МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ И ОБОБЩЁННАЯ H_2-НОРМА ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ДЕСКРИПТОРНОЙ СИСТЕМЫ[1]

Бубнова Е. С.[2]

(*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород*)

Рассматривается линейная дискретная дескрипторная система, не обладающая свойством причинности, на конечном горизонте при допустимых начальных условиях и возмущении ограниченной энергии, т.е. ограниченной l_2-нормы. Вводится понятие обобщённой H_2-нормы как нормы линейного оператора, порождённого этой системой. Приводится метод вычисления обобщённой H_2-нормы с помощью решения разностных проекционных уравнений Ляпунова. Показано, что если сумма квадратичных форм начального и конечного состояний и суммы квадратичных форм возмущения на конечном интервале времени ограничена сверху заданной величиной, то множеством достижимости данной системы является изменяющийся во времени эллипсоид, матрица которого удовлетворяет разностному проекционному уравнению Ляпунова. Установлено, что обобщённая H_2-норма системы при ненулевых начальных условиях совпадает с величиной максимальной на заданном интервале времени полуоси эллипсоидального множества достижимости для данного выхода системы. В качестве иллюстрации полученных результатов приводится пример дескрипторной системы четвёртого порядка, для которой вычислена обобщённая H_2-норма и построены множества достижимости. Приводятся графики результатов численного моделирования и проекций множеств достижимости на плоскости, соответствующие прямой и обратной подсистемам.

Ключевые слова: дескрипторная система, обобщённая H_2-норма, множество достижимости, проекционное уравнение Ляпунова.

1. Введение

Дескрипторные системы позволяют составлять математические модели широкого класса систем, в том числе физических систем с нединамическими ограничениями или скачкообразным поведением [6, 11, 17]. При отсутствии сингулярности дескрип-

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект FSWR-2023-0034) и научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего».*

[2] *Елена Сергеевна Бубнова, аспирант (bubnova@itmm.unn.ru).*

торные системы включают в себя обыкновенные системы, описываемые только дифференциальными или только разностными уравнениями. Для многих фундаментальных понятий и результатов из теории обыкновенных систем получены обобщения на дескрипторные системы: исследование управляемости и наблюдаемости [6, 11], устойчивость и стабилизация [15], теоремы и уравнения Ляпунова [6, 17], $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ управление [13, 14, 18], робастное управление [9, 21], анизотропийное управление [5, 8].

Одним из важных показателей качества функционирования объекта управления является мера его реакции на внешнее воздействие и ненулевые начальные условия. Если под реакцией объекта понимаются максимальные значения целевых переменных, то такой мерой является обобщённая $\mathcal{H}_2$-норма. Понятие обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормы, отвечающее максимальному уклонению при внешнем возмущении ограниченной энергии и нулевых начальных условиях, было введено в [19]. Вычисление обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормы для линейной непрерывной нестационарной системы на конечном горизонте при ненулевых начальных условиях показано в [2], для дискретой системы – в [1]. Обобщённая $\mathcal{H}_2$-норма линейной дескрипторной системы непрерывного времени на бесконечном горизонте при нулевых начальных условиях вычислена в [7].

Для непрерывных и дискретных линейных нестационарных систем в [3, 4] продемонстрирована связь обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормы с множествами достижимости системы при совместном ограничении на начальное состояние и внешнее возмущение. Показано, что множествами достижимости системы являются эллипсоиды, в том числе вырожденные в случае вырожденных квадратичных форм в совместном ограничении на начальное состояние и возмущение. Установлено, что величина максимальной на заданном интервале времени полуоси эллипсоидального множества достижимости для данного выхода системы совпадает с обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормой системы при ненулевых начальных условиях. Эллипсоидальные оценки множеств достижимости дескрипторных систем с ограниченными по ∞-норме входными возмущениями получены в [12] для безымпульсных систем непрерывного времени с нулевыми начальными условиями и в [10, 16, 20] для систем дискретного времени, обладающих свойством причинности.

В данной работе понятие обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормы распространяется на линейные дискретные дескрипторные системы, в том числе не обладающие свойством причинности. Приводится способ вычисления обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормы таких систем с использованием обобщённых проекционных уравнений Ляпунова. Так как текущее состояние систем, не обладающих свойством причинности, зависит не только от предыдущих моментов времени, но и от последующих, определение обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормы из [1] не может быть использовано. Для систем, обладающих свойством причинности, введённая обобщённая $\mathcal{H}_2$-норма совпадает с обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормой прямой подсистемы. Показано, что множествами достижимости таких систем являются эллипсоиды, матрицы которых удовлетворяют обобщённому проекционному уравнению Ляпунова. Полученные результаты продемонстрированы на примере.

