ЭВОЛЮЦИОННАЯ ИГРА С УЧЕТОМ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ И МНЕНИЯМИ ИГРОКОВ

Лориц Е. М.[1], **Губар Е. А.**[2]
(*Санкт-Петербургский Государственный Университет, Санкт-Петербург*)

Эволюционные игры являются развивающимся подразделом теории игр, который применяется при изучении адаптации больших, но конечных популяций к изменениям окружающей среды. При этом предполагается, что каждый из агентов не оказывает значительного влияния на систему. Теория эволюционных игр находит широкое применение во многих областях науки. В частности, в биологии, медицине и моделировании беспроводных сетей. В данной работе исследуется эволюционная игра с двумя уровнями взаимодействия агентов популяции. На первом уровне изменение состояния популяции зависит от изменения состояния окружающей среды, увеличения или уменьшения доступных для агентов ресурсов. На втором уровне изменение состояния популяции зависит от мнений агентов о состоянии окружающей среды. Эти уровни образуют двухуровневую структуру принятия решений, где изменение одного параметра системы, например, состояния среды, влечет за собой изменение остальных элементов системы, т.е изменение состояния популяции и мнений агентов. В рамках исследования был проведен анализ модифицированной эволюционной игры с учетом влияния состояния окружающей среды и мнений агентов, разработаны вычислительные процедуры на языке MATLAB и проведены две серии численных экспериментов.

Ключевые слова: эволюционные игры, динамика мнений, репликативная динамика, имитационная динамика.

1. Введение

Эволюционные игры являются развивающимся подразделом теории игр [11, 18]. Эволюционные игры применяются при моделировании изменений в больших, но конечных популяциях, где все агенты обладают биологическими, социальными или экономическими особенностями, которые определяют их тип поведе-

[1] *Екатерина Михайловна Лориц, студент* (*kate.lorits@gmail.com*).
[2] *Елена Алексеевна Губар, к.ф.-м.н., доцент* (*e.gubar@spbu.ru, alyona.gubar@gmail.com*).

ния. Кроме того, считается, что каждый из агентов не оказывает существенного влияния на состояние популяции.

Теория эволюционных игр находит широкое применение во многих областях науки. Например, в 2022 году опубликована книга [9], в которой собрано большое количество эволюционных моделей реальных биологических процессов. Кроме этого, эволюционные игры применяются для моделирования взаимодействия большого числа агентов в сети [2, 8, 15, 17]. В медицине эволюционные игры могут применяться, например, для поиска методов борьбы с раком [7, 10, 14] или для решения задачи о вакцинации населения [1, 22].

В работах [6, 13, 20] рассматривается популяция и происходящие в ней изменения с учетом окружающей среды и ее состояния. Кроме того, активно изучается влияние информации о среде на популяцию [4, 12, 21]. Следуя этой идее, в данной работе исследуется, как состояние окружающей среды и мнение агентов о состоянии среды влияют на динамику изменения состояния популяции. Популяция, окружающая среда и мнения агентов образуют структуру, где изменение одного параметра системы, отвечающего за состояние среды, популяции или мнений агентов, влечет за собой изменение остальных элементов системы. Состояние среды зависит от распространенности того или иного типа поведения в популяции. Состояние популяции зависит от популярности мнений агентов в популяции. Популярность мнений агентов зависит от состояния среды и популяции. В данной работе в качестве управляющего воздействия рассматривается влияние среды и мнений агентов на популяцию.

