

ИНДИКАТОРЫ РИСКА КАСКАДНЫХ СБОЕВ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ СЕТЕВЫХ СТРУКТУР

Тырсин А. Н.¹

*(ФГБУН Научно-инженерный центр «Надежность и ресурс
больших систем и машин» УрО РАН, Екатеринбург;
ФГБУН Институт экономики УрО РАН, Екатеринбург)*

Кащеев С. Е.²

*(Южно-Уральский государственный университет,
Челябинск)*

Поведение реальных систем часто обладает стохастичностью, а связи между их элементами можно адекватно описывать как корреляционные. В последние годы наблюдаются тенденции увеличения и усложнения современных сетей при росте их зависимости друг от друга. Мы наблюдаем, как несколько сетей объединяются в одну взаимозависимую сетевую структуру. Это приводит к возрастанию рисков того, что отказ узлов в одной сети может привести к отказу зависимых узлов в других сетях. В результате таких отказов могут возникать катастрофические каскадные сбои в таких взаимосвязанных сетевых структурах. С учетом масштабности таких структур, часто являющихся критическими инфраструктурами, данная проблема становится весьма актуальной. В статье введена скалярная мера взаимосвязи между несколькими произвольно распределенными непрерывными случайными векторами. Она позволяет оценить тесноту взаимосвязи между различными подсистемами (сетями) в сетевых структурах. Применительно к гауссовым модельным сетевым структурам проведено исследование влияния тесноты взаимосвязи между подсистемами на риск возникновения каскадных сбоев. В качестве величины риска использовалась вероятность таких сбоев. В качестве индикатора риска возникновения каскадных сбоев в сетевой структуре предложено использовать коэффициент корреляционной взаимосвязи между ее подсистемами. А для снижения риска возникновения каскадных сбоев в сетевой структуре следует уменьшать тесноту корреляции между наиболее взаимосвязанными элементами подсистем.

Ключевые слова: сетевая структура, модель, риск, взаимосвязь, каскадный сбой, система.

¹ Александр Николаевич Тырсин, д.т.н., профессор (at2001@yandex.ru).

² Станислав Евгеньевич Кащеев, аспирант (kashcheev@susu.ru).

1. Введение

Структура – это совокупность устойчивых связей между элементами системы, обеспечивающих воспроизводимость при изменяющихся условиях [6]. Структура и элементы образуют систему. В сетевой структуре могут существовать связи между всеми элементами, причем возможно также двойное подчинение и межуровневое взаимодействие [5]. Также в ней могут быть подсистемы (подсети), что тоже должно отражаться как взаимосвязи на уровне подсистем.

Можно утверждать о наличии следующих тенденций, характеризующих развитие современных сетей.

Во-первых, наблюдается тенденция увеличения как числа элементов, так и подсетей в современных сетях.

Во-вторых, они становятся все более зависимыми друг от друга. Мы наблюдаем, как несколько сетей объединяются в одну взаимозависимую сетевую структуру. Например, современные инфраструктуры, такие как электростанции, водоснабжение, транспорт, связь, топливо и др. тесно взаимодействуют между собой [2, 18, 21].

В-третьих, отказ узлов в одной сети может привести к отказу зависимых узлов в других сетях и катастрофическим каскадным сбоям в таких взаимосвязанных сетевых структурах [12].

Это делает актуальной проблему безопасного функционирования связанных сетевых структур. Для решения данной проблемы нужен математический инструментарий, позволяющий формировать эффективные управленческие решения с целью обеспечения приемлемого уровня риска таких систем.

Поведение реальных систем часто обладает стохастичностью, а связи между их элементами можно адекватно описывать как корреляционные. Модели таких систем обычно акцентируют внимание на явном количественном описании вероятностных характеристик тех или иных ситуаций в жизненном цикле системы [3]. Однако такие модели не позволяют учесть системные характеристики сетевых структур, что ограничивает возможности их эффективного использования в задачах риск-анализа.

Известен подход к оценке риска на основе логико-вероятностных моделей [1]. Для относительно простых сетей, когда можно априори указать все опасные исходы, при наличии статистической информации или экспертных оценок о шансах их появления этот подход дает приемлемые результаты. Обычно здесь удается накопить достаточную статистику для оценивания вероятностей наступления опасных исходов, а форма взаимосвязи между элементами системы является достаточно простой и может быть описана с помощью логико-вероятностных моделей риска. Однако у сложных динамических сетей структуру взаимодействия между элементами обычно не удается описать с помощью логико-вероятностных моделей – стохастические связи между элементами не позволяют их адекватно моделировать с помощью алгебры логики (AND, OR, NOT), а изменения состояния элементов и самой системы носят непрерывный характер.

В ситуациях, когда нет возможности явно связать разные факторы риска в виде логико-вероятностной модели, можно использовать метод корреляционной адаптометрии. Он основан на использовании корреляционных матриц, состоящих из коэффициентов парной линейной корреляции между элементами системы [16]. Отметим, что в [14] также рассматривается аналогичная идея влияния корреляций на риск. Однако следует отметить недостатки этого подхода, существенно ограничивающие возможности его использования для риск-анализа взаимосвязанных сетей:

- парные корреляции не всегда корректно отражают зависимости, так как могут быть многомерные корреляционные связи;
- возможны не только линейные корреляционные зависимости, но и нелинейные;
- выбор общей характеристики степени коррелированности параметров в виде веса корреляционного графа недостаточно формально обоснован, так как эта величина является эмпирической;
- корреляционная матрица недостаточно полно описывает случайные векторы: отсутствует информация о важных число-

вых характеристиках компонент случайного вектора – их средних величинах и дисперсиях.

В последние годы стали успешно применяться копулы для моделирования зависимости в управлении рисками предприятий, в финансах, страховании и экологических исследованиях [13, 15]. Моделирование зависимостей с копулами особенно эффективно, поскольку многомерные копулы позволяют отделить моделирование маргинальных распределений от моделирования структуры зависимостей [17]. Появились публикации, в которых копулы используются для инженерных приложений [20]. В работе [11] рассмотрены вопросы использования многомерных копул для моделирования сложных зависимостей во взаимозависимых сетях. Однако, как отмечено авторами, поиск подходящей структуры копулы не является тривиальной задачей и сильно страдает от проклятия размерности.