2. Предварительные сведения

Рассмотрим линейную дискретную дескрипторную систему, определённую на конечном горизонте и описываемую уравнениями

$$\begin{aligned} Ex_{k+1} &= Ax_k + Bv_k, \\ z_k &= Cx_k, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ – состояние объекта, $v = \{v_k\} \in l_2([0,\, L-1],\, \mathbb{R}^{n_v})$ – внешнее возмущение, $z_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ – целевой выход, $E \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_v}$, $C \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$ – стационарные матрицы, $\operatorname{rank}(E) < n_x$. Будем считать, что матричный пучок $(\lambda E - A)$ является регулярным, т.е. существует постоянная $\alpha \in \mathbb{C}$, для которой $\det(\alpha E - A) \neq 0$. В этом случае его можно представить в канонической форме Вейерштрасса [6, 17], что означает существование невырожденных матриц W и T таких, что:

$$E = W \begin{bmatrix} I_{n_f} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} T, \qquad A = W \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n_\infty} \end{bmatrix} T,$$

здесь I_m – единичная матрица порядка m, J и N – жордановы матрицы, N – нильпотентная матрица индекса ν, т.е. $N^\nu = 0$, а $N^s \neq 0$, $s = 1, \ldots, \nu - 1$, n_f и n_∞ – размерности подпространств, являющихся линейными оболочками собственных векторов, отвечающих конечным и бесконечным собственным числам соответственно. Представим матрицы B и C системы (1) следующим образом:

$$B = W \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} T, \tag{2}$$

где разбиение на блоки соответствует разбиению матриц E и A, и сделаем замену переменных $\xi = Tx$, $\xi = \mathrm{column}(\xi_1, \xi_2)$, тогда после домножения слева на матрицу W^{-1} получим декомпозицию системы (1):

$$\begin{aligned} \xi_{1,k+1} &= J\xi_{1,k} + B_1 v_k, \\ N\xi_{2,k+1} &= \xi_{2,k} + B_2 v_k, \\ z &= C_1\xi_{1,k} + C_2\xi_{2,k}. \end{aligned} \tag{3}$$

Система (3) имеет единственное решение для начальных условий $\xi_{1,0}$, конечных условий $\xi_{2,L}$ и внешнего возмущения $\{v_k\}$:

$$\begin{aligned} \xi_{1,k} &= J^k \xi_{1,0} + \sum_{j=0}^{k-1} J^{k-j-1} B_1 v_j, \\ \xi_{2,k} &= N^{L-k}\xi_{2,L} - \sum_{j=0}^{L-k-1} N^j B_2 v_{k+j}. \end{aligned} \tag{4}$$

Отметим, что в системе допускается нарушение свойства причинности – текущее состояние системы может зависеть от будущих значений входного сигнала и конечного состояния ξ_L. Будем считать, что начальные условия x_0 системы (1) являются допустимыми, т.е. принадлежат следующему множеству:

$$\chi_0 = \left\{ T^{-1} \begin{bmatrix} \xi_{1,0} \\ N^L \xi_{2,L} - \sum\limits_{j=0}^{L-1} N^j B_2 v_j \end{bmatrix} : \quad \begin{matrix} \xi_{1,0} \in \mathbb{R}^{n_f} \\ \xi_{2,L} \in \mathbb{R}^{n_\infty} \end{matrix} \right\}, \tag{5}$$

тогда решение может быть записано в виде

$$x_k = F_k E x_0 + F_{k-L-1} A x_L + \sum_{j=0}^{L-1} F_{k-j-1} B v_j, \tag{6}$$

где

$$F_k = \begin{cases} T^{-1}\begin{bmatrix} J^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W^{-1}, & k = 0, 1, 2, ..., \\ T^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -N^{-k-1} \end{bmatrix} W^{-1}, & k = -1, -2, ... \end{cases}$$

Для дальнейшего изложения нам также потребуются левый P_l и правый P_r проекторы на подпространство матричного пучка $(\lambda E - A)$, соответствующее конечным собственным значениям:

$$P_l = W\begin{bmatrix} I_{n_f} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W^{-1}, \qquad P_r = T^{-1}\begin{bmatrix} I_{n_f} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T.$$

