

О ПРИМЕНЕНИИ ФИЛЬТРА КАЛМАНА В ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ ПРИ СЛАБО ОКРАШЕННЫХ ВХОДНЫХ ШУМАХ¹

Белов И. Р.², Кустов А. Ю.³

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва)

Рассматриваются задачи асимптотического представления анизотропийной нормы ЛДСС и приближенного вычисления матриц оценщика при малых значениях средней анизотропии. Также представлено решение задачи определения предельного порога средней анизотропии внешнего возмущения, при котором фильтр Калмана с заданной точностью аппроксимирует анизотропийный оценщик. Приведен численный пример решения задачи определения максимального порога средней анизотропии входного возмущения для линейной дискретной стационарной системы.

Ключевые слова: анизотропийная теория, задача оценивания, линейные дискретные стационарные системы, фильтр Калмана, H_2 -оптимизация.

1. Введение

Хорошо известно [8, 13, 18], что для эффективного управления объектом крайне важно обладать максимально полной информацией о его состоянии, которую исследователь может получить с установленных на объект датчиков. Однако получение полной и точной информации об их состояниях на основании измерений с датчиков представляется крайне трудоемкой задачей. В такой ситуации остается синтезировать закон управления исключительно на основе неполных данных, которые могут быть сильно зашумлены в силу технических особенностей имеющих датчиков и процессов, протекающих в самих системах. Отсюда возникает круг задач оценивания, заключающихся в построении

¹ Авторы статьи благодарят И.Г. Владимирова за предоставление неоценочной помощи в выводе данного результата для оптимального случая, который описан в разделе 3.1 данной статьи, и В.Н. Тимина за обсуждение на начальном этапе исследования.

² Иван Романович Белов, к.ф.-м.н., с.н.с. (ivanb1993@mail.ru).

³ Аркадий Юрьевич Кустов, к.ф.-м.н., с.н.с. (arkadiykustov@yandex.ru).

оценки состояния или другой интересующей величины, характеризующей рассматриваемую систему. В задачах оптимального оценивания ищется оценка, доставляющая супремум/инфимум функционалу качества, а в задачах субоптимального оценивания для искомой оценки должно быть выполнено условие ограниченности критерия качества некоторым заданным числом.

Довольно часто в прикладных задачах случайные входные возмущения, действующие на систему, будь то шумы в датчиках, турбулентные порывы ветра или др., являются статистически неопределенными [2]. Поэтому при решении многих задач оценивания математическая модель случайных возмущений вводится с использованием той или иной неопределенности, что на уровне математической абстракции позволяет природе генерировать наилучшие возмущения из рассматриваемого класса.

Двумя известными методами решения задач оценивания являются методы \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -теорий [3, 6, 17]. В самом простом случае LQG/ \mathcal{H}_2 -оптимальный фильтр, или фильтр Калмана, если известна статистика сигнала на входе, используется при допущении, что входное возмущение системы является стандартным гауссовским белым шумом. Подобный фильтр обеспечивает минимальное значение следа ковариационной матрицы ошибки оценивания состояния системы. Однако, как известно, фильтр Калмана не является эффективным (т.е. существует более оптимальный оцениватель), если указанные допущения не выполняются – к примеру, если входное возмущение не является белым шумом с заранее известной статистикой. Часто, если статистические свойства шумов не известны, используется \mathcal{H}_∞ -фильтр. При построении \mathcal{H}_∞ -фильтра математически конструируется наилучшее внешнее возмущение, в расчете на которое и происходит оценивание, ввиду чего в реальных ситуациях данный фильтр оказывается излишне консервативным, а в некоторых случаях практической реализации – неоправданно энергозатратным. Помимо многочисленных публикаций, посвященных методам синтеза \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -фильтров, большое количество научных работ посвящено решению задач синтеза фильтров, более эффективных с точки

зрения минимизации влияния возмущений на систему, как было в случае \mathcal{H}_2 -фильтра, но менее консервативных, чем \mathcal{H}_∞ -фильтры [5, 9, 12, 14, 15, 19, 23].

В 90-е годы с целью объединения подходов к описанию внешних возмущений и соответствующих ему методов решения задач управления и фильтрации И.Г. Владимировым была разработана так называемая анизотропийная теория управления и фильтрации [16, 20, 21, 22]. Фундаментальными понятиями этой теории являются анизотропия случайного вектора, средняя анизотропия (стационарной эргодической) последовательности случайных векторов и анизотропийная норма линейной дискретной стационарной системы. В последние годы выпущено немалое количество научных работ по решению задач анализа и синтеза оценщика методами анизотропийной теории для стохастических [4, 10, 11, 24] и сетевых систем [25, 26, 27].

В [1] представлены асимптотические представления анизотропийной нормы для линейных дискретных стационарных систем при стремлении средней анизотропии входного возмущения к нулю и бесконечности. Тем не менее полученные асимптотики не учитывают влияние на систему соответственно регуляторов или фильтров. Решение задачи анизотропийного оценивания при стремлении средней анизотропии к нулю позволяет ответить на вопросы об аналитической связи хорошо известных и широко используемых \mathcal{H}_2 -регуляторов и оценщиков с анизотропийными регуляторами и оценщиками на уровне их асимптотики.

В данной работе рассмотрена задача исследования асимптотических представлений матриц анизотропийного оценщика при стремлении максимального порога средней анизотропии входного возмущения системы к нулю. При этом определен максимальный порог средней анизотропии, при котором оптимальный \mathcal{H}_2 -фильтр с заданной точностью аппроксимирует анизотропийный оценщик. Актуальность данной постановки обусловлена тем, что во многих прикладных задачах [7] по причине простоты численной реализации используются методы синтеза \mathcal{H}_2 -фильтров при предположении о поступлении на вход системы

случайных возмущений с неопределенными параметрами, а также отсутствия строгих ограничений на величины отклонений моментов от известных эталонных значений. Величина найденного максимального значения средней анизотропии задает порог, начиная с которого для получения качественного результата оценивания возникает необходимость использования анизотропийного оценщика вместо \mathcal{H}_2 -фильтра.

В первом разделе данной статьи приведены краткое описание \mathcal{H}_2 -фильтра, основные положения анизотропийной теории и формулы оптимального анизотропийного оценщика, которые используются для решения поставленных задач. Во втором разделе изложено решение задачи определения асимптотического представления анизотропийной нормы системы в ошибках оценивания для оптимального анизотропийного оценщика. Также второй раздел посвящен решению задачи определения максимального значения средней анизотропии, при котором фильтр Калмана аппроксимирует анизотропийный оценщик с заданной точностью. Данные результаты используются в численном примере в третьем разделе статьи.