Целью статьи является исследование на модельных данных влияния многомерных корреляционных связей на риск каскадных сбоев во взаимосвязанных сетевых структурах и поиск возможных индикаторов критического уровня риска.

2. Корреляционные связи в сетевых структурах

Для задач анализа риска восстановление многомерных распределений с зависимыми компонентами не является необходимым условием. Поэтому вместо этого попробуем ограничиться использованием корреляционных взаимосвязей между элементами сетевой структуры.

Сеть с корреляционными связями между ее элементами можно представить как один или несколько (при наличии подсетей) случайных векторов с коррелированными компонентами. Рассмотрим известные показатели тесноты корреляционной связи, которые можно использовать для такой системы.

Для гауссовых случайных векторов \mathbf{X}° в [19] предложена скалярная мера – коэффициент тесноты совместной линейной корреляционной связи, равный

$$(1) \quad d_m^\circ(\mathbf{X}^\circ) = 1 - |\mathbf{R}_{\mathbf{X}^\circ}|^{1/m},$$

где $\mathbf{X}^\circ = (X_1^\circ, \dots, X_m^\circ)$ – многомерная случайная величина, имеющая совместное нормальное распределение и корреляционную матрицу $\mathbf{R}_{\mathbf{X}^\circ}$.

Для оценки тесноты любой корреляционной связи непрерывных случайных величин в [7] предложен коэффициент

$$(2) \quad d_m(\mathbf{X}) = 1 - \left[\prod_{k=2}^m (1 - R_{X_k|X_1 \dots X_{k-1}}^2) \right]^{\frac{1}{m}},$$

где $R_{X_k|X_1 \dots X_{k-1}}^2 = \frac{\sigma_{X_k|X_1 \dots X_{k-1}}^2}{\sigma_{X_k}^2}$ – индекс детерминации в общем слу-

чае нелинейной регрессионной зависимости случайной величины X_k от случайных величин X_1, \dots, X_{k-1} . При неизвестном виде зависимости для определения $R_{X_k|X_1 \dots X_{k-1}}^2$ можно воспользоваться методами непараметрического регрессионного анализа [10].

В [7] показано, что формула (1) является частным случаем (2) для гауссового случайного вектора \mathbf{X}° .

Зададим n непрерывных случайных векторов произвольных размерностей, у которых нет совпадающих компонент. Обозначим их как

$$\mathbf{Y}^{(1)} = (Y_1^{(1)}, \dots, Y_{m_1}^{(1)}), \dots, \mathbf{Y}^{(n)} = (Y_1^{(n)}, \dots, Y_{m_n}^{(n)}).$$

Считаем, что компоненты этих случайных векторов имеют дисперсии и могут быть корреляционно взаимно зависимыми. Для этого множества случайных векторов введем их объединение

$$(3) \quad \mathbf{Y} = \bigcup_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)} = \underbrace{(Y_1, \dots, Y_{m_1})}_{\mathbf{Y}^{(1)}}, \underbrace{(Y_{m_1+1}, \dots, Y_{m_1+m_2})}_{\mathbf{Y}^{(2)}}, \dots, \underbrace{(Y_{m_1+\dots+m_{n-1}+1}, \dots, Y_{m_1+\dots+m_n})}_{\mathbf{Y}^{(n)}}.$$

В [8] введена скалярная мера тесноты взаимосвязи между случайными векторами $\mathbf{Y}^{(1)}, \dots, \mathbf{Y}^{(n)}$:

$$(4) \quad D(\bigcap_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)}) = 1 - \frac{1 - d(\bigcup_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)})}{\prod_{j=1}^n (1 - d(\mathbf{Y}^{(j)}))},$$

где $d(\mathbf{X}) = 1 - \left[\prod_{k=2}^m (1 - R_{X_k | X_1 \dots X_{k-1}}^2) \right]$, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$.

Коэффициент $D(\bigcap_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)})$ принимает значения от 0 до 1. Если каждый из элементов любой подсистемы функционирует независимо от всех элементов остальных подсистем, то $D(\bigcap_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)}) = 0$. Если хотя бы один из элементов хотя бы одной подсистемы линейно зависит от хотя бы одного из элементов хотя бы одной другой подсистемы, то $D(\bigcap_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)}) = 1$. При наличии корреляционных зависимостей между функционированием элементов разных подсистем $0 < D(\bigcap_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)}) < 1$.

Аналогично коэффициентам (1) и (2) введем масштабирование, учитывающее число случайных векторов:

$$(5) \quad D_n(\bigcap_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)}) = 1 - \left[\frac{1 - d(\bigcup_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)})}{\prod_{j=1}^n (1 - d(\mathbf{Y}^{(j)}))} \right]^{\frac{1}{n}}.$$

Формула (5) позволяет унифицировать количественную меру тесноты корреляционной взаимосвязи. Рассмотрим ее частные случаи.

1. Пусть $n = 2$. Тогда теснота корреляционной связи между случайными векторами $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ и $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_l)$ равна

$$D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) = 1 - \left(\frac{(1 - d_e(\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}))}{(1 - d_e(\mathbf{X}))(1 - d_e(\mathbf{Y}))} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Если все $m_j = 1$, т.е. $\mathbf{Y}^{(j)} = Y_j$, $j = 1, \dots, N$, то формула (5) примет вид

$$(6) \quad D_N(\bigcap_{j=1}^N Y_j) = 1 - \left[\prod_{l=2}^N (1 - R_{Y_l|Y_1 \dots Y_{l-1}}^2) \right]^{\frac{1}{N}} = d_N(\mathbf{Y}),$$

т.е. (6) описывает тесноту корреляционной связи между компонентами случайного вектора.

