

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ЛАКСА – ФРИДРИХСА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Малышев С. В.¹

(МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва)

Статья посвящена программной реализации численного метода Лакса – Фридрихса для моделирования нестационарных задач газовой динамики. Рассматривается задача Сода в двух измерениях в следующей постановке: имеется замкнутая ударная труба с пластинкой посередине, которая разделяет два газа с разными термодинамическими характеристиками. В начальный момент времени она моментально удаляется, газы при этом смешиваются. Появляется разрыв и возникает ударная волна. Цель работы заключается в нахождении термодинамических характеристик в произвольный момент времени и в программной реализации расчётов с помощью численного метода Лакса – Фридрихса. Задача является актуальной в силу нехватки чётких вычислительных алгоритмов в сфере газовой динамики. Точность решения зависит от количества ячеек в сетке, на которую разбивается поверхность. В результате приведён расчёт и численные значения для разных сеток, точное и численное решения сравнены в различных нормах.

Ключевые слова: ударные волны, задача Сода, численный метод Лакса – Фридрихса.

1. Введение

Одним из основных методов исследования современных задач газовой динамики является численное моделирование. Благодаря относительной простоте формулировок и алгоритмов, широко используются конечно-разностные схемы, такие как методы Лакса – Фридрихса, Маккормака, WENO-методы (weighted essentially non-oscillatory). Дополнительным достоинством этого класса схем является эффективность расширения одномерных формулировок на двух- и трехмерные задачи. К недостаткам конечно-разностных методов можно отнести сложность, а зачастую и невозможность их применения на неструктурированных расчетных сетках. Современные методы высокой точности –

¹ Сергей Вадимович Малышев, студент (serge.malychev@mail.ru).

в первую очередь WENO-методы – позволяют достигать произвольно высоких порядков сходимости на гладких решениях за счет расширения разностного шаблона.

В современной литературе разностные методы, как правило, формулируются в консервативной форме, связывающей изменение значений консервативных физических величин в расчетном узле с так называемыми «потоками» этих величин между расчетными узлами. Простейшим методом, допускающим такую формулировку, является метод Лакса – Фридрихса первого порядка аппроксимации [5].

В настоящей работе выполнена программная реализация метода Лакса – Фридрихса для одномерных нестационарных течений совершенного газа и проведена проверка сходимости численного решения к точному решению частного случая задачи о распаде газодинамического разрыва.

2. Постановка задачи

Два совершенных газа находятся в одномерной трубке и разделены тонкой мембраной (рис. 1). В начальный момент времени мембрана моментально удаляется. Дальнейшая эволюция параметров газа – давления, плотности и скорости – описывается искомыми функциями координаты и времени. Параметры газа слева от мембраны будем записывать с индексом 1, параметры газа справа – с индексом 2. Рассматриваются основные характеристики газа такие как: плотность ρ , скорость газа относительно фиксированной системы отсчёта u , давление p и показатель адиабаты γ . С течением времени меняются первые три характеристики, которые и надо найти.



Рис. 1. Состояние задачи в момент $t = 0$

Рассматривается частный случай задачи Сода с одинаковыми показателями адиабаты для обоих газов. Расчёты будут проводиться для следующих начальных условий (задача Сода [8]): при $x < 0$ $(\rho, u, p) = (1, 0; 0; 1, 0)$, при $x \geq 0$ $(\rho, u, p) = (0, 125; 0; 0, 1)$

Требуется узнать, какие будут состояния у плотности, скорости и давления в момент времени $t = 0,2$ на отрезке $x \in [-0,5; 0,5]$. Как выяснится далее, для этого требуется произвести расчёты для каждого момента времени с заданным шагом, начиная от $t = 0$ до $t = 0,2$.

3. Описание математической модели

Будем считать, что конфигурация течения после распада разрыва известна заранее [9], тогда направо будет распространяться ударная волна, налево – волна разрежения, а между ними будет возникать контактный разрыв.

