МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСА В ИЕРАРХИЧЕСКИ УПРАВЛЯЕМОЙ ДРЕВОВИДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С УЧЁТОМ ОППОРТУНИСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ АГЕНТОВ[1]

Горбанёва О.И.[2], Михалкович С.С.[3], Угольницкий Г.А.[4]
(*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*)

Статья посвящена построению и исследованию СОЧИ-моделей воспроизводства и распределения ресурса в иерархически управляемой древовидной динамической системе с учётом возможного оппортунистического поведения агентов. Предложена оригинальная концепция балансовых соотношений для ресурса. Описана общая структура указанной модели для двухуровневой и трёхуровневой управляющей подсистемы. Приведены иллюстративные примеры аналитического и численного исследования частных случаев указанных моделей для различных информационных регламентов динамических игровых моделей.

Ключевые слова: имитационное моделирование; оппортунистическое поведение; распределение ресурсов; управляемые динамические системы; экономика общественных благ.

1. Введение

Задачи согласования интересов активных агентов при распределении ресурсов наиболее подробно исследованы в экономике общественных благ, начиная с основополагающих работ [12–14, 22]. Современное состояние этого направления отражено во многих работах, например, в [15, 19]. Приложения теории динамических игр к данной области описаны в [20, Chap. 6]. В частности, в этой монографии показаны различия при моделировании материальных и нематериальных общественных благ. Чрезвычайно важную роль в математической формализации данного направления сыграла модель Гермейера –

---

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект №23-21-00131.*
[2] *Ольга Ивановна Горбанёва, д.т.н., доцент* (*oigorbaneva@sfedu.ru*).
[3] *Станислав Станиславович Михалкович, к.ф.-м.н., доцент* (*miks@sfedu.ru*).
[4] *Геннадий Анатольевич Угольницкий, д.ф.-м.н., профессор* (*gaugolnickiy@sfedu.ru*).

Вателя [1]; развитие этих исследований выполнено в [8]. Подход теории управления организационными системами к решению задач распределения ресурсов изложен в [9, 10].

Авторское развитие указанного направления предложено в концепции СОЧИ-моделей (моделей согласования общественных и частных интересов) [5, 17]. Эта концепция входит в состав более общей теории управления устойчивым развитием, где помимо согласования интересов активных агентов учитываются требования к состоянию управляемой динамической системы [11]. Модели борьбы с оппортунистическим поведением для обеспечения устойчивого развития описаны в [6].

Регламенты динамических игр, отражающие различные правила иерархического управления, описаны в [7]. Здесь принципиально наличие или отсутствие обратной связи по действиям агентов и/или по состоянию управляемой системы.

Решение сложных динамических задач конфликтного управления, в том числе при распределении ресурсов, требует применения численных методов или компьютерной имитации [21].

Модели сочетания общих и частных интересов (СОЧИ-модели) предполагают, что в имеющемся множестве агентов есть некий общий интерес, который требует затрат некоторого ресурса. Каждый агент, имея некоторое количество ресурсов, распределяет его между общим интересом и своими частными с тем, чтобы суммарный выигрыш от частной деятельности и причитающаяся доля от результатов общественной деятельности был максимален. Статические одноуровневые модели сочетания общих и частных интересов независимых агентов рассмотрены в [5, 16]. В них найдено равновесие по Нэшу для наиболее часто используемых в экономических исследованиях функций общих и частных интересов.

В [3] рассмотрены двухуровневые СОЧИ-модели независимых агентов, над которыми имеется верхний уровень – Принципал (Центр), целью которого является максимизация функции общественного благосостояния. Для достижения этой цели Принципал может применять административное либо экономическое воздействие. Административное воздействие заключается в установке нижнего значения величины ресурсов, меньше которого агент не может потратить на общие цели. Принципал несет затраты на контроль за выполнением агентами выдвинутых к ним требований Принципала. Экономическое воздействие Принципала на агентов может заключаться в том, чтобы назначать доли участия агентов в общем доходе, либо в том, чтобы влиять на количество ресурсов, имеющихся у агента, в частности, выделять ресурсы агентам. В данных иерархических играх найдены равновесия по Штакельбергу.

В [2–3] рассмотрены трехуровневые СОЧИ-модели, включающие промежуточный уровень между Принципалом и агентами – Супервайзер, который действует от лица Принципала, но может ослаблять его требования в ответ на взятку от агента. В зависимости от типа воздействия агента на супервайзера выделяют административную и экономическую коррупцию, а также коррупцию при распределении ресурсов.

Позже рассматривались динамические модели распределения ресурсов, а именно сетевые СОЧИ-модели обмена мнениями в маркетинге [22], а также региональные СОЧИ-модели взаимодействия [4].

Сетевая СОЧИ-модель управления мнениями представляет собой трёхуровневую иерархическую игру, в которой Центр выделяет ресурсы агентам влияния (фирмам), которые, в свою очередь, распределяют ресурсы на воздействие (проводят акции, раздают бесплатно пробный товар и т.д.) на базовых агентов (сетевыми потенциальных клиентов) с целью повышения продаж товара или услуги. Целью Центра и агентов влияния является повышение продаж товара за вычетом расходов на выделение ресурсов подчинённым уровням. Кроме того, агенты влияния кроме повышения продаж имеют свои частные интересы (например, инвестиции), на которые идет оставшаяся часть ресурсов, выделенных Центром агенту влияния. Центр может быть дружелюбным по отношению к агентам влияния или безразличным к нему. В моделях дружелюбие или безразличие проявляется учётом или неучётом частных интересов агентов влияния в целевой функции Центра. Базовые агенты образуют сеть, имея связи с другими базовыми агентами. Базовые агенты не имеют собственных интересов, но имеют мнение о продаваемом в маркетинговой сети товаре, которое меняется со временем под влиянием других базовых агентов и агентов влияния.

Что же касается СОЧИ-моделей регионального взаимодействия, то рассматриваются двухуровневые системы. На нижнем уровне находятся регионы, которые находятся в составе макрорегиона на верхнем уровне. Регионы выпускают продукцию, получая валовый региональный продукт (ВРП), что учитывается при помощи функции Кобба – Дугласа. Также регион при ведении хозяйства загрязняет окружающую среду. ВРП расходуется в следующий период времени на инвестиции в производство, расходы на очищение окружающей среды и вложение средств в развитие соседних регионов. Макрорегион при помощи экономического и административного воздействия повышает удельное потребление всего макрорегиона. Административное воздействие заключается в назначении нижних границ расходов на все рассматриваемые в модели статьи затрат, а экономическое воздействие подразумевает повышение заинтересованности регионов не только в повышении своего удельного потребления, но и удельного потребления макрорегиона.

Настоящая работа посвящена построению и исследованию СОЧИ-моделей воспроизводства и распределения ресурса в иерархически управляемой древовидной динамической системе с учётом возможного оппортунизма агентов. Мы здесь определяем оппортунизм в более узком смысле как реализацию агентами своих частных интересов вместо участия в общественном производстве (например, это может быть нецелевое использование выделенных ресурсов).

Вклад статьи состоит в следующем:

– предложены весьма общая модель воспроизводства и распределения ресурса в иерархически управляемой динамической системе и регламент её исследования посредством имитационного моделирования, приведены аналитические результаты для линейной параметризации модели и результаты численного исследования для более общего случая;

– проведено аналитическое и численное исследование статических моделей распределения ресурса между производством общественного продукта и частной деятельностью;

– проведено аналитическое исследование динамических моделей воздействия на природную среду с учётом частных интересов и требований устойчивого развития системы.

2. Постановка задачи экономического управления в двухуровневой системе

Имеется двухуровневая древовидная управляющая система, воздействующая на динамический объект управления (производство некоторого ресурса). Эта система состоит из Центра и нескольких агентов. Каждый агент распределяет свои трудовые усилия между производством ресурса (общественного блага) и частной деятельностью. Произведённый в результате совместных усилий агентов ресурс поступает в распоряжение Центра, который заинтересован в его максимизации и использует часть ресурса для вознаграждения агентов. Выигрыш агента складывается из его вознаграждения и дохода от частной деятельности.

Структура моделируемой системы показана на рис. 1.

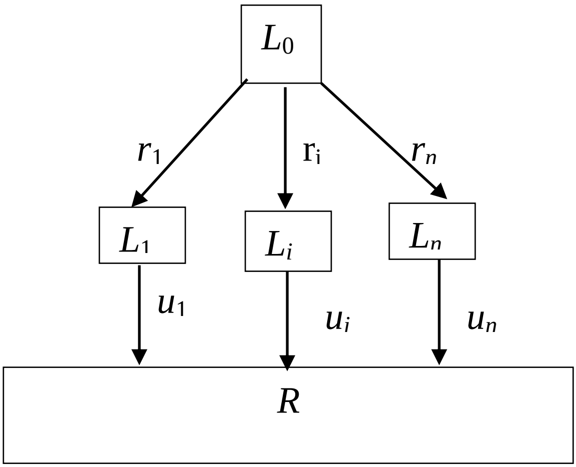

Рис. 1. Схема двухуровневой иерархически управляемой динамической системы

Модель имеет вид

(1) $J_0 = \sum_{t=1}^{T} \delta^t R^t \to max$

(2) $\sum_{i=1}^{n} r_i^t \leq 1;\quad r_i^t \geq 0,\quad i = 1, \ldots, n;$

(3) $J_i = \sum_{t=1}^{T} \delta^t [r_i^t R^t + G_i(1 - u_i^t)] \to \max$

(4) $0 \le u_i^t \le 1,\ i = 1, \dots, n;$

(5) $R^t = \left(1 - \sum_{i=1}^{n} r_i^t\right) R^{t-1} + F\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^t\right),\ R^0 = R_0,\ t = 1, \dots, T.$

Здесь L_0– Центр; $L_1, \dots, L_n$ – агенты; n – число агентов; R – ресурс, производимый агентами и поступающий в распоряжение Центра; r_i – доля ресурса, выделяемая Центром на вознаграждение i-го агента; u_i – усилие агента по производству ресурса (в долях от максимального усилия); F – функция производства ресурса совокупными усилиями агентов; G_i – функция дохода i-го агента от частной деятельности, не связанной с производством ресурса; $\delta \in (0, 1)$ – коэффициент дисконтирования; T – период рассмотрения.

Найдем оптимальную реакцию агентов на стратегию Центра. Выпишем задачу оптимального управления (3)–(5) в непрерывном времени (теперь коэффициент дисконтирования $0 < \rho < 1$) для степенной параметризации функций $F = \sqrt{u_1(t) + u_2(t)}$ и $G_i = \sqrt{1 - u_i(t)}$ в случае двух агентов:

(6) $J_i = \int_0^T e^{-\rho t}\left[r_i(t)R(t) + \sqrt{1 - u_i(t)}\right]dt \to max$

(7) $0 \le u_i(t) \le 1,\ i = 1, \dots, n;$

(8) $\dot{R} = -(r_1 + r_2)R(t) + \sqrt{u_1(t) + u_2(t)},$

(9) $R(0) = R_0,\ t = 1, \dots, T.$

К исследованию (1)–(9) применим принцип максимума Понтрягина.

Функция Гамильтона имеет вид

$$H_i(u_i, R, \lambda_i) = r_i R + \sqrt{1 - u_i} + \lambda_i(\sqrt{u_1 + u_2} - (r_1 + r_2)R).$$

Из необходимого условия максимума

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_i} = \frac{\lambda_i}{2\sqrt{u_1 + u_2}} - \frac{1}{2\sqrt{1 - u_i}} = 0,\ i = 1, 2,$$

откуда $\lambda_i \sqrt{1 - u_i} = \sqrt{u_1 + u_2}$, или ${\lambda_i}^2(1 - u_i) = u_1 + u_2$, получаем

(10) $u_1{}^*(t) = \frac{{\lambda_1}^2{\lambda_2}^2 + {\lambda_1}^2 - {\lambda_2}^2 + 1}{({\lambda_1}^2 + 1)({\lambda_2}^2 + 1)},\ u_2{}^*(t) = \frac{{\lambda_1}^2{\lambda_2}^2 + {\lambda_2}^2 - {\lambda_1}^2 + 1}{({\lambda_1}^2 + 1)({\lambda_2}^2 + 1)}.$

Решение краевой задачи для сопряжённой переменной

$$\dot{\lambda_i} = \rho\lambda_i - \frac{\partial H}{\partial R} = \rho\lambda_i - r_i + (r_1 + r_2)\lambda_i(t),\ \lambda_i(T) = 0$$

даёт

(11) $\lambda_i{}^*(t) = \frac{r_i}{\rho+r_i}\left(1 - e^{-(\rho+r_i)(T-t)}\right).$

Подстановкой (11) в (10) получаем оптимальное решение задачи.

Далее нам понадобятся два понятия. Индивидуализм означает, что агент тратит все ресурсы полностью на частную деятельность, а коллективизм – на общественное производство.

Видно, что $u_i{}^*(t) \leq 1$, причём в последний момент времени $t = T$ и только тогда $\lambda_i{}^*(t) = 0$, $i = 1, 2$, а значит, $u_i{}^*(t) = 1$, т.е. только в последний момент времени агентам выгодно быть коллективистами.