2. Постановка эволюционной игры

Рассмотрим популяцию размера N, которая существует в ограниченном пространстве. Предполагается, что изменение состояния популяции происходит в результате случайных попарных взаимодействий между ее агентами. Причем считается, что число агентов велико, но при этом каждый отдельный агент не оказывает значительного влияния на популяцию [16, 19]. Еще одним предположением является то, что в популяции присутствует два типа поведения, которых могут придерживаться агенты. Выбор агентом i-го типа поведения аналогичен использованию i-й чистой стратегии в бескоалиционной игре и приводит к разбиению популяции на две подгруппы. Агенты каждой подгруппы запрограммированы использовать одинаковую чистую стратегию. Состояние популяции определяется как вектор $x_N(t) = (x_1(t), x_2(t))$, где каждая компонента $x_i(t)$ – это доля популяции, использующая чистую стратегию i. Этот вектор может рассматриваться в качестве смешанной стратегии популяции [19]. Обозначим $x(t) = x_1(t)$, тогда $x_2(t) = 1 - x(t)$. Под выигрышами агентов подразумевается количество потомков (в биологических системах) или количество последователей (в экономических и социальных системах), которые придерживаются чистой стратегии i. С течением времени в популяции происходят случайные попарные встречи между агентами. Результаты этих встреч могут быть описаны биматричной игрой [5]. По традиции в эволюционных играх принято все процессы рассматривать от лица первого игрока, поэтому в дальнейшем все формулируется относительно первого игрока.

Обозначим как e^i вектор, отвечающий i чистой стратегии игрока. У данного вектора i-й элемент единица, а все остальные – нули. Введем функцию $u(e^i, x_N) = e^i \cdot Ax$ как ожидаемый выигрыш агента, использующего чистую стратегию i, при встрече со случайным оппонентом. Этот выигрыш зависит от вектора состояния популяции $x_N(t) = (x(t), 1 - x(t))$. Соответствующий средний выигрыш популяции определяется на основании выигрыша случайно выбранного агента

$$u(x_N, x_N) = \sum_{i \in K} x_i u(e^i, x_N). \tag{1}$$

Изменение состава популяции соответствует изменению доли агентов, придерживающихся чистой стратегии i. Данные изменения описываются с помощью уравнения репликативной динамики (replicator dynamic) [13], в зависимости от долевого распределения игроков в популяции x_N и матрицы выигрышей первого игрока A:

(2) $$\dot{x} = x(1-x)(u(e^1, x_N) - u(e^2, x_N)).$$

В данной работе предполагается, что популяция зависит от воздействия окружающей среды, которая может оказывать влияние на ожидаемые выигрыши игроков. В качестве окружающей среды рассматриваются ресурсы, доступные для агентов. Состояние среды описывается с помощью параметра $n(t)$, $n \in [0,1]$, где значение $n = 0$ $(n = 1)$, если среда полностью истощена (пополнена). Изменение состояние среды в зависимости от изменения долей агентов популяции, придерживающихся той или иной стратегии, определяется динамикой (3), предложенной в статье [13]:

(3) $$\dot{n} = n(1-n)(\theta x - (1-x)),$$

где $\theta > 0$ параметр, отражающий скорость, с которой агенты, придерживающиеся первой чистой стратегии восполняют ресурсы среды.

Связь между популяцией и состоянием среды устанавливается с помощью матрицы выигрышей [20]

(4) $$A_n = nA_1 + (1-n)A_0.$$

В статье [13] исследуется изменение состава популяции на основе использования репликативной динамики, которая учитывает обратную связь с окружающей средой и зависит от общественного мнения. При этом мнение отражает информированность агентов популяции о состоянии окружающей среды. В отличие от исследования [13] в текущей работе предполагается, что каждый агент имеет свое личное мнение (представление) о состоянии окружающей среды, но не обладает достоверной информацией об этом состоянии.

Рассмотрим случай, при котором агент может придерживаться одного из двух мнений m_1 или m_2 независимо от стратегии, которую он выбирает. Распределение мнений в популяции определим как вектор $y_N(t) = (y_1(t), y_2(t))$, где каждая компонента $y_i(t)$ – это доля агентов популяции, придерживающихся мнения m_i. Для удобства обозначим $y_1 = y(t)$, $y_2(t) = 1 - y(t)$. Процесс распределения мнений в популяции может быть описан с помощью динамики средних (mean dynamic), которая позволяет описывать изменения происходящие в популяции с помощью протокола пересмотра решений [16].

Поскольку любой протокол пересмотра решений предполагает наличие шума, который влечет ошибки в оценивании ожидаемого выигрыша оппонента, предполагается, что агенты могут считать мнение оппонента более или менее весомым, в зависимости от стратегии оппонента.

