

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА НЕЯВНОЙ АДАПТАЦИИ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ К ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИМ ПАРАМЕТРАМ ТВЕРДОГО ТЕЛА¹

Жуков П. И.²

(Старооскольский технологический институт
им. А.А. Угарова (филиал) НИТУ «МИСИС», Старый Оскол)

Глуценко А. И.³

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Работа посвящена анализу алгоритмической устойчивости и сложности модели нестационарной теплопроводности с неявной адаптацией к теплофизическим параметрам нагреваемого твердого тела. В основе метода неявной адаптации лежит замена таких параметров как теплоемкость, теплопроводность и плотность в уравнении нестационарной теплопроводности на два безразмерных настраиваемых коэффициента, равномерно дискретизированных по всему времени жизни модели, с дальнейшей их настройкой при помощи модифицированного метода стохастического градиентного спуска. Для того чтобы обеспечить стабильность расчетов такой модели на ЭВМ, в предыдущих исследованиях были определены ограничения, которые позволили получить устойчивость, равную 64%. Предполагалось, что оставшиеся 36% были следствием нарушения этих ограничений в процессе коррекции. В данной работе предлагаются алгоритмические ограничения, которые позволяют решить данную проблему. Повторные эксперименты показали, что применение предложенного подхода позволяет повысить устойчивость с 64% до 98%. Также в процессе исследования было проведено аналитическое сравнение классов алгоритмической сложности для моделей с неявной адаптацией и с «групповой явной» адаптацией. В результате было установлено, что предложенный численный метод обладает более низкой алгоритмической сложностью, чем конечно-разностный метод с «групповой явной» адаптацией.

Ключевые слова: сеточная модель, нестационарная теплопроводность, адаптация, градиентный метод, алгоритмическая сложность, вычислительная устойчивость.

¹ Работа выполнена при частичной поддержке гранта Президента РФ (МД.1787.2022.4).

² Пётр Игоревич Жуков, аспирант (Zhukov.petr86@yandex.ru).

³ Антон Игоревич Глуценко, д.т.н., в.н.с. (aiglush@ipu.ru).

1. Введение

На сегодняшний день задачи моделирования тепловых полей в твердых телах различной геометрии находят свое применение во многих областях науки и техники. Среди них наиболее популярными приложениями такого рода моделей можно считать: 1) моделирование нагрева твердых тел в печах и других тепловых агрегатах с целью оптимизации используемой теплотехнологии [16, 23, 33, 34]; 2) моделирование нагрева с целью восстановления теплофизических параметров материала [6, 25]; 3) моделирование нагрева отдельных конструктивных частей тепловых объектов [29, 30].

В зависимости от состояния теплового поля во времени выделяют два способа формализации: 1) на основе дифференциального уравнения стационарной теплопроводности [18]; 2) на основе дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности [20]. Для большинства практических задач особый интерес представляет процесс эволюции теплового поля во времени, ввиду чего наиболее широкое применение находят модели на основе нестационарного дифференциального уравнения. Проблемам численного моделирования нестационарного и стационарного нагрева посвящены работы А.И. Канарейкина [13-15], Д.В. Озеркина [21, 22], С.О. Саидова [31], В.К. Толстых [26], А.Ф. Албу [1], А.Б. Бирюкова [2] и др.

Активные исследования в области практического применения математических моделей теплопроводности, в частности нестационарной, показали, что важной частью моделирования является решение задачи адаптации. Под адаптацией тепловой модели нестационарной теплопроводности понимают необходимость определения коэффициентов модели, исходя из области её конечного приложения. В частности, такие параметры как степень черноты поверхности нагреваемого тела, его теплофизические коэффициенты или граничные условия в общем требуют идентификации в каждом отдельном случае применения численной модели. Эта задача является весьма нетривиальной, особенно в случае адаптации одновременно к группе различных по своим свойствам твердых тел. Проблемам параметрической адаптации

численных моделей нестационарной теплопроводности к различным параметрам посвящены работы Е.В. Торопова [27, 28], ранние работы А.Б. Бирюкова [3], некоторые из работ авторов [4, 11] и др.

В работе [11] была предложена математическая модель нестационарной теплопроводности с неявной адаптацией к теплофизическим параметрам нагреваемого твердого тела и условиям теплообмена на границе. Для данной модели был предложен численный метод, который позволяет решать задачу неявной адаптации, восстанавливая упомянутые параметры из статистических данных о процессе нагрева, адекватных граничным условиям III-го рода. Преимуществом данных решений над ранее рассмотренными является тот факт, что одновременно: 1) восстановление теплофизических параметров в неявном виде производится по статистическим данным о процессах нагрева в конкретном агрегате; 2) сохраняется интерпретируемая структура модели. Данная работа посвящена углубленному анализу алгоритмической сложности и устойчивости такой модели и расширяет результаты работы [10].

Сначала рассмотрим проблему адаптации к теплофизическим параметрам твердого тела и условиям теплообмена на границе, а также предложенную в [11] модель детальной.

2. Постановка задачи

Упомянутая ранее модель нестационарной теплопроводности базируется на одноименном дифференциальном уравнении. В общей постановке данное уравнение, имеет вид (1):

$$(1) \quad \dot{T} = \alpha \cdot \nabla^2 T + F(\bullet),$$

где ∇ – оператор набла; T – температура нагреваемого твердого тела, К; \dot{T} – производная температуры нагреваемого твердого тела по времени, К; α – коэффициент теплопроводности твердого тела, $\text{м}^2/\text{с}$; $F(\bullet)$ – функция внутреннего источника тепла в твердом теле. Дифференциальный закон (1) устанавливает соответствие между изменением температурного поля во времени и величиной его дивергенции в твердом объекте определенной геометрии.