3. Обобщённая $\mathcal{H}_2$-норма

Система (1) порождает линейный оператор S, отображающий последовательность возмущений $v = \{v_k\}$ и проекции граничных состояний x_0, x_L в последовательность целевых выходов $z = \{z_k\}$. Введём в рассмотрение l_2-норму внешнего возмущения и l_∞-норму целевого выхода:

$$\|v\|_{l_2} = \left(\sum_{k=0}^{L-1} |v_k|^2\right)^{1/2}, \qquad \|z\|_{l_\infty} = \sup_{k=0,\dots,L} |z_k|.$$

Определим обобщённую $\mathcal{H}_2$-норму системы (1) как норму линейного оператора S соотношением

$$\|S\|^2_{\infty/2} = \sup_{(x_0, x_L, v)\neq 0} \frac{\|z\|^2_{l_\infty}}{\|v\|^2_{l_2} + x_0^\top R_0 x_0 + x_L^\top R_L x_L}, \tag{7}$$

где R_0 и R_L – весовые матрицы, отражающие относительную важность учёта неопределённостей граничных условий и внешнего возмущения. Будем полагать, что данные матрицы удовлетворяют условиям

$$R_0 = P_r^\top R_0 P_r = R_0^\top \succcurlyeq 0, \qquad \operatorname{rank} R_0 = n_f,$$

$$R_L = (I - P_r)^\top R_L (I - P_r) = R_L^\top \succcurlyeq 0, \qquad \operatorname{rank} R_L = n_\infty,$$

что позволяет учитывать неопределённость проекций начального и конечного состояний на подпространства, отвечающие конечным и бесконечным собственным значениям соответственно.

Теорема 1. *Обобщённая $\mathcal{H}_2$-норма линейной дескрипторной стационарной системы* (1) *на конечном горизонте может быть вычислена как*

$$\gamma = \sup_{k=0,\dots,L} \lambda_{max}^{1/2}\big(CY_kC^\top\big), \tag{8}$$

где $Y_k = Y_k^\top \succcurlyeq 0$ – решение проекционного дискретного уравнения Ляпунова

$$\begin{gathered} EY_{k+1}E^\top = AY_kA^\top + P_lBB^\top P_l^\top - (I-P_l)BB^\top(I-P_l)^\top, \\ P_rY = YP_r^\top \end{gathered} \tag{9}$$

с граничными условиями

$$R_0Y_0R_0 = R_0, \qquad R_LY_LR_L = R_L. \tag{10}$$

Доказательство. Обобщённая $\mathcal{H}_2$-норма системы (1) в каноническом представлении Вейерштрасса принимает вид:

$$\|S\|_{\infty/2}^2 = \sup_{(\xi_{1,0},\xi_{2,L},v)\neq 0} \frac{\sup\limits_{k=0,\dots,L} |z_k|^2}{\|v\|_{l_2}^2 + \xi_{1,0}^\top R_{11}\xi_{1,0} + \xi_{2,L}^\top R_{22}\xi_{2,L}}, \tag{11}$$

где $T^{-\top}R_0T^{-1} = \mathrm{diag}(R_{11},0)$, $T^{-\top}R_LT^{-1} = \mathrm{diag}(0,R_{22})$.

Построим вспомогательные векторы целевого выхода $\widehat{z} = \mathrm{column}(z_0,z_1,\dots,z_L)$ и входа $\widehat{v} = \mathrm{column}(R_{11}^{1/2}\xi_{1,0}, v_0,\dots,v_{L-1}, R_{22}^{1/2}\xi_{2,L})$ системы (3). В этом случае оператор $S : \widehat{v} \mapsto \widehat{z}$ задаётся следующей матрицей:

$$\begin{bmatrix} C_1R_{11}^{-1/2} & -C_2B_2 & -C_2NB_2 & \dots & C_2N^LR_{22}^{-1/2} \\ C_1JR_{11}^{-1/2} & C_1B_1 & -C_2B_2 & \dots & C_2N^{L-1}R_{22}^{-1/2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1J^LR_{11}^{-1/2} & C_1J^{L-1}B_1 & C_1J^{L-2}B_1 & \dots & C_2R_{22}^{-1/2} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Обобщённая $\mathcal{H}_2$-норма может быть вычислена с помощью двойственного оператора S^* следующим образом:

$$\|S\|_{\infty/2} = \|S^*\|_{2/1} = \|S^\top\|_{2/1} = \lambda_{gmax}^{1/2}(SS^\top), \tag{13}$$

здесь через $\lambda_{gmax}(M)$ обозначено обобщённое максимальное собственное число некоторой квадратной матрицы M, т.е. $\lambda_{gmax}(M) = \max\limits_i \lambda_{max}(M_{i,i})$, где $M_{i,i} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ – i-й диагональный блок матрицы M при разбиении на блоки размерности $n_z \times n_z$.