2. Предварительные сведения

2.1. Сокращения и обозначения

В данной работе используются следующие обозначения: \mathbb{R}^n – множество n -мерных вещественных векторов; $\mathbb{R}^{n \times m}$ – множество $(n \times m)$ -мерных вещественных матриц; \mathbb{C} – множество комплексных чисел; \mathbb{L}_2^n – множество n -мерных вещественно-значных интегрируемых с квадратом случайных векторов; $\mathcal{H}_\infty^{p \times m}$ – пространство Харди $(n \times m)$ -мерных комплексно-значных матричных функций, аналитических внутри единичного круга $\mathbb{C}_\odot = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и имеющих ограниченную \mathcal{H}_∞ -норму, определенную для $F \in \mathcal{H}_\infty^{p \times m}$ как $\|F\|_\infty = \sup_{|z| < 1} \bar{\sigma}(F(z))$;

$\bar{\sigma}(X) = \max \sqrt{\lambda(X^*X)}$ – максимальное сингулярное число матрицы X ; $\lambda(X)$ – собственные числа матрицы X ; $X^* = \bar{X}^\top$ – комплексное транспонирование; $\mathcal{H}_2^{p \times m}$ – пространство Харди анали-

тических для всех $z \in \mathbb{C}_\odot$ матричных функций $F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k z^k$ с вещественными матричными коэффициентами $f_k \in \mathbb{R}^{p \times m}$ и ограниченной \mathcal{H}_2 -нормой, квадрат которой определяется выражением $\|F\|_2^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \text{tr}(f_k f_k^\top)$.

2.2. Класс рассматриваемых систем

Объектом исследования являются устойчивые линейные дискретные стационарные системы F вида

$$(1) \quad x_{k+1} = Ax_k + Bw_k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $x_k \in \mathbb{L}_2^n$ – вектор состояния, $x_0 = 0$; $w_k \in \mathbb{L}_2^m$ – вектор внешнего возмущения, таким образом, $\text{cov}(w_k) < +\infty$. Интересующие исследователя комбинации состояний системы (1) содержатся в последовательности векторов оцениваемого выхода

$$(2) \quad z_k = x_k.$$

В качестве данных для составления оценки выхода системы F используют наблюдения с датчиков, установленных на объект. Эти данные представляются в виде последовательности векторов $y_k \in \mathbb{L}_2^p$ измеряемого выхода

$$(3) \quad y_k = Cx_k + Dw_k.$$

Матрицы A , B , C , D являются известными вещественными матрицами соответствующих размеров. Системе уравнений вида (1), (3) ставится в соответствие передаточная функция $T_{yw}(z) = D + C(zI_n - A)^{-1}B$, определяемая четверкой матриц

$$(4) \quad T_{yw} \sim (A, B, C, D).$$

Общая постановка задачи оценивания: необходимо построить оценитель, заданный четверкой матриц

$$(5) \quad T_{\hat{z}y} \sim (A - KC, K, I_n - MC, M)$$

с состоянием $\hat{x}_k \in \mathbb{L}_2^n$, входом $y_k \in \mathbb{L}_2^p$ и выходом $\hat{z}_k \in \mathbb{L}_2^n$, чтобы обеспечить выполнение некоторого критерия качества, к примеру, \mathcal{H}_2 - или \mathcal{H}_∞ -нормы системы в ошибках оценивания. В (5) определению подлежат матрицы $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$ и $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Далее представлены основные сведения о двух типах оценок

в зависимости от критерия качества: \mathcal{H}_2 -фильтре (критерием качества является след ковариационной матрицы ошибки оценивания) и анизотропийном оценителе (критерием качества является анизотропийная норма системы в ошибках оценивания).

2.3. \mathcal{H}_2 -оптимальное оценивание

Задача оптимального \mathcal{H}_2 -оценивания [3, 17] заключается в поиске оценителя, доставляющего минимум \mathcal{H}_2 -норме системы в ошибках оценивания для линейной системы с входным возмущением в виде стандартного гауссовского белого шума. Пусть дана линейная дискретная стационарная система F с уравнением динамики (1), вектором измерений y_k , описываемым уравнением (3), и выходом $z_k = x_k$. Оценитель $T_{\tilde{z}y}$ выхода z_k по измерениям выхода y_k имеет вид (5). Ошибка оценивания $\tilde{z}_k = z_k - \hat{z}_k$ является выходом системы $T_{\tilde{z}w}$ вида

$$(6) \quad T_{\tilde{z}w} \sim (A - KC, B - KD, I_n - MC, -MD).$$

Критерием оптимальности полученной оценки \hat{z}_k является \mathcal{H}_2 -норма системы $T_{\tilde{z}w}$:

$$(7) \quad \|T_{\tilde{z}w}\|_2^2 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \text{tr}(\mathbf{E}[\tilde{z}_k \tilde{z}_k^\top]) \doteq \text{tr}(\mathbf{E}[\tilde{z}_\infty \tilde{z}_\infty^\top]) \doteq J(K, M).$$

Задача \mathcal{H}_2 -оптимального оценивания заключается в поиске для системы F оценителя $T_{\tilde{z}y}$ вида (5), доставляющего минимум функционалу (7). С учетом (6) функционал (7) имеет вид [3]

$$(8) \quad J(K, M) = \text{tr}(MD(MD)^\top + (I_n - MC)\mathbf{E}[\tilde{x}_\infty \tilde{x}_\infty^\top](I_n - MC)^\top).$$

Матрица $\mathbf{E}[\tilde{x}_\infty \tilde{x}_\infty^\top]$ в (8) представляет собой ковариационную матрицу состояния на установившемся режиме. Обозначим эту матрицу через P . Уравнение для P с учетом (6) имеет вид

$$(9) \quad P = (A - KC)P(A - KC)^\top + (B - KD)(B - KD)^\top.$$

Задача минимизации (8), связанная с нахождением матриц K и M , решается в два этапа. На первом этапе определяется оптимальное значение матрицы M как функции матрицы $P = P(K)$:

$$(10) \quad M_*(K) = \arg \min_M J(K, M) = PC^\top T^{-1},$$

где

$$(11) \quad T = CPC^\top + DD^\top.$$

На втором этапе решается задача нахождения матрицы K :

$$(12) \quad K_* = \arg \min_K J(K, M_*(K)) = (APC^\top + BD^\top)T^{-1}.$$

Таким образом, решением описанной выше задачи является оптимальный \mathcal{H}_2 -оценитель $T_{\hat{z}y}$ вида (5) с матрицами K_* и M_* , удовлетворяющими (12) и (10), соответственно. Далее приведены основные положения анизотропной теории управления, использующиеся в работе.

2.4. Анизотропное оценивание

Предположим, что на вход рассматриваемой системы (1) поступает стационарная последовательность гауссовских случайных векторов $W = (w_k)_{0 < k < +\infty}$, $w_k \in \mathbb{L}_2^m$, с неизвестной точно статистикой. Для описания статистической неопределенности в распределении отдельных векторов и последовательности в целом будут использоваться понятия анизотропии случайного вектора и средней анизотропии последовательности случайных векторов, соответственно. Анизотропия случайного вектора w определяется выражением [20]

$$\mathbf{A}(w) = \min_{\lambda > 0} \mathbf{D}(f \| p_{m,\lambda}),$$

где $\mathbf{D}(f \| p_{m,\lambda})$ – относительная энтропия плотности распределения вероятности f вектора w относительно плотности нормального распределения вероятности $p_{m,\lambda}$ с нулевым математическим ожиданием и скалярной ковариационной матрицей λI_m , $\lambda > 0$.