Также заметим, что для того, чтобы агенту выгодно было применить эгоистическую стратегию, необходимо выполнение условия

(12) $\lambda_2{}^2 > \frac{\lambda_1{}^2+1}{1-\lambda_1{}^2} = -1 + \frac{2}{1-\lambda_1{}^2}.$

Анализ правой части (12) показывает, что минимальное значение данного выражения равно 1 и достигается при $\lambda_1 = 0$.

С другой стороны, из (11) видно, что при ненулевых значениях параметров ρ и r_i величина $0 \leq \lambda_i{}^*(t) < 1$, а значит, условие (11) может выполниться только в виде равенства и только если $\lambda_{j\neq i}{}^*(t) = 0$, в то время как $\lambda_i{}^*(t) = 1$. Однако такого быть не может, так как значение параметра $\lambda_i{}^*(t)$, $i = 1, 2$, может равняться нулю только при $t = T$, но в этот же момент времени значение параметра второго агента не может равняться 1, так как по тем же причинам оно равно 0. Значит, при данной постановке агентам невыгодно быть индивидуалистами.

Итак, при степенной параметризации функций общего и частного дохода стратегия индивидуализма невыгодна агентам нижнего уровня, но и стратегия коллективизма выгодна только в последний момент времени $t = T$. Во все более ранние моменты времени агенту выгодно тратить ресурсы как на общие цели, так и на частные.

3. Постановка задачи экономического управления в трёхуровневой системе с учётом коррупции

Рассмотрим постановку задачи управления в трехуровневой системе с учётом коррупции в двух постановках: в случае, когда агенты всех уровней заинтересованы в производстве, и в случае, когда агенты всех уровней заинтересованы только в максимизации у них ресурсов, на количество которых тем не менее производство влияет.

ПОСТАНОВКА 1.

Имеется трёхуровневая древовидная управляющая система, воздействующая на динамический объект управления (производство ресурса). Эта система состоит из Центра, агентов влияния и базовых агентов. Каждый агент распределяет свои трудовые усилия между производством ресурса (общественного блага) и частной деятельностью. Произведённый в результате совместных усилий базовых агентов ресурс поступает в распоряжение Центра, который заинтересован в его максимизации и использует часть ресурса для вознаграждения агентов влияния и борьбы с коррупцией. Агент влияния, в свою очередь, получая ресурсы от Центра, также заинтересован в максимизации своего ресурса, но часть их он распределяет между подчиненными ему базовыми агентами. Агент влияния является промежуточным уровнем, посредником между Центром и подчиненными ему базовыми агентами (рис. 2).

Трудовые усилия базовых агентов по воспроизводству общего ресурса ограничиваются снизу. Агент влияния может ослаблять эти ограничения в обмен на взятку от базового агента. Центр контролирует оппортунистическое поведение агентов влияния и в случае поимки, которая происходит с определённой вероятностью, зависящей от расходов Центра, конфискует коррупционный доход и налагает на пойманного агента влияния большой дополнительный штраф.

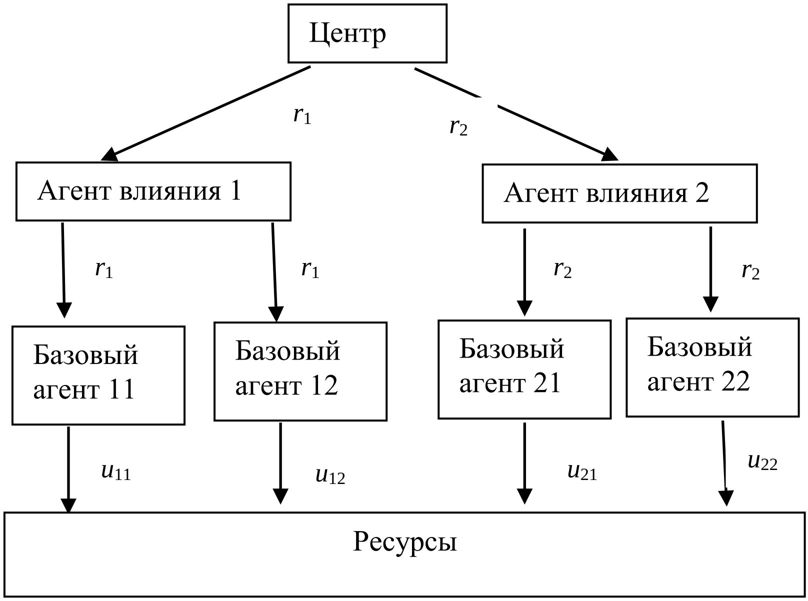

Рис. 2. Схема трехуровневой иерархически управляемой динамической системы

Выигрыш агента влияния складывается из его вознаграждения и возможного коррупционного дохода за вычетом расходов на вознаграждение базовых агентов и штрафа при коррупции в случае поимки. Выигрыш базового агента складывается из его вознаграждения и дохода от частной деятельности за вычетом возможных взяток.

Модель имеет вид

(13) $J_0 = \sum_{t=1}^{T} \delta^t R^t \to \max;$

(14) $r_i^t \geq 0;\quad z_i^t \geq 0;\ \sum_{i=1}^{m}(r_i^t + z_i^t) \leq 1;\quad i = 1,\ldots,m;$

(15) $J_i = \sum_{t=1}^{T} \delta^t R_i^t \to \max;$

(16) $r_{ij}^t \geq 0;\quad \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}^t \leq 1; B_i^t \in \{0,1\};\ i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n_i;$

(17) $J_{ij} = \sum_{t=1}^{T} \delta^t R_{ij}^t \to \max;$

(18) $q\left(1-b_{ij}^{t}\right) \le u_{ij}^{t} \le 1;\quad 0 \le b_{ij}^{t} \le 1;$
$i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n_i,$

(19) $R^{t} = \left[1-\sum_{i=1}^{m}(r_i^t + z_i^t)\right]R^{t-1} + F\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}^{t}\right) +$
$+M\sum_{i=1}^{m} B_i^t P(z_i^t) R_i^t,\quad R^0 = R_0;$

(20) $R_i^t = \left(1-\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}^t\right) R_i^{t-1} + r_i^t R^t + B_i^t\left[1-(1+M)P\left(z_i^t\right)\right]\cdot$
$\sum_{j=1}^{n_i} b_{ij}^t R_{ij}^t,\ R_i^0 = R_{i0};$

(21) $R_{ij}^{t+1} = \left(1-b_{ij}^t\right)R_{ij}^t + r_{ij}^t R_i^t + G_{ij}\left(1-u_{ij}^t\right),\ R_{ij}^0 = R_{ij0};$

$i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n_i;\ t = 1,\dots,T.$

Дополнительные обозначения: J_0, J_i, J_{ij} – выигрыши Центра, i-го агента влияния и ij-го базового агента соответственно; R, R_i, R_{ij} – ресурсы в распоряжении этих агентов; r_i, r_{ij} – доли ресурса, выделяемые Центром и агентами влияния своим подчинённым; b_{ij} – доля ресурса, выделяемая базовым агентом на взятку агенту влияния; z_i^t – доля ресурса, выделяемая Центром на контроль i-го агента влияния; $P(z_i^t)$ – вероятность поимки взяточника при затратах $z_i^t R^t$; M – коэффициент штрафа при поимке;

$$B_i^t = \begin{cases} 1, & \text{агент влияния берёт предложенные ему взятки,} \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

q – минимально допустимое усилие базовых агентов по воспроизводству общего ресурса.

Рассмотрим спецификацию модели, в которой частные функции линейны $G_0(x) = G_0x$, $G_i(x) = G_ix$, $G_{ij}(x) = G_{ij}x$.

Начнём с задачи базового агента:

(22) $J_{ij} = \sum_{t=1}^{T} \delta^t R_{ij}^t \to \max,$

$q(1-b_{ij}^t) \le u_{ij}^t \le 1;\quad 0 \le b_{ij}^t \le 1; i = 1,\dots,m; j = 1,\dots,n_i;$

(23) $\dot{R_{ij}}(t) = -b_{ij}(t)R_{ij}(t) + r_{ij}(t)R_i(t) + G_{ij}\cdot\left(1-u_{ij}(t)\right), R_{ij}^0 = R_{ij0};$

$i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n_i; t = 1,\dots,T\ .$

Исследование модели (13)–(23) описано в Приложении 1.

В результате исследования линейной модели получаем, что на общие цели ни одному уровню управления тратить ресурсы невыгодно. Это можно объяснить тем, что в данной модели агент влияния не заинтересован в производстве, а только во взяточничестве. Но и базовый агент заинтересован только в максимизации накопляемого ресурса, который убывает по затратам средств на производство и взятку. По тем же причинам агент влияния не тратит средства на базовых агентов. Во-первых, они взятку не платят. Во-вторых, накапливаемый ресурс не возрастает от этого. В-третьих, в производстве агент влияния не заинтересован. Центр, зная, что агент влияния не распределяет ресурсы базовым агентам, не выделяет их, в свою очередь, и агентам влияния. Также он не тратит средства на контроль, так как взяточничества нет.

В то же время на выполнении условия устойчивого развития (21) отсутствие целевого использования ресурсов сказывается положительно. Это условие с учётом полученных результатов выглядит следующим образом:

$$R(T) = R_0 + q^* \cdot F \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{R_{ij0}\left(1 - e^{-g_{ij}(1-q^*)t}\right)}{g_{ij}(1-q^*)} \right) > R^*.$$

Заметим, что второе слагаемое всегда положительно, поэтому если Центр изначально имел ресурсов больше, чем R^*, то условие устойчивого развития будет продолжать выполняться и со временем. Производство осуществляется на минимальном уровне и за счёт ресурсов базовых агентов.

ПОСТАНОВКА 2.

Имеется та же трёхуровневая древовидная управляющая система, воздействующая на динамический объект управления (производство ресурса), состоящая из Центра, агентов влияния и базовых агентов. Выигрыш Центра состоит из двух слагаемых: количества ресурсов в текущий момент времени и выпуск продукции базовыми агентами.

Выигрыш агента влияния складывается из его количества ресурсов, выпуска продукции базовых агентов, подчинённых именно этому агенту влияния, и возможного коррупционного дохода за вычетом штрафа при коррупции в случае поимки.

Выигрыш базового агента, как и выигрыш Центра, состоит из количества ресурсов в текущий момент времени и выпуска продукции.

Рассмотрим следующую модель, в которой все функции общественного и частного дохода линейны:

(24) $J_0 = \int_0^T \delta^t \{G \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^m \left(r_i(t) + z_i(t)\right)\right) \cdot R(t) +$

$+F \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}(t) R_{ij}(t)\Big\} dt \to \max;$

(25) $r_i(t) \geq 0;\ z_i(t) \geq 0; \sum_{i=1}^m \left(r_i(t) + z_i(t)\right) \leq 1\ ; i = 1, \dots, m;$

(26) $J_i = \int_0^T \delta^t \left\{G_i \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t)\right) \cdot R_i(t) + \right.$

$\left. +F \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}(t) R_{ij}(t)\right\} dt \to \max;$

(27) $r_{ij}(t) \geq 0;\quad \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \leq 1; B_i(t) \in \{0,1\};$
$i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n_i;$

(28) $J_{ij} = \int_0^T \delta^t \left\{G_{ij} \cdot \left(1 - u_{ij}(t) - b_{ij}(t)\right) \cdot R_{ij}(t) + \right.$

$\left. +F \cdot u_{ij}(t) \cdot R_{ij}(t)\right\} dt \to \max;$

(29) $u_{ij}(t) \geq q * (1 - b_{ij}(t));\ b_{ij}(t) \geq 0;\ u_{ij}(t) + b_{ij}(t) \leq 1;$
$i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n_i;$

(30) $\dot{R} = -\sum_{i=1}^m \left(r_i(t) + z_i(t)\right) R + F \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}(t) R_{ij}(t) +$

$+M \sum_{i=1}^m B_i(t) P\left(z_i(t)\right) R_i(t),\ R(0) = R_0;$

(31) $\dot{R_i} = -\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) R_i(t) + r_i(t) R(t) + B_i(t)[1 -$

$-(1 + M) P(z_i(t))] \sum_{j=1}^{n_i} b_{ij}(t) R_{ij}(t), \quad R_i(0) = R_{i0};$

(32) $\dot{R_{ij}} = -(u_{ij}(t) + b_{ij}(t)) R_{ij}(t) + r_{ij}(t) R_i(t), \quad R_{ij}(0) = R_{ij0};$

(33) $R(T) \geq R^*,\ i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n_i; t = 0, 1, \dots, T - 1.$

В этой модели в целевую функцию каждого агента входят помимо частных интересов ещё и производственные интересы, выражаемые функцией F.

Исследование модели (24)–(33) описано в приложении 2.

В результате исследования линейной модели получаем, что на общие цели ни одному уровню управления тратить ресурсы невыгодно, кроме тех агентов нижнего уровня, которые являются коллективистами. Только коллективисты нижнего уровня заинтересованы в производстве. Агенты влияния не заинтересованы в производстве, а только во взяточничестве. По тем же причинам агенты влияния не тратят средства на базовых агентов, как и в предыдущей постановке. В то же время на выполнении условия устойчивого развития (33) отсутствие целевого использования ресурсов сказывается положительно. Это условие с учётом полученных результатов выглядит следующим образом:

$$R(T) = R_0 + F\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I} R_{ij0}\right)\left(1 - e^{-q^* t}\right) + F +$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\notin I} R_{ij0}\right)(1 - e^{-t}) > R^*.$$

Заметим, что второе слагаемое всегда положительно, поэтому если Центр изначально имел ресурсов больше, чем R^*, то условие устойчивого развития будет продолжать выполняться и со временем. Производство осуществляется на минимальном уровне и за счёт ресурсов базовых агентов.