Диагональный блок матрицы $SS^\top$ можно представить в виде

(14) $$(SS^\top)_{k,k} = C_1 X_k^1 C_1^\top + C_2 X_k^2 C_2^\top, \qquad k = 0, \ldots, L,$$

где матрицы X_k^1 и X_k^2 удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

(15)
$$\begin{aligned} &X_0^1 = R_{11}^{-1}, \qquad X_k^1 = J X_{k-1}^1 J^\top + B_1 B_1^\top, \qquad k = 1, \ldots, L, \\ &X_N^2 = R_{22}^{-1}, \qquad X_{k-1}^2 = N X_k^2 N^\top + B_2 B_2^\top, \qquad k = 1, \ldots, L. \end{aligned}$$

Положим

(16) $$Y_k = T^{-1} \begin{bmatrix} X_k^1 & 0 \\ 0 & X_k^2 \end{bmatrix} T^{-\top},$$

тогда уравнения (15) после перехода к исходным матрицам примут вид (9), (10).

Замечание 1. Если в системе (1) выполняется свойство причинности по отношению к целевому выходу и внешнему возмущению, т.е. $C_2 N^k B_2 = 0$, $k \geqslant 0$, обобщённая $\mathcal{H}_2$-норма может быть вычислена как (8), где $Y_k = Y_k^\top \succcurlyeq 0$ – решение проекционного дискретного уравнения Ляпунова

(17) $$E Y_{k+1} E^\top = A Y_k A^\top + P_l B B^\top P_l^\top, \qquad Y = P_r Y$$

с начальными условиями, удовлетворяющими уравнению $R_0 Y_0 R_0 = R_0$.

Замечание 2. Предположим, что начальные условия системы (1) не являются допустимыми, тогда в функционале (7) можно учесть невязку начальных условий целевого выхода

$$z_{-1} = C_2 \left(\xi_{2,0} - N^L \xi_{2,L} + \sum_{j=0}^{L-1} N^j B_2 v_j \right)$$

и определить обобщённую $\mathcal{H}_2$-норму системы (1) как

(18) $$\|S\|_{\infty/2}^2 = \sup_{(x_0, x_L, v) \neq 0} \frac{\sup\limits_{k=-1,\ldots,L} |z_k|^2}{\|v\|_{l_2}^2 + x_0^\top R_0 x_0 + x_L^\top R_L x_L}.$$

Данный функционал может быть вычислен по формуле

$$\gamma = \sup_{k=-1,\ldots,L} \lambda_{max}^{1/2}\big(CY_kC^\top\big),$$

где $Y_{-1} = T^{-1}\,\mathrm{diag}(0, X_{-1}^2)T^{-\top}$, здесь X_{-1}^2 определяется рекуррентным соотношением (15) при $k = 0$.

Теорема 2. *Предположим, что обобщённая $\mathcal{H}_2$-норма линейной дескрипторной системы* (1) *равна γ^* и достигается в момент времени $k = k^*$, тогда наихудшие граничные условия и внешние возмущения определяются соотношениями:*

$$\begin{aligned}\big[I_{n_f} \quad 0\big]\,Tx_0 &= \frac{1}{\gamma^*}R_{11}^{-1}(J^\top)^{k^*}C_1^\top e^*,\\ \big[0 \quad I_{n_\infty}\big]\,Tx_L &= \frac{1}{\gamma^*}R_{22}^{-1}(N^\top)^{L-k^*}C_2^\top e^*,\\ v_k &= \frac{1}{\gamma^*}B^\top F_{k^*-k-1}^\top C^\top e^*,\end{aligned} \tag{19}$$

где $k = 0,\ldots,L-1$, $e^* = e_{max}(CY_{k^*}C^\top)$ – нормированный собственный вектор матрицы, соответствующий максимальному собственному числу.