Уравнение (1) применяют для тел различной геометрической формы и пространственной мерности с различными граничными условиями. Наиболее популярными для решения упомянутых ранее задач являются граничные условия III-го рода, так как большинство моделируемых тепловых процессов в промышленности являются высокотемпературными. Граничные условия III-го рода позволяют учесть нелинейность процесса нагрева при одновременном конвективном и радиационном режимах теплообмена на границе исследуемого тела:

$$(2) \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial l} = \kappa \cdot (U(t) - T_{06}) + \varepsilon \cdot \sigma \cdot ([U(t)]^4 - T_{06}^4),$$

где l – нормаль к поверхности твердого тела; λ – коэффициент теплопроводности твердого тела, Вт/(м·К); T_{06} – температура объекта, К; $U(t)$ – температура теплоносителя, определенная как некоторая функция от времени, К; κ – коэффициент теплообмена твердого тела, Вт/(м²·К); ε – приведенная степень черноты границы твердого тела; σ – постоянная Стефана – Больцмана, принятая равной $5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м² К⁴).

Однако учет этой нелинейности при двумерном и трехмерном случае описания твердого тела сильно ограничивает получение аналитического решения. Ввиду этого факта большинство работ, опирающихся на дифференциальные задачи нестационарной теплопроводности, решаются численными методами [2, 17, 19, 32]. Однако подобным решениям свойственна проблема их адаптации к теплофизическим параметрам нагреваемого тела. Одно из ее возможных решений было предложено авторами в [10–12].

Данная работа продолжает исследования, изложенные в упомянутых работах [10–12]. В них рассматривалось двумерное уравнение нестационарной теплопроводности, которое имело вид

$$(3) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda(T)}{\rho(T) \cdot c(T)} \cdot \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right],$$

где $\lambda(T)$ – функция теплопроводности от температуры; $\rho(T)$ – функция плотности от температуры; $c(T)$ – функция теплоемкости от температуры.

Рассматривая численные методы решения дифференциального уравнения (3), использовался метод конечных разностей [24], согласно которому все непрерывные дифференциальные операторы аппроксимируются разностными аналогами. Их значения определены в узлах некоторых пространственных и временных сетей, которыми покрывается исследуемая геометрия твердого тела.

В совокупности с методом покоординатного расщепления уравнение (3) можно рассматривать как систему линейных уравнений вида

$$(4) \quad \begin{cases} \rho(T) \cdot c(T) \cdot \left[\frac{T_{x,y}^{n+\frac{1}{2}} - T_{x,y}^n}{\tau} \right] = \lambda(T) \cdot \left[\frac{T_{x+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2 \cdot T_x^{n+\frac{1}{2}} + T_{x-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} \right], \\ \rho(T) \cdot c(T) \cdot \left[\frac{T_{x,y}^{n+1} - T_{x,y}^n}{\tau} \right] = \lambda(T) \cdot \left[\frac{T_{y+1}^{n+1} - 2 \cdot T_y^{n+1} + T_{y-1}^{n+1}}{h_y^2} \right], \end{cases}$$

где h_x – шаг сети вдоль Ox ; h_y – шаг сети вдоль Oy ; τ – шаг вдоль временной оси. Аналогичные процедуры выполняются и для граничных условий III-го рода (2), после чего всё сводится к решению двух трехточечных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Это решение хорошо известно и изложено, например, в работе [24].

На рис. 1 приведена геометрическая постановка задачи.

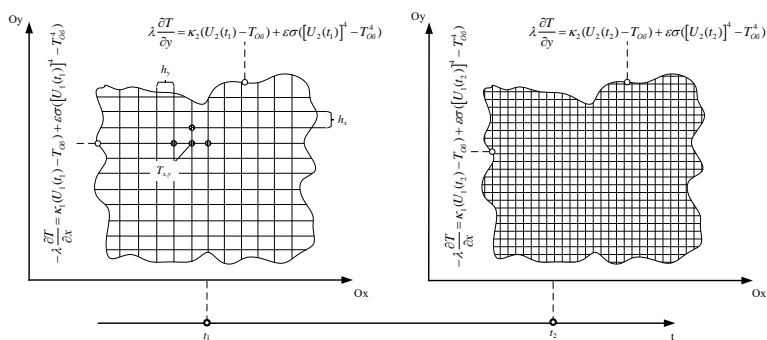


Рис. 1. Геометрическая постановка задачи двумерной нестационарной теплопроводности

Как уже упоминалось, основной проблемой изложенного выше подхода является необходимость адаптации полученной численной модели к теплофизическим параметрам нагреваемого твердого тела, а также к условиям его теплообмена на границе с теплоносителем. В общем случае проблема такой адаптации сводится к поиску и восстановлению правых частей тетрады параметров (5) при помощи «явных» внешних моделей:

$$(5) \quad \lambda = f_{\lambda}(T); c = f_c(T); \rho = f_{\rho}(T); \kappa = f_{\kappa}(T).$$

На сегодняшний день существует множество различных способов решения этой задачи, начиная от обратных коэффициентных задач теплопроводности [1, 8, 9] и заканчивая восстановлением правых частей (5) при помощи регрессионных моделей по дискретным замерам натурального эксперимента или из специализированной справочной литературы [5, 7].

Необходимость «явной» адаптации становится отдельной проблемой, когда речь заходит о «групповой явной» адаптации. Это ситуация, когда правые части для параметров (5) необходимо восстановить для твердых тел из схожих материалов. В таком случае делается предположение, что адаптация параметров (5) ведется к некоторому «усредненному» абстрактному материалу, из которого выполнены все твердые тела, для которых необходимо выполнить моделирование нестационарной теплопроводности.

При этом очевидно, что чем крупнее группа, тем более универсальной получается модель на основе системы (4). Однако имеются две существенные проблемы: 1) при укрупнении группы растет алгоритмическая сложность модели численного решения; 2) при укрупнении группы растет ошибка усреднения.

Проиллюстрируем первое утверждение. Известно, что конечно-разностная сеточная модель имеет алгоритмическую сложность порядка $O(N \cdot (H \cdot W))$, где H – количество шагов вдоль Ox по пространственной сети, W – вдоль Oy по пространственной сети, N – количество шагов по временной сети. В случае равномерности сетей алгоритмическая сложность будет иметь вид $O(N \cdot P^2)$ [12]. При этом та же модель с «групповой явной» адаптацией в лучшем случае будет иметь алгоритмическую сложность

$O(N \cdot [3kP^4])$ (см. раздел 4), так как в каждой точке пространственной сети потребуется рассчитать теплофизические параметры для k усредняемых материалов. Разница в полиномиальной сложности между двумя упомянутыми функциями подтверждает первое утверждение.