Сравнение двух постановок задачи показывает, что 1) взяточничество невыгодно базовым агентам; 2) наличие или отсутствие в целевых функциях Центра и агентов влияния выпуска продукции базовыми агентами не влияет на их поведение. Ресурсы на более нижний уровень они не выделяют; 3) наличие в целевой функции базового агента слагаемого, отвечающего за выпуск продукции, может побудить этого агента все ресурсы тратить на общие цели. Но может и не побудить, если его производственные возможности небольшие.

4. Статические модели распределения ресурсов

Рассмотрим следующую упрощённую статическую постановку задачи распределения ресурса:

$$g(u) = ac(u) + b(1-u) \to max, \quad 0 \le u \le 1.$$

Условие устойчивого развития (координации) в статической форме имеет вид

$$(1-a)c(u) \geq c^*.$$

Здесь u – доля ресурса, ассигнуемая на производство общественного продукта; $c(\cdot)$ – функция производства общественного продукта; $b(\cdot)$ – функция выигрыша от частной деятельности; $a > 0$ – доля участия в использовании общественного продукта. Функции $c(\cdot)$ и $b(\cdot)$ возрастающие и вогнутые, $c(0) = b(0) = 0$.

Без существенного ограничения общности положим

$$c(u) = u^k, b(1-u) = (1-u)^m, 0 \leq k \leq 1, 0 \leq m \leq 1.$$

В качестве функций дохода мы взяли производственные функции, наиболее часто встречающиеся в экономико-математических исследованиях.

Имеем

$$g(u) = au^k - (1-u)^m \to \max, \ \ 0 \leq u \leq 1;$$

$$g'(u) = kau^{k-1} - m(1-u)^{m-1};$$

$$g''(u) = k(k-1)au^{k-2} - m(m-1)(1-u)^{m-2} < 0.$$

Рассмотрим сначала случай $k = m$. Тогда

$$au^{k-1} = (1-u)^{k-1};$$

$u^* = \frac{1}{1+a^{\frac{1}{k-1}}}$- точка максимума.

Таким образом, условие устойчивого развития выполняется при

$$\frac{1}{1+a^{\frac{1}{k-1}}} \geq \left(\frac{c*}{1-a}\right)^{1/k}.$$

Если считать условие устойчивого развития непреложным, то

$$u^* = \min\left\{\max\left\{\frac{1}{1+a^{\frac{1}{k-1}}}, \left(\frac{c*}{1-a}\right)^{1/k}\right\}, 1\right\}.$$

Для численного исследования при $k \neq m$ подходит метод дихотомии, так как вторая производная отрицательная, а первая производная на концах отрезка имеет разные знаки [0; 1]:

$$g'(0) = +\infty;\ g'(1) = -\infty.$$

Найдём значение долей ресурсов (см. таблицу 1), затрачиваемых на общие цели агентом при $a = 0{,}5$, $c^* = 0{,}25$ и следующих значения x_k и m:

Таблица 1. Решение задачи при a = 0,5, *c** = 0,25

k	m	U	$u^{уст}$	u^*
0,1	0,9	0,040	0,00098	0,040
0,1	0,2	0,180	0,00098	0,180
0,1	0,6	0,061	0,00098	0,061
0,4	0,7	0,116	0,17678	0,17678
0,7	0,2	0,592	0,3715	0,592
0,8	0,1	0,796	0,42045	0,796

Заметим, что чем больше k и чем меньше m, тем больше ресурсов тратит агент на общие цели. Чем больше k, тем больше ресурсов требуется для выполнения условия устойчивого развития. Коэффициент m напрямую не влияет на количество ресурсов, но влияет на то, придётся ли агенту поступиться своими интересами для выполнения этого условия или нет.

Также заметим, что можно было доказать существование и единственность не только для степенных функций, но и для любых возрастающих и вогнутых функций $c(\cdot)$ и $b(\cdot)$.

5. Динамические модели воздействия на природную среду

Предположим, что агент делит свой ресурс между природоохранными усилиями и иными видами приносящей доход деятельности. Условие устойчивого развития [11] учитывается с помощью штрафа в функционале выигрыша агента. Простую модель в непрерывном времени можно записать в виде

$$J = \int_0^T [b(1 - u(t)) - M(x^* - x(t))]dt \to \max;$$

$$0 \le u(t) \le 1;$$

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)),\ x(0) = x_0.$$

Здесь $u(t)$ – природоохранное усилие агента; $x(t)$ – показатель состояния окружающей среды; $x(t) \le x^*$ – требование устойчивого развития; $b(\cdot)$ – возрастающая вогнутая функция, $b(0) = 0$; функция f возрастает по u. Дисконтирование и терминальный выигрыш не учитываются. Для аналитического исследования используем параметризацию

$$J = \int_0^T \left[\sqrt{1-u(t)} - M\left(x^* - x(t)\right)\right] dt \to \max,$$

$$0 \le u(t) \le 1$$

$$\dot{x} = u(t) - \mu x(t),\ x(0) = x_0,$$

где μ – коэффициент ухудшения состояния окружающей среды. Функция Гамильтона имеет вид

$$H(x, u, \lambda) = \sqrt{1-u} - M(x^* - x) + \lambda(u - \mu x).$$

Из необходимого условия максимума

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{1}{2\sqrt{1-u}} + \lambda = 0$$

получаем

$$u^*(t) = 1 - \frac{1}{4\lambda^2(t)}.$$

Решение краевой задачи для сопряжённой переменной

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -M + \mu\lambda(t),\ \lambda(T) = 0$$

даёт

$$\lambda^*(t) = \frac{M}{\mu}\left(1 - e^{-\mu(T-t)}\right).$$

Таким образом, с учётом структуры модели оптимальное решение есть

$$u^*(t) = 1 - \frac{\mu^2}{4M^2\left(1-e^{-\mu(T-t)}\right)^2}.$$

Видно, что большой штраф побуждает агента ассигновать почти весь ресурс на природоохранную деятельность.

6. Заключение

В соответствии с общей СОЧИ-идеологией[5, 17] логика предложенных моделей следующая. Каждый агент делит свой ресурс между воспроизводством общего ресурса и частной деятельностью. При этом мгновенный выигрыш определяется полезностью частной деятельности, поэтому при близоруком принятии решений выгодно вкладывать весь свой ресурс в неё. Однако в динамике количество ресурса каждого агента зависит от величины общего ресурса, поэтому при эгоистическом поведении в достаточно длительной перспективе ресурса для частной деятельности просто не останется. Поэтому поиск оптимального соотношения между краткосрочными и долгосрочными интересами выступает главным предметом анализа.

Дополнительно предполагается, что в обмен на взятку агенты влияния могут ослаблять ограничения на эгоизм базовых агентов, а Центр контролирует оппортунизм и взимает штрафы в случае поимки взяточника.

Для информационного регламента игры Γ_1 аналитически и с помощью компьютерной имитации получен ряд выводов при различных параметризациях модели.

Возможны следующие направления развития модели:

– использование иного вида функций выигрыша агентов;

– исследование более общих структурных конфигураций;

– применение модели к анализу других процессов с необходимой модификацией.

Литература

1. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б., ВАТЕЛЬ И.А. *Игры с иерархическим вектором интересов* // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1974. – №3. – С. 54–69.
2. ГОРБАНЕВА О.И. *Коррупционные механизмы в моделях сочетания общих и частных интересов в случае одного агента. Оптимизационный подход* // Математическая теория игр и её приложения. – 2020. – №12(2). – С. 36–62.

3. ГОРБАНЕВА О.И. *Статические модели распределения ресурсов с учетом согласования интересов активных агентов* : автореферат диссертации ... доктора технических наук : 05.13.01. – Москва, 2018. – 376 с.
4. ГОРБАНЕВА О.И., МУРЗИН А.Д., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Динамическая СОЧИ-модель регионального развития: сравнительный анализ административных и экономических механизмов управления (на примере Южного федерального округа)* // Математическая теория игр и её приложения. – 2021. – №13(1). – С. 59–88.
5. ГОРБАНЕВА О.И., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Цена анархии и механизмы управления в моделях согласования общественных и частных интересов* // Математическая теория игр и её приложения. – 2015. – №7(1). – С. 50–73.
6. ГОРБАНЕВА О.И., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Модели коррупции в иерархических системах управления* // Проблемы управления. – 2015. – №1. – С. 2–10.
7. КОНОНЕНКО А.Ф. *О многошаговых конфликтах с обменом информацией* // Ж. вычислительной математики и математической физики. – 1977. –Т. 17, №4. – С. 922–931.
8. КУКУШКИН Н.С. *О существовании устойчивых исходов в теоретико-игровой модели экономики с общественными благами* // Доклады АН СССР. – 1991. – №320(1). – С. 25–28.
9. *Механизмы управления* / Под ред. Д.А. Новикова. – М.: УРСС, 2011. – 192 с.
10. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами.* – М.: МПСИ, 2007. – 583 с.
11. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Управление устойчивым развитием активных систем*. – Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2016. – 940 с.
12. BERGSTROM T., BLUME L., VARIAN H. *On the private provision of public goods* // Journal of Public Economics. – 1986. – Vol. 29. – P. 25–49.
13. BOADWAY R., PESTIAU P., WILDASIN D. *Non-cooperative behavior and efficient provision of public goods* // Public Finance. – 1989. – Vol. 44. – P. 1–7.
14. BOADWAY R., PESTIAU P., WILDASIN D. *Tax-transfer policies and the voluntary provision of public goods* // Journal of Public Economics. – 1989. – Vol. 39. – P. 157–176.

15. CHRISTODOULOU G., SGOURITZA A., TANG B. *On the Efficiency of the Proportional Allocation Mechanism for Divisible Resources* // M. Hoefer (Ed.): SAGT 2015, LNCS 9347. – P. 165–177.
16. GORBANEVA O.I. *SPICE-models with independent Agents* // Automation and Remote Control. – 2019. – Vol. 80(9). – P. 1745–1753.
17. GORBANEVA O.I., OUGOLNITSKY G.A. *Static Models of Coordination of Social and Private Interests in Resource Allocation* // Automation and Remote Control. – 2018. – Vol. 79(7). – P. 1319–1341.
18. GORBANEVA O.I., OUGOLNITSKY G.A. *Sustainability of intertwined supply networks: a game-theoretic approach* // Games. – 2022. – Vol. 79(7). – P. 1319–1341
19. KAHANA N., KLUNOVER D. *Private provision of a public good with a time-allocation choice* // Social Choice and Welfare. – 2016. – Vol. 47. – P. 379–386.
20. NGO VAN LONG. *A Survey of Dynamic Games in Economics*. –World Scientific, 2010. – 275 p.
21. OUGOLNITSKY G.A., USOV A.B. *Computer Simulations as a Solution Method for Differential Games* // Computer Simulations: Advances in Research and Applications / Eds. M.D. Pfeffer and E. Bachmaier. – N.Y.: Nova Science Publishers, 2018. – P. 63–106.
22. WARR P. *The private provision of a public good is independent of the distribution of income* // Economics Letters. – 1983. – Vol. 13. – P. 207–211.

Приложение 1. Исследование постановки 1 п.3

Составим уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана:

$$\ln\delta \cdot V_{ij} - \frac{\partial V_{ij}}{\partial t} = \max_{\substack{u_{ij}, b_{ij} \\ 1 \le j \le n}} \Big\{ R_{ij}(t) +$$

$$+ \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} \cdot \Big[-b_{ij}(t) \cdot R_{ij}(t) + r_{ij}(t) R_i(t) + G_{ij} \cdot \Big(1 - u_{ij}(t)\Big)\Big]\Big\}$$

при ограничении $1 \ge b_{ij}(t) \ge 0,\ 1 \ge u_{ij}(t) \ge q * (1 - b_{ij}(t))$.

Максимизируем правую часть уравнения по совокупности u_{ij} и b_{ij}. Условие первого порядка даёт независимое от этих переменных выражение:

$$-\frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} \cdot R_{ij}(t);\ -\frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} \cdot G_{ij}.$$

Если $\frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} > 0$, то u_{ij} и b_{ij} должны быть как можно меньше, т.е. $u_{ij} = b_{ij} = 0$, но с учётом условия $u_{ij}(t) \ge q^*(1 - b_{ij}(t))$ получаем решение $u_{ij}(t) = q^*$ и $b_{ij}(t) = 0$.

Если же $\frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} < 0$, то u_{ij} и b_{ij} должны быть как можно больше, но с учётом условий (18) получаем $u_{ij} = b_{ij} = 1$.