Векторы последовательности $W = (w_k)_{0 < k < +\infty}$ могут быть представлены в виде

$$w_j = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k v_{j-k},$$

где $V = (v_k)_{0 \leq k \leq +\infty}$ – стандартный m -мерный гауссовский белый шум; $G(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k z^k \in \mathcal{H}_2^{m \times m}$ – передаточная функция так называемого формирующего фильтра. В рамках анизотропной теории последовательность случайных векторов характеризуется ее средней анизотропией, которая определяется следующей фор-

мулой [20]:

$$\bar{A}(W) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \left(\frac{m\hat{G}(w)(\hat{G}(w))^*}{\|G\|_2^2} \right) dw,$$

где $\hat{G}(w) = \lim_{r \rightarrow 1-0} G(re^{iw})$, $i^2 = -1$. В дальнейшем для средней анизотропии наряду с $\bar{A}(W)$ также будет использоваться обозначение $\bar{A}(G)$.

Мерой отклика системы F вида (4) на входное возмущение с ограниченной средней анизотропией $\bar{A}(G) \leq a$ является анизотропийная норма системы [21]:

$$(13) \quad \|F\|_a = \sup \{ \|FG\|_2 / \|G\|_2 \mid G \in \mathbf{G}_a \},$$

где $\mathbf{G}_a = \{G \in \mathcal{H}_2^{m \times m} : \bar{A}(G) \leq a\}$. Ниже приведена формулировка леммы о вычислении анизотропийной нормы (13) для линейной дискретной стационарной системы.

Лемма 1 [21]. Пусть дана устойчивая линейная дискретная стационарная система F вида (4), для которой выполнено условие несферичности $\|F\|_2 / \sqrt{m} < \|F\|_\infty$. Для любого $a > 0$ существует единственная пара (q, R) , состоящая из скалярного параметра $q \in (0, \|F\|_\infty^{-2})$, удовлетворяющего уравнению

$$(14) \quad -\frac{1}{2} \ln \det \frac{m\Sigma}{\text{tr}(LPL^\top + \Sigma)} = a,$$

и неотрицательно-определенной матрицы R , являющейся решением уравнения Риккати

$$(15a) \quad R = A^\top RA + qC^\top C + L^\top \Sigma^{-1} L,$$

$$(15b) \quad \Sigma = (I_m - qD^\top D - B^\top RB)^{-1},$$

$$(15c) \quad L = \Sigma(B^\top RA + qD^\top C).$$

Анизотропийная норма системы F вычисляется как

$$(16) \quad \|F\|_a = \left(\frac{1}{q} \left(1 - \frac{m}{\text{tr}(LPL^\top + \Sigma)} \right) \right)^{1/2},$$

где неотрицательно определенная матрица P удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$(17) \quad P = (A + BL)P(A + BL)^\top + B\Sigma B^\top.$$

Матрицы Σ , L , R и P зависят от параметра q .

Формирующий фильтр вида

$$(18) \quad G \sim (A + BL, B\Sigma^{1/2}, L, \Sigma^{1/2}),$$

где матрицы L и Σ заданы уравнениями (15), называется наилучшим формирующим фильтром, и ему отвечает супремум отношения $\|FG\|_2/\|G\|_2$. Справедливость (14) гарантирует, что средняя анизотропия выхода фильтра (18) точно равна числу a .

Задача синтеза оптимального анизотропийного оценителя заключается в нахождении неизвестных матриц K и M линейного стационарного оценителя вида (5), минимизирующего значение анизотропийной нормы системы в ошибках оценивания вида (6). Далее в работе этой системе будет соответствовать четверка матриц

$$(19) \quad (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}) = (A - KC, B - KD, I_n - MC, -MD).$$

По аналогии с представленным в [22] решением задачи оптимального оценивающего анизотропийного регулятора можно найти решение задачи синтеза оптимального анизотропийного оценителя вида (5). Матрицы K и M оценителя будут определяться выражениями

$$(20a) \quad K = ((A + BL)P(C + DL)^\top + B\Sigma D^\top)T^{-1},$$

$$(20b) \quad M = P(C + DL)^\top T^{-1},$$

$$(20c) \quad T = (C + DL)P(C + DL)^\top + D\Sigma D^\top,$$

где матрицы Σ , L и P удовлетворяют (14), (15), (17). Рассуждения относительно связи анизотропийного оценителя с \mathcal{H}_2 -фильтром приведены в следующем разделе работы.

3. Левая асимптотика анизотропийной нормы

В работе [1] были получены формулы асимптотического поведения анизотропийной нормы в окрестности ее предельных значений. При $a \rightarrow 0 + 0$ эта зависимость имеет вид

$$(21) \quad \|F\|_a = \frac{\|F\|_2}{\sqrt{m}} \left(1 + \sqrt{\frac{Qa}{m}} + \bar{o}(\sqrt{a}) \right),$$

где

$$Q = \frac{m\|F\|_4^4 - \|F\|_2^4}{\|F\|_2^4}.$$

Приведенное выражение справедливо для устойчивых систем с известным представлением в пространстве состояний. В случае, когда система F представляет собой систему в ошибках оценивания, а потому сама зависит от выбранного в задаче синтеза уровня средней анизотропии, формула (21) нуждается в правке. Сформулируем основную задачу данной работы:

Задача 1. Для линейной дискретной стационарной системы вида (4) и оценителя (5) определить асимптотические представления $K(a)$, $M(a)$, $\|F\|_a$ для системы в ошибках оценивания при малых значениях максимального порога a средней анизотропии входного возмущения. Также необходимо вычислить максимальный уровень средней анизотропии a_{max} , при котором с заданной точностью ε допустимо использование фильтра Калмана для решения задачи оценивания, т.е. справедливо неравенство

$$\frac{\|F\|_a}{\|F_0\|_2/\sqrt{m}} - 1 < \varepsilon.$$

Основные рассуждения хода решения задачи представлены в следующих разделах работы.

3.1. Случай оптимального анизотропийного оценителя

Для начала кратко разберем оптимальный случай, когда $F = F(E)$ – система, зависящая от коэффициентов оптимального a -анизотропийного оценителя. Обозначим через $J_a(F)$ среднеквадратичный коэффициент усиления для системы с неизвестными переменными (на уровне задачи фильтрации такая система является системой в ошибках оценивания, проведенного с помощью фильтра E) при условии, что на ее вход поступает наилучшее внешнее возмущение со средней анизотропией a :

$$J_a(F) = \|FG_*\|_2/\|G_*\|_2 \Big|_{G_* = \arg \max\{\|FG\|_2/\|G\|_2 \mid G \in \mathbf{G}_a\}}.$$

Для него справедливо представление

$$(22) \quad J_a(F) = c_0(F) + \sqrt{a}c_1(F) + \frac{1}{2}ac_2(F) + \dots$$

при малых значениях $a \geq 0$. Достаточно очевидно, что оптимальный \mathcal{H}_2 -фильтр E_0 является решением задачи

$$(23) \quad J_0(F) = c_0(F) \rightarrow \min_E,$$

т.е. $E_0 = \arg \min_E c_0(F)|_{F=F(E)}$, при этом для «макета» системы будет справедливо соотношение $F = F(E_0)$. Однако при отклонении величины средней анизотропии от нуля для случая, когда система замыкается оптимальным a -анизотропийным оценителем E_a , формула (22), если в нее подставить $E = E_a$, принимает вид

$$(24) \quad J_a(F_a) = c_0(F_a) + \sqrt{a}c_1(F_a) + \frac{1}{2}ac_2(F_a) + \dots,$$

где $F_a = F(E_a)$, переставая, таким образом, быть содержательной в плане явного представления $J_a(F_a)$ в виде степенного ряда по \sqrt{a} . Следующие рассуждения позволяют уточнить зависимость анизотропийной нормы для системы $F(E_a)$.