Проиллюстрируем второе утверждение. Пусть в каждой точке пространственной сети есть некоторая эталонная температура $\Theta_{x,y}^t$, и расчетная температура $T_{x,y}^t$, т.е. $H \cdot W$ ошибок аппроксимации:

$$(6) \quad \varepsilon_{H \cdot W}^t = \sum_{y=1}^H \sum_{x=1}^W \left[\Theta_{x,y}^t - T_{x,y}^t (H, W, N, f_M(T_{x,y}^{t-1})) \right].$$

Согласно теории разностных схем аппроксимация в точке t зависит от размерности временной и пространственных сетей. При наличии внешней модели «групповой явной» адаптации $f_M(T_{x,y}^{t-1})$ температура в точке становится зависимой еще и от нее. При этом есть N наборов таких точек ($H \cdot W$), ввиду чего ошибка накапливается аддитивно от одного временного слоя к другому:

$$(7) \quad \varepsilon_{MKP} = \sum_{t=1}^N \varepsilon_{H \cdot W}^t; \quad \varepsilon_{MKP} \in O(h^2) + O(\tau) + O(M_k),$$

где M_k – это модель «групповой явной» адаптации по k усредняемым материалам. Таким образом можно заметить, что согласно (7) ошибка тем меньше, чем меньше h^2 , τ и M_k , что подтверждает второе утверждение.

В работе [11] предлагается альтернативное решение проблемы «групповой явной» адаптации – неявная адаптация. Она заключается в замене теплофизических параметров нагреваемого твердого тела на безразмерные настраиваемые параметры:

$$(8) \quad \begin{cases} \overrightarrow{\omega}_x \cdot \left[\frac{T_{x,y}^{n+1} - T_{x,y}^n}{\tau} \right] = \overrightarrow{\varphi}_x^{(n)} \cdot \left[\frac{T_{x+1}^{n+1} - 2 \cdot T_x^{n+1} + T_{x-1}^{n+1}}{h_x^2} \right], \\ \overrightarrow{\omega}_y^{(n)} \cdot \left[\frac{T_{x,y}^{n+1} - T_{x,y}^n}{\tau} \right] = \overrightarrow{\varphi}_y^{(n)} \cdot \left[\frac{T_{y+1}^{n+1} - 2 \cdot T_y^{n+1} + T_{y-1}^{n+1}}{h_y^2} \right]. \end{cases}$$

А затем – их дальнейшая дискретизация вдоль всего времени жизни модели:

$$(9) \quad \begin{aligned} \overrightarrow{\omega_l^{(n)}} &= [\omega_l^{(1)} \quad \omega_l^{(2)} \quad \omega_l^{(3)} \quad \dots \quad \omega_l^{(N)}], \\ \overrightarrow{\varphi_l^{(n)}} &= [\varphi_l^{(1)} \quad \varphi_l^{(2)} \quad \varphi_l^{(3)} \quad \dots \quad \varphi_l^{(N)}], \end{aligned}$$

где N – размерность временной сети, $l \in \{x, y\}$. Аналогичным (9) образом происходит дискретизация и коэффициента теплообмена на границе твердого тела (κ), который также равномерно распределяется вдоль всей временной прямой. Затем для модели (8) определяются некоторые траектории управления (u_1 и u_2), которые приводят к смене температуры между временными слоями. Опираясь на эти траектории, ставится вариационная задача:

$$(10) \quad \begin{cases} \{u_1(n), u_1(n+1), \dots, u_1(N)\}, E_x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^V (y_i - g_1(T_x^{(n)}, u_1(n)_i))^2 \rightarrow \min, \\ \{u_2(n), u_2(n+1), \dots, u_2(N)\}, E_y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^V (y_i - g_2(T_y^{(n)}, u_2(n)_i))^2 \rightarrow \min, \end{cases}$$

где $u_l(n) = \{\varphi_x^{(n)}, \omega_x^{(n)}, \kappa_x^{(n)}\}$ $u_2(n) = \{\varphi_y^{(n)}, \omega_y^{(n)}, \kappa_y^{(n)}\}$; y_i – это некоторая эталонная температура уже нагретого вещества, например, измеренная пирометром после выгрузки заготовки из печи; V – количество наблюдений в выборке вариаций. Настройка φ , ω , κ происходит согласно предложенного закона:

$$(11) \quad \begin{aligned} \Delta \varphi_l^{(n)} &= - \left| \frac{k \cdot \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \varphi_l^{(n)}}}{\eta} + \eta \cdot \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \varphi_l^{(n)}} \right|; \quad \Delta \omega_l^{(n)} = - \left| \frac{k \cdot \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \omega_l^{(n)}}}{\eta} + \eta \cdot \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \omega_l^{(n)}} \right|; \\ \Delta \kappa_p^{(n)} &= - \left| \frac{k \cdot \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \kappa_p^{(n)}}}{\eta} + \eta \cdot \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \kappa_p^{(n)}} \right|, \end{aligned}$$

где E_l – ошибка, определенная в уравнении (10) ($l = x$ или $l = y$); k – эмпирически подбираемый параметр; η – шаг коррекции. Это модифицированный метод градиентного спуска, позволяющая предотвратить слишком быстрое затуханием градиента ошибки. Более детально эта модель описана в работе [11], а предложенный численный метод настройки (11) – в работе [12].

В работе [10] приводится анализ алгоритмической устойчивости и сложности описанного вкратце выше численного метода. Полученные критерии устойчивости позволили добиться процента устойчивых запусков процедуры неявной адаптации, равного 64%, что не является достаточным для практического применения предлагаемого решения. Поэтому в данной работе ставится задача разработки модифицированного критерия устойчивости, позволяющего увеличить данный процент. Описанию предложенной модификации посвящен следующий раздел статьи.

