

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА – СТИЛТЬЕСА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПИКОВОГО ВОЗРАСТА ИНФОРМАЦИИ В ГРУППЕ ПЕРЕДАЧИ, МОДЕЛИРУЕМОЙ ДВУХУЗЛОВОЙ СЕТЬЮ

Матюшенко С. И.<sup>1</sup>

(Российский университет дружбы народов, Москва)

Самуйлов К. Е.<sup>2</sup>

(Федеральный исследовательский центр «Информатика  
и управление» РАН, Москва)

*Рассматривается двухузловая группа передачи информации, состоящая из периферийного узла (узла-отправителя), центра управления (узла-получателя) и двух последовательных каналов связи между ними. Процесс передачи информации из узла-отправителя в узел-получатель моделируется посредством двухузловой сети массового обслуживания с произвольной функцией распределения интервалов между поступлениями заявок и произвольными длительностями обслуживания в каждом узле сети, т.е. сетью, которую в соответствии с обозначениями Кендалла принято кодировать как  $G/G/1 - G/G/1$ . При этом передаваемые пакеты информации моделируются заявками, а процесс передачи пакетов по каналам системы моделируется процедурой обслуживания в узлах сети. В работе получено выражение для преобразования Лапласа – Стильтеса стационарной функции распределения пикового возраста информации – метрики, позволяющей количественно оценить «свежесть» информации, поступающей в узел-получатель с целью принятия управленческих решений. Данная работа продолжает цикл работ авторов, посвященных проблеме анализа возраста информации, обобщая результаты работ других авторов, что достигается за счет наиболее общих предположений относительно распределений длительностей генерации и обслуживания заявок в узлах сети. Корректность полученных результатов проверена на ряде частных случаев, рассмотренных ранее, а также путем сравнения аналитических результатов с результатами имитационного моделирования.*

**Ключевые слова:** возраст информации, пиковый возраст информации, сеть массового обслуживания, стационарное распределение.

<sup>1</sup> Сергей Иванович Матюшенко, к.ф.-м.н., доцент ([matyushenko-si@rudn.ru](mailto:matyushenko-si@rudn.ru)).

<sup>2</sup> Константин Евгеньевич Самуйлов, д.т.н., в.н.с. ([samuylov-ke@rudn.ru](mailto:samuylov-ke@rudn.ru)).

## **1. Введение**

Понятие «возраст информации» впервые было введено в [4] для количественной оценки «свежести» знаний об удаленном объекте. Впоследствии в специальной литературе для обозначения этого понятия стали использовать аббревиатуру AoI от английского «Age of Information». Со временем это понятие превратилось в метрику, отражающую качество предоставляемых услуг, для которых фактор времени играет наиважнейшую роль. Проблема своевременной доставки информации в центр контроля и управления возникает в различных сферах человеческой деятельности: в энергетических системах, в индустриальном интернете вещей, в сфере автономного транспорта, в системах видеонаблюдения и системах сотовой связи и т.д.

Наиболее удобным средством для исследования проблемы возраста информации является аппарат теории массового обслуживания. Обзор работ, использующих этот аппарат, можно найти, например, в [7]. Однако следует отметить, что большинство исследователей ограничиваются простыми моделями, например, системами массового обслуживания с экспоненциальным распределением времени между моментами генерации пакетов в узле-отправителе и экспоненциальным [5] либо детерминированным [3] распределением длительности обработки информации в узле-получателе. Такие модели позволяют получить лишь грубую оценку возраста информации, поскольку однопараметрические распределения не дают возможности учесть все особенности протоколов работы современных систем диспетчерского управления.

В данной работе мы моделируем процесс передачи информации с помощью двухузловой сети массового обслуживания с распределениями длительностей генерации заявок и длительностей их обслуживания на приборах общего типа, предполагая лишь их независимость. При этом наша модель учитывает требование протокола передачи информации, состоящее в том, что процесс передачи делится на два последовательных этапа и пред-

полагает наличие накопителей неограниченной емкости для размещения заявок, ожидающих обслуживания на соответствующих приборах. Подобная техническая система рассматривалась ранее в работе [2]. Однако математическая модель для данной системы строилась на основе сети  $M/M/1 - M/M/1$ , что, как уже отмечалось выше, позволило получить лишь достаточно грубую оценку для стационарной функции распределения возраста информации.