Прежде всего, легко убедиться, что при условии достаточной гладкости функции $J_a(F)$ имеют место соотношения

$$c_0(F) = J_0(F), \quad c_k(F) = \partial_{\sqrt{a}}^k J_a(F)|_{a=0},$$

дающие выражения для коэффициентов разложения (22). Тогда поскольку из (23) следует, что

$$F_0 = \arg \min_{F(E)} c_0(F(E)),$$

справедливыми будут также выражения

$$(25) \quad \partial_F c_0(F)|_{F=F_0} = 0, \quad \partial_F^2 c_0(F)|_{F=F_0} \geq 0,$$

где ∂_F – производная Фреше. Для сокращения записи введем обозначения

$$\partial J_a = \partial_F J_a(F)|_{F=F_a}, \quad \partial^2 J_a = \partial_F^2 J_a(F)|_{F=F_a}.$$

Из (25) следует, что для всех сколь угодно малых значений $a \geq 0$ выполнены необходимые условия минимума

$$\partial J_a = 0, \quad \partial^2 J_a \geq 0,$$

ввиду чего

$$\frac{d(\partial J_a)}{d\sqrt{a}} = \partial^2 J_a \cdot \frac{dF_a}{d\sqrt{a}} + \partial_{\sqrt{a}}(\partial J_a) = 0.$$

Таким образом, получаем соотношение

$$(26) \quad \frac{dF_a}{d\sqrt{a}} = -\partial_{\sqrt{a}}(\partial J_a) \cdot (\partial^2 J_a)^{-1},$$

выполненное при $\partial^2 J_a > 0$. Из (26), в частности, следует, что

$$(27) \quad \left. \frac{dF_a}{d\sqrt{a}} \right|_{a=0} = -\left. \frac{\partial_{F c_1}(F)}{\partial_F^2 c_0(F)} \right|_{F=F_0}.$$

Следовательно,

$$(28) \quad \frac{d(J_a(F_a))}{d\sqrt{a}} = \partial_{\sqrt{a}}(J_a(F_a)).$$

При повторном дифференцировании получим

$$(29) \quad \frac{d^2(J_a(F_a))}{da} = \partial_{\sqrt{a}}^2(J_a(F_a)) - \left(\partial_{\sqrt{a}}(\partial J_a)\right)^2 \cdot (\partial^2 J_a)^{-1}.$$

Значит, при $a = 0$ формулы (28) и (29) примут вид

$$(30) \quad \frac{dJ_a(F_a)}{d\sqrt{a}} = c_1(F_0), \quad \frac{d^2 J_a(F_a)}{da} = c_2(F_0) - \frac{(\partial_{F c_1}(F_0))^2}{\partial_F^2 c_0(F_0)}.$$

В результате окончательная модификация формулы (22) для случая зависимости системы F от оптимального анизотропийного оценителя E_a будет иметь вид

$$(31) \quad J_a(F_a) = c_0(F_0) + \sqrt{a}c_1(F_0) + \frac{1}{2}a \left(c_2(F_0) - \frac{(\partial_{F c_1}(F_0))^2}{\partial_F^2 c_0(F_0)} \right) + \bar{o}(a).$$

Интересен тот факт, что отличие полученной формулы от (22) при подстановке в последнюю $F = F_0$ наблюдается начиная со слагаемого порядка a . Иными словами, если исследователя удовлетворяет точность порядка $\bar{o}(\sqrt{a})$ при аппроксимации формулы анизотропийной нормы (21), то достаточно сделать просто замену $F = F_0$ в ее правой части. Однако для ее эффективного

использования необходимо все равно находить оптимальный a -анизотропийный оценитель, что сопряжено с решением нелинейных уравнений.

Поскольку в рамках решаемой задачи система таких уравнений соответствует малым значениям уровня a , можно ограничиться лишь приближенными формулами для нахождения a -анизотропийного оценителя. В следующем параграфе будет показано, к чему приведет использование приближенных вычислений в задаче оценивания.

3.2. Приближенное вычисление анизотропийных оценок

Прежде всего отметим, что закругление оптимального оценителя путем вычисления его приближенного варианта приведет к потере точности, связанной с представлением анизотропийной нормы системы в ошибках оценивания формулой (31). Это фактически означает, что происходит потеря связи между тем уровнем средней анизотропии, для которого синтезируется оценитель, и тем, для которого вычисляется анизотропийная норма соответствующей системы в ошибках оценивания. Иными словами, если перейти от использования оптимального анизотропийного оценителя, для которого при малых значениях a справедливо разложение

$$E_a = E_0 + \sqrt{a}E_1 + \frac{1}{2}aE_2 + \dots,$$

к приближенному оценителю $E'_a = E_0 + \sqrt{a}E_1$, то величину a в общем случае нужно заменить на некоторую другую b , от которой все еще требуется выполнение условия малости $b = \bar{o}(1)$. Далее приведены основные рассуждения о выводе уравнений для E'_b , а также формулы a -анизотропийной нормы системы в ошибках оценивания $F_b = F(E'_b)$.

Сформулируем полученные результаты решения поставленных задач в виде следующей леммы:

Лемма 2. *Даны линейная стационарная система вида (4), оценитель (5) и $\varepsilon > 0$. При малых значениях средней анизотропии $a = \bar{o}(1)$ входных возмущений (так называемой «слабой*

окрашенности») справедливы следующие асимптотические разложения матриц K и M анизотропийного оценителя:

$$(32a) \quad X(a) = X_0 + \sqrt{a}X_1 + o(\sqrt{a}), \quad X \in \{K, M\},$$

$$(32b) \quad K_0 = (AP_0C^\top + BD^\top)T_0^{-1},$$

$$(32c) \quad K_1 = (AP_1C^\top + BL_1P_0C^\top + AP_0(DL_1)^\top - K_0T_1)T_0^{-1},$$

$$(32d) \quad M_0 = P_0C^\top T_0^{-1},$$

$$(32e) \quad M_1 = (P_1C^\top + P_0(DL_1)^\top - M_0T_1)T_0^{-1},$$

Матрицы P_0 , P_1 , T_0 , T_1 определяются (9), (11) и следующими выражениями:

$$(33a) \quad P_1 = A_0P_1A_0^\top + B_0\Sigma_1B_0^\top + Y_{P_1} + Y_{P_1}^\top,$$

$$(33b) \quad T_1 = CP_1C^\top + D\Sigma_1D^\top + Y_{T_1} + Y_{T_1}^\top,$$

где $Y_{P_1} = A_0P_0(A_1 + B_0L_1)^\top - B_0B_1^\top$, $Y_{T_1} = CP_0(DL_1)^\top$, а матрицы Σ_1 , L_1 удовлетворяют выражениям

$$(34a) \quad \Sigma_1 = q_1(B_0^\top QB_0 + D_0^\top D_0),$$

$$(34b) \quad L_1 = q_1(B_0^\top QA_0 + D_0^\top C_0),$$

где Q – решение уравнения Ляпунова

$$Q = A_0^\top QA_0 + C_0^\top C_0,$$

а q_1 определяется по формуле

$$(35a) \quad q_1^2 = 4m \left(m \operatorname{tr} \left(2(B_0^\top QA_0 + D_0^\top C_0)P_0(A_0^\top QB_0 + C_0^\top D_0) + \right. \right.$$

$$(35b) \quad \left. \left. + (B_0^\top QB_0 + D_0^\top D_0)^2 \right) - (\operatorname{tr}(B_0^\top QB_0 + D_0^\top D_0))^2 \right)^{-1}.$$