Доказательство. Для получения выражения (19) предположим, что значение обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормы равно γ^* и достигается в момент времени $k = k^*$. В этом случае элемент, на котором достигается значение нормы, может быть выбран как

$$\widehat{z}^* = \mathrm{column}(0,\ldots,0,z_{k^*},0,\ldots,0), \qquad z_{k^*} = e_{max}(CY_{k^*}C^\top).$$

Тогда справедливы следующие вычисления:

$$\|\widehat{z}^*\|_{(1,2)} = |e^*| = 1, \quad \|S^*\widehat{z}^*\|_{(2,2)} = e^{*\top}(CY_{k^*}C^\top)e^* = \gamma^*.$$

Наихудшие граничные условия и внешнее возмущение определяются как $\widehat{v}^* = S^*\widehat{z}^*$. Нормируя вектор $\widehat{v}^*$, приходим к выражению (19).

4. Эллипсоидальные множества достижимости

Предположим, что начальное состояние x_0, конечное состояние x_L и возмущение $v = \{v_k\}$, $k = 0, \ldots, L-1$, системы (1) принадлежат множеству допустимых граничных условий и возмущений, определяемому следующим образом:

$$\mathcal{S}_k(Q_0, Q_L, G) = \Big\{(x_0, x_L, v) : x_0 = Q_0^{1/2}\eta, \quad x_L = Q_L^{1/2}\zeta, \\ v_s = G_s^{1/2}\omega_s, \quad |\eta|^2 + |\zeta|^2 + \sum_{s=0}^{L-1} |\omega_s|^2 \leqslant 1\Big\} \tag{20}$$

для заданных весовых матриц $Q_0 = Q_0^\top \succcurlyeq 0$, $Q_L = Q_L^\top \succcurlyeq 0$, $G = \{G_s = G_s^\top \succcurlyeq 0\}_{s=0}^{L-1}$, удовлетворяющих условиям

$$Q_0 = P_r Q_0 P_r^\top, \qquad Q_L = (I - P_r) Q_L (I - P_r)^\top.$$

Поставим задачу описать множество состояний, в которых система может оказаться в произвольный промежуточный момент времени k при всевозможных граничных состояниях и возмущениях, принадлежащих множеству $\mathcal{S}_k(Q_0, Q_L, G)$.

Введём в рассмотрение множество

$$\mathcal{E}(Q) = \{x = Q^{1/2}\varkappa \quad \forall \varkappa \in \mathbb{R}^n : |\varkappa| \leqslant 1\},$$

которое описывает эллипсоид в пространстве $\mathbb{R}^n$. Заметим, что если $Q \succ 0$, то данное множество можно переписать в виде стандартного уравнения эллипсоида $\mathcal{E}(Q) = \{x : x^\top Q^{-1} x \leqslant 1\}$. Если $Q \succcurlyeq 0$, то $\mathcal{E}(Q)$ – вырожденный эллипсоид, размерность которого совпадает с рангом матрицы Q.

Множеством достижимости $\mathcal{D}_k(Q_0, Q_L, G)$ системы (1) в момент времени k будем называть множество всевозможных состояний системы в момент времени k при всех допустимых граничных условиях x_0, x_L и возмущениях v_s, $s = 0, \ldots, L-1$, принадлежащих множеству $\mathcal{S}_k(Q_0, Q_L, G)$.

Теорема 3. *Множеством достижимости системы* (1) *в момент времени* $k \geqslant 0$ *при всех допустимых начальных состояниях и возмущениях, принадлежащих множеству* $\mathcal{S}_k(Q_0, Q_L, G)$,

$k = 0, \dots, L$, *является эллипсоид*

$$\mathcal{D}_k(Q_0, Q_L, G) = \mathcal{E}(Y_k), \tag{21}$$

матрица Y_k *которого является решением проекционного дискретного уравнения Ляпунова*

$$\begin{aligned} EY_{k+1}E^\top &= AY_kA^\top + P_l\widehat{G}_kP_l^\top - (I - P_l)\widehat{G}_k(I - P_l)^\top, \\ P_rY_k &= Y_kP_r^\top, \end{aligned} \tag{22}$$

