

## **ДИНАМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И СГЛАЖИВАНИЕ ЗАШУМЛЕННЫХ СИГНАЛОВ, ЗАДАЮЩИХ ТРАЕКТОРИЮ БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА**

**Кокунько Ю. Г.<sup>1</sup>**

*(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

*На примере беспилотного летательного аппарата самолетного типа рассматривается проблема создания единого комплексного подхода к фильтрации и сглаживанию опорных траекторий, представляющих собой сигнальные задающие воздействия, и к восстановлению их производных. Для решения данной проблемы разработаны методы построения и алгоритмы настройки динамического генератора допустимых траекторий. Система дифференциальных уравнений, которой описывается генератор заданий, соответствует канонической модели объекта управления «вход – выход». Выходные переменные генератора отслеживают опорный зашумленный и негладкий векторный сигнал задающих воздействий. Таким образом, генератор представляет собой следящий дифференциатор. Для синтеза его локальных связей и корректирующих воздействий применяются гладкие и ограниченные сигмоидальные функции с ограниченными производными. Такой подход позволяет учитывать ограничения на скорость и ускорение конкретного летательного аппарата, поэтому выходные переменные следящего дифференциатора порождают сглаженную естественным образом пространственную кривую и ее производные, которые используются в системе управления объектом в качестве реализуемой эталонной траектории. Результаты численного моделирования продемонстрировали эффективность разработанного подхода к динамическому дифференцированию и сглаживанию векторных сигналов как в детерминированном случае, так и в присутствии шума. Проведен сравнительный анализ динамических генераторов с различными вариантами установки дополнительных фильтров нижних частот. Применение предложенного подхода возможно для обработки задающих воздействий различных объектов управления, динамическая модель которых приводима к каноническому виду.*

Ключевые слова: сглаживание траектории, следящий дифференциатор, проектные ограничения, фильтрация и дифференцирование сигнала, сигма-функция.

---

<sup>1</sup> Юлия Георгиевна Кокунько, н.с. (juliakokunko@gmail.com).

## **1. Введение**

Рассматривается проблема, связанная с оцениванием производных задающих воздействий, поступающих в систему управления беспилотного летательного аппарата (БПЛА) из автономного источника. Аналитическое описание этих сигналов отсутствует, известны только их текущие значения. Производные задающих воздействий необходимы для синтеза системы слежения. Для восстановления производных сигналов используют численное дифференцирование с вычислением конечных разностей [19] или более сложные вычислительные алгоритмы [3]. Однако эти методы неэффективны при обработке зашумленных сигналов, а с ростом порядка восстанавливаемых производных погрешности накапливаются. Использование многомерных фильтров нижних частот порождает запаздывание [10], что может привести к потере устойчивости замкнутой системы. Таким образом, более предпочтительно дифференцирование сигналов с использованием динамических моделей, например, динамического дифференциатора [2]. Однако при зашумленных сигналах препятствием для настройки дифференциатора для целей фильтрации является неопределенный вход, для подавления которого требуется применять специальные методы.

Стандартным решением является использование линейного наблюдателя с большими коэффициентами усиления [5]. Для уменьшения шумовой составляющей в контур наблюдения вводят фильтры нижних частот [8]. Основной недостаток подобного наблюдателя связан с выбросами оценивающих сигналов из-за неограниченности линейных корректирующих воздействий. В [17] разработан наблюдатель на скользящих режимах. С его помощью оценки производных могут быть получены за конечное время без большого перерегулирования. Известны гибридные наблюдатели [13], в которых корректирующие воздействия содержат и линейную, и разрывную функции. Однако использование разрывных управлений приводит к проблеме «чаттеринга». Для его устранения, в частности, используют скользящие режимы высших порядков [18]. Альтернативный метод заклю-

чается в аппроксимации функции знака линейной функцией с насыщением [13–15]. Такие наблюдатели-дифференциаторы сочетают в себе преимущества линейных наблюдателей с большими коэффициентами и наблюдателей на скользящих режимах, но свободны от их недостатков.

Задающие воздействия (как обрабатываемые сигналы) имеют свои особенности. Путь следования мобильного робота на плоскости или в пространстве должен быть достаточно гладким и иметь ограниченную непрерывную кривизну, так как робот не может мгновенно изменить направление движения. Проблема планирования допустимой траектории – отдельная задача. Обычно она решается в режиме офлайн с привлечением сплайновой интерполяции или сложных геометрических расчетов [9, 16, 20–21].

В этой работе рассматривается принципиальная возможность решения одновременно задач фильтрации, дифференцирования и сглаживания поступающих извне векторных сигналов, которые определяют в первом приближении траекторию БПЛА. Эти сигналы могут быть негладкими и содержать паразитные помехи. Для комплексного решения указанных проблем используется динамический генератор заданий в виде следящего дифференциатора [11]. Следящий дифференциатор представляет собой каноническую модель «вход – выход», на вход которой подаются корректирующие воздействия. Это векторная стабилизирующая функция от ошибки слежения (невязки между внешним сигналом и выходом следящего дифференциатора). Научная новизна предложенного подхода состоит в процедуре синтеза *S*-образных корректирующих воздействий [7], в которой учитываются ограничения на скорость и ускорение БПЛА. Показано, что в отличие от обычных дифференциаторов следящий дифференциатор обладает лучшими фильтрующими свойствами. Но при этом восстанавливает производные отслеживаемого сигнала любого требуемого порядка. Переменные следящего дифференциатора используются в качестве реализуемого задания в системе управления БПЛА.