3. Теснота корреляционной связи между непрерывным случайным вектором $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ и непрерывной случайной величиной Z согласно (6) равна

$$(7) \quad D_2(\mathbf{X} \cap Z) = 1 - \left[\frac{(1 - R_{Z|X_1 \dots X_m}^2) \cdot \prod_{k=2}^m (1 - R_{X_k|X_1 \dots X_{k-1}}^2)}{\prod_{k=2}^m (1 - R_{X_k|X_1 \dots X_{k-1}}^2)} \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 - (1 - R_{Z|X_1 \dots X_m}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

4. Если все случайные векторы $\mathbf{Y}^{(j)}$ являются гауссовыми, то формула (5) примет вид

$$(8) \quad D_n(\bigcap_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)}) = 1 - \left(\frac{|\mathbf{R}_{\bigcup_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)}}|}{\prod_{j=1}^n |\mathbf{R}_{\mathbf{Y}^{(j)}}|} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

5. Если все $m_j = 1$, т.е. $\mathbf{Y}^{(j)} = Y_j$, $j = 1, \dots, N$, то формула (8) примет вид

$$(9) \quad D_N(\bigcap_{j=1}^N Y_j) = 1 - \left| \mathbf{R}_{\bigcup_{j=1}^N Y_j} \right|^{\frac{1}{N}} = 1 - |\mathbf{R}_{\mathbf{Y}}|^{\frac{1}{N}} = d_N(\mathbf{Y}),$$

т.е. (9) описывает тесноту корреляционной связи между компонентами гауссова случайного вектора.

6. Теснота корреляционной связи между гауссовым случайным вектором \mathbf{X} и гауссовой случайной величиной Z с учетом

(7) и того, что $|\mathbf{R}_{\mathbf{X}}| = \prod_{k=2}^m (1 - R_{X_k|X_1 \dots X_{k-1}}^2)$, равна

$$(10) \quad D_2^\circ(\mathbf{X} \cap Z) = 1 - \left(\frac{|\mathbf{R}_{\mathbf{X} \cup Z}|}{|\mathbf{R}_{\mathbf{X}}|} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. Оценка риска каскадных сбоев в сетевых структурах

Исследуем на модельных данных влияние коррелированности между элементами взаимосвязанных сетей на риск каскадных сбоев и определим возможные индикаторы критического уровня риска. В качестве структуры будем рассматривать две взаимосвязанных сети.

Ранее была предложена количественная мера корреляционной взаимосвязи между несколькими подсистемами. Рассмотрим на нескольких усложняющихся примерах особенности риск-анализа таких систем. На первом этапе исследований для снижения трудоемкости в качестве сетевой структуры будем рассматривать систему, состоящую из двух взаимосвязанных гауссовых подсистем. В этом случае отказ можно интерпретировать как выход за некоторый диапазон допустимых значений. Будем считать, что все элементы сетей функционируют в одинаковых условиях риска. Это можно трактовать как постоянство дисперсий у всех элементов. Для удобства без потери общности будем считать, что математические ожидания всех элементов равны нулю. Тогда функция плотности вероятности для сетевой структуры с непрерывным гауссовым случайным вектором $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ будет равна

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x} \right\},$$

где $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}} = \{\sigma_{X_i X_j}\}_{m \times m}$ – ковариационная матрица, $\sigma_{X_i X_i} = \sigma^2$.

Считаем отказом каждого элемента X_i событие B_i – попадание значения вне области допустимых значений $(-A, A)$, $A > 0$. Если элемент $X_i \in \mathbf{X}$ не зависит от остальных элементов вектора \mathbf{X} , то вероятность его стабильной работы и отказа равны соответственно

$$P(\overline{B_i}) = P(-A \leq X_i \leq A) = \int_{-A}^A p_{X_i}(t) dt,$$

$$P(B_i) = P(X_i \notin [-A, A]) = \int_{-\infty}^{-A} p_{X_i}(t) dt + \int_A^{+\infty} p_{X_i}(t) dt,$$

$$p_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}.$$

В свою очередь для \mathbf{X} с коррелированными элементами вероятность отказа любого элемента, например X_1 , вычисляется по формуле

$$P(B_1) = \int_{-\infty}^{-A} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_A^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Вероятность одновременного отказа нескольких элементов $X_k : k \in T \subseteq \{1, \dots, m\}$:

$$P\left(\bigcup B_k : k \in T \subseteq \{1, \dots, m\}\right) = \prod_{k \in T} P(B_k).$$

Вычисление определенных интегралов будем выполнять с помощью разложения подынтегральных функций в ряды [9] для $m \leq 4$ или с помощью метода Монте-Карло [4].

3.1. ПРИМЕР 1

Рассмотрим сетевую структуру в виде двух взаимосвязанных элементов X и Y . Пусть они могут быть представлены стандартными гауссовыми случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Введем между ними коэффициент корреляции ρ . Схематично покажем такую структуру (систему) на рис. 1.

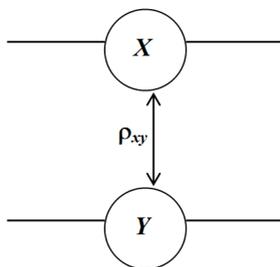


Рис. 1. Сетевая структура, состоящая из двух взаимосвязанных элементов X и Y

Зададим условия для отказа каждого элемента: $B = \{x : x \notin (-A; A)\}$ – отказ элемента X , $C = \{y : y \notin (-A; A)\}$ – отказ элемента Y .

На рис. 2 приведены зависимости $\log_{10} \frac{P(B/C)}{P(B)}$ от коэффициента корреляции для разных значений порогового уровня A , найденные с помощью численного интегрирования. Из графиков на рис. 2 видим, что с ростом коэффициента корреляции наблюдается тенденция увеличения условной вероятности отказа $P(B/C)$ относительно вероятности отказа $P(B)$, причем она более выражена для больших значений порогового уровня A . Это означает, что вероятность $P(BC)$ быстро увеличивается при росте тесноты корреляции между элементами X и Y .