$\widehat{G}_k = BG_kB^\top$, *с граничными условиями*

$$P_rY_0P_r^\top = Q_0, \qquad (I - P_r)Y_L(I - P_r)^\top = Q_L. \tag{23}$$

Доказательство. С учетом (20) запишем (6) в виде

$$x_k = S_kg_k, \qquad g_k^\top g_k \leqslant 1, \tag{24}$$

где

$$S_k = \begin{bmatrix} F_kEQ_0^{\frac{1}{2}} & F_{k-1}BG_0^{\frac{1}{2}} & \cdots & F_{k-L}BG_{L-1}^{\frac{1}{2}} & F_{k-L-1}AQ_L^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Отметим, что следующие два множества равны [4]:

$$\begin{aligned} &\{x = S_kg \quad \forall g \in \mathbb{R}^{2n_x+Ln_v} : |g| \leqslant 1\} = \\ &\qquad = \{x = (S_kS_k^\top)^{1/2}w \quad \forall w \in \mathbb{R}^{n_x} : |w| \leqslant 1\}. \end{aligned} \tag{26}$$

Поэтому для нахождения множества достижимости вычислим матрицу соответствующего эллипсоида $S_kS_k^\top$:

$$\begin{aligned} S_kS_k^\top = F_kEQ_0E^\top F_k^\top + F_{k-L-1}AQ_LA^\top F_{k-L-1}^\top + \\ + \sum_{j=0}^{L-1} F_{k-j-1}BG_jB^\top F_{k-j-1}^\top. \end{aligned} \tag{27}$$

Заметим, что $S_kS_k^\top = Y_k \succcurlyeq 0$, где Y_k – решение уравнений (22) с граничными условиями (23), что и завершает доказательство теоремы.

Далее рассмотрим множество всевозможных выходов z_k системы (1) в момент времени k. Если $x_k \in \mathcal{E}(Y_k)$, тогда

$$z_k \in \{z = (CY_kC^\top)^{1/2}\varkappa \quad \forall \varkappa \in \mathbb{R}^{n_z} : |\varkappa| \leqslant 1\}. \tag{28}$$

Таким образом, множество возможных выходов системы образует эллипсоид $\mathcal{E}(CY_kC^\top)$, а максимальное значение евклидовой нормы выхода совпадает с величиной максимальной полуоси этого эллипсоида:

$$\max_{(x_0, x_L, v) \in \mathcal{S}_k(Q_0, Q_L, G)} |z_k| = \lambda_{max}^{1/2}(CY_kC^\top).$$

Если $Q_0R_0 = P_r$, $Q_LR_L = (I - P_r)$, $G_s = I$, $s = 0, \dots, L-1$, то максимальное значение этой величины на заданном отрезке времени $[0, L]$ совпадает с обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормой системы (1) при ненулевых граничных условиях.

5. Результаты численного моделирования

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим линейную дескрипторную систему (1), матрицы которой имеют вид

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0{,}75 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{29}$$

$$B^\top = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для численного моделирования выберем отрезок $[0, 100]$ и весовые матрицы

$$\begin{aligned} R_0 &= \mathrm{diag}(R_{11}, 0), \\ R_L &= \mathrm{diag}(0, I_2), \end{aligned} \qquad R_{11} = \begin{bmatrix} 5{,}112 & -4{,}888 \\ -4{,}888 & 5{,}112 \end{bmatrix}.$$

В результате решения уравнений (9), (10) получено значение обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормы системы $\gamma^* = 2{,}07$, которое достигается в момент времени $k^* = 48$. На рис. 1 представлен график зависимости от времени целевого выхода z_k системы (29), отвечающего наихудшим граничным условиям и внешнему возмущению (19). Из представленного графика видно, что целевой выход достигает значения обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормы в момент времени $k = 48$ и не превосходит его на всём отрезке времени.

Для данной системы построим множества достижимости при выбранных параметрах $Q_0 = \mathrm{diag}(R_{11}^{-1}, 0)$, $Q_L = \mathrm{diag}(0, I_2)$, $G_k = 1$, $k = 0, \dots, 99$. В результате решения уравнений (22), (23) получены эллипсоидальные множества (21). На рис. 2 представлены проекции множеств достижимости на плоскости (x_1, x_2) и (x_3, x_4) в моменты времени $k = 0$, $k = 3$, $k = 100$. Отметим, что рассматриваемая система записана в канонической форме Вейерштрасса, поэтому начиная с некоторого момента времени проекция множества достижимости на плоскость (x_1, x_2) перестает изменяться, так как влияние начальных условий становится несущественным. Проекция множества достижимости на плоскость (x_3, x_4), напротив, стационарна в начале и меняется в конце временного отрезка из-за влияния проекции граничного условия x_L.

