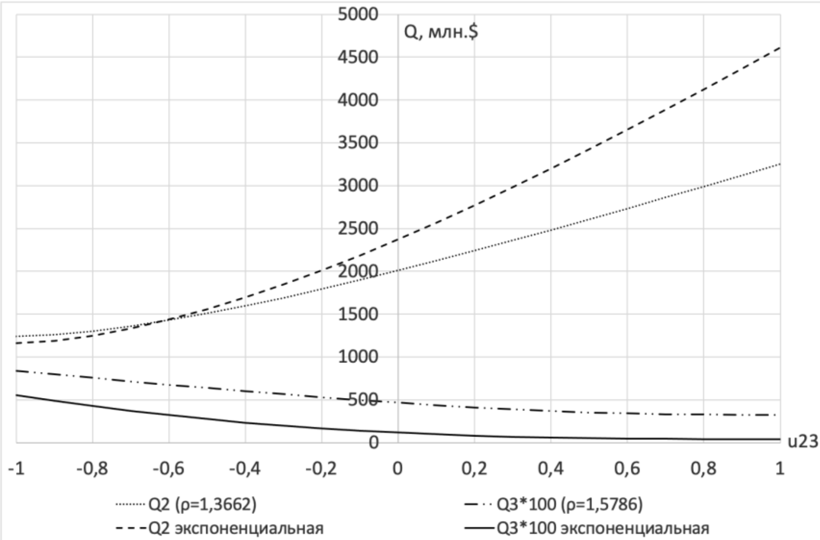

Рис. 6. Зависимость оптимальных объемов кредитов и страховых полисов от коэффициента комиссии при степенных и экспоненциальных функциях издержек

Проанализировав графики, можно сделать вывод о том, что с ростом коэффициента взаимодействия банка и страховщика для банка целесообразно увеличивать объем выдаваемых кредитов, а страховщику – снижать количество полисов. Кроме того, банку целесообразно снижать ставку ипотечного кредита, а страховщику – повышать тариф страхования жилья.

Обобщим полученные результаты. Цена жилья зависит от ставки ипотечного кредита через коэффициент комиссии в паре «риелтор – банк» u_1 (u_{21}) так, что при увеличении u_1 (или снижении u_{21}) с увеличением ставки ипотечного кредита цена жилья падает:

$$\frac{\partial p_1}{\partial p_2} < 0.$$

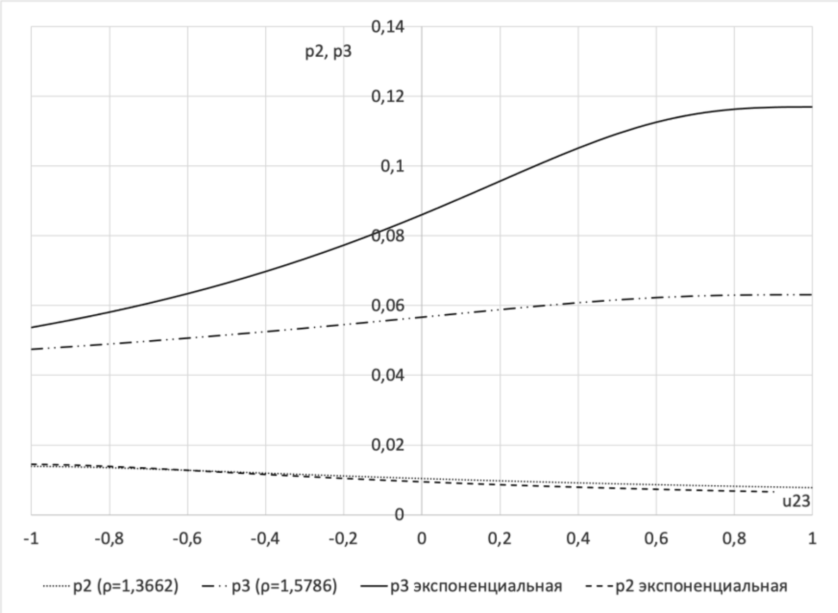

Рис. 7. Зависимость оптимальной процентной ставки по ипотеке и оптимального страхового тарифа от коэффициента комиссии при степенных и экспоненциальных функциях издержек

Ипотечная ставка зависит от тарифа страхования через коэффициент комиссии в паре «банк – страховщик» u_{23} (u_3) так, что при росте u_{23} (или снижении u_3) с увеличением тарифа страхования ипотечная ставка уменьшается:

$$\frac{\partial p_2}{\partial p_3} < 0.$$

В целом система «риелтор – банк – страховщик» с вогнутыми функциями издержек агентов обеспечивает более гибкое регулирование цен, чем в случае линейных функций издержек [15]. Для снижения цены жилья можно увеличивать коэффициент комиссии в паре «риелтор – банк», в этом случае ипотечная ставка незначительно повышается; в то же время следует уменьшать коэффициент комиссии в паре «банк – страховщик», в этом случае ставка ипотечного кредита также растет слабо, а страховой тариф уменьшается.

5. Выводы

В исследовании представлены эмпирические данные, которые характеризуют фактические издержки риелтора, банка и страховщика на рынке недвижимости России. Эти данные подтверждают проявление у этих агентов положительной или отрицательной отдачи от расширения масштаба.

С учетом типа отдачи от расширения масштаба разработаны модели максимизации прибыли агентов системы «риелтор – банк – страховщик», поступающих рационально. Также представлены формулы вычисления оптимального объема продаж и коэффициента внутрисистемного оборота и необходимые условия максимизации прибыли агентов системы.