Как видно из схемы течения (рис. 2), множество лучей, направленных влево – это волна разрежения. Пунктирная линия – это контактный разрыв. Нужно заметить, что слева и справа от него давление и скорость одинаковы, меняется только плотность. Последний сплошной луч – это ударная волна.

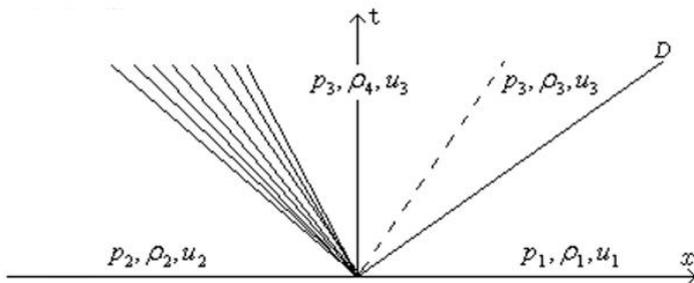


Рис. 2. Схема течения (x - t -диаграмма) при распаде разрыва

Для них можно выписать систему из пяти уравнений с пятью неизвестными: p_3, ρ_3, u_3, ρ_4 и D . Здесь p_3 – давление газа между

волной разрежения и ударной волной; ρ_3, u_3 – плотность и скорость между контактными разрывом и ударной волной; ρ_4 – плотность между волной разрежения и контактными разрывом; D – скорость скачка, бегущего вправо; a_2, a_4 – это скорости звука, равные $\sqrt{\frac{\gamma p_2}{\rho_2}}$ и $\sqrt{\frac{\gamma p_3}{\rho_4}}$ соответственно.

$$\begin{aligned} \rho_1(u_1 - D) &= \rho_3(u_3 - D), \\ p_1 + \rho_1(u_1 - D)^2 &= p_3 + \rho_3(u_3 - D)^2, \\ \frac{(u_1 - D)^2}{2} + \frac{\gamma p_1}{\gamma - 1 \rho_1} &= \frac{(u_3 - D)^2}{2} + \frac{\gamma p_3}{\gamma + 1 \rho_3}, \\ \frac{p_3}{\rho_4^\gamma} &= \frac{p_2}{\rho_2^\gamma}, \\ u_3 + \frac{2a_4}{\gamma - 1} &= u_2 + \frac{2a_2}{\gamma - 1}. \end{aligned}$$

Первые три уравнения – это соотношения на прямом скачке уплотнения, четвёртое – уравнение адиабаты Пуассона для волны разрежения Римана, а пятое – соотношение вдоль волны Римана для совершенного газа.

Все они сводятся к одному уравнению для D :

$$u(D) + \frac{2}{\gamma - 1} \sqrt{\frac{1}{\rho_2}} \left(\frac{\gamma p_2}{\rho_2} (p(D)) \right)^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} - u_2 - \frac{2a_2}{\gamma - 1} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} p(D) &= \frac{2\rho_1(D - u_1)^2 + (1 - \gamma)p_1}{\gamma + 1}, \\ u(D) &= \frac{2D^2 + (\gamma - 3)u_1D + (1 - \gamma)u_1^2 - 2a_1^2}{(\gamma + 1)(D - u_1)}. \end{aligned}$$

Его решение можно найти с любой наперед заданной точностью, например, с помощью метода Ньютона.

Полученное точное решение задачи о распаде разрыва можно использовать для проверки сходимости численного метода.

4. Численное моделирование

Для моделирования нестационарных течений совершенного газа используются уравнения Эйлера [5]. Три уравнения сохранения, которые записаны в дифференциальной форме, – сохранения импульса, энергии и массы:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{pmatrix}, E = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{u^2}{2}.$$

Вектор U называется вектором консервативных величин, а вектор F – потоками этих величин. При известных начальных условиях – значениях плотности, скорости и давления в каждой точке в начальный момент времени – требуется найти их значения в произвольный момент времени. В этом нам поможет численный метод Лакса – Фридрикса.

Расчетная область разбивается на $N + 1$ расчетных узлов, расположенных равномерно. Чем больше будет расчетных узлов, тем выше ожидается точность вычислений.