## 2. Описание модели

Рассмотрим группу передачи (ГП) информации, состоящую из узла-отправителя (УО), узла-получателя (УП) и канала связи между ними (рис. 1).

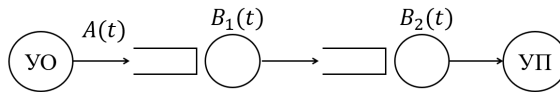


Рис. 1. Двухузловая ГП

Процесс передачи информации из УО в УП будем моделировать с помощью двухузловой сети, представляющей собой последовательное соединение двух систем массового обслуживания (СМО). На вход первой системы (узла) поступает произвольный рекуррентный поток с функцией распределения интервалов между поступлениями  $A(t)$ . Обслуживание на приборе  $j$ -го узла производится в соответствии с произвольной ФР времени обслуживания  $B_j(t)$ ,  $j = 1, 2$ . Накопители обеих систем имеют неограниченную емкость.

## 3. Основные обозначения, предположения и факты

Цель нашего исследования – найти распределение пикового возраста информации, передаваемой из УО в УП. Как обычно, под пиковым возрастом  $Z^{n-1}$  ( $n - 1$ )-заявки, поступающей с систему, будем понимать сумму [1]

$$Z^{n-1} = G^n + T^n, \quad n \geq 1,$$

где  $G^n$  – случайная величина (с.в.) – интервал времени между поступлениями  $(n-1)$ -й и  $n$ -й заявки ( $n$ -заявки) с ФР  $A(t)$ , а  $T^n$  – с.в. – время пребывания  $n$ -заявки в сети.

Далее введем ряд обозначений:

- $T_j$  – с.в. – время пребывания заявки в узле  $j$ ;
- $T_j(t)$  – стационарная ФР с.в.  $T_j$ ;
- $\tau_j(t) = \frac{d}{dt}T_j$  – плотность распределения с.в.  $T_j$ ;
- $\theta_j(t) = \int_0^\infty e^{itx} dT_j(x)$  – характеристическая функция (ХФ) с.в.  $T_j$ ;
- $\theta_j(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dT_j(x)$  – преобразование Лапласа – Стилтеса (ПЛС) с.в.  $T_j$ ;
- $W_j$  – с.в. – время ожидания обслуживания заявки в узле  $j$ ;
- $W_j(t)$  – стационарная ФР с.в.  $W_j$ ;
- $w_j(t)$  – плотность распределения с.в.  $W_j$ ;
- $\omega_j(t)$  – ХФ с.в.  $W_j$ ;
- $\omega_j(s)$  – ПЛС с.в.  $W_j$ ;
- $G$  – с.в. – длина интервалов между поступлениями заявок;
- $a(t) = \frac{d}{dt}A(t)$  – плотность распределения с.в.  $G$  (длительности генерации);
- $\alpha(t)$  – ХФ с.в.  $G$ ;
- $\alpha(s)$  – ПЛС с.в.  $G$ ;
- $a = \int_0^\infty tdA(t)$  – средняя длина интервалов между поступлениями заявок;
- $S_j$  – с.в. – длительность обслуживания заявки в узле  $j$ ;
- $b_j(t) = \frac{d}{dt}B_j(t)$  – плотность распределения с.в.  $S_j$ ;
- $\beta_j(t)$  – ХФ с.в.  $S_j$ ;
- $\beta_j(s)$  – ПЛС с.в.  $S_j$ ;
- $b_j = \int_0^\infty tdB_j(t)$  – средняя длительность обслуживания заявки в узле  $j$ ;
- $c_j = b_j - a$  – разница между средней длительностью обслуживания и средней длительностью генерации;
- $\lambda = 1/a$  – интенсивность поступления потока;
- $\mu_j = 1/b_j$  – интенсивность обслуживания в узле  $j$ ;

- $\rho_j = \lambda/\mu_j = b_j/a$  – нагрузка узла  $j$ ;
- $d_j = \mu_j - \lambda$  – разница между интенсивностью обслуживания в узле  $j$  и интенсивностью поступающего потока,  $j = 1, 2$ .

Далее будем предполагать, что все введенные нами величины существуют и конечны, а также, что длительности обслуживания на приборе  $j$  независимы между собой, не зависят от длительности обслуживания на приборе  $3 - j$  и не зависят от длительности генерации. Кроме этого, будем полагать, что  $\rho_j < 1$ ,  $j = 1, 2$ , а также выполнены условия хотя бы одной из двух следующих теорем, доказательство которых можно найти, например, в [2] на стр. 483–485.