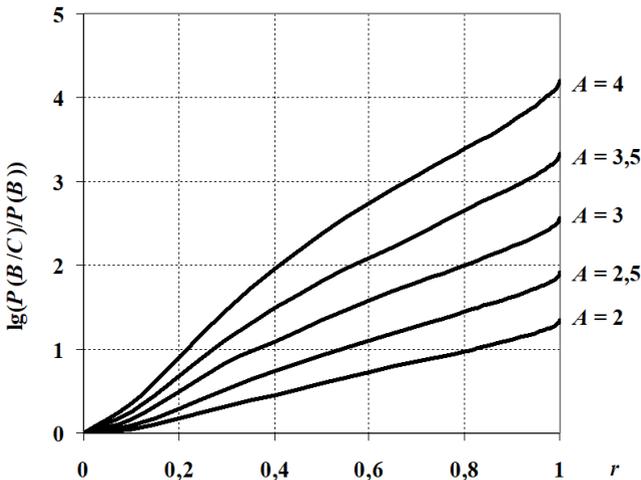


Рис. 2. Зависимости $\log_{10} \frac{P(B/C)}{P(B)}$ от коэффициента корреляции для разных значений A

Рассмотренный пример 1 показал, что рост взаимосвязи между подсистемами приводит к значительному росту риска каскадного сбоя (в данном случае одновременный отказ X и Y) при функционировании сетевых структур. Причем чем выше

опасность ситуации (в данном случае величина A), тем больше растет риск. Это свидетельствует об актуальности задачи оценивания риска сетевой структуры в условиях наличия корреляционной связи между ее подсистемами. Поэтому рассмотрим далее примеры более сложного вида подсистем и наличия корреляционной связи между элементами этих подсистем.

3.2. ПРИМЕР 2

Рассмотрим сетевую структуру \mathbf{S} в виде двух взаимосвязанных подсистем \mathbf{X} и \mathbf{Y} . Каждая из этих подсистем представляет собой последовательное или параллельное соединение двух элементов (X_1, X_2 для подсистемы \mathbf{X} и Y_1, Y_2 для подсистемы \mathbf{Y}). Таким образом, отказ каждой из подсистем происходит при отказе хотя бы одного из двух ее последовательно соединенных элементов. Под взаимосвязью между подсистемами \mathbf{X} и \mathbf{Y} понимаем корреляционные связи между элементами этих подсистем. Пусть элементы X_1, X_2, Y_1, Y_2 этих подсистем могут быть представлены стандартными гауссовыми случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Введем между ними коэффициенты парной линейной корреляции $\rho_{X_i Y_j}$. Рассмотрим ситуацию, когда отказы у элементов в каждой из подсистем возникают независимо друг от друга, т.е. $\rho_{X_1 X_2} = \rho_{Y_1 Y_2} = 0$. Считаем отказом каждого элемента подсистем \mathbf{X} и \mathbf{Y} попадание значения вне интервала $(-A, A)$, $A > 0$. Пусть для определенности $A = 3$. Зададим условия для отказа каждого элемента: $B_i = \{x_i \notin (-A; A)\}$ – отказ элемента X_i подсистемы \mathbf{X} , $C_i = \{y_i \notin (-A; A)\}$ – отказ элемента Y_i подсистемы \mathbf{Y} . В данном примере под каскадным сбоем понимаем одновременный отказ подсистем \mathbf{X} и \mathbf{Y} .

Оценку тесноты корреляционной взаимосвязи между элементами системы \mathbf{S} и подсистемами \mathbf{X} и \mathbf{Y} выполним по формулам (9) и (8), которые здесь примут вид

$$(11) \quad d_4(\mathbf{S}) = D_4(X_1 \cap X_2 \cap Y_1 \cap Y_2) = 1 - |\mathbf{R}_S|^{1/4} = 1 - |\mathbf{R}_{X \cup Y}|^{1/4},$$

$$(12) D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) = 1 - \left(\frac{|\mathbf{R}_{\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}}|}{|\mathbf{R}_{\mathbf{X}}| \cdot |\mathbf{R}_{\mathbf{Y}}|} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{где } |\mathbf{R}_{\mathbf{S}}| = |\mathbf{R}_{\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \rho_{X_1 Y_1} & \rho_{X_1 Y_2} \\ 0 & 1 & \rho_{X_2 Y_1} & \rho_{X_2 Y_2} \\ \rho_{X_1 Y_1} & \rho_{X_2 Y_1} & 1 & 0 \\ \rho_{X_1 Y_2} & \rho_{X_2 Y_2} & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad |\mathbf{R}_{\mathbf{X}}| = |\mathbf{R}_{\mathbf{Y}}| = 1.$$

Случай 1. Пусть элементы в подсистемах \mathbf{X} и \mathbf{Y} соединены последовательно (рис. 3).

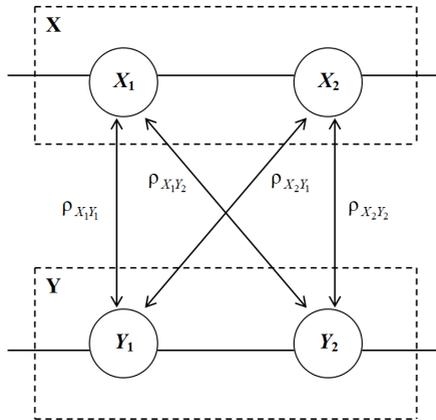


Рис. 3. Сетевая структура, состоящая из двух взаимосвязанных подсистем \mathbf{X} и \mathbf{Y}

Условия отказа подсистем выглядят так: $B = B_1 \cup B_2$ – отказ подсистемы \mathbf{X} , $C = C_1 \cup C_2$ – отказ подсистемы \mathbf{Y} , $B \cdot C = (B_1 + B_2)(C_1 + C_2)$ – одновременный отказ подсистем \mathbf{X} и \mathbf{Y} , это событие будем считать отказом системы \mathbf{S} .