3. Дополнительный критерий устойчивости

В упомянутой работе [10] выдвигалась гипотеза о том, что устойчивость модифицированной модели может быть гарантирована устойчивостью классической конечно-разностной модели при определенных условиях.

Там же, в предположении $t_1 \leq t_{\max} \leq t_2$ и $X_1 \leq X \leq X_2$, где X – характеристический размер твердого тела по пространству; t_{\max} – общее время нагрева, были выведены эти условия, которые представляют собой систему ограничений:

$$\begin{aligned} & \varphi_l^{(n)} > 0, \omega_l^{(n)} > 0, N \geq L^2, \\ (12) \quad & \omega_l^{(n)} \in \left(10^{\lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}) + \lg\left(\frac{t_2 - t_1}{X_2^2 - X_1^2}\right) + 1}; (+D_{\max} - \gamma) \cdot 10^{\lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}) + \lg\left(\frac{t_2 - t_1}{X_2^2 - X_1^2}\right) + 1} \right), \end{aligned}$$

где D_{\max} – это программные ограничения хранения вещественных чисел; γ – это эмпирически выбираемый параметр смещения относительно максимально поддерживаемой величины мантиссы вещественного числа на ЭВМ (D_{\max}). Были проведены эксперименты с ограничениями (12), которые показали, что алгоритмическая устойчивость модели составляет 64%. При этом было сделано предположение, что остальные 36% неустойчивых запусков модели связаны с тем, что введенные ограничения нарушаются в процессе коррекции параметров численным методом (11).

Для решения упомянутой проблемы в данной статье предлагается алгоритмическое решение, которое для параметров φ и ω

имеет вид (13) при $\Delta\omega_l^{(n)} \geq 0$ и $\Delta\varphi_l^{(n)} \geq 0$ и (14) – при $\Delta\omega_l^{(n)} < 0$ или $\Delta\varphi_l^{(n)} < 0$, и вид (15) – для параметров κ :

$$(13) \begin{cases} \Delta\varphi_l^{(n)} = - \left| \frac{k \cdot \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \varphi_l^{(n)}}}{\eta} \right| \cdot \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \varphi_l^{(n)}}, \\ \omega_{corr} = \left[10^{\lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}) + \lg\left(\frac{t_2 - t_1}{X_2^2 - X_1^2}\right) + 1} \right], \\ \Delta\omega_l^{(n)} = - \left| \frac{k \cdot \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \varphi_l^{(n)}}}{\eta} \right| \cdot \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \varphi_l^{(n)}} \cdot \omega_{corr}, \end{cases}$$

$$(14) \begin{cases} \Delta\varphi_l^{(n)} = new(\varphi_l^{(n)}), \\ \omega_{corr} = \left[10^{\lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}) + \lg\left(\frac{t_2 - t_1}{X_2^2 - X_1^2}\right) + 1} \right], \\ \Delta\omega_l^{(n)} = -(0 - \Delta\omega_l^{(n)}) + \Delta\varphi_l^{(n)} \cdot \omega_{corr}, \end{cases}$$

$$(15) \Delta\kappa_p^{(n)} = \begin{cases} - \left| \frac{k \cdot \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \kappa_p^{(n)}}}{\eta} + \eta \right| \cdot \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \kappa_p^{(n)}}, & \text{если } \kappa_p^{(n)} > 0, \\ new(\kappa_p^{(n)}), & \text{если } \kappa_p^{(n)} \leq 0, \end{cases}$$

Здесь «new(•)» – это метод повторной инициализации параметра, алгоритм которого приведен на рис. 2.

Алгоритму передается указатель на отрицательный параметр, а сама функция отбирает сначала 20% параметров, индексы которых являются соседними для выбранного, и инициализирует их повторно в соответствии с условиями (12). Это позволяет в процессе коррекции параметров численным методом (11) сдвигать решение из неустойчивой области.

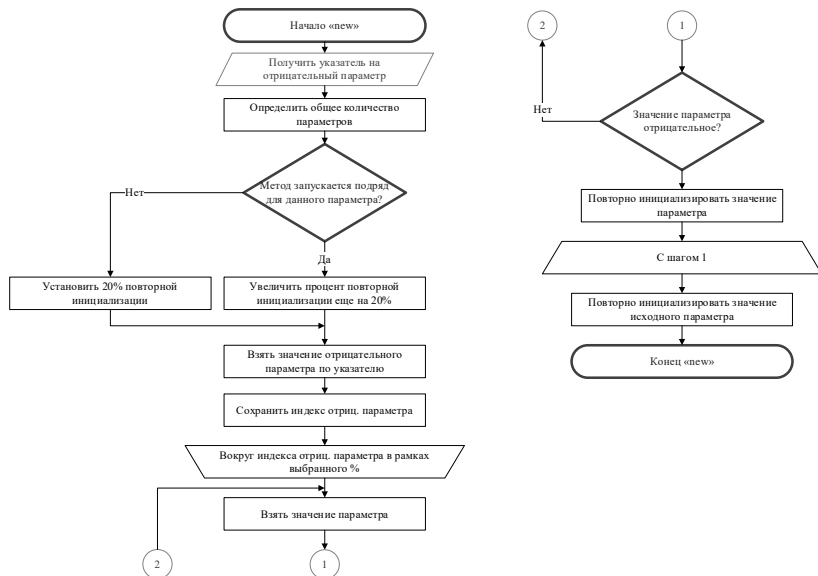


Рис. 2. Алгоритм повторной инициализации отрицательного значения параметра и значений параметров, индексы которых являются соседними для отрицательного параметра

Для того чтобы убедиться в работоспособности предложенного алгоритмического решения, было решено повторить эксперименты, изложенные в работе [10]. Для этого были сформированы (как и в [10]) модель с ограничениями (12) – (M3) и две контрольные модели: 1) модель без дополнительных ограничений (M1); 2) модель, реализующая только ограничение вида $N \geq L^2$ (M2). Все модели имели одинаковую структуру по пространственным сетям ($W = H = 25$) и различную структуру по временным сетям ($N_{M1} = 50, N_{M2} = N_{M3} = 625$).