**Теорема 1.** Пусть ХФ  $\beta_j(t)$  представима в виде  $\beta_j(t) = \frac{P_j(t)}{Q_j(t)}$ , где  $P_j(t)$  и  $Q_j(t)$  – полиномы степеней соответственно  $k_j$  и  $l_j$ ,  $k_j \leq l_j$ . Тогда ХФ  $\omega_j(t)$  вычисляется по формуле

$$(1) \quad \omega_j(t) = \frac{Q_j(t)R_j(0)}{R_j(t)Q_j(0)},$$

где  $R_j(t) = \prod_{m=1}^{l_j} (t - t_m)$ ,  $t_m$  – корни уравнения  $1 - \alpha(-t)\beta_j(t) = 0$  в подпространстве комплексных чисел с отрицательной мнимой частью.

**Теорема 2.** Пусть ХФ  $\alpha(t)$  представима в виде  $\alpha(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ , где  $P(t)$  и  $Q(t)$  – полиномы степеней соответственно  $k$  и  $l$ ,  $k < l$ . Тогда ХФ  $\omega_j(t)$  вычисляется по формуле

$$(2) \quad \omega_j(t) = \frac{-ic_j t R(t) Q(0)}{[1 - \chi_j(t)] Q(-t) R(0)},$$

где  $R(t) = \prod_{m=1}^{l-1} (t - t_m)$ ,  $t_m$  – ненулевые корни уравнения  $1 - \alpha(-t)\beta_j(t) = 0$  в подпространстве комплексных чисел с неотрицательной мнимой частью, а  $\chi_j(t) = \alpha(-t)\beta_j(t)$ .

#### 4. ПЛС функции распределения пикового возраста информации

Перейдем к основной цели нашего исследования. Для этого, используя подход, предложенный в [3], рассмотрим следующие

события:

1) событие  $A_1$  – поступающая в сеть заявка застанет оба узла занятыми;

2) событие  $A_2$  – поступающая в сеть заявка застанет занятым узел 1 и свободным – узел 2;

3) событие  $A_3$  – поступающая в сеть заявка застанет свободным узел 1 и занятым – узел 2;

4) событие  $A_4$  – поступающая в сеть заявка застанет оба узла свободными.

Обозначим через  $z(s)$  – ПЛС с.в.  $Z$  – пиковый возраст информации. Далее, мы подсчитаем вероятности событий  $P(A_j)$  и получим выражения для определения условных ПЛС  $z_{A_j}(s)$ ,  $j = 1, \dots, 4$ .

Итак, начнем с события  $A_1$ . Для его наступления необходимо наличие двух условий одновременно:

- генерация заявки  $n$  должна завершиться раньше момента выхода из узла 1 заявки  $n - 1$ , т.е. должно быть выполнено условие:  $G^n < T_1^{n-1}$  для любого  $n \geq 1$ ,

- время обслуживания заявки  $n$  в узле 1 не должно завершиться пребыванием  $(n - 1)$ -й заявки в узле 2, т.е.  $S_1^n < T_2^{n-1}$ . Заметим, что начало обслуживания  $n$ -заявки совпадает с моментом перехода  $(n - 1)$ -й заявки из узла 1 в узел 2 (рис. 2).

Здесь и далее на рисунках используются следующие обозначения:

- $t_{in,j}^n$  – момент поступления в узел  $j$  заявки  $n$ ;
- $t_{out,j}^n$  – момент выхода из узла  $j$  заявки  $n$ ;
- $s_j^n$  – момент начала обслуживания заявки  $n$  в узле  $j$ ,  $j = 1, 2$ .

Учитывая вышеизложенное получаем:

$$(3) P(A_1) = \int_0^\infty \int_0^y a(y) dy \tau_1(t_1) dt_1 \cdot \int_0^\infty \int_0^{t_2} b_1(u) du \tau_2(t_2) dt_2.$$

При этом заметим, что  $\tau_j(t_j) = \frac{d}{dt_j} (W_j(t_j) * B_j(t_j))$ , а  $W_j(t_j)$  может быть найдена из (1) либо (2) обращением соответствующих ХФ,  $j = 1, 2$ .