При этом анизотропийная норма системы в ошибках оценивания имеет следующее представление:

$$(36a) \quad \|F_b\|_a = \frac{\|F_0\|_2}{\sqrt{m}} \left(1 + \frac{q_1 \|F_0\|_4^4}{2 \|F_0\|_2^2} \sqrt{a} + \frac{\operatorname{tr}(\Sigma_2)}{2q_1 \|F_0\|_2^2} \sqrt{b} \right).$$

$$(36b) \quad \cdot \left(1 - \frac{q_1 \|F_0\|_2^2}{2m} \sqrt{a} \right) + \bar{o}(\max\{\sqrt{a}, \sqrt{b}\}),$$

где Σ_2 определяется выражениями

$$(37a) \quad R_2 = \mathcal{A}_0^\top R_2 \mathcal{A}_0 + Y_{R_2} + Y_{R_2}^\top,$$

$$(37b) \quad R_3 = \mathcal{A}_0^\top R_3 \mathcal{A}_0 + L_1^\top L_1,$$

$$(37c) \quad \Sigma_2 = \mathcal{B}_0^\top R_2 \mathcal{B}_0 + Y_{\Sigma_2} + Y_{\Sigma_2}^\top,$$

$$(37d) \quad \Sigma_3 = \mathcal{B}_0^\top R_3 \mathcal{B}_0 + \Sigma_2^2,$$

где $Y_{R_2} = q_1(\mathcal{A}_1^\top \mathcal{Q} \mathcal{A}_0 + \mathcal{C}_1^\top \mathcal{C}_0)$, $Y_{\Sigma_2} = q_1(\mathcal{B}_1^\top \mathcal{Q} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_1^\top \mathcal{D}_0)$.

Максимальный уровень средней анизотропии a_{max} , при котором относительное отклонение анизотропийной нормы $\|F_b\|_a$ от масштабированной \mathcal{H}_2 -нормы не превышает заданного ε , определяется по формуле

$$(38) \quad a_{max} = \varepsilon^2 \left(\sqrt{\frac{Q}{m}} + \frac{\text{tr}(\Sigma_2)}{2q_1 \|F_0\|_2^2} \right)^{-2}.$$

Доказательство. Следствием результатов работы [1] является тот факт, что для случая $a = 0$ решениям соответствующих уравнений леммы 1 соответствуют матрицы $R_0 = 0$, $\Sigma_0 = I_m$, $L_0 = 0$ и число $q_0 = 0$. Соответствующая им ковариационная матрица P_0 состояния на установившемся режиме определяется выражением (9), соответствующем случаю Несложно показать, что матрица K_0 фильтра примет вид (12). Ковариационная матрица $P_z = \text{cov}(\tilde{z}_\infty)$ ошибки оценивания вектора z_k на установившемся режиме при нулевой анизотропии входного возмущения определяется в соответствии с формулой

$$(39) \quad P_{z0} = (I_n - M_0 C) P_0 (I_n - M_0 C)^\top + M_0 D (M_0 D)^\top,$$

где матрица M_0 фильтра примет вид (10).

Как уже было отмечено, при равенстве средней анизотропии оценщика нулю ($b = 0$) ковариационная матрица ошибки оценивания и сами матрицы оценщика соответствуют фильтру Калмана. По этой причине при малых значениях $b = \bar{o}(1)$ будем описывать анизотропийный оценщик в терминах отклонений от фильтра Калмана, т.е. все переменные будем представлять в виде

$$(40) \quad X(b) = X_0 + \Delta_X(b), \quad \Delta_X(0) = 0,$$

где $X \in \{P, P_z, R, \Sigma, L, K, M, q, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$. Выражения (40) и определяют асимптотику анизотропийного оценителя вида (5) в окрестности нулевой средней анизотропии. Для решения задачи асимптотического представления анизотропийного оценителя при малых значениях $b > 0$ нужно определить порядок малости $\Delta_X(b)$ в выражении выше. Вернувшись к формуле (14), обратимся к представлению матричного логарифма в виде степенного ряда

$$(41) \quad \ln(I + X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} X^k}{k}, \quad \|X\| < 1.$$

С учетом пренебрежения слагаемых старше второй степени в (41) выражение (14) примет вид

$$\text{tr}\left(X - \frac{1}{2}X^2\right) \approx -2b,$$

где

$$X = \frac{m(I_m + \Delta_\Sigma(b))}{m + \text{tr}(\Delta_L(b)P(b)\Delta_L^\top(b) + \Delta_\Sigma(b))} - I_m,$$

что после проведения несложных преобразований приводит к

$$(42a) \quad 4bm + (\text{tr}(\Delta_\Sigma(b)))^2 - m\text{tr}(\Delta_\Sigma^2(b)) -$$

$$(42b) \quad -2m\text{tr}(\Delta_L(b)P_0\Delta_L^\top(b)) \approx 0.$$

Таким образом, величины $\Delta_L(b)P_0\Delta_L^\top(b)$ и $\Delta_\Sigma^2(b)$ имеют порядок малости b , а матрицы $\Delta_L(b)$ и $\Delta_\Sigma(b)$ как функции b представимы в виде

$$(43a) \quad \Delta_\Sigma(b) = \Sigma_1\sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}),$$

$$(43b) \quad \Delta_L(b) = L_1\sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}),$$

где Σ_1 и L_1 будут определены позже. Для определения порядка малости функции $\Delta_R(b)$ рассмотрим уравнение Риккати (15)

с учетом (40) (как и ранее, пренебрегая частью слагаемых наименьшего порядка):

$$(44a) \quad \Delta_R(b) \approx \mathcal{A}_0^\top \Delta_R(b) \mathcal{A}_0 + \Delta_q(b) \mathcal{C}_0^\top \mathcal{C}_0,$$

$$(44b) \quad \Sigma_1 \sqrt{b} \approx \Delta_q(b) \mathcal{D}_0^\top \mathcal{D}_0 + \mathcal{B}_0^\top \Delta_R(b) \mathcal{B}_0,$$

$$(44c) \quad L_1 \sqrt{b} \approx \mathcal{B}_0^\top \Delta_R(b) \mathcal{A}_0 + \Delta_q(b) \mathcal{D}_0^\top \mathcal{C}_0.$$

Таким образом, функции $\Delta_R(b)$ и $\Delta_q(b)$ представимы в виде

$$(45a) \quad \Delta_R(b) = R_1 \sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}),$$

$$(45b) \quad \Delta_q(b) = q_1 \sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b})$$

с некоторыми R_1 и q_1 . Наряду с полученными формулами также имеем соотношения (34) для матриц Σ_1 , L_1 и \mathcal{Q} .