Введем в рассмотрение матрицу B, элементы которой b_{ij} представляют собой степень доверия агента с мнением i агенту, который придерживается стратегии j. На основе протокола попарной имитации [15] был составлен имитационный протокол, используемый для динамики изменения популярности мнений в популяции:

$$p_{ij} = \left[y_j \sum_{l=1}^{2} x_l u(e^l, x_N, A_n) b_{jl} - y_i \sum_{l=1}^{2} x_l u(e^l, x_N, A_n) b_{il} \right]_0^1, \tag{5}$$

где $[z]_0^1 = \max(0, \min(z, 1))$, т.е $p_{ij} \in [0, 1]$ [15].

В данном выражении функция выигрыша $u(e^i, x_N, A_n)$ показывает зависимость от изменяющейся матрицы выигрышей.

Таким образом, динамика, описывающая изменение популярности мнений в популяции – это динамика средних, построенная на протоколе попарной имитации (5), – принимает вид

$$\dot{y} = (1 - y)p_{21} - yp_{12}. \tag{6}$$

Предполагается, что состояние популяции изменяется в зависимости от популярности каждого из мнений о состоянии окружающей среды в популяции. В соответствии с этим предположением матрица выигрышей первого игрока может быть переписана в виде $A_y = yA_1 + (1 - y)A_0$, который получается из матрицы (4), при замене параметра n, отражающего состояние окружающей среды, долей игроков y, которые придерживаются мнения m_1.

Таким образом, эволюционную игру с обратной связью окружающей среды и мнением можно представить в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x)(u(e^1, x_N, A_y) - u(e^2, x_N, A_y)), \\ \dot{n} = n(1 - n)(\theta x - (1 - x)), \\ \dot{y} = (1 - y)p_{21} - yp_{12}. \end{cases} \tag{7}$$

В дифференциальном уравнении для популяции (2) используется матрица A_y, поскольку предполагается, что агенты принимают решение на основе мнения об окружающей среде и, соответственно, их выигрыш определяется мнениями. А в дифференциальном уравнении для описания динамики мнений (6) используется протокол попарной имитации, который зависит от матрицы A_n; в нашем случае предполагается, что мнение агентов зависит от состояния среды и выигрышей агентов в этом состоянии. Таким образом, динамика изменения популяции зависит от изменения мнений агентов, а динамика мнений зависит от состояния окружающей среды.

3. Примеры

Пример 1. «Ястреб–Голубь».

В рамках текущего эксперимента для системы (7) в качестве базовой игры, которая описывает взаимодействия агентов, выбирается игра «Ястреб – Голубь». Параметр v определяет ценность ресурса, параметр c – затраты на его получение.

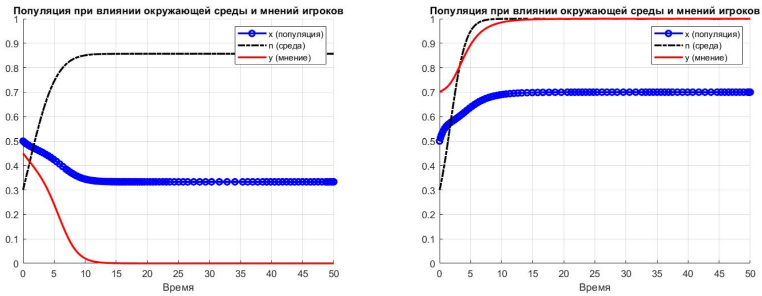
Поскольку в модели рассматривается изменение состояния популяции в зависимости от мнения агентов, в соответствии с формулой (4) необходимо ввести в рассмотрение две матрицы выигрышей:

$$A_0 = \begin{pmatrix} \frac{v_0-c_0}{2} & v_0 \\ 0 & \frac{v_0}{2} \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} \frac{v_1-c_1}{2} & v_1 \\ 0 & \frac{v_1}{2} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Для игры «Ястреб – Голубь» характерны три положения равновесия по Нэшу: два асимметричных равновесия в чистых стратегиях (e^1, e^2), (e^2, e^1) и одно симметричное равновесие в смешанных стратегиях (x_N, x_N), где $x_N = (\frac{v}{c}, 1 - \frac{v}{c})$ [1]. В этом случае средний выигрыш популяции $u(x_N, x_N) = \frac{v}{2} - \frac{v^2}{2c}$.