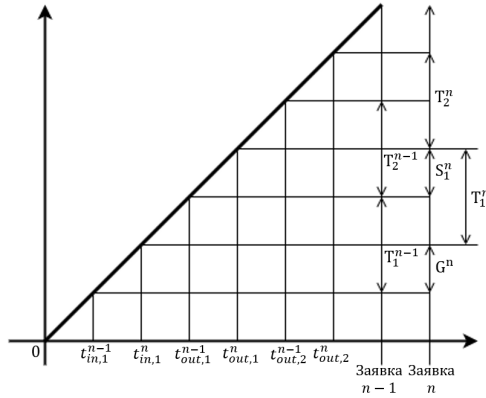


Рис. 2. Диаграмма пикового возраста для события  $A_1$

Очевидно, что пиковый возраст при условии справедливости  $A_1$  определяется выражением:

$$(4) \quad Z^{n-1} = G^n + T_1^n + T_2^n$$

и не зависит от  $n$ .

Учитывая независимость слагаемых в правой части (4), приходим к следующему результату:

$$(5) \quad z_{A_1}(s) = \alpha(s)\theta_1(s)\theta_2(s).$$

Теперь рассмотрим событие  $A_2$ . Для наступления этого события необходимо наличие двух условий одновременно

- генерация  $n$ -заявки должна завершиться раньше момента выхода из узла 1 заявки  $n - 1$ , т.е.  $T_1^{n-1} > G^n$ ;
- за время обслуживания заявки  $n$  в узле 1 должно завершиться пребывание  $(n - 1)$ -ой заявки в узле 2, т.е.  $S_1^n > T_2^{n-1}$  (рис. 3).

Следовательно,

$$(6) \quad P(A_2) = \int_0^\infty \int_0^y a(y)dy\tau_1(t_1)dt_1 \cdot \int_0^\infty \int_{t_2}^\infty b_1(u)du\tau_2(t_2)dt_2,$$

$$(7) \quad z_{A_2}(s) = \alpha(s)\theta_1(s)\beta_2(s).$$

Для наступления события  $A_3$  также необходимо наличие двух условий одновременно:

- генерация  $n$ -заявки должна идти дольше, чем пребывание

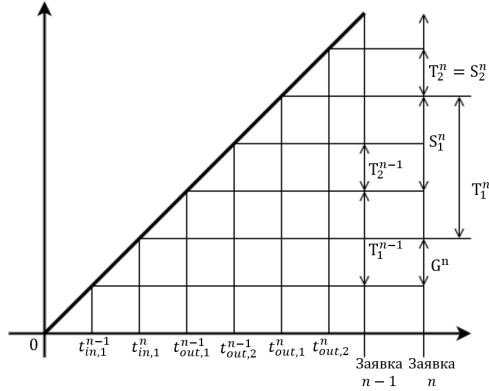


Рис. 3. Диаграмма пикового возраста для события  $A_2$

$(n - 1)$ -й заявки в узле 1, т.е.  $G^n > T_1^{n-1}$ ;

- на момент окончания обслуживания  $n$ -й заявки в узле 1 заявка  $n - 1$  должна оставаться в узле 2, т.е.  $T_1^{n-1} + T_2^{n-1} > G^n + S_1^n$  (рис. 4).

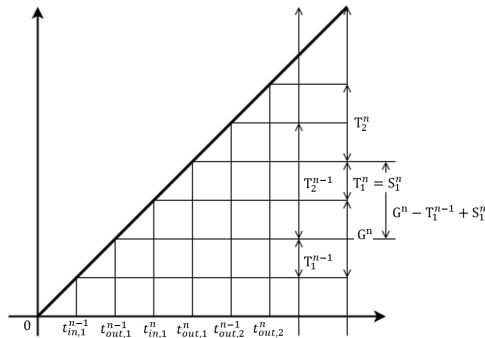


Рис. 4. Диаграмма пикового возраста для события  $A_3$

Следовательно,

$$(8) \quad P(A_3) = \int_0^\infty \int_0^y \int_0^\infty a(y)\tau_1(t_1)b_1(u) \int_{y-t_1+u}^\infty \tau_2(t_2)dt_2dudt_1dy,$$

$$(9) \quad z_{A_3}(s) = \alpha(s)\beta_1(s)\theta_2(s).$$



И, наконец, переходим к событию  $A_4$ , для наступления которого необходимо одновременное наличие следующих условий:

- генерация  $n$ -заявки должна происходить дольше, чем заявка  $n - 1$  находится в узле 1, т.е.  $G^n > T_1^{n-1}$ ;
- поскольку  $n$ -заявка сразу поступит на обслуживание в узле 1, то за время ее обслуживания  $(n - 1)$ -я заявка должна завершить пребывание в узле 2, т.е.  $G^n + S_1^n > T_1^{n-1} + T_2^{n-1}$  (рис. 5).