Было доказано, что коэффициент комиссии влияет на оптимальный объем продаж и оптимальные цены агентов системы с учетом нелинейности функции издержек и был представлен анализ этих зависимостей, который показывает, что с увеличением соответствующих коэффициентов риелтору целесообразно увеличивать объем продаж и снижать цену, а страховщику – наоборот. На оптимальную стратегию банка влияет изменение коэффициента комиссии с каждым из его контрагентов.

На основе проведенных исследований агенты системы «риелтор – банк – страховщик» могут принимать решения по развитию, т.е. выбирать такие коэффициенты внутрисистемного оборота, коэффициенты комиссии, объемы продаж и, соответственно, цены, при которых их прибыли будут максимальными, а их взаимодействие будет наиболее выгодным для всех агентов.

Литература

1. ЗАМЯТИНА А.Ю. *Построение модели отраслевой функции издержек естественной монополии ОАО «РЖД»* // JSRP. – 2014. – №14(18). – С. 25–30.

2. КОСОРУКОВ О.А., СВИРИДОВА О.А. *Модель минимизации издержек в системах управления запасами* // Вестник РЭА им. Г.В. Плеханова. – 2009. – №6. – С. 52–58.
3. КУРИЛЁНОК К., КУРИЛЁНОК Е. *Новые Методы экономического анализа* // Наука и инновации. –2019. – №12(202). – С. 61–66.
4. *Медиа-информационная группа «Страхование сегодня». Динамика рынка.* – Url: http://www.insur-info.ru/statistics/ (дата обращения: 23.01.2021).
5. *ОАО «РЕСО-ГАРАНТИЯ», Отчетность по МСФО.* – URL: https://www.reso.ru/shareholders/finance/msfo/ (дата обращения: 19.01.2021).
6. *Отчетность по МСФО. ГК ПИК.* – URL: https://pik-group.ru/about/news-and-reports/reports/financial-results (дата обращения: 19.01.2021).
7. ПЛЕЩЕНКО В.И. *Оптимизация издержек промышленных предприятий при работе с альтернативными поставщиками* // Экономический анализ: теория и практика. – 2011. – №25. – С. 47–50.
8. *Рейтинговое агентство «РИА РЕЙТИНГ». Рэнкинг страховых компаний по итогам 2014 года.* – URL: http://riarating.ru/insurance_companies_rankings/20150319/610649976.html (дата обращения: 23.01.2021).
9. *Росриэлт недвижимость, цены на недвижимость в России.* – URL: https://rosrealt.ru/cena (дата обращения: 19.01.2021).
10. *Сбербанк, отчетность по МСФО.* – URL: https://www.sberbank.com/ru/investor-relations/reports-and-publications/ifrs (дата обращения: 19.01.2021).
11. *Центральный Банк, статистика.* URL: https://www.cbr.ru/statistics/table/?tableid=4-1 (дата обращения: 19.01.2021).
12. *Центральный Банк, статистика.* – URL: https://www.cbr.ru/statistics/insurance/report_individual_ins/?unidbquery.posted=true&unidbquery.dttype=1&unidbquery.to=2020 (дата обращения: 19.01.2021).
13. CALOMIRIS C.W., JAREMSKI M. *Deposit insurance: theories and facts* // Annual Review of Financial Economics. – 2016. – Vol. 8, No. 1. – P. 97–120.

14. CARBAUGH R. *Contemporary economics: an applications approach* // Cengage Learning. – 2006. – P. 35.
15. GERASKIN M. *Pricing analysis of interconnected markets of housing, mortgage lending and insurance* // Kybernetes. – 2020. – Vol. 50, No. 5. – P. 1212–1249.
16. JONES K. *Fha-insured home loans: an overview* // The Housing Finance System in the United States. –2013. – P. 44–58.
17. PARK K.A. *Temporary loan limits as a natural experiment in federal housing administration insuranc*e // Housing Policy Debate. – 2017. – Vol. 27, No. 3. – P. 449–466.
18. TIROLE J. *The theory of industrial organization*. – Cambridge: MIT Press, 1988. – 496 p.
19. WALTERS A.A. *Production and cost functions: and econometric survey* // Econometrica. – 1963. – No. 31(1). – P. 23–44.

MODELING INTERACTIONS OF INSTITUTIONS OF HOUSING MARKETS BASED ON POWER, EXPONENTIAL AND LOG COST FUNCTIONS

Mikhail Geraskin, Doctor of Economics, professor, head of the Department of Mathematical Methods in Economics of the Institute of Economics and Management, Samara National Research University named after Academician S.P. Korolev (Samara University) (innovation@ssau.ru).
Maria Ivanova, post-graduate student, Samara National Research University named after Acad. S.P. Korolev (Samara University) (ivanova.maria.ami@gmail.com).

Abstract: The article presents a system of optimality conditions for housing market agents (realtor, bank and insurer) with power, exponential and logarithmic cost functions corresponding to different types of economies of scale. The results of numerical experiments are presented, demonstrating the nature of price interdependencies in these markets for various types of functions. In contrast to the study of the "realtor – bank – insurer" system based on linear cost functions, this work presents the following conclusions: firstly, in the case when all agents have concave cost functions, then the real estate price, mortgage interest rate and insurance tariff lower than in the case when agents have convex cost functions; secondly, an increase in the intrasystem commission rate leads to an increase in the price of the agent who pays the commission, and a decrease in the price of the agent who receives it; thirdly, an increase in the commission rate leads to a sharper decrease in the price of an agent, in the case when he has a convex cost function, while the counterparty has a *concave one, than otherwise. When comparing the effectiveness of using different types of cost functions, it was found that logarithmic and exponential functions provide greater accuracy than power functions.*

Keywords: optimal strategy, realtor, bank, insurer.

УДК 330.4
ББК 65.05
DOI: 10.25728/ubs.2023.101.4

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Р.М. Нижегородцевым.

Поступила в редакцию 01.12.2022.
Опубликована 14.12.2022.