Можно заметить, что матрицы R_1 и \mathcal{Q} связаны друг с другом выражением $R_1 = q_1 \mathcal{Q}$. Далее определим порядок малости $\Delta_P(b)$. Подставив в уравнение (17) представления функций $\Sigma(b)$ и $L(b)$, и с учетом (9) получим

$$(46) \quad \Delta_P(b) \approx \mathcal{A}_0 \Delta_P(b) \mathcal{A}_0^\top + \sqrt{b} \mathcal{B}_0 \Sigma_1 \mathcal{B}_0^\top + Y_P + Y_P^\top,$$

где

$$Y_P = \sqrt{b} \mathcal{A}_0 P_0 (\mathcal{B}_0 L_1)^\top - (\mathcal{A}_0 P_0 C^\top + \mathcal{B}_0 D^\top) \Delta_K^\top(b),$$

откуда следует, что

$$(47) \quad \Delta_P(b) = P_1 \sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}),$$

$$(48) \quad \Delta_K(b) = K_1 \sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}).$$

Определение порядка малости $\Delta_{P_z}(b)$ и $\Delta_M(b)$ проходит по аналогии, что приводит к приближенному равенству

$$(49) \quad \Delta_{P_z}(b) \approx \sqrt{b} \mathcal{C}_0 P_1 \mathcal{C}_0^\top + \sqrt{b} \mathcal{D}_0 \Sigma_1 \mathcal{D}_0^\top - Y_{P_z} - Y_{P_z}^\top,$$

где

$$Y_{P_z} = \mathcal{D}_0 (\Delta_M(b) D)^\top + \mathcal{C}_0 P_0 (\Delta_M(b) C - D L_1 \sqrt{b})^\top.$$

Таким образом, функции $\Delta_{P_z}(b)$ и $\Delta_M(b)$ имеют вид

$$(50a) \quad \Delta_{P_z}(b) = P_{z1}\sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}),$$

$$(50b) \quad \Delta_M(b) = M_1\sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}).$$

Подставив формулы для $K(b)$ и $M(b)$ в (19), придем к тому, что

$$(51a) \quad \Delta_{\mathcal{A}}(b) = \mathcal{A}_1\sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}), \quad \Delta_{\mathcal{B}}(b) = \mathcal{B}_1\sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}),$$

$$(51b) \quad \Delta_{\mathcal{C}}(b) = \mathcal{C}_1\sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}), \quad \Delta_{\mathcal{D}}(b) = \mathcal{D}_1\sqrt{b} + \bar{o}(\sqrt{b}).$$

Легко убедиться, что $\mathcal{A}_1 = -K_1C$, $\mathcal{B}_1 = -K_1D$, $\mathcal{C}_1 = -M_1C$, $\mathcal{D}_1 = -M_1D$. С учетом приведенных выше выкладок выражение (42) примет вид

$$4m + \text{tr}^2(\Sigma_1) - m\text{tr}(\Sigma_1^2) - 2m\text{tr}(L_1P_0L_1^\top) = 0,$$

откуда с учетом (34) получаем формулу (35) для q_1 .

Для продолжения нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты, связывающие друг с другом нормы различных систем. Так, известно [1], что \mathcal{H}_4 -норма системы в ошибках оценивания фильтром Калмана определяется выражением

$$(52a) \quad \|F_0\|_4^4 = \text{tr}((\mathcal{C}_0P_0\mathcal{C}_0^\top + \mathcal{D}_0\mathcal{D}_0^\top)^2) +$$

$$(52b) \quad + 2\text{tr}((\mathcal{C}_0P_0\mathcal{A}_0^\top + \mathcal{D}_0\mathcal{B}_0^\top)\mathcal{Q}(\mathcal{A}_0P_0\mathcal{C}_0^\top + \mathcal{B}_0\mathcal{D}_0^\top)).$$

Согласно теореме Риса – Фреше, норма сопряженного оператора равна норме исходного оператора. Значит, часть выражений, справедливых для исходной системы, будут справедливыми и в терминах двойственной, т.е.

$$(53a) \quad \|F_0\|_2^2 = \text{tr}(\mathcal{B}_0^\top\mathcal{Q}\mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_0^\top\mathcal{D}_0) = \text{tr}(\mathcal{C}_0P_0\mathcal{C}_0^\top + \mathcal{D}_0\mathcal{D}_0^\top),$$

$$(53b) \quad \|F_0\|_4^4 = 2q_1^{-2}\text{tr}(L_1P_0L_1^\top) + \text{tr}((\mathcal{B}_0^\top\mathcal{Q}\mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_0^\top\mathcal{D}_0)^2) =$$

$$(53c) \quad = \text{tr}((\mathcal{C}_0P_0\mathcal{C}_0^\top + \mathcal{D}_0\mathcal{D}_0^\top)^2) + 2\text{tr}(\Gamma^\top\mathcal{Q}\Gamma),$$

где $\Gamma = \mathcal{A}_0P_0\mathcal{C}_0^\top + \mathcal{B}_0\mathcal{D}_0^\top$. Таким образом, выражение (35) принимает вид $q_1^2 = 4m/(Q\|F_0\|_2^4)$. Далее можно получить, что матрица P_1 удовлетворяет уравнению (33а) и

$$(54) \quad P_{z1} = \mathcal{C}_0P_1\mathcal{C}_0^\top + \mathcal{D}_0\Sigma_1\mathcal{D}_0^\top + Y_{P_{z1}} + Y_{P_{z1}}^\top,$$

где $Y_{P_{z_1}} = C_0 P_0 (C_1 + D_0 L_1)^T + D_0 D_1^T$. Также с учетом результатов [1] и формул (20) несложно вывести выражения (32с), (32е), (33b).

Теперь, когда получены приближенные выражения для анизотропийного оценителя при малых значениях средней анизотропии $b = \bar{o}(1)$, можно переходить к определению формулы для a -анизотропийной нормы при $a = \bar{o}(1)$. Повторим еще раз, что значения a и b не обязательно должны быть равны друг другу: нас интересует лишь порядок стремления анизотропийной нормы к своему точному значению при выполнении условия $\max\{a, b\} = \bar{o}(1)$. Для получения искомого выражения нужно получить разложение функции $\Phi \doteq \text{tr}(LPL^T + \Sigma)$ в ряд по степеням \sqrt{a} до второй степени включительно (см. лемму 1). Стоит отметить, что матрицы L , P и Σ определяются одновременно значениями a и b . Это обусловлено тем, что в представлениях функций вида $\Delta_X(a, b) = X_1 \sqrt{a} + \bar{o}(\sqrt{a})$ величина $\bar{o}(\sqrt{a})$ на самом деле задана суммой $\bar{o}(\sqrt{a}) = X_2 \sqrt{ab} + X_3 a + \bar{o}(\max\{a, \sqrt{ab}\})$, где $X \in \{R, \Sigma\}$ определяются выражениями (37а), (37b), (37с), (37d).

С учетом приведенных соотношений можно убедиться, что $\Phi(a, b) = \Phi_{0,0} + \Phi_{1,0} \sqrt{a} + \Phi_{1,1} \sqrt{ab} + \Phi_{2,0} a + \bar{o}(\max\{a, \sqrt{ab}\})$, где

$$(55a) \quad \Phi_{0,0} = m, \quad \Phi_{1,0} = \text{tr}(\Sigma_1) = q_1 \|F_0\|_2^2,$$

$$(55b) \quad \Phi_{1,1} = \text{tr}(\Sigma_2), \quad \Phi_{2,0} = \text{tr}(L_1 P_0 L_1^T + \Sigma_3) = q_1^2 \|F_0\|_4^4.$$

В соответствии с последними рассуждениями и ввиду (16) a -анизотропийная норма системы в ошибках фильтрации, проведенной b -анизотропийным оценителем, будет выражаться по формуле

$$(56) \quad \|F_b\|_a = \sqrt{\frac{1}{q(a)} \left(1 - \frac{m}{\Phi(a, b)}\right)}.$$

Подставив в (56) найденные выражения при $\max\{a, b\} \rightarrow 0 + 0$, получим асимптотическое представление анизотропийной нормы вида (36).