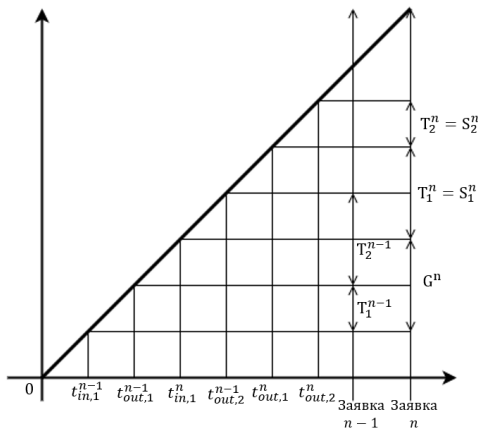


Рис. 5. Диаграмма пикового возраста для события  $A_4$

Таким образом, получаем:

$$(10) \quad P(A_4) = \int_0^\infty \int_0^y \int_0^\infty a(y)\tau_1(t_1)b_1(u) \int_0^{y+u-t_1} \tau_2(t_2)dt_2dudt_1dy,$$

$$(11) \quad z_{A_4}(s) = \alpha(s)\beta_1(s)\beta_2(s).$$

Применяя формулу полной вероятности, приходим к следующему результату.

**Теорема 3.** ПЛС пикового возраста информации в двухузловой ГП, моделируемой с помощью сети  $G/G/1 \rightarrow G/G/1$ , вычисляется по формуле

$$(12) \quad z(s) = \sum_{m=1}^4 z_{A_m}(s)P(A_m),$$

где  $z_{A_m}(s)$  и  $P(A_m)$  определяются выражениями (3)–(11).

**5. Стационарные характеристики пикового  
возраста информации для ГП, моделируемой  
сетью  $M/M/1 \rightarrow M/M/1$**

Рассмотрим частный случай, когда передача информации в ГП моделируется двухузловой сетью, на которую поступает пуассоновский поток заявок интенсивности  $\lambda$ , а обслуживание в узле сети производится в соответствии с экспоненциальным законом распределения с параметрами  $\mu_j, j = 1, 2$  (рис. 6).

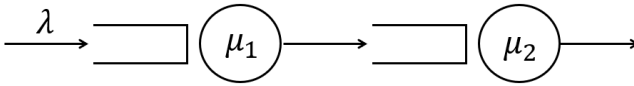


Рис. 6. Двухузловая сеть  $M|M|1 \rightarrow M|M|1$

Найдем ПЛС пикового возраста и определим его среднее значение. Опуская подробности вычислений, выпишем результаты, учитывая известный факт [2]:

$$\tau_j(t) = d_j e^{-d_j t}, \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2.$$

Из (3)–(11) получаем:

$$(13) \quad P(A_1) = \int_0^\infty \int_0^y \lambda e^{-\lambda y} dy d_1 e^{-d_1 t_1} dt_1 \cdot \int_0^\infty \int_0^{t_2} \mu_1 e^{-\mu_1 u} du d_2 e^{-d_2 t_2} dt_2 = \frac{\lambda}{\mu_1 + d_2},$$

$$(14) \quad P(A_2) = \int_0^\infty \int_0^y \lambda e^{-\lambda y} dy d_1 e^{-d_1 t_1} dt_1 \cdot \int_0^\infty \int_{t_2}^\infty \mu_1 e^{-\mu_1 u} du d_2 e^{-d_2 t_2} dt_2 = \frac{\lambda d_2}{\mu_1(\mu_1 + d_2)},$$

$$(15) \quad P(A_3) = \int_0^\infty \int_0^y \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} d_1 e^{-d_1 t_1} \mu_1 e^{-\mu_1 u} \cdot \int_{y+u-t_1}^\infty d_2 e^{-d_2 t_2} dt_2 du dt_1 dy = \frac{\lambda d_1}{\mu_2(\mu_1 + d_2)},$$