Рассмотрим два различных варианта корреляционных связей между элементами разных подсистем.

Вариант 1. Все коэффициенты корреляции между элементами подсистем равны между собой: $\rho_{X_1 Y_1} = \rho_{X_1 Y_2} = \rho_{X_2 Y_1} = \rho_{X_2 Y_2}$.

Вариант 2. Коррелированно функционируют между собой только один элемент подсистемы \mathbf{X} и один элемент подсистемы \mathbf{Y} . Пусть для определенности $\rho_{x_1y_1} = \rho_{x_2y_2} \neq 0$, $\rho_{x_1y_2} = \rho_{x_2y_1} = 0$.

На рис. 4, 5 приведены зависимости $\log_{10} \frac{P(B/C)}{P(B)}$ от коэффициента $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$ для вариантов 1 и 2.

Отметим, что для обоих вариантов $\frac{P(B/C)}{P(B)} = \frac{P(C/B)}{P(C)}$. Из графиков видим, что условная вероятность отказа любой из подсистем при отказе другой подсистемы с увеличением $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$ монотонно растет и увеличивается более чем в 20 и 150 раз соответственно (при стремлении $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$ к 1).

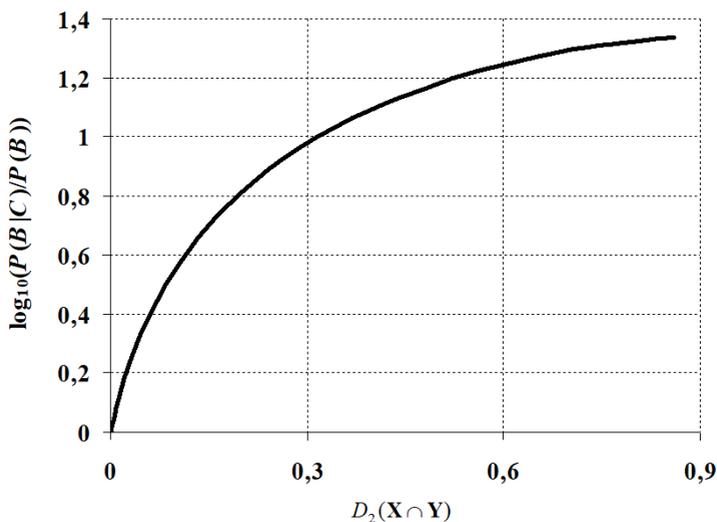


Рис. 4. Зависимость $\log_{10} \frac{P(B/C)}{P(B)}$ от коэффициента $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$ для варианта 1

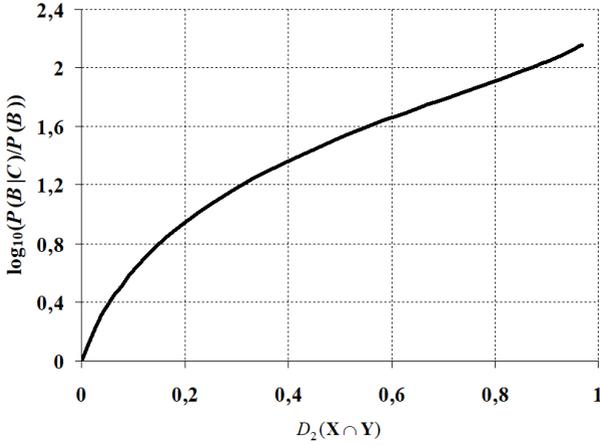


Рис. 5. Зависимость $\log_{10} \frac{P(B/C)}{P(B)}$ от коэффициента $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$ для варианта 2

Случай 2. Пусть элементы в подсистемах \mathbf{X} и \mathbf{Y} соединены параллельно (рис. 6).

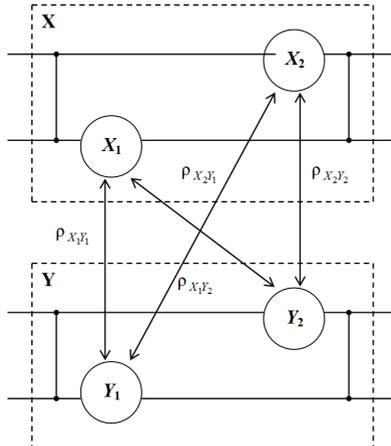


Рис. 6. Сетевая структура, состоящая из двух взаимосвязанных подсистем \mathbf{X} и \mathbf{Y}

Условия отказа подсистем здесь примут вид: $B = B_1 \cap B_2$ – отказ подсистемы \mathbf{X} , $C = C_1 \cap C_2$ – отказ подсистемы \mathbf{Y} .

Оценку тесноты корреляционной взаимосвязи между подсистемами \mathbf{X} и \mathbf{Y} выполним по формуле (12). Рассмотрим два различных варианта корреляционных связей между элементами разных подсистем.

Вариант 1. Все коэффициенты корреляции между элементами подсистем равны между собой: $\rho_{X_1Y_1} = \rho_{X_1Y_2} = \rho_{X_2Y_1} = \rho_{X_2Y_2}$.

Вариант 2. Коррелированно функционируют между собой только один элемент подсистемы \mathbf{X} и один элемент подсистемы \mathbf{Y} . Пусть для определенности $\rho_{X_1Y_1} = \rho_{X_2Y_2} \neq 0$, $\rho_{X_1Y_2} = \rho_{X_2Y_1} = 0$.

На рис. 7, 8 приведены зависимости $\log_{10} \frac{P(B/C)}{P(B)}$ от коэффициента $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$ для вариантов 1 и 2. Отметим, что для обоих вариантов $\frac{P(B/C)}{P(B)} = \frac{P(C/B)}{P(C)}$.