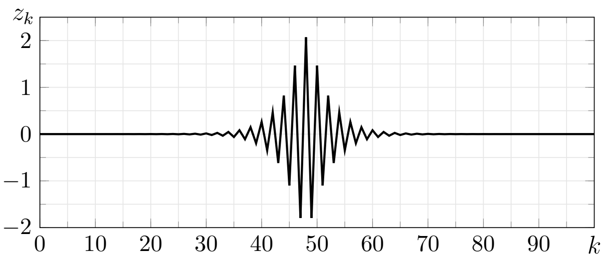

Рис. 1. График зависимости от времени целевого выхода z_k при наихудших граничных условиях и внешнем возмущении

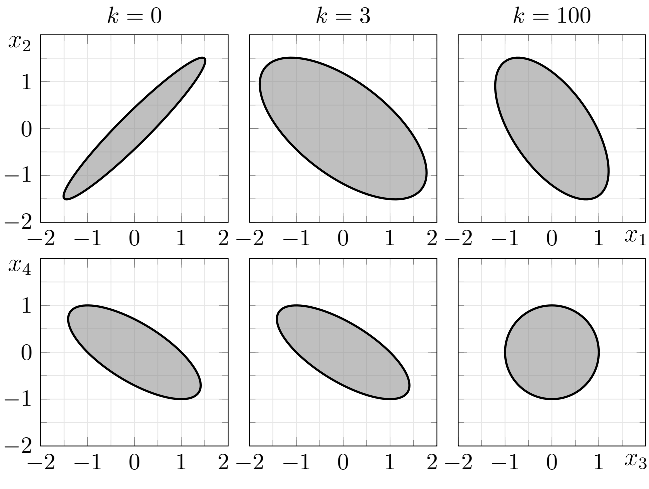

Рис. 2. Проекции множеств достижимости на плоскости (x_1, x_2), (x_3, x_4) в моменты времени $k = 0$, $k = 3$, $k = 100$

6. Заключение

Для линейных дискретных дескрипторных систем на конечном промежутке времени вводится понятие обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормы и приводится алгоритм её вычисления, основанный на решении разностного проекционного уравнения Ляпунова. Показано, что множествами достижимости таких систем при совместном ограничении на начальные и конечные условия и внешнее возмущение являются эллипсоиды, матрицы которых могут быть получены при решении разностного проекционного уравнения Ляпунова. Проиллюстрировано, что величина максимальной на заданном интервале времени полуоси эллипсоидального множества достижимости для данного выхода системы совпадает с обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормой системы. Возможность использования полученных результатов подтверждается с помощью численного моделирования.

Литература

1. БАЛАНДИН Д.В., БИРЮКОВ Р.С., КОГАН М.М. *Минимаксное управление уклонениями выходов линейной дискретной нестационарной системы* // Автоматика и телемеханика – 2019. – №12. – С. 3–23.
2. БАЛАНДИН Д.В., БИРЮКОВ Р.С., КОГАН М.М. *Оптимальное управление максимальными уклонениями выходов линейной нестационарной системы* // Автоматика и телемеханика. – 2019. – №10. – С. 37–61.
3. БАЛАНДИН Д.В., БИРЮКОВ Р.С., КОГАН М.М. *Эллипсоидальные множества достижимости линейных нестационарных систем в задачах управления и оценивания* // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55, №11. – С. 1485–1498.
4. БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М.М. *Управление и оценивание в линейных нестационарных системах на основе эллипсоидальных множеств достижимости* // Автоматика и телемеханика. – 2020. – №8. – С. 8–28.