$$(16) \quad P(A_4) = \int_0^\infty \int_0^y \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} d_1 e^{-d_1 t_1} \mu_1 e^{-\mu_1 u} \cdot \int_0^{y+u-t_1} d_2 e^{-d_2 t_2} dt_2 du dt_1 dy = \frac{d_1 \mu_2 (\mu_1 + d_2) - \lambda \mu_1 d_1}{\mu_1 \mu_2 (\mu_1 + d_2)},$$

$$(17) \quad z_{A_1}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} \frac{d_1}{d_1 + s} \frac{d_2}{d_2 + s},$$

$$(18) \quad z_{A_2}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} \frac{d_1}{d_1 + s} \frac{\mu_2}{\mu_2 + s},$$

$$(19) \quad z_{A_3}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} \frac{\mu_1}{\mu_1 + s} \frac{d_2}{d_2 + s},$$

$$(20) \quad z_{A_4}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} \frac{\mu_1}{\mu_1 + s} \frac{\mu_2}{\mu_2 + s}.$$

Дифференцируя  $z_{A_j}(s)$  по  $s$  в нуле, приходим к следующему результату.

**Теорема 4.** Средний пиковый возраст информации в двухузловой ГП, моделируемой сетью  $M|M|1 \rightarrow M|M1$ , определяется выражением

$$(21) \quad E(z) = \left[ \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right] P(A_1) + \left[ \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{d_1} + \frac{1}{\mu_2} \right] P(A_2) + \left[ \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{d_2} \right] P(A_3) + \left[ \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right] P(A_4),$$

где  $P(A_j)$  вычисляются в соответствии с (13)–(16).

## 6. Численные результаты

В таблице 1 представлены результаты вычислений среднего пикового возраста информации для сети  $M|M|1 \rightarrow M|M1$  для трех различных значений  $\mu_1$ : 1,0, 1,2 и 1,5 при фиксированном  $\mu_2 = 1,1$  и различных  $\lambda$ , принимающих значения от 0,1 до 0,9 с шагом 0,1. Пример для  $\mu_1 = 1,5$  посчитан двумя способами: с помощью формулы (21) и с помощью имитационной модели.

Результаты вычислений, представленные в таблице 1, также отражены на графиках (рис. 7), согласно которым можно прийти к следующим выводам

- существуют минимальные значения среднего возраста информации, соответствующие средним значениям загрузки системы;
- чем выше загрузка системы, тем существеннее различие среднего возраста информации при относительно небольшом различии в пропускной способности канала.

Таблица 1. Результаты вычислений среднего пикового возраста информации

	аналит.	аналит.	аналит.	имитац.
	$\mu_1 = 1,0$	$\mu_1 = 1,2$	$\mu_1 = 1,5$	$\mu_1 = 1,5$
$\lambda$	$\mu_2 = 1,1$	$\mu_2 = 1,1$	$\mu_2 = 1,1$	$\mu_2 = 1,1$
0,10	1,92847	11,757	11,5872	11,611
0,20	6,99582	6,80693	6,62616	6,584
0,30	5,46397	5,23818	5,0354	5,029
0,40	4,86466	4,57022	4,32931	4,375
0,50	4,75344	4,33479	4,03122	4,041
0,60	5,07080	4,4208	4,01524	4,018
0,70	5,98339	4,86395	4,28895	4,322
0,80	8,12218	5,86662	4,99519	5,011
0,90	14,46731	8,07564	6,63398	6,651

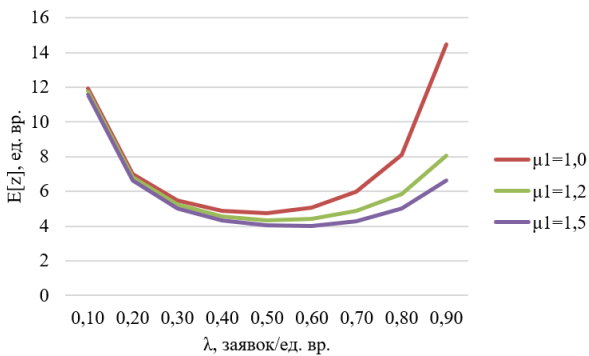


Рис. 7. Зависимость среднего пикового возраста информации от интенсивности входящего потока

## 7. Заключение

В результате проведенного исследования удалось получить выражение для преобразования Лапласа – Стильтеса стационарной функции распределения пикового возраста информации, передаваемой из периферийного источника в центр управления, моделируя процесс передачи с помощью двухузловой сети массового обслуживания с распределениями длительностей генерации и обслуживания общего типа. В данной работе мы не только обобщили результаты [2], но и провели численный анализ пикового возраста информации при различных предположениях относительно распределений длительностей генерации и обслуживания, а также проверили корректность полученных результатов с помощью имитационного моделирования.