В численном эксперименте используются следующие параметры для системы (7): скорость пополнения ресурсов ястребами $\theta = 2$, состояние окружающей среды, в начальный момент времени $n(0) = 0{,}3$, параметры матриц (8) принимают значения

$v_0 = 4$, $c_0 = 12$, $v_1 = 7$, $c_1 = 10$. Предполагается, что агенты, которые придерживаются мнения m_1 (m_2), доверяют только ястребам (голубям). Матрица B диагональная со значениями 0,5 на диагонали. Агенты популяции в начальный момент времени равномерно распределены между стратегиями ястреба и голубя.



а) $y(0) = 0{,}45$ б) $y(0) = 0{,}7$

Рис. 1. Зависимость состояния системы от начального значения части популяции, придерживающейся мнения m_1, $y(0)$; $x(0) = 0{,}5$, $n(0) = 0{,}3$.

На рис. 1 представлено поведение популяции в зависимости от распределения агентов по мнениям. Наблюдается, что при начальных значениях доли агентов популяции, придерживающихся мнения m_1, меньше 0,5, популяция приходит к стационарному положению, где $x_N = (0{,}33; 0{,}67)$ (рис. 1 а)). В то время как при начальном значении доли агентов популяции, придерживающихся мнения m_1, не меньше 0,5, система приходит к стационарному положению, где $x_N = (0{,}7; 0{,}3)$ (рис. 1 б)).

Пример 2. Дилемма заключенного.

В рамках текущего эксперимента в качестве базовой игры, которая описывает взаимодействия агентов, выбирается игра «Дилемма заключенного» в ее экономической интерпретации. В данной игре первая стратегия соответствует выбору игрока сотрудничать, а вторая – не сотрудничать.

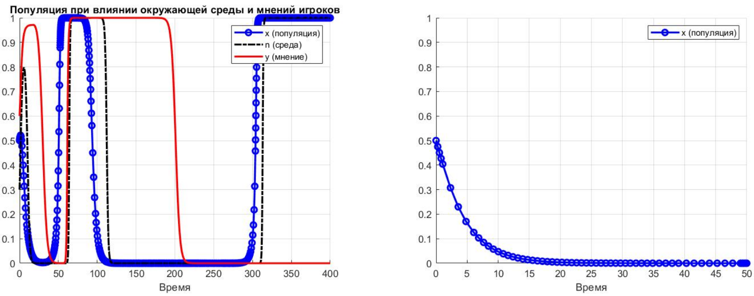
Поскольку в модели рассматривается изменение состояния популяции в зависимости от мнения агентов, в соответствии с формулой (4) необходимо ввести в рассмотрение две матрицы выигрышей:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 3{,}5 & 1 \\ 2 & 0{,}75 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4{,}5 & 1{,}25 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

для элементов которых верны соотношения

$$a^0_{11} > a^0_{21},\ a^0_{12} > a^0_{22},\ a^1_{11} < a^1_{21},\ a^1_{12} < a^1_{22}. \tag{10}$$

Для игры «Дилемма заключенного» характерно существования одного состояния равновесия по Нэшу, причем для игры, которая задается матрицей $A_1(A_0)$, с учетом соотношений (10) это состояние $(e^2, e^2)((e^1, e^1))$.



а) б)

Рис. 2. Иллюстрация состояния системы: а) с зависимостью от среды и распределения агентов между мнениями; $x(0) = 0{,}5$, $y(0) = 0{,}6$, $n(0) = 0{,}3$; б) без влияния среды и мнений; $x(0) = 0{,}5$, предполагается, что $n = 1$

В рамках текущего численного эксперимента параметры системы (7) принимают значения: скорость пополнения ресурсов сотрудничающими агентами, $\theta = 2$, матрицы выигрышей агентов задаются соотношением (9). Предполагается, что агенты, которые придерживаются мнения m_1 (m_2), доверяют только тем агентам, которые предпочитают сотрудничать (не сотрудничать). Матрица доверия B диагональная со значениями 0,5 на диагонали. В начальный момент времени в популяции одинаковое количество агентов, которые сотрудничают и не сотрудничают.