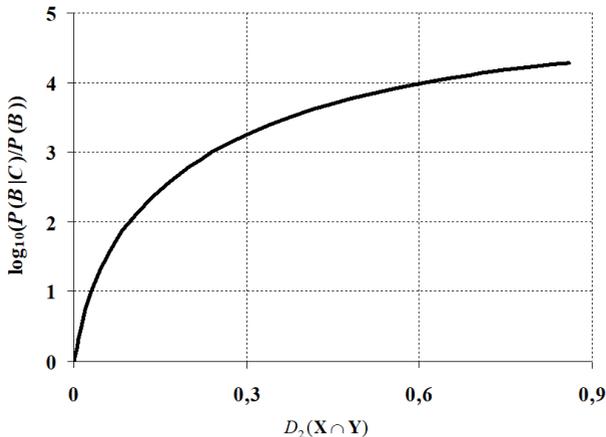


Рис. 7. Зависимость $\log_{10} \frac{P(B/C)}{P(B)}$ от коэффициента $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$ для варианта 1

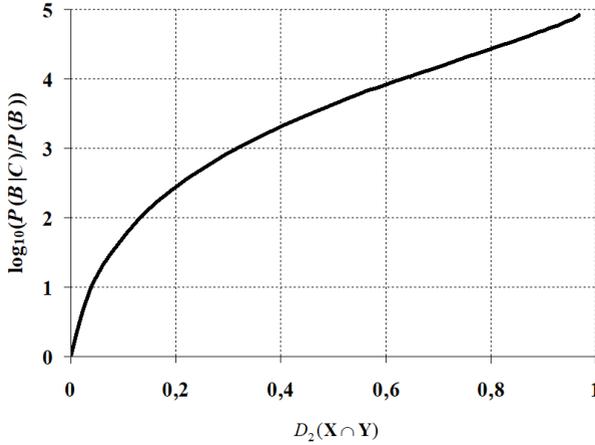


Рис. 8. Зависимость $\log_{10} \frac{P(B/C)}{P(B)}$ от коэффициента $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$ для варианта 2

Из графиков видим, что условная вероятность отказа любой из подсистем при отказе другой подсистемы с увеличением $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$ монотонно растет и увеличивается более чем в 18000 и 80000 раз соответственно (при стремлении $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$ к 1).

Рассмотренные примеры 1, 2 показали следующее. Во-первых, рост тесноты корреляционной взаимосвязи между подсистемами приводит к значительному росту риска при функционировании сетевых структур. На основе полученных результатов можно считать, что в условиях тесной корреляционной взаимосвязи между подсистемами в сетевой структуре риск ее отказа значительно растет при отказе других систем, входящих в эту структуру.

Во-вторых, риск отказа любой системы зависит от характеристик надежности элементов системы, а также от тесноты корреляционной взаимосвязи между подсистемами сетевой структуры. В случае отсутствия или слабой корреляционной связи между элементами подсистем в качестве индикатора риска функционирования сетевой структуры может быть использован коэффициент тесноты взаимосвязи между этими подсистемами.

Выше был рассмотрена ситуация, когда отказы у элементов в каждой из подсистем возникают независимо друг от друга. Пусть теперь $\rho_{X_1X_2} = \rho_{Y_1Y_2} > 0$. Для ряда различных значений коэффициентов $d_4(\mathbf{S})$, $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$, $d_2(\mathbf{X})$ и $d_2(\mathbf{Y})$ определим вероятности $P(B \cdot C)$. В таблицах 1, 2 приведены некоторые результаты, отражающие имеющуюся закономерность зависимости риска от тесноты взаимосвязи между подсистемами \mathbf{X} и \mathbf{Y} . Были исследованы ситуации, когда фиксировался один из двух коэффициентов $d_4(\mathbf{S})$ или $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$, а другой изменялся путем варьирования коэффициентов парной линейной корреляции между элементами системы \mathbf{S} . Видим, что коэффициент $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$ характеризует величину риска системы и при фиксированных значениях $d_4(\mathbf{S})$ его увеличение приводит к росту риска.

Отметим, что коэффициент $d_4(\mathbf{S})$ не подходит в качестве индикатора риска, например:

- для случая 1 и варианта 2 при $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) = 0,580$ имеем: 1) $d_4(\mathbf{S}) = 0,362$ и $P(B \cdot C) = 0,00091$; 2) $d_4(\mathbf{S}) = 0,386$ и $P(B \cdot C) = 0,00056$;
- для случая 2 и варианта 2 при $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) = 0,791$ имеем: 1) $d_4(\mathbf{S}) = 0,546$ и $P(B \cdot C) = 9,4 \cdot 10^{-7}$; 2) $d_4(\mathbf{S}) = 0,549$ и $P(B \cdot C) = 4,8 \cdot 10^{-7}$.

Таблица 1. Случай 1. Вероятности $P(B \cdot C)$ в зависимости от коэффициентов $d_4(\mathbf{S})$ и $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$

Вариант	$d_4(\mathbf{S})$	$D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$	$d_2(\mathbf{X}) = d_2(\mathbf{Y})$	$P(B \cdot C)$
1	0,088	0,044	0,067	0,00009
	0,088	0,134	0,020	0,00019
	0,203	0,110	0,155	0,00026
	0,203	0,339	0,020	0,00049
	0,242	0,134	0,185	0,00035
	0,263	0,128	0,211	0,00035
	0,263	0,435	0,020	0,00062
2	0,157	0,154	0,083	0,00011
	0,157	0,219	0,046	0,00020
	0,362	0,580	0,016	0,00091
	0,386	0,580	0,052	0,00056
	0,386	0,607	0,020	0,00090
	0,546	0,783	0,024	0,00117
	0,546	0,791	0,005	0,00189

Таблица 2. Случай 2. Вероятности $P(B \cdot C)$ в зависимости от коэффициентов $d_4(\mathbf{S})$ и $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$

Вариант	$d_4(\mathbf{S})$	$D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$	$d_2(\mathbf{X}) = d_2(\mathbf{Y})$	$P(B \cdot C)$
1	0,203	0,110	0,155	1,1E-07
	0,203	0,339	0,020	4,3E-07
	0,251	0,435	0,004	3,4E-07
	0,263	0,128	0,211	2,1E-07
	0,263	0,435	0,020	8,3E-07
	0,352	0,149	0,297	2,8E-07
	0,352	0,576	0,005	9,6E-07
2	0,489	0,721	0,034	1,1E-07
	0,489	0,728	0,020	1,9E-07
	0,546	0,783	0,024	3,4E-07
	0,546	0,791	0,005	9,4E-07
	0,549	0,791	0,014	4,8E-07
	0,701	0,909	0,010	9,8E-07
	0,701	0,911	0,0002	2,5E-06

Также можно говорить о том, что коэффициенты $d_2(\mathbf{X})$ и $d_2(\mathbf{Y})$ влияют на риск системы \mathbf{S} разнонаправленно.