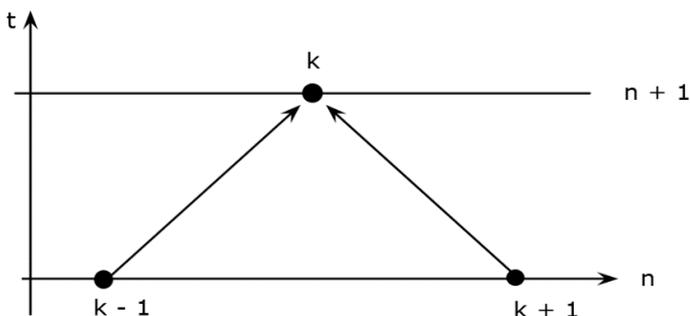


Рис. 3. Разностный шаблон метода Лакса-Фридрикса

Схема работы численного метода следующая (рис. 3): берутся значения в $(k + 1)$ -м и $(k - 1)$ -м расчетном узле в n -й момент времени и по ним с помощью разностной формулы

$$U_k^{n+1} = \frac{1}{2} (U_{k+1}^n + U_{k-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F(U_{k+1}^n) - F(U_{k-1}^n))$$

находятся значения в k -м узле в $(n + 1)$ -й момент времени.

Допустимая величина шага по времени определяется условием Куранта – Фридрикса – Леви [1].

Так же, как и любой другой метод, метод Лакса – Фридрикса позволяет найти значения с определённой точностью. Нам также

требуется проверить, насколько численные результаты будут приближать наше точное решение.

5. Структура программы

Для решения поставленной задачи была разработана программа. Она составлена на языке Си и состоит из трёх модулей.

Первый модуль – подсчёт численного решения. Вычисляется значения плотности, скорости и давления методом Лакса –Фридрихса от начального момента времени до заданного. Затем они записываются в выходной файл, читаемый программой Paraview, в которой можно построить графики и удостовериться в правильности подсчётов.

Второй модуль – вычисление точного решения. С помощью метода Ньютона производится подсчёт значений из алгебраического уравнения. Результат записывается в выходной файл, который также распознаётся программой Paraview.

Третий модуль – вычисление норм разности значений, полученных на выходе первого и второго модулей.

6. Сравнение точного и численного решения на разных сетках

Разработанная программа позволяет находить решения при заданном количестве расчётных узлов. Рассмотрим их при разных сетках. На горизонтальной оси будем указывать координату x . Красным цветом будем обозначать плотность ρ , чёрным цветом давление p , а синим цветом скорость u .

Значения для сетки на 50 узлов приведены на рис. 4.1. Здесь мы можем наблюдать графики точного решения; точками обозначены значения численного решения в узлах сетки.

Как видно на рис. 4.1, нами получена неплохая точность решения, при этом образуют ступеньки, т.е. стоят попарно на одной строчке. Такое явление обусловлено так называемым «шахматным расщеплением» (odd-even decoupling) сетки при применении метода Лакса – Фридрихса, вызванным, в свою очередь, отсутствием нижнего центрального узла в разностном шаблоне.

Графики на сетке в 500 узлов приведены на рис. 4.2. Результат аналогичный, но численное решение теперь обозначается пунктирной линией. Как видно, графики сближаются.