Эксперимент в целом повторяет условия из работы [10]. Контрольными точками остаются 200 (устойчивый запуск) и 400 (успешный устойчивый запуск) пройденных итераций коррекции параметров. Общее количество запусков моделей равно 60, а статистические данные, используемые в качестве входов, были взяты из неоднократно упомянутого предыдущего исследования. Они, в свою очередь, были получены с одного из действующих

тепловых агрегатов металлургического комбината, расположенного в Белгородской области.

Обозначим численные эксперименты над моделями М1–М3 без учета алгоритмических ограничений (13)–(15) как «Эксперимент №1», а с учетом этих ограничений – как «Эксперимент №2». Результаты экспериментов представлены на рис. 3 и 4.

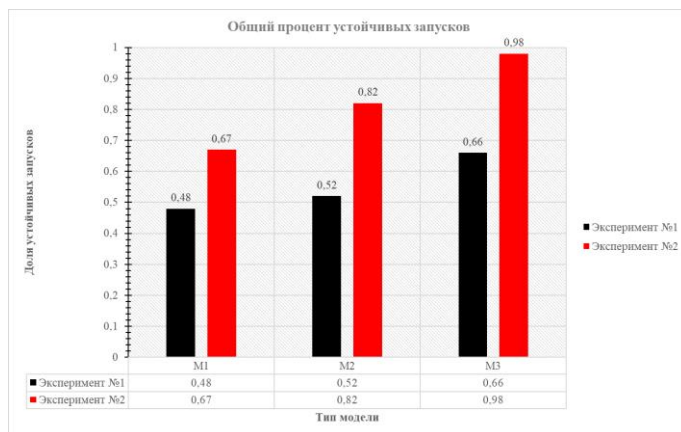


Рис. 3. Общее количество устойчивых запусков моделей

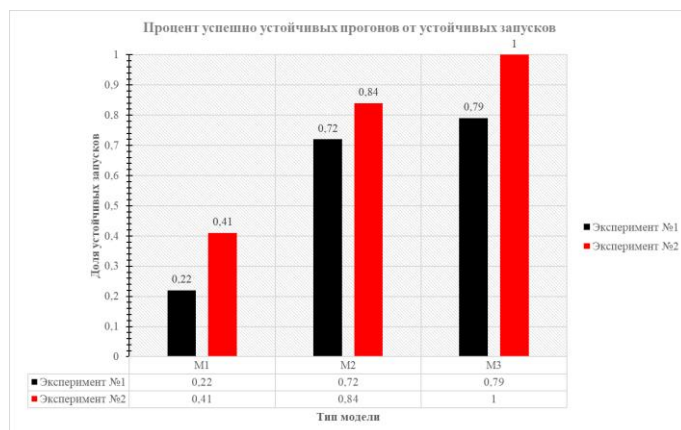


Рис. 4. Результаты успешных устойчивых прогонов моделей от их устойчивых запусков

Применение ограничений (12) и алгоритмических ограничений (13)–(15) позволили повысить общее количество устойчивых запусков модели (200 итераций) до 98% (рис. 3), а количество устойчивых полных циклов (400 итераций) от устойчивых запусков – до 100% (рис. 4).

Оставшиеся 2% неустойчивых запусков, возможно, связаны со стохастическим характером представленного ранее алгоритма в совокупности с неидеальной реализацией всего комплекса программ на языке высокого уровня.

Тем не менее полученный результат валидирует корректность сделанного в [10] предположения. В процессе коррекции параметров действительно нарушалось условие (12), что приводило к резкому ухудшению качества модели. Это же следует и из приведенного выше повторного эксперимента. Предложенное решение позволило решить эту проблему.

4. Аналитическое исследование алгоритмической сложности предложенной модели

В предыдущем исследовании [10] было приведено доказательство, что класс алгоритмической сложности предложенной модели (8)–(11) эквивалентен классу алгоритмической сложности классической модели конечных разностей. Там же было проиллюстрировано, что обе функции сложности в худшем случае относятся к классу $O(n^4)$, где $n = N = W^2 = H^2$. Здесь W – размерность ортогональной сети вдоль Ox , а H – размерность ортогональной сети вдоль Oy ; N – размерность временной сети.

В данной работе предлагается проанализировать функции сложности в лучшем возможном случае, а также проанализировать класс алгоритмической сложности классической конечно-разностной модели с учетом адаптации.

Рассмотрим класс алгоритмической сложности предложенного численного метода. Для этого рассмотрим следующую функцию, восстановленную на основе алгоритмов:

$$(16) f_1(H, W, N) = \sum_{t=0}^N \left(\sum_{j=0}^W \left[\sum_{i=1}^H 1 + \sum_{i=H-2}^0 1 \right] + \sum_{i=0}^H \left[\sum_{j=1}^W 1 + \sum_{j=W-2}^0 1 \right] \right) + \sum_{t=0}^N 4.$$

Рассмотрим симметричный случай, когда $H = W = P$ и $N \neq W^2 = H^2$, а каждый из параметров удовлетворяет требованию (17) $N, H, W \in \mathbb{N}$.

Тогда, упрощая (16), получим функцию, описывающую алгоритмический класс сложности предложенного численного метода:

$$(18) f_2(H, W, N) = (4 \cdot P^2 + 2 \cdot P) \cdot (N + 1) + 4 \cdot (N + 1).$$

Поскольку настройка методом (11) предполагает, что имеется некоторая статистика, а полный цикл настройки будет включать проход по этой статистике, то функция в конечном виде будет относиться к классу сложности $O(V \cdot (N \cdot P^2 + N))$.