### Литература

1. БОЧАРОВ П.П., ПЕЧИНКИН А.В. *Теория массового обслуживания*. – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.
2. CHIARIOTTI F., VIKHROVA O., SORET B., POPOVSKI P. *Peak Age of Information Distribution in Tandem Queue Systems* // arXiv.2004.05088. – 2020. – DOI: 10.48550/arXiv.2004.05088.
3. COSTA M., CODREANU M., EPHREMIDES A. *On the Age of Information in Status Update Systems With Packet Management* // IEEE Trans. on Information Theory. – 2016. – Vol. 62, No. 4. – P. 1897–1910. – DOI: 10.1109/TIT.2016.2533395.
4. KAUL S., GRUTESER M., RAI V., KENNEY J. *Minimizing age of information in vehicular networks* // Proc. of the 2011 8th Annual IEEE Communications Society Conference on Sensor, Mesh and ad hoc Communications and Networks. – IEEE, 2011. – P. 350–358.

5. KAUL S. K., YATES R. D., GRUTESER M. *Status updates through queues* // 46th Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS). – 2012. – P. 1–6. – DOI: 10.1109/CISS.2012.6310931.
6. KOSTA A., PAPPAS N., AGELAKIS V. *Age of Information: A New Concept, Metrics and Tools* // Foundations and Trends in Networking. – 2017. – Vol. 12, No. 3. – P. 162–259. – DOI: 10.1561/13000000060.
7. ZHBANKOVA E., MANAEVA V., MARKOVA E., GAIDAMAKA YU. *The Age of Information in Wireless Cellular Systems: Gaps, Open Problems, and Research Challenges* // Sensors. – 2023. – Vol. 23, No. 19. – P. 8238. – DOI: 10.3390/s23198238.

**THE LAPLACE – STIELTJES TRANSFORMATION  
OF THE DISTRIBUTION FUNCTION OF THE PEAK  
AGE OF INFORMATION IN A TRANSMISSION  
GROUP MODELED BY A TWO-NODE NETWORK**

**Sergey Matyushenko**, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Cand.Sc., assistant professor (matyushenko-si@rudn.ru).

**Konstantin Samouylov**, Federal Research Center «Computer Science and Control» of the Russian Academy of Sciences, Moscow, principal scientist, Doctor of Science. (samuylov-ke@rudn.ru).

*Abstract: In this paper, we consider a two-node information transmission group consisting of a peripheral node (sender node), a control center (recipient node) and two serial communication channels between them. The process of transferring information from the sending node to the receiving node is modeled by means of a two-node queuing network with an arbitrary function for distributing intervals between requests and arbitrary service durations at each node of the network, i.e., a network that, according to Kendall's designations, is usually encoded as  $G/G/1 - G/G/1$ . In this case, the transmitted packets of information are modeled by requests, and the process of transmitting packets through the system channels is modeled by the maintenance procedure at the network nodes. The paper provides an expression for the Laplace – Stieltjes transformation of the stationary distribution function of the peak age of information – a metric that allows quantifying the “freshness” of information entering the receiving node in order to accept management decisions. This work continues the cycle of works by the authors devoted to the problem of analyzing the age of information, summarizing the results of the work of other authors, which is achieved through the most arbitrary assumptions about the distributions of the durations of generating and servicing applications in the network nodes. The correctness of the obtained results was verified on a number of special cases considered earlier, as well as by comparing the analytical results with the results of simulation modeling.*

Keywords: information age, peak information age, queuing network, stationary distribution.

УДК 519.7

ББК 22.18

DOI: 10.25728/ubs.2024.107.02

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А.В. Горбуновой.*

*Поступила в редакцию 03.12.2023.*

*Дата опубликования 31.01.2024.*