3.3. ПРИМЕР 3.

Рассмотрим сетевую структуру \mathbf{S} в виде двух взаимосвязанных гауссовых подсистем \mathbf{X} и \mathbf{Y} , каждая из которых состоит из четырех элементов, являющихся стандартными гауссовыми случайными величинами. Корреляционная матрица приведена в таблице 3.

Таблица 3. Корреляционная матрица сетевой структуры из двух подсистем

	X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	1	0,7	0,6	0,4	0,8	0,75	0,2	0,2
X_2	0,7	1	0,1	0,5	0,7	0,8	0,2	0,4
X_3	0,6	0,1	1	0,3	0,5	0,5	0,1	0,1
X_4	0,4	0,5	0,3	1	0,4	0,3	0,2	0,2
Y_1	0,8	0,7	0,5	0,4	1	0,6	0,2	0,4
Y_2	0,75	0,8	0,5	0,3	0,6	1	0,1	0,25
Y_3	0,2	0,2	0,1	0,2	0,2	0,1	1	0,4
Y_4	0,2	0,4	0,1	0,2	0,4	0,25	0,4	1

Определим, насколько уменьшатся коэффициенты корреляционной взаимосвязи $d_8(\mathbf{S})$ и $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$ в результате удаления одного из элементов. Результаты приведены в таблице 4.

Таблица 4. Уменьшение коэффициентов корреляционной взаимосвязи $D_4(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$ и $d_8(\mathbf{S})$ в результате удаления из системы одного из элементов

Удаляемый элемент	Уменьшение коэффициента взаимосвязи	
	$\Delta d_8(\mathbf{S})$	$\Delta D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$
X_1	0,064	0,023
X_2	0,245	0,348
X_3	0,158	0,220
X_4	0,054	0,101
Y_1	0,091	0,148
Y_2	0,184	0,383
Y_3	-0,036	0,004
Y_4	-0,015	0,019

Видим, что наибольшее уменьшение корреляционной взаимосвязи в обоих случаях будет при удалении из системы элементов X_2 и Y_2 .

Далее для всех 28 случаев были определены изменения (уменьшения) коэффициентов корреляционной взаимосвязи $D_4(\mathbf{X} \cup \mathbf{Y})$ и $\Delta d_8(\mathbf{S})$ при уменьшении одного из парных коэффициентов корреляции между элементами системы на одну и ту же величину, равную, например, 0,03. Результаты для наибольших изменений приведены в таблице 5.

Таблица 5. Уменьшение величин $D_4(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$, $d_8(\mathbf{S})$ и $P(D)$ и вероятности отказа системы при уменьшении одного из парных коэффициентов корреляции на 0,03

Уменьшение показателя	Уменьшаемый коэффициент корреляции					
	$\rho_{X_2Y_2}$	$\rho_{X_3Y_2}$	$\rho_{X_2Y_1}$	$\rho_{X_2X_4}$	$\rho_{X_3Y_1}$	$\rho_{X_3X_4}$
$\Delta d_8(\mathbf{S})$	0,071	0,050	0,039	0,036	0,027	0,024
$\Delta D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$	0,095	0,062	0,046	0,039	0,031	0,025
$\Delta P(D)$	4,6%	2,4%	2,1%	1,1%	0,7%	1,0%

Продолжим рассмотрение этих 28 случаев. Считаем отказом каждого элемента попадание значения вне интервала $(-A, A)$, $A = 2,5$. В качестве отказа сетевой структуры (каскадного сбоя) будем считать ситуации, когда одновременно отказали хотя бы 3 элемента одной подсистемы и хотя бы два элемента другой подсистемы. Данная ситуация достаточно адекватно моделирует наступление каскадного сбоя. Вероятность отказа для системы \mathbf{S} $P(D) = 0,000545$. Оценим для всех 28 случаев, насколько она изменится при уменьшении одного из парных коэффициентов корреляции на 0,03. Результаты приведены в последней строке таблицы 4.

Таким образом, установили, что на риск отказа сетевой структуры в виде каскадного сбоя в первую очередь влияет высокая корреляция между элементами X_2 и Y_2 . Например, уменьшение коэффициента корреляции ρ_{X_2, Y_2} до 0,25 позволит снизить вероятность каскадного сбоя в системе \mathbf{S} на 63,3%, или в 2,72 раза. Отметим, что одновременно у критических элементов присутствует возможность снижения коэффициента парной корреляции между ними (определитель корреляционной матрицы остается положительным).

Следовательно, можно сформулировать следующую гипотезу: *В качестве индикатора риска возникновения каскадных сбоев в сетевой структуре может быть использован коэффициент корреляционной взаимосвязи между ее подсистемами. Для снижения риска возникновения каскадных сбоев в сетевой структуре следует уменьшать тесноту корреляции между наиболее взаимосвязанными элементами подсистем.*

4. Заключение

Введена скалярная мера взаимосвязи между несколькими произвольно распределенными непрерывными случайными векторами, позволяющая оценить тесноту взаимосвязи между различными подсистемами в сетевых структурах. Для введенной скалярной меры взаимосвязи получен ряд частных результатов. Предложенный коэффициент может использоваться для иссле-

дования сетевых структур, состоящих из множества подсистем. В частности, он может применяться в качестве индикатора критического уровня риска каскадных сбоев во взаимозависимых сетях. Показано, что для снижения риска возникновения каскадных сбоев следует уменьшать тесноту корреляции между наиболее взаимосвязанными элементами подсистем.