Введём линейную функцию Беллмана $V_{ij}(t, R_{ij}) = = \alpha_{ij}(t) \cdot R_{ij} + \beta_{ij}(t)$. Рассмотрим два случая:

1) $\frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} = \alpha_{ij}(t) > 0$. В этом случае $u_{ij}(t) = q^*$ и $b_{ij}(t) = 0$. Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:

(34) $$\ln\delta \cdot \alpha_{ij}(t) R_{ij} + \ln\delta \cdot \beta_{ij}(t) - \alpha'_{ij}(t) R_{ij} - \beta'_{ij}(t) = = R_{ij}(t) + \alpha_{ij}(t)\big[r_{ij}(t) R_i(t) + G_{ij}(1 - q^*)\big].$$

Приравняем коэффициенты при R_{ij}:

$$\ln\delta \cdot \alpha_{ij}(t) - \alpha'_{ij}(t) = 1.$$

Решим это уравнение методом вариации постоянной. Решением соответствующего линейного однородного уравнения будет:

$$\alpha_{ij}(t) = C\delta^t.$$

Варьируем константу $C = C(t)$ и решим неоднородное линейное уравнение:

$$C'(t)\delta^t + 1 = 0,$$

откуда выразим производную: $C'(t) = -\delta^{-t}$,
проинтегрировав которую, получим

$$C(t) = \frac{\delta^{-t}}{\ln\delta} + C.$$

Воспользовавшись условием $C(T) = 0$, получим $C = -\frac{\delta^{-T}}{\ln\delta}$. Отсюда

$$C(t) = \frac{\delta^{-t} - \delta^{-T}}{\ln\delta}.$$

Тогда $\alpha_{ij}(t) = \frac{1-\delta^{t-T}}{\ln\delta}$. Так как $t < T$ и $\delta < 1$, то действительно $\alpha_{ij}(t) > 0$. При $t = 0$ $\alpha_{ij}(0) = \frac{1-\delta^{-T}}{\ln\delta}$.
Приравняем свободные члены в (34):

$$\ln\delta \cdot \beta_{ij}(t) - \beta'_{ij}(t) = \alpha_{ij}(t)\left[r_{ij}R_i(t) + G_{ij}(1-q^*)\right].$$

Это уравнение также сводится к линейному неоднородному, решение которого

$$\beta_{ij}(t) = C(t)\delta^t,$$

где $C'(t) = -\delta^{-t}\alpha_{ij}(t)\left[r_{ij}R_i(t) + G_{ij}(1-q^*)\right]$,
или, с учётом вида функции $\alpha_{ij}(t)$:

$$C'(t) = -\frac{r_{ij}R_i(t)+G_{ij}(1-q^*)}{\ln\delta}(\delta^{-t} - \delta^{-T}).$$

После интегрирования получим

$$C(t) = \frac{r_{ij}R_i(t)+G_{ij}(1-q^*)}{\ln\delta}\left(\frac{\delta^{-t}}{\ln\delta} + t\delta^{-T}\right) + C.$$

Воспользовавшись условием $C(T) = 0$, получим
$C = -\frac{r_{ij}R_i(t)+G_{ij}(1-q^*)}{\ln\delta}\left(\frac{\delta^{-T}}{\ln\delta} + T\delta^{-T}\right)$. Отсюда

$$C(t) = \frac{r_{ij}R_i(t)+G_{ij}(1-q^*)}{\ln\delta}\left(\frac{\delta^{-t}-\delta^{-T}}{\ln\delta} + (t-T)\delta^{-T}\right).$$

Тогда $\beta_{ij}(t) = \frac{r_{ij}R_i(t)+G_{ij}(1-q^*)}{\ln\delta}\left(\frac{1-\delta^{t-T}}{\ln\delta} + (t-T)\delta^{t-T}\right)$. При $t = 0$ $\beta_{ij}(0) = \frac{r_{ij}R_i(t)+G_{ij}(1-q^*)}{\ln\delta}\left(\frac{1-\delta^{-T}}{\ln\delta} - T\delta^{-T}\right)$.

Получим оптимальное значение выигрыша базового агента
$J_{ij} = V_{ij}(0, R_{ij0}) = \frac{1-\delta^{-T}}{\ln\delta} \cdot R_{ij0} + \frac{r_{ij}R_i(t)+G_{ij}(1-q^*)}{\ln\delta}\left(\frac{1-\delta^{-T}}{\ln\delta} - T\delta^{-T}\right)$.

2) $\frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} = \alpha_{ij}(t) < 0$. В этом случае $u_{ij}(t) = b_{ij}(t) = 1$. Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:

$$\ln\delta \cdot \alpha_{ij}(t)R_{ij} + \ln\delta \cdot \beta_{ij}(t) - \alpha'_{ij}(t)R_{ij} - \beta'_{ij}(t) = \\ = R_{ij} + \alpha_{ij}(t)\left[-R_{ij} + r_{ij}R_i\right].$$

Приравняем коэффициенты при R_{ij}:

$$\ln\delta \cdot \alpha_{ij}(t) - \alpha'_{ij}(t) = 1 - \alpha_{ij}(t).$$

Приведём уравнение к линейному неоднородному виду:

$$\alpha'_{ij}(t) - (1 + \ln\delta)\alpha_{ij}(t) = -1.$$

Решение соответствующего линейного однородного уравнения:

$$\alpha_{ij}(t) = Ce^{(\ln\delta+1)t}.$$

Варьируем константу $C = C(t)$и решим неоднородное линейное уравнение:

$$C'(t)e^{(\ln\delta+1)t} + 1 = 0,$$

откуда выразим производную $C'(t) = -e^{-(\ln\delta+1)t}$, проинтегрировав которую, получим

$$C(t) = \frac{e^{-(\ln\delta+1)t}}{1+\ln\delta} + C.$$

Воспользовавшись условием $C(T) = 0$, получим $C = -\frac{e^{-(\ln\delta+1)T}}{1+\ln\delta}$. Отсюда

$$C(t) = \frac{e^{-(\ln\delta+1)t} - e^{-(\ln\delta+1)T}}{1+\ln\delta}.$$

Тогда $\alpha_{ij}(t) = \frac{1-e^{(\ln\delta+1)(t-T)}}{1+\ln\delta}$. Выясним знак$\alpha_{ij}(t)$. Известно, что $t < T$ и $\delta < 1$. Тогда если $1 + \ln\delta > 0$, то $e^{-(\ln\delta+1)(t-T)} < 1$, тогда $\alpha_{ij}(t) > 0$, что противоречит рассматриваемому случаю. Если же $1 + \ln\delta < 0$, то $e^{(\ln\delta+1)(t-T)} > 1$, тогда $\alpha_{ij}(t) > 0$, что также противоречит рассматриваемому случаю.

Мы пришли к противоречию, т.е. этот случай нереализуем.

Рассмотрим задачу агента влияния (15), (16), (20) в непрерывном времени:

$$J_i = \int_0^T \delta^t \cdot R_i(t)dt \to \max,$$

$$r_{ij}(t) \geq 0; \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \leq 1; B_i(t) \in \{0,1\};$$

$$i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n_i;$$

$\dot{R}_i = -\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \cdot R_i(t) + r_i(t)R(t) +$
$+B_i(t)[1-(1+M)P(z_i^t)]\sum_{j=1}^{n_i} b_{ij}(t) \cdot R_{ij}(t),$
$R_i^0 = R_{i0};$

или с учётом найденных оптимальных стратегий базовых агентов

$$\dot{R}_i = -\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \cdot R_i(t) + r_i(t)R(t);\ R_i^0 = R_{i0}.$$

Составим уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана:

$$\ln\delta \cdot V_i - \frac{\partial V_i}{\partial t} = \max_{\substack{r_{ij}, B_i \\ 1 \le j \le n}} \{R_i(t) +$$
$$+\frac{\partial V_i}{\partial R_i} \cdot \left[-\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \cdot R_i(t) + r_i(t)R(t)\right]\}.$$

при ограничении $\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \le 1$, $r_{ij}(t) \ge 0$. Заметим, что значение переменных $B_i(t)$ становится безразличным. Уровень взяточничества агента влияния не имеет значения, так как базовые агенты взяток не дают. Кроме того, агент влияния не заинтересован в увеличении величин u_{ij}.

Максимизируем правую часть уравнения по совокупности величин r_{ij}, по которым симметричны уравнения и ограничения, поэтому $r_{ij} = r_{ik}$. Условие первого порядка даёт независимое от этих переменных выражение:

$$-\frac{\partial V_i}{\partial R_i} \cdot R_i(t).$$

Если $\frac{\partial V_i}{\partial R_i} > 0$, то r_{ij} минимальны, т.е. $r_{ij} = 0$.

Если же $\frac{\partial V_i}{\partial R_i} < 0$, то r_{ij}должны быть как можно больше, но с учётом результата $r_{ij} = r_{ik}$ и условия $\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \le 1$ получаем $r_{ij} = \frac{1}{n_i}$.

Введём линейную функцию Беллмана $V_i(t, R_i) = \alpha_i(t) \cdot R_i + \beta_i(t)$. Рассмотрим два случая:

1) $\frac{\partial V_i}{\partial R_i} = \alpha_i(t) > 0$. В этом случае $r_{ij}(t) = 0$. Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:

(35) $\ln\delta \cdot \alpha_i(t)R_i + \ln\delta \cdot \beta_i(t) - \alpha_i'(t)R_i - \beta_i'(t) =$
$= R_i(t) + \alpha_i(t)r_i(t)R(t).$

Приравняем коэффициенты при R_i:

$$\ln\delta \cdot \alpha_i(t) - \alpha_i'(t) = 1.$$

Решением это уравнения является

$$\alpha_i(t) = \frac{1-\delta^{t-T}}{\ln\delta}.$$

При $t = 0$ $\alpha_{ij}(0) = \frac{1-\delta^{-T}}{\ln\delta}$.

Приравняем свободные члены в (25):

$$\ln\delta \cdot \beta_i(t) - \beta_i'(t) = \alpha_i(t) r_i(t) R(t).$$

Это уравнение также сводится к линейному неоднородному, решение которого

$$\beta_i(t) = C(t)\delta^t,$$

где

$$C'(t) = -\frac{r_i R}{\ln\delta}(\delta^{-t} - \delta^{-T}).$$

После интегрирования получим

$$C(t) = \frac{r_i R}{\ln\delta}\left(\frac{\delta^{-t}}{\ln\delta} + \delta^{-T} t\right) + C.$$

Воспользовавшись условием $C(T) = 0$, получим $C = -\frac{r_i R}{\ln\delta}\left(\frac{\delta^{-T}}{\ln\delta} + \delta^{-T} T\right)$. Отсюда

$$C(t) = \frac{r_i R}{\ln\delta}\left(\frac{\delta^{-t} - \delta^{-T}}{\ln\delta} + \delta^{-T}(t - T)\right).$$

Тогда $\beta_i(t) = \frac{r_i R}{\ln\delta}\left(\frac{1-\delta^{t-T}}{\ln\delta} + \delta^{t-T}(t - T)\right)$.

При $t = 0$ $\beta_i(0) = \frac{r_i R}{\ln\delta}\left(\frac{1-\delta^{-T}}{\ln\delta} - T\delta^{-T}\right)$.

Получим оптимальное значение выигрыша агента нижнего уровня

$$J_i = V_i(0, R_{i0}) = \frac{1-\delta^{-T}}{\ln\delta} \cdot R_{i0} + \frac{r_i R}{\ln\delta}\left(\frac{1-\delta^{-T}}{\ln\delta} - T\delta^{-T}\right).$$

2) $\frac{\partial V_i}{\partial R_i} = \alpha_i(t) < 0$. В этом случае $r_{ij} = \frac{1}{n_i}$. Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:

$$\ln\delta \cdot \alpha_i(t) R_i + \ln\delta \cdot \beta_i(t) - \alpha_i'(t) R_i - \beta_i'(t) =$$
$$= R_i(t) + \alpha_i(t)[-R_i(t) + r_i(t) R(t)]$$

Приравняем коэффициенты при R_i:

$$\ln\delta \cdot \alpha_i(t) - \alpha_i'(t) = 1 - \alpha_i(t).$$

Доказательство противоречивости этого случая условию $\alpha_i(t) < 0$ аналогично доказательству, приведенному выше для $\alpha_{ij}(t) < 0$.

Рассмотрим задачу Центра (13), (14), (19) и (21) в непрерывном времени:

$$J_i = \int_0^T \delta^t \cdot R(t)dt \to max,$$

$$r_i(t) \geq 0;\ z_i(t) \geq 0; \sum_{i=1}^m (r_i(t) + z_i(t)) \leq 1\ ;\ i = 1, \ldots, m;$$

$$\dot{R} = -\sum_{i=1}^m \big(r_i(t) + z_i(t)\big) \cdot R(t) + F\left(q^* \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij}(t)\right),$$

$$R(0) = R_0,$$

$$R(t) \geq R^*,$$

или, с учётом найденных оптимальных стратегий базовых агентов и линейности функции F,

$$\dot{R} = -\sum_{i=1}^m \big(r_i(t) + z_i(t)\big) \cdot R(t) + F \cdot q^* \cdot \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij}(t)\right).$$

Составим уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана:

$$\ln \delta \cdot V - \frac{\partial V}{\partial t} = \max_{\substack{r_i, z_i \\ 1 \leq i \leq m}} \{R(t) +$$

$$+\frac{\partial V}{\partial R} \cdot \left[-\sum_{i=1}^m \big(r_i(t) + z_i(t)\big) \cdot R(t) + \right.$$

$$\left.\left. F\left(q^* \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij}(t)\right)\right]\right\}$$

при ограничении $\sum_{i=1}^m \big(r_i(t) + z_i(t)\big) \leq 1$, $r_i(t) \geq 0$, $z_i(t) \geq 0$.