Как видно из графиков на рис. 2а) в начальный момент времени доля сотрудничающих агентов убывает до нуля, в то время как среда начинает обогащаться. Но при увеличении доли агентов популяции, отказывающихся от сотрудничества, среда убывает до нуля. После нескольких колебаний система приходит в состояние равновесия (e^1, e^1), все игроки придерживаются мнения m_2, среда восстановлена, т. е. $n = 1$.

4. Заключение

Рассматривается структура, которая содержит в себе среду, популяцию агентов, распределенную между стратегиями, и ту же популяцию, но распределенную между мнениями. Эти три объекта различной природы могут быть рассмотрены как по отдельности, так и в совокупности, образуя связь, где изменение величин долей агентов, придерживающихся той или иной чистой стратегии, влечет за собой изменение состояния окружающей среды. Выигрыши агентов зависят от состояния среды, поэтому агенты учитывают информацию об его изменении при помощи мнений, которые зависят и от состояния среды, и от состояния популяции.

Помимо этого стоит отметить, что в одной среде может существовать несколько популяций. Изучение сосуществования нескольких популяций в одной среде является темой дальнейшего исследования.

В результате проведения серии численных экспериментов было обнаружено, что окружающая среда и мнения агентов оказывают значительное влияние на стационарное положение популяции. В большинстве случаев изменение начального значения параметра популяции, среды или популярности мнений вызывает изменение стационарного положения, к которому приходит система. Выбор матрицы доверия также играет большую роль в результатах моделирования изменений, происходящих в популяции в зависимости от состояния окружающей среды и мнений агентов.

В ходе дальнейшего исследования планируется распространить рассмотренный в работе подход и на другие классы биматричных игр, провести большее количество экспериментов и найти тренды, определяющие зависимость популяции от изменения состояния окружающей среды и изменения мнений агентов.

Литература

1. КОЛЕСИН И.Д., ГУБАР Е.А., ЖИТКОВА Е.М. *Стратегии управления в медико-социальных системах.* – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2014. – 128 с.
2. КУРНОСЫХ З.А., ГУБАР Е.А. *Моделирование эволюционной игры с учетом сетевой структуры* // Процессы управления и устойчивость. – 2017. – Т. 4, № 1. – С. 631–635.
3. ЛОРИЦ Е.М. *Эволюционная игра с учетом обратной связи с окружающей средой и мнениями игроков* // Процессы управления и устойчивость. – 2023. – Т. 10, № 1. – С. 462–466.
4. МАЗАЛОВ В.В., ДОРОФЕЕВА Ю.А., КОНОВАЛЬЧИКОВА Е.Н. *Моделирование влияния среди участников образовательного коллектива* // Вестник Санкт-Петербургского университета. – 2019. – Т. 15, Вып. 2. – С. 259–273.
5. ПЕТРОСЯН Л.А., ЗЕНКЕВИЧ Н.А., ШЕВКОПЛЯС Е.В. *Теория Игр.* – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 432 с.
6. ARGASINSKI K., BROOM M. *Evolutionary stability under limited population growth: Eco-evolutionary feedbacks and replicator dynamics* // Ecol. Complex. – 2017. – Vol. 34, No. 6.
7. BAYER P., GATENBY R. ET AL. *Coordination games in cancer* // PLoS ONE. – 2022. – Vol. 17, Iss. 1. – Art. e0261578.
8. BROOM M., KRIVAN V. *Two-strategy games with time constraints on regular graphs* // Journal of Theoretical Biology. – 2020. – Vol. 506. – Art. 110426.
9. BROOM M., RYCHTAR J. *Game-Theoretical Models in Biology.* – CRC Press, 2022. – 591 p.
10. BROWN J.S., THUIJSMAN F. ET AL. *The contribution of evolutionary game theory to understanding and treating cancer* // Dynamic Games and Applications. – 2022. – Vol. 12. – P. 313–342.