Теперь рассмотрим функцию, восстановленную на основе модели классической нестационарной теплопроводности с методом «групповой адаптации»:

$$(19) f_2(H, W, N) = \sum_{\tau=0}^N \left[\left(\sum_{j=0}^W \left[\sum_{i=1}^H 1 + \sum_{i=H-2}^0 1 \right] + \sum_{i=0}^H \left[\sum_{j=1}^W 1 + \sum_{j=W-2}^0 1 \right] \right) \cdot \right. \\ \left. 3 \cdot \sum_{m=0}^k \left[\left(\sum_{j=0}^W \left[\sum_{i=1}^H 1 + \sum_{i=H-2}^0 1 \right] + \sum_{i=0}^H \left[\sum_{j=1}^W 1 + \sum_{j=W-2}^0 1 \right] \right) \right] \right].$$

Упростим (19), предполагая также равномерные сети и симметричную алгоритмическую сложность расчета вдоль каждой из них. В результате получим функцию следующего вида:

$$(20) f_2(H, W, N) = (12 \cdot k \cdot P^4 + 6 \cdot P^2) \cdot (N + 1).$$

Таким образом, алгоритмическая сложность полученного решения будет относиться к классу сложности $O(N \cdot [3 \cdot k \cdot P^4])$, как и было упомянуто ранее. Имея два класса сложности, можно провести их аналитическое сравнение.

Определим, какая из функций прирастает быстрее при стремлении отдельных её параметров к бесконечности. Для начала зафиксируем пространственные параметры, предположив, что $H = W = P = const$, $k = const$, $V = const$:

$$(21) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{V \cdot (N \cdot P^2 + N)}{N \cdot [3 \cdot k \cdot P^4]} = \frac{V \cdot P^2 + V}{3 \cdot k \cdot P^4}.$$

Как можно заметить из (21), предел отношения двух классов сложности при N стремящейся к бесконечности дает некоторое

константное число. Это означает, что функция в числителе и в знаменателе отношения прирастает с одинаковой скоростью. Это также становится очевидно, если проанализировать две функции напрямую. Сложность обеих функций по N равна $O(N)$.

Далее, сделаем предположение, что $k = const$, $V = const$, $N = const$ и также возьмем предел отношения, но уже при стремлении к бесконечности размерности пространственных сетей:

$$(22) \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{V \cdot (N \cdot P^2 + N)}{N \cdot [3 \cdot k \cdot P^4]} = 0.$$

Результат (22) говорит о том, что функция в знаменателе прирастает быстрее по P , чем в числителе. Это также является очевидным из базового анализа функций сложности ($O(P^2)$ против $O(P^4)$).

Рассмотрев отношение двух функций, как некоторую третью функцию со множеством входов $f(N, P, V, k)$, можно проанализировать её предел при стремлении к бесконечности отдельных входных параметров. Наибольший интерес при сравнении вызывает анализ скорости приращения этих двух функций в зависимости от изменения параметров V и k , и от частных подклассов сложности, связанных с этими параметрами:

$$(23) \lim_{\substack{V \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} \frac{V \cdot (N \cdot P^2 + N)}{N \cdot [3 \cdot k \cdot P^4]} = 0.$$

Как можно заметить из (23), предел отношения равен нулю. Это значит, что при последовательном приближении к бесконечности параметров V и k функция в числителе по-прежнему прирастает медленней функции в знаменателе вне зависимости от величины P . Отдельно следует проанализировать скорость возрастания функции в разрезе подклассов $O(V \cdot P^2)$ и $O(k \cdot P^4)$. Для этого необходимо взять предел отношения при V и k стремящихся к бесконечности при зафиксированном $P=1$:

$$(24) \lim_{\substack{V \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} \frac{V \cdot (N \cdot P^2 + N)}{N \cdot [3 \cdot k \cdot P^4]} = 0 \Big|_{P=1}.$$

Как можно заметить из (24) предел отношения по-прежнему равен нулю. Это также подтверждает, что алгоритмическая слож-

ность предложенного в [11] численного метода прирастает медленней, чем алгоритмическая сложность численной конечно-разностной модели с «групповой явной» адаптацией даже в рамках подкласса сложности без учета степенного влияния P .

Для того чтобы подтвердить анализ, проведенный ранее, было решено выполнить простой численный эксперимент и измерить скорость решения двух математических моделей на ЭВМ. Для сравнения бралась программная реализация упомянутых моделей, написанная на языке C# для фреймворка «*Net Core*». Тестирование велось на ЭВМ со следующими характеристиками:

1. Центральное процессорное устройство: Intel(R) Core(TM) i5-10400F.
2. Базовая тактовая частота процессора: 2,90 ГГц.
3. Объем оперативной памяти: 32 Гб.
4. Тактовая частота оперативной памяти: 2667 МГц.

Результаты тестирования приведены в таблице 1. Как можно заметить, результаты подтверждают сделанные ранее аналитические предположения. Алгоритм конечно-разностного моделирования нестационарной теплопроводности с «групповой явной» адаптацией значительно сильнее прирастает по временным затратам, чем численный метод с неявной адаптацией.

Таблица 1. Результаты тестов скорости приращения функций

	Параметры	$N = 100,$ $P = 10$	$N = 625,$ $P = 25$	$N = 10000,$ $P = 100$
$f_2(\bullet)$	$k = 1$	0,00103 с	0,25256 с	1034,5 с
	$k = 3$	0,000103 с	0,7577 с	3103 с
	$k = 5$	0,00000018 с	1,2628 с	5172 с
$f_1(\bullet)$	$V = 5000$	0,0172 с	0,6735 с	172 с
	$V = 10000$	0,0345 с	1,347 с	345 с
	$V = 20000$	0,069 с	2,69 с	690 с

Это позволяет считать предложенную математическую модель и численный метод в работе [11] эффективными относительно частных подклассов сложности $O(V \cdot P^2)$ и $O(k \cdot P^4)$.

5. Заключение

В результате проведенного исследования было предложено алгоритмическое решение проблемы устойчивости численной модели нестационарной теплопроводности с неявной адаптацией. В результате применения этого решения удалось повысить количество устойчивых начальных циклов коррекции (до 200 итераций) с 66% до 98%, а количество устойчивых полных циклов коррекции (400 и более итераций) от устойчивых начальных циклов – до 100%.

Предложенное решение (13)–(15) исчерпывает проблему, изложенную авторами ранее в работе [10], связанную с нарушением ограничений (12) в процессе коррекции параметров модели. Таким образом, в процессе работы остаются лишь 2% случаев нарушения нормального режима работы модели, которые связаны с транслятором и исполняемой средой языка высокого уровня, на котором реализуется модель.