Найдём $R_{ij}(t)$ из условий

$$\dot{R_{ij}} = -b_{ij}(t) \cdot R_{ij}(t) + r_{ij}(t) R_i(t) + g_{ij}\big(1 - u_{ij}(t)\big),$$

$$R_{ij}(0) = R_{ij0}.$$

С учётом оптимальных стратегий агентов влияния и базовых агентов необходимо решить задачу Коши

$$\dot{R_{ij}} = g_{ij}(1 - q^*), \quad R_{ij}(0) = R_{ij0}.$$

Её решение:

$$R_{ij}(t) = R_{ij0} e^{-g_{ij}(1-q^*)t,},$$

при этом

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij}(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0} e^{-g_{ij}(1-q^*)t,}.$$

Тогда дифференциальное соотношение для $\dot{R}$ имеет следующий вид:

$$\dot{R} = -\sum_{i=1}^m \big(r_i(t) + z_i(t)\big) \cdot R(t) +$$

$$+q^* \cdot F \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0} e^{-g_{ij}(1-q^*)t,}\right),$$

а уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана имеет вид:

$$\ln \delta \cdot V - \frac{\partial V}{\partial t} = \max_{\substack{r_i, z_i \\ 1 \le i \le m}} \left\{ R(t) + \frac{\partial V}{\partial R} \left[-\sum_{i=1}^{m} \big(r_i(t) + z_i(t)\big) \cdot R(t) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + q^* F \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0} e^{-g_{ij}(1-q^*)t,}\right) \right] \right\}.$$

Максимизируем правую часть этого уравнения по совокупности r_i и z_i, по каждой из которых симметричны уравнения и ограничения, поэтому $r_i = r_k = z_i = z_k$. Условие первого порядка даёт независимое от этих переменных выражение:

$$-\frac{\partial V}{\partial R} \cdot R(t).$$

Если $\frac{\partial V}{\partial R} > 0$, то $r_i = z_i = 0$.

Если же $\frac{\partial V}{\partial R} < 0$, то r_{ij}должны быть как можно больше, но с учётом результата $r_i = r_k = z_i = z_k$ и условия $\sum_{i=1}^{m} \big(r_i(t) + z_i(t)\big) \le 1$ получаем $r_i = z_i = \frac{1}{2m}$.

Введём линейную функцию Беллмана $V_i(t, R_i) = \alpha(t) \cdot R + \beta(t)$. Рассмотрим два случая:

1) $\frac{\partial V}{\partial R} = \alpha(t) > 0$. В этом случае $r_i = z_i = 0$. Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:

(36) $\ln \delta \cdot \alpha(t) R + \ln \delta \cdot \beta(t) - \alpha'(t) R - \beta'(t) =$

$$= R + \alpha(t) \cdot q^* \cdot F \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0} e^{-g_{ij}(1-q^*)t}\right)$$

Приравняем коэффициенты при R:

$$\ln \delta \cdot \alpha(t) - \alpha'^{(t)} = 1.$$

Решение данного уравнения

$$\alpha(t) = \frac{1 - \delta^{t-T}}{\ln \delta}.$$

При t = 0 $\alpha(0) = \frac{1 - \delta^{-T}}{\ln \delta}$.

Приравняем свободные члены в (26):

$$\ln \delta \cdot \beta(t) - \beta'(t) = \alpha(t) \cdot q^* \cdot F \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0} e^{-g_{ij}(1-q^*)t}\right),$$

или, с учётом $\alpha(t)$,

$$\ln \delta \cdot \beta(t) - \beta'^{(t)} =$$

$$= \frac{q^* \cdot F}{\ln\delta}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0}\left(e^{-g_{ij}(1-q^*)t} - e^{-g_{ij}(1-q^*)t+(t-T)\ln\delta}\right)\right).$$

Это уравнение также сводится к линейному неоднородному, решение которого

$$\beta_i(t) = C(t)\delta^t,$$

где

$$C'(t) = -\frac{q^* \cdot F\delta^{-t}}{\ln\delta}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0}\left(e^{-g_{ij}(1-q^*)t} - \right.\right.$$
$$\left.\left.-e^{-g_{ij}(1-q^*)t+(t-T)\ln\delta}\right)\right),$$

или

$$C'(t) = -\frac{q^* \cdot F}{\ln\delta}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0}\left(e^{-\left(g_{ij}(1-q^*)+\ln\delta\right)t} - \right.\right.$$
$$\left.\left.-e^{-g_{ij}(1-q^*)t-T\ln\delta}\right)\right).$$

Интегрируя, получим

$$C(t) = \frac{q^* \cdot F}{\ln\delta}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0}\left(\frac{e^{-\left(g_{ij}(1-q^*)+\ln\delta\right)t}}{g_{ij}(1-q^*)+\ln\delta} - \frac{e^{-g_{ij}(1-q^*)t-T\ln\delta}}{g_{ij}(1-q^*)}\right)\right) + C.$$

Воспользовавшись условием $C(T) = 0$, получим

$$C = -\frac{q^* \cdot F}{\ln\delta}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0}\left(\frac{e^{-\left(g_{ij}(1-q^*)+\ln\delta\right)T}}{g_{ij}(1-q^*)+\ln\delta} - \frac{e^{-g_{ij}(1-q^*)T-T\ln\delta}}{g_{ij}(1-q^*)}\right)\right).$$

Отсюда

$$C(t) = \frac{q^* \cdot F}{\ln\delta}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0}\left(\frac{e^{-\left(g_{ij}(1-q^*)+\ln\delta\right)t} - e^{-\left(g_{ij}(1-q^*)+\ln\delta\right)T}}{g_{ij}(1-q^*)+\ln\delta} - \right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{e^{-g_{ij}(1-q^*)t-T\ln\delta} - e^{-g_{ij}(1-q^*)T-T\ln\delta}}{g_{ij}(1-q^*)}\right)\right).$$

Отсюда

$$\beta_i(t) = \frac{q^* \cdot F}{\ln\delta}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0}\left(\frac{e^{-g_{ij}(1-q^*)t} - e^{-g_{ij}(1-q^*)T+\ln\delta(t-T)}}{g_{ij}(1-q^*)+\ln\delta} - \right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{e^{-g_{ij}(1-q^*)t+(t-T)\ln\delta} - e^{-g_{ij}(1-q^*)T+(t-T)\ln\delta}}{g_{ij}(1-q^*)}\right)\right).$$

При $t = 0$

$$\beta_i(0) = \frac{q^* \cdot F}{\ln\delta}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0}\left(\frac{1-e^{-g_{ij}(1-q^*+\ln\delta)T}}{g_{ij}(1-q^*)+\ln\delta} - \right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{e^{-T\ln\delta} - e^{-g_{ij}(1-q^*+\ln\delta)T\ln\delta}}{g_{ij}(1-q^*)}\right)\right).$$

Получим оптимальное значение выигрыша базового агента

$$J = V(0, R_0) = \frac{1-\delta^{-T}}{\ln\delta} \cdot R_0 + \frac{q^* \cdot F}{\ln\delta}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0}\left(\frac{1-e^{-g_{ij}(1-q^*+\ln\delta)T}}{g_{ij}(1-q^*)+\ln\delta} -\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{e^{-T\ln\delta} - e^{-g_{ij}(1-q^*+\ln\delta)T\ln\delta}}{g_{ij}(1-q^*)}\right)\right).$$

2) $\frac{\partial V}{\partial R} = \alpha(t) < 0$. В этом случае $r_i = z_i = \frac{1}{2m}$. Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:

$$\ln\delta \cdot \alpha(t)R + \ln\delta \cdot \beta(t) - \alpha'(t)R - \beta'(t) =$$
$$= R(t) + \alpha_i(t)\left[-R_i(t) + q^* \cdot F \cdot \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0}e^{-g_{ij}(1-q^*)t}\right)\right].$$

Приравняем коэффициенты при R_i:

$$\ln\delta \cdot \alpha(t) - \alpha'(t) = 1 - \alpha(t).$$

Доказательство противоречивости этого случая условию $\alpha(t) < 0$ аналогично доказательству, приведенному выше для $\alpha_{ij}(t) < 0$.

При этом величина $R(t)$изменяется по следующему правилу:

$$\dot{R} = q^* \cdot F \cdot \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} R_{ij0}e^{-g_{ij}(1-q^*)t,}\right), R(0) = R_0.$$

Решением данной задачи Коши будет

$$R(t) = C - q^* \cdot F \cdot \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{R_{ij0}e^{-g_{ij}(1-q^*)t,}}{g_{ij}(1-q^*)}\right).$$

С учётом начального условия $C = R_0 + q^* \cdot F \cdot \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{R_{ij0}}{g_{ij}(1-q^*)}\right)$, а значит $R(t) = R_0 + q^* \cdot F \times \times \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{R_{ij0}(1-e^{-g_{ij}(1-q^*)t})}{g_{ij}(1-q^*)}\right)$.

Учитывая результаты, полученные для Центра, получаем для агентов влияния и базовых агентов следующие выигрыши и соотношения на количество накапливаемого ресурса. Для агента влияния выигрыш

$$J_i = \frac{1-\delta^{-T}}{\ln\delta} \cdot R_{i0},$$

а величина $R_i(t)$изменяется по следующему правилу:

$$\dot{R}_i = 0; R_i(0) = R_{i0},$$

откуда $R_i(t) = R_{i0}$, что говорит о том, что ресурсы у агента влияния не уменьшаются, но и не увеличиваются, так как он не тратит их на базовых агентов, но и Центр не выделяет агентам влияния ничего. Для базовых агентов

$$J_{ij} = \frac{1-\delta^{-T}}{\ln\delta} \cdot R_{ij0} + \frac{G_{ij}(1-q^*)}{\ln\delta}\left(\frac{1-\delta^{-T}}{\ln\delta} - T\delta^{-T}\right).$$

Приложение 2. Исследование постановки 2 п.3

Рассмотрим задачу базового агента (28), (29), (32) в непрерывном времени:

$$J_{ij} = \int_0^T \delta^t \Big\{G_{ij} \cdot \Big(1 - u_{ij}(t) - b_{ij}(t)\Big) \cdot R_{ij}(t) +$$

$$+F \cdot u_{ij}(t) \cdot R_{ij}(t)\Big\}dt \to \max;$$

$$u_{ij}(t) \geq q * \Big(1 - b_{ij}(t)\Big);\ b_{ij}(t) \geq 0;\ u_{ij}(t) + b_{ij}(t) \leq 1;$$

$$i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n_i;$$

$$\dot{R_{ij}} = -(b_{ij}(t) + u_{ij}(t)) \cdot R_{ij}(t) + r_{ij}(t)R_i(t), R_{ij}(0) = R_{ij0}.$$

Составим уравнение Гамильтона – Якоби– Беллмана:

$$\ln\delta \cdot V_{ij} - \frac{\partial V_{ij}}{\partial t} = \max_{\substack{u_{ij}, b_{ij} \\ 1 \leq j \leq n}} \Big\{G_{ij} \cdot \Big(1 - b_{ij}(t) - u_{ij}(t)\Big) \cdot R_{ij}(t) +$$

$$+F \cdot u_{ij}(t)R_{ij}(t) + \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} \cdot \Big[-(b_{ij}(t) + u_{ij}(t))R_{ij}(t) + r_{ij}(t)R_i(t)\Big]\Big\}$$

при ограничении $b_{ij}(t) + u_{ij}(t) \leq 1$, $u_{ij}(t) \geq q^*\Big(1 - b_{ij}(t)\Big)$, $b_{ij}(t) \geq 0$

Максимизируем правую часть уравнения по совокупности u_{ij} и b_{ij}. Условия первого порядка даёт независимое от этих переменных выражение:

по u_{ij}

$$-G_{ij}R_{ij}(t) + FR_{ij}(t) - \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} \cdot R_{ij}(t) = R_{ij}(t)\left(-G_{ij} + F - \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}}\right).$$

по b_{ij}:

$$-G_{ij}R_{ij}(t) - \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} \cdot R_{ij}(t) = -R_{ij}(t)\left(G_{ij} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}}\right).$$

Отсюда

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & G_{ij} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} > 0, \\ 1 - u_{ij}, & G_{ij} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} < 0, \end{cases}$$

$$u_{ij} = \begin{cases} q^*(1-b_{ij}), & G_{ij} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} > F, \\ 1, & G_{ij} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} < F, \end{cases}$$

причём в одной и той же системе в одни моменты времени условие $G_{ij} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} > F$ может выполняться, а в другие – нет. Условие же $G_{ij} + \frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} > 0$ не зависит от времени совсем.

Исходя из этого, возможны два случая. Рассмотрим каждый их них, приняв за функцию Беллмана линейную функцию

$$V_{ij}(t, R_{ij}) = \alpha_{ij}(t) \cdot R_{ij} + \beta_{ij}(t).$$

Первый случай $G_{ij} + \alpha_{ij} > F$. В этом случае $u_{ij} = q^*$, $b_{ij} = 0$.
Второй случай $G_{ij} + \alpha_{ij} < F$. В этом случае $u_{ij} = 1$, $b_{ij} = 0$.