Несложно убедиться, что при $b = 0$ полученная формула совпадает с левой асимптотикой (21) анизотропийной нормы из задачи анализа для системы F_0 . Однако она уступает в точности

формуле (31) ввиду того, что здесь рассматривается анизотропийный оценитель E'_b , уже не являющийся оптимальным. Преимущество полученного результата перед аналогичным из параграфа 3.1 заключается в том, что для вычисления оценителя E'_b нужно решить достаточно простую систему *линейных* уравнений, в то время как для нахождения оптимального оценителя нужно решить достаточно сложную систему *нелинейных* уравнений.

Важным замечанием является то, что формулой (36) можно пользоваться только при удовлетворении определенного условия на значения a и b . Это условие находится из того соображения, что для некоторого $0 < \varepsilon = \bar{o}(1)$ максимально возможные значения a и b должны удовлетворять неравенству

$$(57) \quad \|F_b\|_a - \frac{\|F_0\|_2}{\sqrt{m}} < \varepsilon \frac{\|F_0\|_2}{\sqrt{m}},$$

обеспечивающему с предъявляемой точностью относительную близость значений анизотропийной нормы и масштабированной \mathcal{H}_2 -нормы. Преобразуя (57), попутно заменяя обе величины a и b на $a_{\max} \doteq \max\{a, b\}$, получим

$$(58) \quad a \leq a_{\max} = \varepsilon^2 \left(\sqrt{\frac{Q}{m}} + \frac{\text{tr}(\Sigma_2)}{2q_1 \|F_0\|_2^2} \right)^{-2},$$

где правая часть неравенства в соответствии с решаемой задачей предполагается имеющей порядок $\bar{o}(\text{tr}(P_0))$. Формула для a_{\max} совпадает с (38). Лемма доказана.

В следующем разделе работы представлен пример решения разбираемой задачи для некоторой линейной дискретной стационарной системы.

4. Пример

Рассмотрим линейную стационарную устойчивую систему

$$(59) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + B\omega, \\ y = Cx + D\omega \end{cases}$$

в трех различных конфигурациях, заданных матрицами A_1, A_2, A_3 :

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_i & & \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1,25 & -1,5 \\ -2 & -3 & -4 \\ -3 & -5 & -8 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дискретизируем рассматриваемую систему (59) с шагом дискретизации $T_s = 10^{-6}$. В итоге получаем линейную стационарную дискретную систему, заданную четверкой (A_d, B_d, C_d, D_d) , где

$$A_d = e^{AT_s}, \quad B_d = \left(\int_0^{T_s} e^{A(T_s-\tau)} B d\tau \right), \quad C_d = C, \quad D_d = D.$$

Задача 2. При заданном ε определить максимальный порог средней анизотропии и для найденного порога вычислить приближенный анизотропийный оценитель, который удовлетворяет условию $\frac{\|F_a\|_a}{\|F_0\|_2/\sqrt{m}} - 1 < \varepsilon$.

Используя представленные в работе результаты решения задач синтеза оценителя и определения максимального порога анизотропии, проведены численные вычисления:

1) решений уравнений (9), (33a) относительно компонент P_0, P_1 соответственно и матриц P_{z0} и P_{z1} по формулам (39) и (54) со всеми сопутствующими выкладками;

2) компонент матриц K и M искомого анизотропийного оценителя по формулам (32b), (32c), (32d) и (32e).

3) максимального порога анизотропии a_{max} по формуле (38) для различных уровней точности $\varepsilon \in (0; 1)$;

4) относительного отклонения

$$\delta_{rel} = \frac{\text{tr}(P_1)\sqrt{a}}{\text{tr}(P_0)} \cdot 100\%.$$

Результаты вычислений представлены в виде графиков, изображенных на рис. 1 и рис. 2. Соответствующие отклонения отложены по оси Oy , а по оси Ox – значения $\lg(a_{max})$.

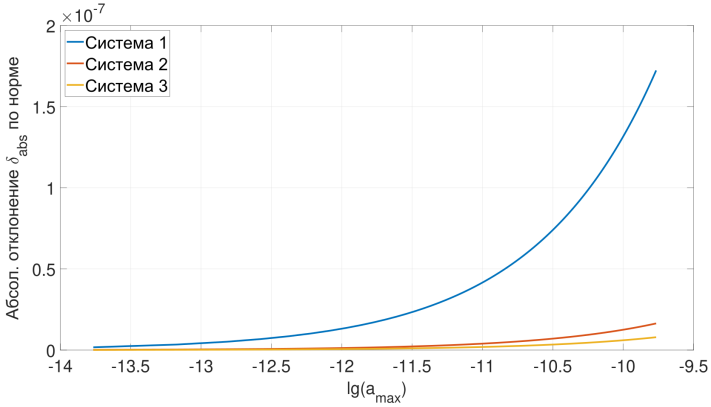


Рис. 1. Абсолютное отклонение следа ковариационной матрицы P от P_0

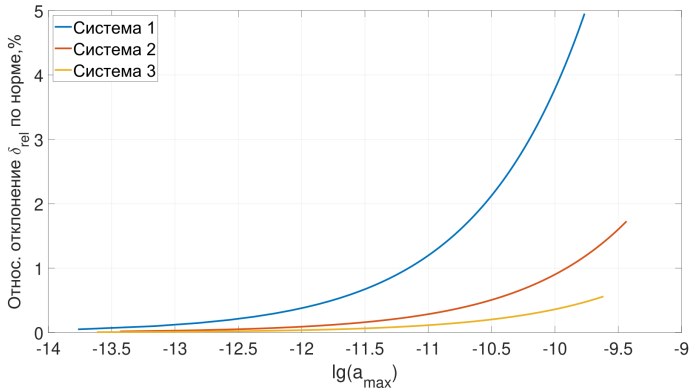


Рис. 2. Относительное отклонение δ_{rel} следа ковариационной матрицы P от P_0

В соответствии с графиками можно сделать вывод, что для линейных стационарных устойчивых систем с большей скоростью динамики (меньший спектральный радиус матрицы A) максимальный порог анизотропии при том же допуске ε существенно выше, чем для систем с низкой скоростью динамики. Видно, что относительное отклонение $\delta_{rel} = 5\%$ для системы с низкой скоростью динамики (система 1) достигается при пороге анизотропии $a_{max} \approx 10^{-10}$, а для системы с высокой скоростью динамики (система 3) то же относительное отклонение достигается при максимальном пороге анизотропии $a_{max} \gg 1$. Поскольку большинство реальных технических устойчивых систем обладают низкой скоростью динамики, можно ожидать, что диапазон отклонения статистических свойств входного случайного возмущения от свойств гауссовского белого шума очень узкий, и поэтому практически при любом отклонении внешних возмущений от белого шума эффективней будет использовать методы синтеза оптимального анизотропийного оценщика или, по крайней мере, использовать приближенные формулы его вычисления, полученные в данной работе.