Кроме вышеизложенного, в процессе исследования был проведен комплексный анализ алгоритмической сложности предлагаемого численного метода, изложенного в работе [11]. В результате аналитического исследования функций сложности было установлено, что классическая конечно-разностная модель с «групповой явной» адаптацией относится к классу $O(N \cdot [3 \cdot k \cdot P^4])$, а функция сложности предложенной численной модели – к классу $O(V \cdot (N \cdot P^2 + N))$. При помощи анализа скорости приращений этих функций при стремлении отдельных параметров к бесконечности было установлено, что предложенный численный метод является более эффективным, чем конечно-разностный метод с «групповой явной» адаптацией.

Литература

1. АЛБУ А.Ф., ЗУБОВ В.И. *О восстановлении коэффициента теплопроводности вещества по температурному полю* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2018. – Т. 58, № 10. – С. 1642–1657.

2. БИРЮКОВ А.Б., ГИНКУЛ С.И., ГНИТИЕВ П.А., ОЛЕШКЕВИЧ Т.Г. *Математическое моделирование процессов тепловой обработки металла в печах с учетом окалинообразования* // Сталь. – 2016. – №8. – С. 85–90.
3. БИРЮКОВ А.Б., ГНИТИЁВ П.А., ОЛЕШКЕВИЧ Т.Г. *Адаптация математической модели процессов тепловой обработки металла в печах, учитывающей окалинообразование* // Вестник Донецкого национального технического университета. – 2017. – №2. – С. 30–37.
4. ГЛУЩЕНКО А.И., ЖУКОВ П.И., ФОМИН А.В. *Адаптация сеточной модели нестационарной теплопроводности на основе метода градиентного спуска* // Материалы Всероссийской конференции «Математическая теория управления и ее приложения» (МТУИП–2022). – Санкт-Петербург: Электроприбор, 2022. – С. 59–62.
5. ГОРИНОВ О.И., КОЛИБАБА О.Б., ГАБИТОВ Р.Н. *Использование регрессионной модели для определения теплофизических свойств слоя твердых органических отходов* // Материалы международной научно-технической конференции «Состояние и перспективы развития электро- и теплотехнологии». – Иваново: Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина, 2015. – С. 216–219.
6. ГУБАРЕВА К.В., ПОПОВ А.И., ЗИНИНА С.А., ШУЛЬГА А.С., ЧУЯНОВ Д.О. *Моделирование процесса теплообмена в пластине с переменными теплофизическими свойствами* // Научное обозрение. Технические науки. – 2020. – №6. – С. 52–57.
7. ДАБАС М.Р., ЗУБКОВА Н.С., КОБЗЕВ А.А. *Адаптация математической модели теплового режима полосы в чистовой группе клетей стана горячей прокатки* // Управление большими системами: труды XVII Всероссийской школы-конференции молодых ученых. – М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2021. – С. 515–520.
8. ДИЛИГЕНСКАЯ А.Н., РАПОПОРТ Э.Я. *Метод минимаксной оптимизации в коэффициентной обратной задаче теплопроводности* // Инженерно-физический журнал. – 2016. – Т. 89, №4. – С. 1007–1012.
9. ДМИТРИЕВ О.С., ЖИВЕНКОВА А.А. *Численно-аналитическое решение нелинейной коэффициентной обратной задачи*

- теплопроводности* // Инженерно-физический журнал. – 2018. – Т. 91, №6. – С. 1426.
10. ЖУКОВ П.И., ФОМИН А.В., ГЛУЩЕНКО А.И. *Алгоритмическая устойчивость и сложность процесса неявной адаптации сеточной модели нестационарной теплопроводности к нагреваемому веществу* // Управление большими системами: сборник трудов. – 2023. – Вып. 101. – С. 39–63.
 11. ЖУКОВ П.И., ФОМИН А.В., ГЛУЩЕНКО А.И. *Неявная адаптация сеточной модели нестационарной теплопроводности к нагреваемому веществу* // Управление большими системами: сборник трудов. – 2022. – Вып. 100. – С. 78–106.
 12. ЖУКОВ П.И., ГЛУЩЕНКО А.И., ФОМИН А.В. *Сравнение эффективности «обучения» сеточной модели нестационарной теплопроводности при различных целевых функциях* // Управление большими системами: труды XVIII Всероссийской школы-конференции молодых ученых. – Челябинск: ЮУрГУ, 2022. – С. 440–448.
 13. КАНАРЕЙКИН А.И. *Распределение температуры в теле эллиптического сечения с внутренним источником тепла при граничных условиях первого рода* // Вестник Калужского университета. – 2020. – №2. – С. 74–76.
 14. КАНАРЕЙКИН А.И. *Стационарное температурное поле в прямоугольной пластине с переменной теплопроводностью по одной координате* // Вестник международной академии холода. – 2023. – №1. – С. 99–104.
 15. КАНАРЕЙКИН А.И. *Уравнение переноса тепла в криволинейном стержне* // Матрица научного познания. – 2021. – №4-1. – С. 42–45.
 16. КУРГОСОВ Д.А., ЛИВАДНЫЙ Н.Е., ЗУБАРЕВ Ю.М. *Математическая модель тепловых процессов при закалке стали* // Актуальные проблемы морской энергетики. – 2019. – С. 489–494.
 17. ЛИСИЕНКО В.Г., МАЛИКОВ Г.К., ТИТАЕВ А.А. *Сравнение зонального метода моделирования теплообмена излучением с методом конечных объемов на примере расчета нагрева непрерывнолитой заготовки в кольцевой печи* // Современные научные достижения металлургической теплотехники и их ре-