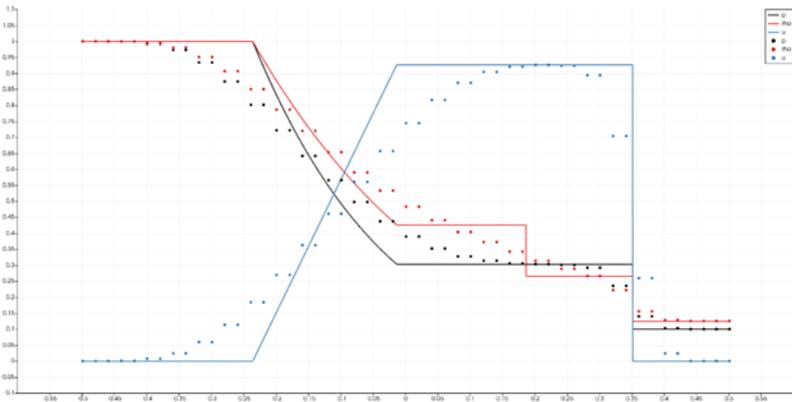


Рис. 4.1. Сравнение точного и численного решений при $N = 50$

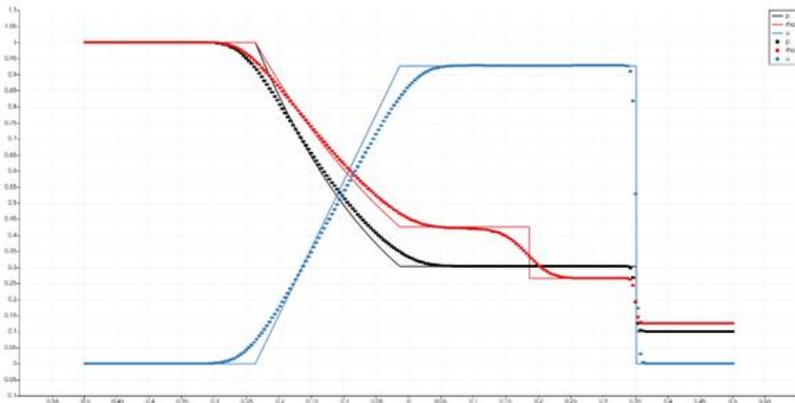


Рис. 4.2. Сравнение точного и численного решений при $N = 500$

И уже при совсем мелкой сетке в 5000 узлов (рис. 4.3) графики почти сливаются друг с другом. Здесь уже наглядно видны

три перепада для плотности – красная линия. Сначала идёт волна разрежения – гладкое понижение, потом скачок – контактный разрыв, и в конце ещё один скачок – ударная волна.

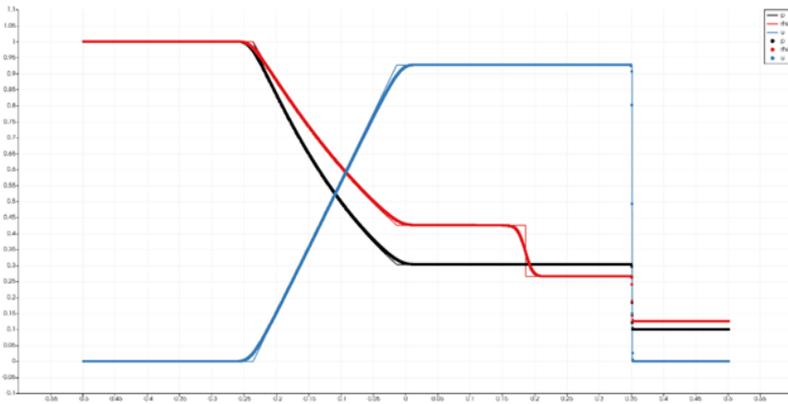


Рис. 4.3. Сравнение точного и численного решений при $N = 5000$

Если рассматривать нормы разностей численного и точного решения, то можно увидеть, что точность возрастает. Для этого нужно подобрать рабочую норму.

Нами использовались три нормы: равномерная

$$\|u^{approx} - u^{exact}\| = \max_k |u_k^{approx} - u_k^{exact}|,$$

евклидова

$$\|u^{approx} - u^{exact}\| = \sqrt{\sum_k (u_k^{approx} - u_k^{exact})^2}$$

и среднеквадратичная

$$\|u^{approx} - u^{exact}\| = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_k (u_k^{approx} - u_k^{exact})^2}.$$

Для каждой нормы произведены подсчёты на разных сетках.