5. Заключение

В данной работе рассмотрены задача синтеза анизотропийного оценщика при стремлении параметра анизотропии к нулю и задача определения максимального порога анизотропии, при котором анизотропийный оценщик может быть с заданной точностью аппроксимирован фильтром Калмана. Получены асимптотические представления матриц оценщика и ковариационных матриц ошибки оценивания как функций верхней границы средней анизотропии. Также выведено выражение для вычисления анизотропийной нормы системы в ошибках оценивания и проведено сравнение с ранее полученными результатами по левой асимптотике анизотропийной нормы для линейных дискретных стационарных систем. По результатам решения задачи об определении максимального порога анизотропии можно сделать вывод о большей эффективности анизотропийного оценщика в

большинстве задач оценивания по сравнению с фильтром Калмана при наличии на входе системы случайных возмущений с ненулевой анизотропией, т.е. отличающихся от гауссовского белого шума.

Литература

1. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. *Асимптотика анизотропийной нормы линейных стационарных систем* // Автоматика и телемеханика. – 1999. – №3. – С. 78–87.
2. ТИМИН В.Н., КУРДЮКОВ А.П. *Синтез робастной системы управления на режиме посадки самолета в условиях сдвига ветра* // Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1993. – №6. – С. 200–208.
3. ANDERSON B.D.O., MOORE J.B. *Optimal Filtering*. – New Jersey: Prentice Hall. 1979.
4. BELOV I.R., YURCHENKOV A.V., KUSTOV A.YU. *Anisotropy-Based Bounded Real Lemma for Multiplicative Noise Systems: the Finite Horizon Case* // Proc. of the 27th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED). – 2019.
5. DEY S., MOORE J.B. *Risk-sensitive filtering and smoothing via reference probability methods* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1997. – Vol. 42, No. 11. – P. 1587–1591.
6. HASSIBI B., SAYED A., KAILATH T. *Indefinite Quadratic Estimation and Control: A Unified Approach to \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Theories*. – Philadelphia: SIAM. 1999.
7. KAILATH T. *A view of three decades of linear filtering theory* // IEEE Trans. on Information Theory. – 1974. – Vol. 20, No. 2. – P. 146–181.
8. KALMAN R.E. *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems* // J. Basic Eng., Trans. ASME, Series D. – 1960. – Vol. 82, No. 1. – P. 35–45.

9. KOROTINA M., ARANOVSKIY S., BOBTSOV A. *Disturbance Frequency Estimation for an LTV System* // IFAC-PapersOnLine. – 2022. – Vol. 55, Is. 12. – P. 318–323.
10. KUSTOV A.YU., TIMIN V.N., YURCHENKOV A.V. *Anisotropic Norm Computation for Time-invariant Random System* // Proc. of the 15th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB). 2020.
11. KUSTOV A.YU., YURCHENKOV A.V. *Anisotropic Estimator Design for Time Varying System with Measurement Dropouts* // Proc. of the 15th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB). 2020.
12. KWON O.-K., DE SOUZA C.E., RYU H.-S. *Robust \mathcal{H}_∞ FIR filter for discrete-time uncertain systems* // Proc. of 35th IEEE Conf. on Decision and Control. – 1996. – Vol. 4. – P. 4819–4824.
13. OPPENHEIM A.V., SCHAFER R.W. *Digital Signal Processing*. – PrenticeHall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.
14. POLYAK B.T., KHLEBNIKOV M.V. *Filtering with nonrandom noise: invariant ellipsoids technique* // IFAC Proc. Volumes (IFAC Papers-OnLine). – 2008. – Vol. 41.
15. PYRKIN A., BOBTSOV A., ORTEGA R., ISIDORI A. *An adaptive observer for uncertain linear time-varying systems with unknown additive perturbations* // Automatica. – 2023. – Vol. 147.
16. SEMYONOV A.V., VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P. *Stochastic approach to \mathcal{H}_∞ -optimization* // Proc. of the 33rd Conf. on Decision and Control, Florida, USA. – December 14–16, 1994. – Vol. 3. – P. 2249–2250.
17. SIMON D. *Optimal State Estimation: Kalman, \mathcal{H}_∞ , and Nonlinear Approaches*. – New Jersey: Wiley, 2006.
18. TERMAN F.E. *Electronic and Radio Engineering*. – McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.

19. THEODOR Y., SHAKED U. *Robust discrete-time minimum-variance filtering* // IEEE Trans. on Signal Processing. – 1996. – Vol. 44, No. 2. – P. 181–189.
20. VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P., SEMYONOV A.V. *Anisotropy of Signals and the Entropy of Linear Stationary Systems* // Dokl. Math. – 1995. – Vol. 51. – P. 388–390.
21. VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A. P., SEMYONOV A.V. *On Computing the Anisotropic Norm of Linear Discrete-Time-Invariant Systems* // Proc. 13 IFAC World Congress. – 1996. – P. 179–184.
22. VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P., SEMYONOV A.V. *State-space solution to anisotropy-based stochastic \mathcal{H}_∞ -optimization problem* // Proc. of the 13th IFAC World Congress, San-Francisco, California, USA. – June 30-July 5, 1996. – V. H, Paper IFAC-3d-01.6. – P. 427–432.
23. XIE L., SOH Y.C., DE SOUZA C.E. *Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1994. – Vol. 39. – P. 1310–1314.
24. YURCHENKOV A.V. *Lemma on Boundedness of Anisotropic Norm for Systems with Multiplicative Noises under a Noncentered Disturbance* // Automation and Remote Control. – 2021. – P. 51–62.
25. YURCHENKOV A.V., KUSTOV A.YU. *Anisotropy-Based Approach to Communication Tuning for a Time-Varying Sensor Network System* // Dokl. Math. 2022. – Vol. 104. – P. 311–315.
26. YURCHENKOV A.V., KUSTOV A.YU., TIMIN V.N. *Anisotropy-based Approach of Sensors Network Filtration: Nonzero Mean Disturbance Case* // Proc. of the 16th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB). 2022.
27. YURCHENKOV A.V., KUSTOV A.YU., TIMIN V.N. *The sensor network estimation with dropouts: Anisotropy-based approach* // Automatica. – 2023. – Vol. 151.

ON THE APPLICATION OF KALMAN FILTER FOR THE ESTIMATION PROBLEM WITH WEAKLY COLOURED NOISES

Ivan Belov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., senior researcher (ivanb1993@mail.ru).

Arkadiy Kustov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., senior researcher (arkadiykustov@yandex.ru)

Abstract: The anisotropy-based estimation problem for linear discrete time invariant system is considered in the paper. The asymptotic formulas for estimator matrices, estimation error covariance matrix and anisotropic norm of estimation error system under the condition of small values of mean anisotropy of input disturbance are demonstrated. Also the maximum edge of external disturbance anisotropy, providing the prescribed accuracy of anisotropy-based estimator approximation by Kalman filter, is determined in the article. The stated problems solution is demonstrated in the graphical results of numerical modelling for linear discrete time invariant stable system.

Keywords: anisotropy-based theory, estimation problem, linear discrete time invariant systems, Kalman filter.

УДК 681.518.22; 681.514; 681.516.75

ББК 32.965.4; 32.965.6

DOI: 10.25728/ubs.2023.103.4

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.*

Поступила в редакцию 22.03.2023.

Дата опубликования 31.05.2023.