Как видно, в любом случае $b_{ij} = 0$, т.е. платить взятку базовым агентам невыгодно.

1) $G_{ij} + \alpha_{ij} > F$. В этом случае $u_{ij} = q^*$, $b_{ij} = 0$.

Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:

(37) $\ln\delta \cdot \alpha_{ij}(t)R_{ij} + \ln\delta \cdot \beta_{ij}(t) - \alpha'_{ij}(t)R_{ij} - \beta'_{ij}(t) =$
$= G_{ij}(1-q^*)R_{ij}(t) + Fq^*R_{ij}(t) +$
$+\alpha_{ij}(t)\left[-q^* \cdot R_{ij}(t) + r_{ij}(t)R_i(t)\right]$

Приравняем коэффициенты при R_{ij}:

$$\ln\delta \cdot \alpha_{ij}(t) - \alpha'_{ij}(t) = G_{ij}(1-q^*) + Fq^* - q^*\alpha_{ij}(t).$$

Решив его методом вариации постоянной, получим

$$\alpha_{ij}(t) = \frac{G_{ij}(1-q^*)+Fq^*}{q^*+\ln\delta}\left(1 - e^{(q^*+\ln\delta)(t-T)}\right).$$

При $t = 0$ $\alpha_{ij}(0) = \frac{G_{ij}(1-q^*)+Fq^*}{q^*+\ln\delta}\left(1 - e^{-(q^*+\ln\delta)T}\right)$.

Заметим, что условие $G_{ij} + \alpha_{ij} > F$ при этом выполняется, если

$$G_{ij} > F\left(1 - \frac{1-e^{(q^*+\ln\delta)(t-T)}}{1+\ln\delta+(1-q^*)e^{(q^*+\ln\delta)(t-T)}}\right).$$

Заметим также, что начиная с момента времени

$$t = T - \frac{1}{q^*+\ln\delta}\ln\frac{1}{1-(q^*+\ln\delta)\left(\frac{F-G_{ij}}{q^*(F-G_{ij})+G_{ij}}\right)}$$

это свойство выполняется.

Приравняем свободные члены в (37):

$$\ln\delta \cdot \beta_{ij}(t) - \beta'_{ij}(t) = \alpha_{ij}(t) r_{ij}(t) R_i(t),$$

решение этого уравнения

$$\beta_{ij}(t) = C(t)\delta^t,$$

где

$$C'(t) = -r_{ij}(t)R_i(t)\delta^{-t}\frac{G_{ij}(1-q^*)+Fq^*}{q^*+\ln\delta}\left(1-e^{(q^*+\ln\delta)(t-T)}\right).$$

После интегрирования получим

$$C(t) = r_{ij}(t)R_i(t)\frac{G_{ij}(1-q^*)+Fq^*}{q^*+\ln\delta}\left(\frac{e^{-(q^*+\ln\delta)T+q^*t}}{q^*}+\frac{\delta^{-t}}{\ln\delta}\right)+C.$$

Воспользовавшись условием $C(T) = 0$, получим $C = -r_{ij}(t)R_i(t)\frac{G_{ij}(1-q^*)+Fq^*}{q^*+\ln\delta}\left(\frac{\delta^{-T}}{q^*}+\frac{\delta^{-T}}{\ln\delta}\right)$. Отсюда

$$C(t) = r_{ij}(t)R_i(t)\frac{G_{ij}(1-q^*)+Fq^*}{q^*+\ln\delta}\left(\frac{e^{-(q^*+\ln\delta)T+q^*t}-\delta^{-T}}{q^*}+\frac{\delta^{-t}-\delta^{-T}}{\ln\delta}\right).$$

Тогда $\beta_{ij}(t) = r_{ij}(t)R_i(t)\frac{G_{ij}(1-q^*)+Fq^*}{q^*+\ln\delta}\left(\frac{(e^{q^*(t-T)}-1)\delta^{t-T}}{q^*}+\frac{1-\delta^{t-T}}{\ln\delta}\right)$.

При $t = 0$ $\beta_{ij}(0) = r_{ij0}R_{i0}\frac{G_{ij}(1-q^*)+Fq^*}{q^*+\ln\delta}\left(\frac{(e^{-q^*T}-1)\delta^{-T}}{q^*}+\frac{1-\delta^{-T}}{\ln\delta}\right)$.

Получим оптимальное значение выигрыша базового агента

$$J_{ij} = V_{ij}(0, R_{ij0}) = \frac{G_{ij}(1-q^*)+Fq^*}{q^*+\ln\delta}\left(e^{(q^*+\ln\delta)T}-1\right)\cdot R_{ij0} +$$

$$+r_{ij0}R_{i0}\frac{G_{ij}(1-q^*)+Fq^*}{q^*+\ln\delta}\left(\frac{(e^{-q^*T}-1)\delta^{-T}}{q^*}+\frac{1-\delta^{-T}}{\ln\delta}\right) =$$

$$= \frac{G_{ij}(1-q^*)+Fq^*}{q^*+\ln\delta}\left(\left(e^{(q^*+\ln\delta)T}-1\right)\cdot R_{ij0} + r_{ij0}R_{i0}\left(\frac{(e^{-q^*T}-1)\delta^{-T}}{q^*}+\frac{1-\delta^{-T}}{\ln\delta}\right)\right).$$

2) $G_{ij} + \alpha_{ij} < F$. В этом случае $u_{ij} = 1$, $b_{ij} = 0$.

Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:

(38) $\ln\delta\cdot\alpha_{ij}(t)R_{ij} + \ln\delta\cdot\beta_{ij}(t) - \alpha'_{ij}(t)R_{ij} - \beta'_{ij}(t) =$

$$= F\cdot R_{ij}(t) + \alpha_{ij}(t)\left[-R_{ij}(t) + r_{ij}(t)R_i(t)\right].$$

Приравняем коэффициенты при R_{ij}:

$$\ln\delta\cdot\alpha_{ij}(t) - \alpha'_{ij}(t) = F - \alpha_{ij}(t).$$

Приведём уравнение к линейному неоднородному виду:

$$\alpha'_{ij}(t) - (q^* + \ln\delta)\alpha_{ij}(t) + F = 0.$$

Решив его методом вариации постоянной, получим

$$\alpha_{ij}(t) = \frac{F}{q^*+\ln\delta}\left(1 - e^{(q^*+\ln\delta)(t-T)}\right).$$

При $t = 0$ $\alpha_{ij}(0) = \frac{F}{q^*+\ln\delta}\left(1 - e^{-(q^*+\ln\delta)T}\right)$.

Заметим, что условие $G_{ij} + \alpha_{ij} < F$ при этом выполняется, если

$$G_{ij} < F\left(1 - \frac{1-e^{(q^*+\ln\delta)(t-T)}}{q^*+\ln\delta}\right).$$

Заметим, что до момента времени

$$t = T - \frac{1}{q^*+\ln\delta}\ln\frac{1}{1-(q^*+\ln\delta)(1-\frac{G_{ij}}{F})}$$

это свойство выполняется, т.е. со временем возможен переход агента от коллективизма к индивидуализму, но не наоборот. Момент перехода тем дальше, чем больше коэффициент выгоды от частной деятельности G_{ij}.

Приравняем свободные члены в (38):

$$\ln\delta\cdot\beta_{ij}(t) - \beta'_{ij}(t) = \alpha_{ij}(t)r_{ij}(t)R_i(t).$$

Решив это уравнение аналогично предыдущему случаю, получим

$$\beta_{ij}(t) = r_{ij}(t)R_i(t)\frac{F}{q^*+\ln\delta}\left(\frac{(e^{q^*(t-T)}-1)\delta^{t-T}}{q^*} + \frac{1-\delta^{t-T}}{\ln\delta}\right).$$

При $t = 0$ $\beta_{ij}(0) = r_{ij0}R_{i0}\frac{F}{q^*+\ln\delta}\left(\frac{(e^{-q^*T}-1)\delta^{-T}}{q^*} + \frac{1-\delta^{-T}}{\ln\delta}\right)$.

Получим оптимальное значение выигрыша базового агента

$$J_{ij} = V_{ij}\left(0, R_{ij0}\right) = \frac{F}{q^*+\ln\delta}\left(e^{(q^*+\ln\delta)T} - 1\right)\cdot R_{ij0} +$$

$$+r_{ij0}R_{i0}\frac{F}{q^*+\ln\delta}\left(\frac{(e^{-q^*T}-1)\delta^{-T}}{q^*} + \frac{1-\delta^{-T}}{\ln\delta}\right) =$$

$$= \frac{F}{q^*+\ln\delta}\left(\left(e^{(q^*+\ln\delta)T} - 1\right)\cdot R_{ij0} + r_{ij0}R_{i0}\left(\frac{(e^{-q^*T}-1)\delta^{-T}}{q^*} + \frac{1-\delta^{-T}}{\ln\delta}\right)\right).$$

Найдём $R_{ij}(t)$ из уравнения

$$\dot{R_{ij}} = -\left(b_{ij}(t) + u_{ij}(t)\right)\cdot R_{ij}(t) + r_{ij}(t)R_i(t), R_{ij}(0) = R_{ij0}.$$

С учётом оптимальных стратегий базовых агентов необходимо решить задачу Коши для индивидуалистов и коллективистов.

Для индивидуалистов задача Коши имеет вид

$$\dot{R_{ij}} = -q^*\cdot R_{ij}(t) + r_{ij}(t)R_i(t), \quad R_{ij}(0) = R_{ij0}.$$

Её решение:

$$R_{ij}(t) = e^{-q^*t}\left(R_{ij0} + \int_0^t e^{q^*t} r_{ij}(t) R_i(t)dt\right)..$$

Для коллективистов задача Коши имеет вид

$$\dot{R_{ij}} = -R_{ij}(t) + r_{ij}(t)R_i(t), \quad R_{ij}(0) = R_{ij0}.$$

Её решение:

$$R_{ij}(t) = e^{-t}\left(R_{ij0} + \int_0^t e^t r_{ij}(t) R_i(t)dt\right).$$

Рассмотрим задачу агента влияния (29), (30), (34) в непрерывном времени:

$$J_i = \int_0^T \delta^t \Big\{G_i \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t)\right) \cdot R_i(t) +$$
$$+F\sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}(t)R_{ij}(t)\Big\}dt \to \max,$$
$$r_{ij}(t) \geq 0; \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \leq 1;$$
$$B_i(t) \in \{0,1\}; i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n_i;$$
$$\dot{R_i} = -\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \cdot R_i(t) + r_i(t)R(t) +$$
$$+B_i(t)[1 - (1+M)P(z_i^t)]\sum_{j=1}^{n_i} b_{ij}(t) \cdot R_{ij}(t),$$
$$R_i^0 = R_{i0};$$

или, с учётом найденных оптимальных стратегий нижнего уровня,

$$\dot{R_i} = -\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \cdot R_i(t) + r_i(t)R(t); R_i^0 = R_{i0}.$$

Составим уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана:

$$\ln\delta \cdot V_i - \frac{\partial V_i}{\partial t} = \max_{\substack{r_{ij}, B_i \\ 1\leq j \leq n}} \Big\{G_i \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t)\right) \cdot R_i(t) +$$
$$+F\sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}(t)R_{ij}(t) + \frac{\partial V_i}{\partial R_i} \cdot \left[-\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \cdot R_i(t) + r_i(t)R(t)\right]\Big\}.$$

при ограничении $\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \leq 1$, $r_{ij}(t) \geq 0$.

Подставим оптимальные стратегии базовых агентов в данное уравнение. Для этого введём обозначение $I=\{j|u_j=q^*\}$. Тогда

$$\ln\delta \cdot V_i - \frac{\partial V_i}{\partial t} = \max_{\substack{r_{ij}, B_i \\ 1\leq j \leq n}} \Big\{G_i \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t)\right) \cdot R_i(t) +$$
$$+F\mathrm{q}^* e^{-q^*t}\sum_{j\in I}\left(R_{ij0} + \int_0^t e^{q^*t} r_{ij}(t)R_i(t)dt\right) +$$
$$+ Fe^{-t}\sum_{j\notin I}\left(R_{ij0} + \int_0^t e^t r_{ij}(t)R_i(t)dt\right) +$$

$$+\frac{\partial V_i}{\partial R_i}\cdot\left[-\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t)\cdot R_i(t)+r_i(t)R(t)\right]\Big\}.$$

Заметим, что значение переменных $B_i(t)$становится безразличным. Уровень взяточничества агентов влияния не имеет значения, так как базовые агентов взяток не дают. Кроме того, агенты влияния не заинтересованы в увеличении величин u_{ij}.

Максимизируем правую часть уравнения по совокупности величин r_{ij}. Условие первого порядка даёт независимое от этих переменных выражение:

Для индивидуалистов нижнего уровня

$$-G_i\cdot R_i(t)+F\mathrm{q}^*e^{-q^*t}\int_0^t e^{q^*t}R_i(t)dt-\frac{\partial V_i}{\partial R_i}\cdot R_i(t),$$

для коллективистов же

$$-G_i\cdot R_i(t)+Fe^{-t}\int_0^t e^{t}R_i(t)dt-\frac{\partial V_i}{\partial R_i}\cdot R_i(t).$$

Внутри каждой группы уравнения симметричны по своим переменным, поэтому среди отдельно индивидуалистов или отдельно коллективистов нижнего уровня $r_{ij}=r_{ik}$.