N = 50	Равномерная Норма	Евклидова Норма	Среднеквадратичная
Плотность	0,150113	0,372828	0,052726
Скорость	0,868647	1,036487	0,146581
Давление	0,199389	0,463362	0,065529
N = 500			
Плотность	0,094115	0,468578	0,020955
Скорость	0,453968	0,964659	0,043141
Давление	0,122787	0,446648	0,019975
N = 5000			
Плотность	0,100699	0,602934	0,008527
Скорость	0,599741	0,931951	0,01318
Давление	0,151752	0,351264	0,004968

Рис. 5. Сравнение норм для разных параметров и сеток

Как видно из расчётов (рис. 5), для равномерной нормы значения меняются незначительно. Это происходит по той причине, что эта норма ищет максимальную ошибку – наибольшую погрешность вычислений. И, как можно видеть на рисунке, особенно на контактном разрыве в ней всегда будет погрешность в значениях и она не будет зависеть от количества узлов.

Евклидова норма почти не убывает, а в случае плотности происходит ее рост. Это связано с чрезвычайно сильным «размыванием» контактного разрыва по расчетным узлам, характерным для всех численных методов первого порядка аппроксимации.

Среднеквадратичная норма убывает при измельчении сетки, однако скорость убывания оказывается ниже, чем ожидается при применении метода первого порядка аппроксимации. Вероятно, такое поведение связано с разрывностью исследуемого течения.

7. Заключение

Разработана программа для численного моделирования одномерных нестационарных течений газов на основе уравнений Эйлера и конечно-разностного метода Лакса – Фридрихса. На основе моделирования задачи о распаде газодинамического разрыва показана удовлетворительная сходимость численного решения к точному по мере измельчения расчетной сетки.

Литература

1. КУРАНТ Р., ФРИДРИХС К., ЛЕВИ Г. *О разностных уравнениях математической физики* // Успехи математических наук. – 1941. – №8. – С. 125–160.
2. ЛОЙЦЯНСКИЙ Л.Г. *Механика жидкости и газа: Учеб. Для вузов.* – 7-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2003.
3. ОВСЯННИКОВ Л.В. *Лекции по основам газовой динамики.* – Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
4. СТУЛОВ В.П. *Лекции по газовой динамике.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
5. ЧЁРНЫЙ Г.Г. *Газовая динамика.* – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.
6. УИЗЕМ ДЖ. *Линейные и нелинейные волны.* – М.: Мир, 1973.
7. COURANT R., FRIEDRICHS K., LEWY H. *Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik* // Mathematische Annalen. – 1928. – Vol. 100, No. 1. – P. 32–74.
8. LEVEQUE R.J. *Numerical Methods for Conservation Laws.* – Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 1992. –P. 125.
9. SOD G.A. *A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws* // J. Comput. Phys. – 1978. – Vol. 27. – P. 1–31.
10. WEISSTEIN E.W. *Courant -Friedrichs-Lewy Condition* [Электронный ресурс]. – URL: <https://mathworld.wolfram.com/Courant-Friedrichs-LewyCondition.html> (дата обращения: 16.11.2020).

SOFTWARE IMPLEMENTATION OF THE LAX – FRIEDRICHS NUMERICAL METHOD FOR MODELING NONSTATIONARY PROBLEMS OF GAS DYNAMICS

Sergey Malyshev, Moscow State University, Moscow, student (serge.malychev@mail.ru).

Abstract: This article is devoted to the software implementation of the numerical Lax-Friedrichs method for modeling nonstationary problems of gas dynamics. The Soda problem is considered in two dimensions. We postulate it in the following way: there

is a closed shock tube with a plate in the middle. The plate separates two gases with different thermodynamic characteristics. At the initial moment of time, it is instantly deleted: gases mix and produce a shock wave. The purpose of the work is to find the thermodynamic characteristics at any time and to program the implementation of calculations using the numerical Lax-Friedrichs method. This task is relevant at the moment due to the lack of clear computational algorithms in the field of gas dynamics. The solution depends on the number of cells in the grid into which the surface is divided. As a result, the calculation and numerical values for different grids are given as well as their comparison with the help of various norms is made.

Keywords: shock wave, Soda problem, Lax-Friedrichs numerical method.

УДК 533.2

ББК 30.124

DOI: 10.25728/ubs.2023.105.2

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.*

Поступила в редакцию 21.07.2023.

Опубликована 30.09.2023.