- ализация в промышленности: сборник докладов международной научно-практической конференции. – Екатеринбург: УрФУ, 2018. – С. 117–122.
18. ЛОБАСОВА М.С., ЛОБАСОВ А.С. *Тепломассообмен. Стационарная теплопроводность*. – Красноярск: СФУ, 2015. – 60 с.
 19. МАКСИМОВ Д.И. *Метод конечных разностей для уравнения теплопроводности в двумерной неоднородной области* // Continuum. Математика. Информатика. Образование. – 2016. – №1. – С. 36–41.
 20. ОЖЕРЕЛКОВА Л.М., САВИН Е.С. *Температурная зависимость нестационарной теплопроводности твердых тел* // Russian Technological Journal. – 2019. – Т. 7, №2. – С. 49–60.
 21. ОЗЕРКИН Д.В. *Моделирование анизотропности температурного поля объемных интегральных микросхем* // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2020. – Т. 63, №. 7. – С. 657–665.
 22. ОЗЕРКИН Д.В. *Расчет температурного поля многослойных несущих конструкций численными методами* // Системы анализа и обработки данных. – 2022. – №2(86). – С. 105–120.
 23. ПАРСУНКИН Б.Н., АНДРЕЕВ С.М., МУХИНА Е.Ю. *Экстремально-оптимизирующее автоматизированное управление нагревом непрерывнолитых заготовок в печах проходного типа* // Вестник Череповецкого государственного университета. – 2021. – №5(104). – С. 22–34.
 24. САМАРСКИЙ А.А. *Теория разностных схем*. – М.: ФМЛ, 1989. – 616 с.
 25. СОРОКОВАЯ Н.Н., КОРИНЧУК Д.Н. *Математическое моделирование динамики тепломассопереноса, фазовых превращений и термодеструкции при высокотемпературной сушке биомассы* // Материалы международной научно-практической конференции «Современные энергосберегающие тепловые технологии (сушка и тепловые процессы) СЭТТ-2020». – М.: Мегapolis, 2020. – С. 137–144.
 26. ТОЛСТЫХ В.К., ПШЕНИЧНЫЙ К.А. *Математическое и численное моделирование нестационарных течений с фазовыми переходами в противоточных теплообменных аппара-*

- тах* // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2023. – Т. 16, №2. – С. 59–67.
27. ТОРОПОВ Е.В. *Адаптация степени черноты продуктов сгорания топлив к интервалу температур 1000... 2000 К* // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Энергетика. – 2018. – Т. 18, №3. – С. 22–29.
28. ТОРОПОВ Е.В., ЛЫМБИНА Л.Е. *Адаптация математической модели обобщенного теплообмена в топках* // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Энергетика. – 2020. – Т. 20, №4. – С. 12–22.
29. ФЕДЯЕВСКИЙ М.Р., АЛЕКСЕЕВ П., ЛЕУХИН Ю.Л. *Численное моделирование аэродинамики и конвективного теплообмена струйного модульного рекуператора* // Материалы II Международной научно-практической конференции «Арктические исследования: от экстенсивного освоения к комплексному развитию». – Архангельск: АЗ+, 2020. – С. 601–606.
30. ЧЕРНУХИН Р.В., ДОЛГУШИН А.А., КАСИМОВ Н.Г., ИВАНЦИВСКИЙ В.В., ЛОБАНОВ Д.В., ВАСИЛЬЕВ С.А., МАРТЮШЕВ Н.В. *Обоснование расходных характеристик рекуператора для тепловой подготовки агрегатов машин и оборудования* // Обработка металлов: технология, оборудование, инструменты. – 2020. – Т. 22, №4. – С. 82–93.
31. KAMOLOV J., SAIDOV S. *Development of a mathematical model of a nonstationary heating and cooling process of a thin plate with a cermet coating* // Science and innovation. – 2022. – Vol. 1, No. A6. – P. 626–635.
32. TIAN X., WANG L. *Heat conduction in cylinders: Entropy generation and mathematical inequalities* // Int. Journal of Heat and Mass Transfer. – 2018. – Vol. 121. – P. 1137–1145.
33. ZANOLI S.M., PEPE C., ASTOLFI G., MOSCOLONI E. *Analysis and modeling of steel industry reheating furnace billets temperature* // 23rd Int. Carpathian Control Conference (ICCC). – IEEE, 2022. – P. 337–342.
34. ZANOLI S.M., PEPE C., MOSCOLONI E., ASTOLFI G. *Data Analysis and Modelling of Billets Features in Steel Industry* // Sensors. – 2022. – Vol. 22, No. 19. – P. 7333.

STABILITY OF NUMERICAL METHOD OF IMPLICIT ADAPTATION OF TRANSIENT HEAT CONDUCTION MODEL TO RIGID BODY THERMOPHYSICAL PARAMETERS

Petr Zhukov, STI NUST “MISIS”, Stary Oskol, postgraduate student (Zhukov.petr86@yandex.ru).

Anton Glushchenko, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Sciences, docent (aiglush@ipu.ru).

Abstract: This study is devoted to the analysis of algorithmic stability and complexity of the model of transient heat conductivity with implicit adaptation to the thermophysical parameters of the heated solid body. The implicit adaptation method is based on the substitution of such parameters as heat capacity, thermal conductivity and density in the transient heat conduction equation by two dimensionless adjustable coefficients, uniformly discretized over the entire model lifetime, with their further adjustment using a modified stochastic gradient descent method. In order to ensure the stability of calculations of such a model using a computer, some conditions have been defined in previous studies, which allowed us to obtain stability equal to 64%. It was assumed that the remaining 36% was a consequence of violation of these conditions in the process of adjustment. In this paper we propose algorithmic constraints that allow us to solve this problem. The repetition of experiments shows that the application of the proposed approach allows one to increase the stability from 64% to 98%. Also, an analytical comparison of algorithmic complexity classes for models with implicit adaptation and with "group-explicit" adaptation is made. As a result, it is found that the proposed numerical method has a lower complexity in comparison with the finite-difference method with "group explicit" adaptation.

Keywords: mesh model, transient heat conductivity, adaptation, gradient descent method, algorithmic complexity, computational stability.

УДК 519.63

ББК 22.193

DOI: 10.25728/ubs.2024.107.4

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии П.С. Щербаковым.*

Поступила в редакцию 31.10.2023.

Опубликована 31.01.2024.