Докажем, что $F\mathrm{q}^*e^{-q^*t}\int_0^t e^{q^*t}R_i(t)dt<Fe^{-t}\int_0^t e^{t}R_i(t)dt$. Исследование функции $f(z)=ze^{z(t-\tau)}$показывает, что она возрастает по z, а следовательно, $\int_0^\tau q^*e^{q^*(t-\tau)}R_i(t)dt<$ $<\int_0^\tau e^{t-\tau}R_i(t)dt$. Поэтому возможны три случая:

1) $-G_i\cdot R_i(t)+Fe^{-t}\int_0^t e^{t}R_i(t)dt-\frac{\partial V_i}{\partial R_i}\cdot R_i(t)<0$;

2) $-G_i\cdot R_i(t)+Fe^{-t}\int_0^t e^{t}R_i(t)dt-\frac{\partial V_i}{\partial R_i}\cdot R_i(t)>0$,

$-G_i\cdot R_i(t)+F\mathrm{q}^*e^{-q^*t}\int_0^t e^{q^*t}R_i(t)dt-\frac{\partial V_i}{\partial R_i}\cdot R_i(t)<0$,

3) $-G_i\cdot R_i(t)+F\mathrm{q}^*e^{-q^*t}\int_0^t e^{q^*t}R_i(t)dt-\frac{\partial V_i}{\partial R_i}\cdot R_i(t)>0$.

Если $-G_i\cdot R_i(t)+Fe^{-t}\int_0^t e^{t}R_i(t)dt-\frac{\partial V_i}{\partial R_i}\cdot R_i(t)<0$ (в частности при $\frac{\partial V_i}{\partial R_i}>0$), то r_{ij} минимальны, т.е. $r_{ij}=0$. Назовем такого агента влияния индивидуалистом.

Если же $-G_i\cdot R_i(t)+Fe^{-t}\int_0^t e^{t}R_i(t)dt-\frac{\partial V_i}{\partial R_i}\cdot R_i(t)>0$, $-G_i\cdot R_i(t)+F\mathrm{q}^*e^{-q^*t}\int_0^t e^{q^*t}R_i(t)dt-\frac{\partial V_i}{\partial R_i}\cdot R_i(t)<0$, то такому агенту влияния выгодно индивидуалистам нижнего уровня не выделять ресурсы, а коллективистам поделить их поровну, т.е. $r_{ij\in I} = 0, r_{ij\notin I} = \frac{1}{|I|}$.

Если же $-G_i \cdot R_i(t) + F\text{q}^* e^{-q^* t} \int_0^t e^{q^* t} R_i(t) dt - \frac{\partial V_i}{\partial R_i} \cdot R_i(t) > 0$, то r_{ij} должны быть как можно больше, но с учётом линейности слагаемых в целевой функции $F\text{q}^* e^{-q^* t} \sum_{j\in I} \Big(R_{ij0} + {} + \int_0^t e^{q^* t} r_{ij}(t) R_i(t) dt \Big) + \ F e^{-t} \sum_{j\notin I} \Big(R_{ij0} + \int_0^t e^t r_{ij}(t) R_i(t) dt \Big)$ получаем, что все ресурсы выгодно выделять туда, где эффективность их использованиянаибольшая, т.е. коллективистам нижнего уровня. Тогда случаи 2) и 3) можно объединить в один, при котором $-G_i \cdot R_i(t) + F e^{-t} \int_0^t e^t R_i(t) dt - \frac{\partial V_i}{\partial R_i} \cdot R_i(t) > 0$ (в частности при $\frac{\partial V_i}{\partial R_i} < 0$). То есть если агент влияния знает, что базовый агент является индивидуалистом, то ему ресурсы выделяться не будут.

Введём линейную функцию Беллмана $V_i(t, R_i) = {} = \alpha_i(t) \cdot R_i + \beta_i(t)$. Рассмотрим два случая:

1) $-G_i \cdot R_i(t) + F e^{-t} \int_0^t e^t R_i(t) dt - \frac{\partial V_i}{\partial R_i} \cdot R_i(t) < 0$ (в частности при $\alpha_i(t) > 0$). В этом случае $r_{ij}(t) = 0$. Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:

(39) $$\ln\delta \cdot \alpha_i(t) R_i + \ln\delta \cdot \beta_i(t) - \alpha_i'(t) R_i - \beta_i'(t) = \\ = G_i R_i(t) + F q^* \textstyle\sum_{j\in I} R_{ij}(t) + \ F \sum_{j\notin I} R_{ij}(t) + \\ + \alpha_i(t) r_i(t) R(t)$$

С учётом оптимальной стратегии агентов влияния для индивидуалистов

$$R_{ij}(t) = e^{-q^* t} R_{ij0},$$

для коллективистов

$$R_{ij}(t) = e^{-t} R_{ij0}.$$

Подставим эти выражения в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана:

$$\ln\delta \cdot \alpha_i(t) R_i + \ln\delta \cdot \beta_i(t) R_i - \alpha_i'(t) - \beta_i'(t) = G_i \cdot R_i(t) + \\ + F q^* e^{-q^* t} \textstyle\sum_{j\in I} R_{ij0} + \ F e^{-t} \sum_{j\notin I} R_{ij0} + \alpha_i(t) \cdot [r_i(t) R(t)]$$

Приравняем коэффициенты при R_i:

$$\ln\delta\cdot\alpha_i(t)-\alpha_i'(t)=G_i.$$

Его решение

$$\alpha_i(t)=\frac{G_i}{\ln\delta}(1-\delta^{t-T}).$$

При $t = 0$ $\alpha_{ij}(0)=\frac{G_i}{\ln\delta}(1-\delta^{-T})$.

Приравняем свободные члены в (39):

$$\ln\delta\cdot\beta_i(t)-\beta_i'(t)=Fq^*e^{-q^*t}\sum_{j\in I}R_{ij0}+\ Fe^{-t}\sum_{j\notin I}R_{ij0}+$$
$$+\alpha_i(t)r_i(t)R(t),$$

Это уравнение также сводится к линейному неоднородному, решение которого

$$\beta_i(t)=C(t)\delta^t,$$

где

$$C'(t)=-Fq^*e^{-(q^*+\ln\delta)t}\sum_{j\in I}R_{ij0}-\ Fe^{-(1+\ln\delta)t}\sum_{j\notin I}R_{ij0}-$$
$$-r_i(t)R(t)\frac{G_i}{\ln\delta}(\delta^{-t}-\delta^{-T}).$$

После интегрирования получим

$$C(t)=\frac{Fq^*e^{-(q^*+\ln\delta)t}}{q^*+\ln\delta}\sum_{j\in I}R_{ij0}+\frac{Fe^{-(1+\ln\delta)t}}{1+\ln\delta}\sum_{j\notin I}R_{ij0}+$$
$$+r_i(t)R(t)\frac{G_i}{\ln\delta}\left(\frac{\delta^{-t}}{\ln\delta}+\delta^{-T}t\right)+C.$$

Воспользовавшись условием $C(T)=0$, получим

$$C=-\frac{Fq^*e^{-(q^*+\ln\delta)T}}{q^*+\ln\delta}\sum_{j\in I}R_{ij0}-$$
$$-\frac{Fe^{-(1+\ln\delta)T}}{1+\ln\delta}\sum_{j\notin I}R_{ij0}-r_i(t)R(t)\frac{G_i\delta^{-T}(1+T\ln\delta)}{\ln^2\delta}.$$

Отсюда

$$C(t)=\frac{Fq^*\sum_{j\in I}R_{ij0}}{q^*+\ln\delta}\left(e^{-(q^*+\ln\delta)t}-e^{-(q^*+\ln\delta)T}\right)+$$
$$+\frac{F\sum_{j\notin I}R_{ij0}}{1+\ln\delta}\left(e^{-(1+\ln\delta)t}-e^{-(1+\ln\delta)T}\right)+$$
$$+r_i(t)R(t)\frac{G_i}{\ln\delta}\left(\frac{\delta^{-t}-\delta^{-T}}{\ln\delta}+\delta^{-T}(t-T)\right).$$

Тогда $\beta_i(t)=\frac{Fq^*\sum_{j\in I}R_{ij0}}{q^*+\ln\delta}\left(e^{-q^*t}-e^{-q^*T}\delta^{t-T}\right)+$

$$+\frac{F\sum_{j\notin I}R_{ij0}}{1+\ln\delta}(e^{-t}-e^{-T}\delta^{t-T})+$$
$$+r_i(t)R(t)\frac{G_i}{\ln\delta}\left(\frac{\delta^{-t}-\delta^{-T}}{\ln\delta}+\delta^{-T}(t-T)\right).$$

При $t = 0$ $\beta_i(0) = \frac{Fq^* \sum_{j\in I} R_{ij0}}{q^* + \ln\delta}\left(1 - e^{-q^*T}\delta^{-T}\right) +$

$$+\frac{F\sum_{j\notin I} R_{ij0}}{1+\ln\delta}\left(1 - e^{-T}\delta^{-T}\right) + r_i(0)R_0\frac{G_i}{\ln\delta}\left(\frac{1-\delta^{-T}}{\ln\delta} - T\delta^{-T}\right).$$

Получим оптимальное значение выигрыша базового агента

$$J_i = V_i(0, R_{i0}) = \frac{G_i}{\ln\delta}(1-\delta^{-T})\cdot R_{i0} +$$

$$+\frac{Fq^*\sum_{j\in I} R_{ij0}}{q^* + \ln\delta}\left(1 - e^{-q^*T}\delta^{-T}\right) + \frac{F\sum_{j\notin I} R_{ij0}}{1+\ln\delta}\left(1 - e^{-T}\delta^{-T}\right) +$$

$$+r_i(0)R_0\frac{G_i}{\ln\delta}\left(\frac{1-\delta^{-T}}{\ln\delta} - T\delta^{-T}\right).$$

2) $-G_i\cdot R_i(t) + Fe^{-t}\int_0^t e^t R_i(t)dt - \frac{\partial V_i}{\partial R_i}\cdot R_i(t) > 0$. В этом случае $r_{ij\in I} = 0$, $r_{ij\notin I} = \frac{1}{|I|}$. Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби– Беллмана, получим:

$$\ln\delta\cdot\alpha_i(t)R_i + \ln\delta\cdot\beta_i(t) - \alpha_i'(t)R_i - \beta_i'(t) =$$
$$= Fq^*\sum_{j\in I} R_{ij}(t) + F\sum_{j\notin I} R_{ij}(t) + \alpha_i(t)[-R_i(t) + r_i(t)R(t)].$$

Для индивидуалистов

$$R_{ij}(t) = e^{-q^*t}R_{ij0}.$$

Для коллективистов

$$R_{ij}(t) = e^{-t}\left(R_{ij0} + \frac{1}{|I|}\int_0^t e^t R_i(t)dt\right).$$

Интегрируя по частям, найдем

$$\int_0^t e^t R_i(t)dt = e^t R_i(t) + \int_0^t e^t R_i(t)dt - \int_0^t e^t r_i(t)R(t)dt.$$

Отсюда $e^t R_i(t) = \int_0^t e^t r_i(t)R(t)dt$, а значит,

$$\int_0^t e^t R_i(t)dt = \int_0^t\int_0^t e^t r_i(t)R(t)dt\,dt.$$

Следовательно, для коллективистов

$$R_{ij}(t) = e^{-t}\left(R_{ij0} + \frac{1}{|I|}\int_0^t\int_0^t e^t r_i(t)R(t)dt\,dt\right).$$

Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:

$$\ln\delta\cdot\alpha_i(t)R_i + \ln\delta\cdot\beta_i(t) - \alpha_i'(t)R_i - \beta_i'(t) =$$
$$= Fq^*e^{-q^*t}\sum_{j\in I} R_{ij0} + Fe^{-t}\sum_{i\notin I} R_{ij0} +$$
$$+\frac{Fe^{-t}}{|I|}\int_0^t\int_0^t e^t r_i(t)R(t)dt\,dt + \alpha_i(t)[-R_i(t) + r_i(t)R(t)].$$

Приравняем коэффициенты при R_i:

$$\ln\delta\cdot\alpha_i(t) - \alpha_i'(t) = -\alpha_i(t).$$

Решением соответствующего линейного однородного уравнения будет:

$$\alpha_i(t) = Ce^{(1+\ln\delta)t},$$

что с учётом условия $C(T) = 0$ даёт $\alpha_i(t) = 0$, чего быть не может. Следовательно, агенты влияния могут быть только индивидуалистами.