11. CRESSMAN R. *Evolutionary Dynamics and Extensive Form Games.* – Cambridge: MIT Press, 2003. – 316 p.
12. MENG Y., BROOM M., LI A. *Impact of misinformation in the evolution of collective cooperation.* – 2023.
13. PAARPORN K., EKSIN C. ET AL. *Optimal control policies for evolutionary dynamics with environmental feedback* // IEEE Conf. on Decision and Control (CDC). – 2018. – P. 1905–1910.
14. PRESSLEY M., SALVIOLI M. *Evolutionary dynamics of treatment-induced resistance in cancer informs understanding of rapid evolution in natural systems* // Frontiers in Ecology and Evolution. – 2021. – Vol. 9. – Art. 681121.
15. RIEHL J.R., CAO M. *Control of stochastic evolutionary games on networks* // IFAC. – 2015. – Vol. 48, Iss. 22. – P. 76–81.
16. SANDHOLM W.H. *Population Games and Evolutionary Dynamics.* – Cambridge: MIT Press, 2010. – 616 p.
17. TEMBINE H., ALTMAN E., EL-AZOUZI R., HAYEL Y. *Evolutionary games in wireless networks* // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics. – 2009. – Vol. 40. Iss. 3. – P. 634–646.
18. VINCENT T.L., BROWN J.S. *Evolutionary Game Theory, Natural Selection, and Darwinian Dynamics.* – New York: Cambridge University Press, 2005. – 400 p.
19. WEIBULL J.W. *Evolutionary Game Theory.* – Cambridge: MIT Press, 1995. – 265 p.
20. WEITZ J.S., EKSIN C., PAARPORN K. ET AL. *An oscillating tragedy of the commons in replicator dynamics with game-environment feedback* // PNAS. – 2016. – Vol. 113, No 47. – P. E7518–E7525.
21. ZHILIANG Z., YULI Z. ET AL. *Evolutionary game dynamics of the competitive information propagation on social networks* // Complexity. – 2019. – Vol. 2019. – Art. 8385426.
22. ZHU Q., GUBAR E., ALTMAN E. (EDS.). *Special Issue on Modeling and Control of Epidemics.* // Dynamic Games and Applications. – 2022. – Vol. 12.

AN EVOLUTIONARY GAME WITH ENVIRONMENTAL FEEDBACK AND PLAYERS' OPINIONS

Ekaterina Lorits, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint Petersburg State University, St. Petersburg, student (kate.lorits@gmail.com).
Elena Gubar, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint Petersburg State University, St. Petersburg, Ph.d, associated professor (e.gubar@spbu.ru, alyona.gubar@gmail.com).

Abstract: Evolutionary games are a developing sub-field of game theory. This branch of game theory is used in the study of the adaptation of large, but finite, populations of agents to changes in the environment. It assumes that each agent has no significant influence on the system. Many scientific areas use the theory of evolutionary games. In particular, it is used in biology, medicine and the modelling of wireless networks. In this paper we study an evolutionary game with two levels of interaction between population agents. At the first level, changes in the population state depend on changes in the environment and on increasing or decreasing the resources available to the agents. At the second level, the population's state changes according to how the agents evaluate the state of the environment. These levels make up a decision-making structure with two levels. A change in one parameter of the system, for example the state of the environment, causes a change in the other elements of the system, that is, a change in the state of the population and the opinions of the agents. The study involves the analysis of a modified evolutionary game taking into account the influence of the environment and the opinions of the agents. It also involves the development of computational methods in MATLAB and two sets of numerical experiments.

Keywords: evolutionary games, opinion dynamics, replicative dynamics, imitation dynamics.

УДК 519.83
ББК 22.18
DOI: 10.25728/ubs.2023.106.6

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.Г. Чхартишвили.

Поступила в редакцию 30.08.2023.
Дата опубликования 30.11.2023.