Литература

1. АЛЕКСЕЕВ В.В., СОЛОЖЕНЦЕВ Е.Д. *Логико-вероятностный подход к управлению риском и эффективностью в структурно-сложных системах* // Информационно-управляющие системы. – 2009. – №6(43). – С. 67–71.
2. АШНИНА Ю.А. БОРИСОВ А.В., БОРИСОВА Н.И. *Развитие инфраструктуры современного города: социальные и экономические аспекты* // NovaInfo. – 2015. – №39. – С. 177–183.
3. БУЛАТОВ В.В. *Введение в математические методы моделирования сложных систем*. – М.: ОнтоПринт, 2018. – 338 с.
4. МИХАЙЛОВ Г.А., ВОЙТИШЕК А.В. *Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло*. – М.: Издательский центр «Академия», 2006. – 368 с.
5. НОВИКОВ Д.А. *Сетевые структуры и организационные системы*. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 102 с.
6. *Современный философский словарь*: 2-е изд. / Под общ. ред. В.Е. Кемерова. – М.: ПАНПРИНТ, 1998. – 1064 с.
7. ТЫРСИН А.Н. *Мера совместной корреляционной зависимости многомерных случайных величин* // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2014. – Т. 80, №1. – С. 76–80.
8. ТЫРСИН А.Н. *Скалярная мера взаимосвязи между несколькими случайными векторами* // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2022. – Т. 88, №3. – С. 73–80.
9. ФИХТЕНГОЛЬЦ Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. В 3 т. Т.1. – 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 680 с.
10. ХАРДЛЕ В. *Прикладная непараметрическая регрессия*: Пер. с англ. – М.: Мир, 1993. – 349 с.

11. BEHRENSDORF J., BROGGI M., BEER M. *Reliability Analysis of Networks Interconnected with Copulas* // ASCE-ASME. Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part B Mechanical Engineering. – 2019. – Vol.5. – P. 041006-9.
12. BULDYREV S.V., PARSHANI R., PAUL G., STANLEY H.E., HAVLIN SH. *Catastrophic cascade of failures in interdependent networks* // Nature. – 2010. – Vol. 464. – P. 1025–1028.
13. CHERUBINI U., LUCIANO E., VECCHIATO W. *Copula Methods in Finance*. – Wiley, Chichester, UK, 2004.
14. ENGLE R.F. *Anticipating Correlations. A New Paradigm for Risk Management*. – Princeton University Press, 2009.
15. GOODWIN B.K., HUNGERFORD A. *Copula-Based Models of Systemic Risk in us Agriculture: Implications for Crop Insurance and Reinsurance Contracts* // American Journal of Agricultural Economics. – 2014. – Vol. 97, No 3. – P. 879–896.
16. GORBAN A.N., TYUKINA T.A., POKIDYSHEVA L.I., SMIRNOVA E.V. *Dynamic and thermodynamic models of adaptation* // Physics of Life Reviews. – 2021. – Vol. 37. – P.17–64.
17. JOE H. *Dependence Modeling with Copulas*. – Chapman and Hall/CRC, New York, 2014.
18. LAPRIE J.C., KANOUN K., KANICHE M. *Modeling interdependencies between the electricity and information infrastructures* // SAFECOMP-2007. – 2007. – Vol. 4680. – P. 54–67.
19. PENA D., RODRIGUEZ J. *Descriptive Measures of Multivariate Scatter and Linear Dependence* // Journal of Multivariate Analysis. – 2003. – Vol. 85, No 2. – P. 361–374.
20. RAM M., SINGH S.B. *Analysis of Reliability Characteristics of a Complex Engineering System under Copula* // Journal of Reliability and Statistical Studies. – 2009. – Vol. 2, No 1. – P. 91–102.
21. RINALDI S., PEERENBOOM J., KELLY T. *Identifying, understanding, and analyzing critical infrastructure interdependencies* // IEEE Control Systems Magazine. – 2001. – Vol. 21. – P. 11–25.

RISK INDICATORS OF CASCADING FAILURES IN INTERCONNECTED NETWORK STRUCTURES

Alexander Tyrsin, Science and Engineering Center “Reliability and Resource of Large Systems and Machines”, Ural Branch of RAS, Yekaterinburg, Institute of Economics, Ural Branch of RAS, Doctor of Science, professor (at2001@yandex.ru).

Stanislav Kashcheev, South-Ural State University, Chelyabinsk (kashcheevs@susu.ru).

Abstract: The behavior of real systems is often stochastic, and the connections between their elements can be adequately described as correlations. In recent years, there have been trends of increasing and complicating modern networks with the growth of their dependence on each other. We observe how several networks are combined into one interdependent network structure. This leads to an increase in the risks that the failure of nodes in one network may lead to the failure of dependent nodes in other networks. As a result of such failures, catastrophic cascade failures can occur in such interconnected network structures. Given the scale of such structures, which are often critical infrastructures, this problem becomes very relevant. The article introduces a scalar measure of the relationship between several arbitrarily distributed continuous random vectors. It allows you to assess the closeness of the relationship between different subsystems (networks) in network structures. Applied to Gaussian model network structures, the influence of the closeness of the relationship between subsystems on the risk of cascading failures has been studied. The probability of such failures was used as the risk value. As an indicator of the risk of cascading failures in the network structure, it is proposed to use the coefficient of correlation between its subsystems. And to reduce the risk of cascading failures in the network structure, it is necessary to reduce the tightness of correlation between the most interconnected elements of subsystems.

Keywords: network structure, model, risk, interconnection, cascading failure, system.

УДК 519.237.5 + 330.131.7

ББК 22.172 + 65.2/4

DOI: 10.25728/ubs.2023.102.5

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии М.Ф. Караваем.*

Поступила в редакцию 12.10.2022.

Опубликована 31.03.2023.