Тогда количество ресурсов у агента среднего уровня меняется по правилу

$$R_i(t) = R_{i0} + \int_0^t r_i(t)R(t)dt.$$

Рассмотрим задачу Центра (27), (28), (33) и (36) в непрерывном времени:

$$(40)\ J_0 = \int_0^T \delta^t \Big\{G \cdot \Big(1 - \sum_{i=1}^m \big(r_i(t) + z_i(t)\big)\Big) \cdot R(t) + $$
$$+F \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}(t)R_{ij}(t)\Big\} dt \to \max$$
$$r_i(t) \ge 0;\ z_i(t) \ge 0; \sum_{i=1}^m \big(r_i(t) + z_i(t)\big) \le 1\,; i = 1, \dots, m;$$
$$\dot{R} = -\sum_{i=1}^m \big(r_i(t) + z_i(t)\big) \cdot R(t) +$$
$$F \cdot \Big(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}(t)R_{ij}(t)\Big) +$$
$$+M \sum_{i=1}^m B_i(t)P\big(z_i(t)\big)R_i(t)\,, R(0) = R_0,$$
$$R(t) \ge R^*.$$

С учётом найденных оптимальных стратегий базовых агентов,

$$\dot{R} = -\sum_{i=1}^m \big(r_i(t) + z_i(t)\big) \cdot R(t) + q^* \cdot F \cdot e^{-q^*t} \sum_{i=1}^m \sum_{j\in I} R_{ij0} +$$
$$+Fe^{-t} \sum_{i=1}^m \sum_{j\notin I} R_{ij0}.$$

Составим уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана:

$$\ln\delta \cdot V - \frac{\partial V}{\partial t} = \max_{\substack{r_i, z_i \\ 1\le i\le m}} \Big\{G_0 \cdot \Big(1 - \sum_{i=1}^m \big(r_i(t) + z_i(t)\big)\Big) \cdot R(t) +$$
$$+q^* \cdot F \cdot e^{-q^*t} \sum_{i=1}^m \sum_{j\in I} R_{ij0} + Fe^{-t} \sum_{i=1}^m \sum_{j\notin I} R_{ij0} +$$
$$+\frac{\partial V}{\partial R}\Big(-\sum_{i=1}^m \big(r_i(t) + z_i(t)\big) R(t) + q^* \cdot F \cdot e^{-q^*t} \sum_{i=1}^m \sum_{j\in I} R_{ij0} + +$$
$$Fe^{-t} \sum_{i=1}^m \sum_{j\notin I} R_{ij0}\Big).$$

при ограничении $\sum_{i=1}^m \big(r_i(t) + z_i(t)\big) \le 1$, $r_i(t) \ge 0$, $z_i(t) \ge 0$. Максимизируем правую часть уравнения по совокупности r_i и z_i, по каждой из которых симметричны уравнения и ограничения, поэтому $r_i = r_k = z_i = z_k$. Условие первого порядка даёт независимое от этих переменных выражение:

$-G_0 \cdot R(t) - \frac{\partial V}{\partial R} \cdot R(t) = R(t)\left(-G_0 - \frac{\partial V}{\partial R}\right)$ю

Если $-G_0 - \frac{\partial V}{\partial R} < 0$ (в частности при $\frac{\partial V}{\partial R} > 0$), то r_{ij}, т.е. $r_i = z_i = 0$.

Если же $-G_0 - \frac{\partial V}{\partial R} > 0$, то r_{ij}должны быть как можно больше, но с учётом условия результата $r_i = r_k = z_i = z_k$ и условия $\sum_{i=1}^{m}\left(r_i(t) + z_i(t)\right) \leq 1$ получаем $r_i = z_i = \frac{1}{2m}$.

Введём линейную функцию Беллмана $V_i(t, R_i) = \alpha(t) \cdot R + {}$ $+\beta(t)$. Рассмотрим два случая:

1) $-G_0 - \frac{\partial V}{\partial R} < 0 = -G_0 - \alpha(t) < 0$ (в частности при $\alpha_i(t) > 0$). В этом случае $r_i = z_i = 0$. Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:

$$\ln\delta \cdot \alpha(t)R + \ln\delta \cdot \beta(t) - \alpha'(t)R - \beta'(t) =$$
$$= G_0R + q^* \cdot F \cdot e^{-q^*t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I} R_{ij0} + Fe^{-t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\notin I} R_{ij0} +$$
$$+\alpha_i(t) \cdot q^* \cdot F \cdot e^{-q^*t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I} R_{ij0} +$$
$$+\alpha_i(t) \cdot F \cdot e^{-t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\notin I} R_{ij0}.$$

Приравняем коэффициенты при R:

$$\ln\delta \cdot \alpha(t) - \alpha_i'(t) = G_0.$$

Решение данного уравнения

$$\alpha(t) = \frac{G_0}{\ln\delta}(1 - \delta^{t-T}).$$

При $t = 0$ $\alpha(0) = \frac{G_0}{\ln\delta}(1 - \delta^{-T})$.

Приравняем свободные члены в уравнении Гамильтона – Якоби – Беллмана:

$$\ln\delta \cdot \beta(t) - \beta'(t) = q^*Fe^{-q^*t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I} R_{ij0} +$$
$$Fe^{-t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\notin I} R_{ij0} +$$
$$+\alpha_i(t)\left(q^*Fe^{-q^*t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I} R_{ij0} + Fe^{-t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\notin I} R_{ij0}\right),$$

или, с учётом $\alpha(t)$,

$$\ln\delta \cdot \beta(t) - \beta'(t) = q^*Fe^{-q^*t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I} R_{ij0} + Fe^{-t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\notin I} R_{ij0} +$$
$$+\frac{G_0}{\ln\delta}(1 - \delta^{t-T})\left(q^*Fe^{-q^*t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I} R_{ij0} + Fe^{-t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\notin I} R_{ij0}\right).$$

Для уменьшения громоздкости выражений введём обозначения $A = q^*F\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I} R_{ij0}$, $B = F\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\notin I} R_{ij0}$. Тогда уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана принимает вид

$$\ln\delta \cdot \beta(t) - \beta'(t) = Ae^{-q^*t} + Be^{-t} +$$

$$+\frac{G_0}{\ln\delta}(1-\delta^{t-T})\left(Ae^{-q^*t}+Be^{-t}\right).$$

Решив его методом вариации постоянной, получим

$$\beta_i(t)=\frac{A\left(e^{-q^*t}-e^{-q^*T}\delta^{t-T}\right)}{q^*+ln\delta}\left(1+\frac{G_0}{\ln\delta}\right)+$$
$$+\frac{B\left(e^{-t}-e^{-T}\delta^{t-T}\right)}{1+ln\delta}\left(1+\frac{G_0}{\ln\delta}\right)-\frac{G_0\delta^{t-T}A\left(e^{-q^*t}-e^{-q^*T}\right)}{q^*\ln\delta}-$$
$$-\frac{G_0\delta^{t-T}B\left(e^{-t}-e^{-T}\right)}{\ln\delta}.$$

При $t = 0$

$$\beta_i(0)=\frac{A\left(1-e^{-q^*T}\delta^{-T}\right)}{q^*+ln\delta}\left(1+\frac{G_0}{\ln\delta}\right)+\frac{B\left(1-e^{-T}\delta^{-T}\right)}{1+ln\delta}\left(1+\frac{G_0}{\ln\delta}\right)$$
$$-\frac{G_0\delta^{-T}A\left(1-e^{-q^*T}\right)}{q^*\ln\delta}-\frac{G_0\delta^{-T}B\left(1-e^{-T}\right)}{\ln\delta}.$$

С учетом обозначений A и B, получим

$$\beta_i(0)=\frac{q^*F\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I}R_{ij0}\left(1-e^{-q^*T}\delta^{-T}\right)}{q^*+ln\delta}\left(1+\frac{G_0}{\ln\delta}\right)+$$
$$+\frac{F\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\notin I}R_{ij0}\left(1-e^{-T}\delta^{-T}\right)}{1+ln\delta}\left(1+\frac{G_0}{\ln\delta}\right)-$$
$$-\frac{G_0\delta^{-T}q^*F\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I}R_{ij0}\left(1-e^{-q^*T}\right)}{q^*\ln\delta}-$$
$$\frac{G_0\delta^{-T}F\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\notin I}R_{ij0}\left(1-e^{-T}\right)}{\ln\delta}.$$

Получим оптимальное значение выигрыша базового агента

$$J=V(0,R_0)=\frac{G_{i0}}{\ln\delta}(1-\delta^{-T})\cdot R_0+$$
$$+\frac{q^*F\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I}R_{ij0}\left(1-e^{-q^*T}\delta^{-T}\right)}{q^*+ln\delta}\left(1+\frac{G_0}{\ln\delta}\right)+$$
$$+\frac{F\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\notin I}R_{ij0}\left(1-e^{-T}\delta^{-T}\right)}{1+ln\delta}\left(1+\frac{G_0}{\ln\delta}\right)-$$
$$-\frac{G_0\delta^{-T}q^*F\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I}R_{ij0}\left(1-e^{-q^*T}\right)}{q^*\ln\delta}-\frac{G_0\delta^{-T}F\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\notin I}R_{ij0}\left(1-e^{-T}\right)}{\ln\delta}.$$

2) $-G_0-\frac{\partial V}{\partial R}=-G_0-\alpha(t)>0$. В этом случае $r_i=z_i=\frac{1}{2m}$. Подставив известные зависимости в уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана, получим:

$$\ln\delta\cdot\alpha(t)R+\ln\delta\cdot\beta(t)-\alpha'(t)R-\beta'(t)=$$
$$=q^*\cdot F\cdot e^{-q^*t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I}R_{ij0}+Fe^{-t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\notin I}R_{ij0}+$$

$$+\alpha_i(t)\left[-R(t)+q^*Fe^{-q^*t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I}R_{ij0}+\right.$$
$$\left.Fe^{-t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\notin I}R_{ij0}\right].$$

Приравняем коэффициенты при R_i:

$$\ln\delta\cdot\alpha(t)-\alpha'(t)=-\alpha(t).$$

Приведём уравнение к линейному однородному виду:

$$\alpha'(t)-(1+\ln\delta)\alpha(t)=0.$$

Решение соответствующего линейного однородного уравнения:

$$\alpha(t)=Ce^{(\ln\delta+1)t}.$$

Воспользовавшись условием $C(T)=0$, получим $C=0$, откуда $\alpha_i(t)=0$. Мы пришли к противоречию, этот случай нереализуем.

При этом величина $R(t)$изменяется по следующему правилу:
$\dot{R}=q^*Fe^{-q^*t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I}R_{ij0}+Fe^{-t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\notin I}R_{ij0}\,,R(0)=R_0.$
Решение данной задачи Коши

$$R(t)=R_0+F\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I}R_{ij0}\right)\left(1-e^{-q^*t}\right)+$$
$$+F\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\notin I}R_{ij0}\right)(1-e^{-t}).$$

Учитывая результаты, полученные для Центра, получаем для агентов влияния и базовых агентов следующие выигрыши и соотношения на количество накапливаемого ресурса. Для агента влияния выигрыш

$$J_i=\frac{G_i}{\ln\delta}(1-\delta^{-T})\cdot R_{i0}+$$
$$+\frac{F\mathrm{q}^*\sum_{j\in I}R_{ij0}}{q^*+\ln\delta}\left(1-e^{-q^*T}\delta^{-T}\right)+\frac{F\sum_{j\notin I}R_{ij0}}{1+\ln\delta}(1-e^{-T}\delta^{-T}),$$

а величина $R_i(t)$изменяется по следующему закону:

$$\dot{R}_i=0;R_i(0)=R_{i0},$$

откуда $R_i(t)=R_{i0}$, что говорит о том, что ресурсы у агента влияния не уменьшаются, но и не увеличиваются, так как он не тратит их на базовых агентов, но и Центр не выделяет агентам влияния ничего. Для индивидуалиста нижнего уровня

$$J_{ij}=\frac{G_{ij}(1-q^*)+Fq^*}{q^*+\ln\delta}\left(e^{(q^*+\ln\delta)T}-1\right)\cdot R_{ij0},$$

а величина $R_{ij}(t)$изменяется по следующему закону:

$$R_{ij}(t)=R_{ij0}e^{-q^*t}.$$

Для коллективиста нижнего уровня

$$J_{ij} = \frac{F}{1+\ln\delta}\left(e^{(1+\ln\delta)T} - 1\right) \cdot R_{ij0},$$

а величина $R_{ij}(t)$ изменяется по следующему закону:

$$R_{ij}(t) = R_{ij0}e^{-t}.$$

MODELS OF RESOURCE ALLOCATION IN A HIERARCHICALLY CONTROLLED TREE-LIKE DYNAMIC SYSTEM WITH CONSIDERATION OF OPPORTUNISTIC BEHAVIOR OF THE AGENTS

Olga Gorbaneva, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doct. Sc., Associate Professor (oigorbaneva@sfedu.ru).
Stanislav Mikhalkovich, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Cand. Sc., Associate Professor (miks@sfedu.ru)
Gennady Ougolnitsky, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doct. Sc., Professor (gaugolnickiy@sfedu.ru).

Abstract: *This article is devoted to the building and investigation of SPICE-models of reproduction and allocation of a resource in a hierarchically controlled tree-like dynamical system with consideration of possible opportunistic behavior of the agents. An original concept of balance relations for the resource is proposed. A general structure of the model for a three-level control subsystem is described. investigation of specific cases of the mentioned models are presented. Illustrative examples of the analytical and numerical investigation of specific cases of the mentioned models with different information structure of dynamic games are presented.*

Keywords: controlled dynamic systems; opportunistic behavior; public goods economics; resource allocation; simulation modeling.

УДК 51.7
ББК 65.054
DOI: 10.25728/ubs.2023.101.4

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.В. Клочковым.

Поступила в редакцию 10.05.2023.
Опубликована 30.11.2023.