5. БЕЛОВ А.А., АНДРИАНОВА О.Г. *Синтез субоптимальных анизотропийных регуляторов по состоянию для дескрипторных систем на основе линейных матричных неравенств* // Автоматика и телемеханика. – 2016. – №10. – С. 40–56.
6. БЕЛОВ А.А., КУРДЮКОВ А.П. *Дескрипторные системы и задачи управления*. – М.: Физматлит, 2015. – 270 с.
7. БУБНОВА Е.С., БИРЮКОВ Р.С. *Обобщённая $\mathcal{H}_2$-норма дескрипторных систем* // Тезисы научной конференции «Летняя школа робототехники в Сириусе–2022». – С. 11–12.
8. ANDRIANOVA O.G., BELOV A.A. *Robust Anisotropy-Based Control for Uncertain Descriptor Systems with Transient Response Constraints* // IFAC-PapersOnLine. – 2018. – Vol. 51, No. 32. – P. 515–520.
9. BELOV A.A., ANDRIANOVA O.G. *Robust state-feedback H_∞ control for discrete-time descriptor systems with norm-bounded parametric uncertainties* // Int. Journal of Systems Science. – 2019. – Vol. 50, No. 6. – P. 1303–1312.
10. CAO Y., FENG Z., LIU Y. *Real-time Reachable Set Estimation of Discrete-time Singular Systems* // Int. Conf. on Information, Cybernetics, and Computational Social Systems. – 2021. – P. 127–130.
11. DUAN G. *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems*. – Springer, 2010.
12. FENG Z., LAM. J. *On reachable set estimation of singular systems* // Automatica. – 2015. – Vol. 52. – P. 146–153.
13. FENG Y., YAGOUBI M. *On State Feedback H_∞ Control for Discrete-Time Singular Systems* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2013. – Vol. 58, No. 10. – P. 2674–2679.
14. ISHIHARA J.Y., TERRA M.H., SALES R.M. *The full information and state feedback H_2 optimal controllers for descriptor systems* // Automatica – 2003. – Vol. 39. – P. 391–402.

15. LEE L., CHEN J.L. *Strictly positive real lemma and absolute stability for discrete-time descriptor systems* // IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. – 2003. – Vol. 50, No. 6. – P. 788–794.
16. LI J., FENG Z., ZHANG C. *Reachable Set Estimation for Discrete-Time Singular Systems* // Asian Journal of Control. – 2017. – Vol. 19. – P. 1862–1870.
17. STYKEL T. *Analysis and numerical solution of generalized Lyapunov equations*: Ph.D. thesis, Institut fur Mathematik, Techische Universitat Berlin. – Berlin, 2002.
18. STYKEL T. *On some norms for descriptor systems* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2006. – Vol. 51, No. 5. – P. 842–847.
19. WILSON D.A. *Convolution and Hankel Operator Norms for Linear Systems* // IEEE Trans. Autom. Control. – 1989. – Vol. 34. – P. 94–97.
20. ZHANG Z., FENG Z. *Enclosing ellipsoid-based reachable set estimation for discrete-time singular systems* // Int. Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2022. – Vol. 32. – P. 9294–9306.
21. ZHAO Y., LIU Y., MA Y. *Robust finite-time sliding mode control for discrete-time singular system with time-varying delays* // Journal of the Franklin Institute. – 2021. – Vol. 358. – P. 4848–4863.

REACHABILITY SETS AND THE GENERALIZED H_2-NORM OF A LINEAR DISCRETE DESCRIPTOR SYSTEM

Elena Bubnova, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, post-graduate student (bubnova@itmm.unn.ru).

Abstract: The paper focuses on a linear discrete noncausal descriptor system on a finite horizon under consistent initial conditions and bounded external disturbances, i.e. a bounded l_2 norm. The notion of the generalized H_2-norm for a linear discrete descriptor system is introduced as the induced norm of the linear operator generated by the system under consideration. This norm is characterized in terms of difference projected generalized Lyapunov equation solutions. It is demonstrated that if the sum of the quadratic forms of the initial and final states and the sum of the quadratic forms of the disturbance over a finite time interval is bounded by a given value from above, the reachability set of this system is a time-varying ellipsoid whose matrix satisfies the difference projected generalized Lyapunov equation. It is established that the generalized H_2-norm of the system under non-zero initial conditions coincides with the value of the maximum half-axis of the reachability ellipsoidal set for a given output of the system. An example of a fourth-order descriptor system is provided as an illustration of the results. For this system a generalized H_2-norm is calculated and reachability sets are constructed. The paper demonstrates the results of numerical simulations and projections of reachability sets on the plane corresponding to the forward and backward subsystems.

Keywords: descriptor system, generalized H_2-norm, reachability set, projected Lyapunov equation.

УДК 519.7
ББК 22.18
DOI: 10.25728/ubs.2023.103.3

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Э.Ю. Калимулиной.

Поступила в редакцию 21.02.2023.
Дата опубликования 31.05.2023.