## 2. Постановка задачи

Пусть в рамках решения задачи слежения, а именно отслеживания выходными переменными объекта управления  $y_1(t)$  задающих воздействий  $\chi_1(t)$ , сформировано управление (программное или в форме обратной связи). Для его реализации требуется первая  $\dot{\chi}_1(t)$  и вторая  $\ddot{\chi}_1(t)$  производные задающего векторного воздействия. В данной работе учитываются следующие особенности задающих воздействий  $\chi_1(t)$ .

1. Сигнал  $\chi_1(t) = (\chi_{11}(t), \chi_{12}(t), \chi_{13}(t))^T$  поступает в реальном времени из автономного источника, его аналитический вид и его производные заранее не известны. Отсюда возникает проблема восстановления в реальном времени первой и второй производных этого сигнала.

2. На опорный сигнал  $\chi_1(t)$  могут накладываться шумовые помехи  $\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t), \eta_3(t))^T$ , т.е. в систему управления поступает зашумленный сигнал  $\bar{\chi}_1(t) = \chi_1(t) + \eta(t)$ . Это порождает проблему, связанную с необходимостью фильтрации задающих воздействий.

3. Задающие воздействия  $\chi_{1j}(t)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , являются непрерывными, но не гладкими функциями времени и содержат особые точки, где производные  $\dot{\chi}_{1j}(t)$  имеют конечные разрывы. Отсюда возникает необходимость сглаживать опорный сигнал, чтобы не допускать выбросов значений производных и управляющих воздействий. При этом надо обеспечить выполнение ограничений на скорость и ускорение конкретного объекта управления и получить путь следования с непрерывной ограниченной кривизной.

Учитывая, что одна из функций вводимого динамического генератора состоит в восстановлении производных, для его построения используется каноническую модель «вход – выход» пространственного движения центра масс БПЛА в траекторной системе координат [12]:

$$(1) \quad \dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = ag + B(\theta, \Psi)gu,$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \Psi & -\sin \theta \cos \Psi & \sin \Psi \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta \sin \Psi & \sin \theta \sin \Psi & \cos \Psi \end{pmatrix}, \det B \equiv 1, B^{-1} = B^T,$$

где  $a = (0; -1; 0)^T$ ;  $y_{21} := V \cos \theta \cos \Psi$ ,  $y_{22} := V \sin \theta$ ,  $y_{23} := -V \cos \theta \sin \Psi$ ,  $y_1 = (y_{11} := L, y_{12} := H, y_{13} := Z)$ ;  $L$  – продольная дальность полета;  $H$  – высота полета;  $Z$  – боковое смещение;  $V$  – путевая скорость;  $\theta$  – угол наклона траектории полета к горизонту;  $\Psi$  – угол пути;  $g = 9,8$  [м/с<sup>2</sup>] – ускорение свободного падения. В качестве управления  $u = (u_1, u_2, u_3)^T$  приняты продольная  $n_x$  и поперечная  $n_y$  перегрузки и угол крена вектора перегрузки  $|\gamma| < \pi$  в виде  $u_1 = n_x$ ,  $u_2 = n_y \cos \gamma$ ,  $u_3 = n_y \sin \gamma$ .

Представив систему (1) в координатном базисе ошибок слежения  $\xi_1 = y_1 - \chi_1$  и их производных  $\dot{\xi}_1 = \xi_2 = \dot{y}_1 - \dot{\chi}_1$

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2,$$

$$\dot{\xi}_2 = ag - \ddot{\chi}_1 + B(\theta, \Psi)gu,$$

сформируем закон управления в форме обратной связи

$$u = B^T(\theta, \Psi)(-C_1 \xi_1 - C_2 \xi_2 - ag + \ddot{\chi}_1) / g =$$

$$(2) = -B^T(\theta, \Psi)(C_1(y_1 - \chi_1) + C_2(y_2 - \dot{\chi}_1) + ag - \ddot{\chi}_1) / g,$$

$$C_i = \text{diag}\{c_{ij}\}, c_{ij} = \text{const} > 0, i = 1, 2, j = 1, 2, 3,$$

который линеаризует замкнутую виртуальную систему в терминах ошибок слежения  $\dot{\xi}_1 = \xi_2, \dot{\xi}_2 = -C_1 \xi_1 - C_2 \xi_2$  и обеспечивает ее матрице желаемые собственные значения  $\lambda_{1j}, \lambda_{2j} \text{Re}(\lambda_{ij}) < 0$ :  $c_{1j} = \lambda_{1j} \lambda_{2j}$ ,  $c_{2j} = -\lambda_{1j} - \lambda_{2j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , таким образом, достигая цели управления для системы (1).

Чтобы учесть свойства объекта управления  $V > 0$ ,  $|\theta(t)| < \pi/2$ ,  $t \geq 0$ , необходимые для порождения реализуемых задающих воздействий, каноническая система (1) строится с учетом ограничений на скорости и ускорение конкретного БПЛА:

$$(3) \quad \|y_2\| \leq \bar{V}, \|u\| \leq U, \|\dot{u}\| \leq \bar{U}, \bar{V}^2 < U, U^2 < \bar{U},$$

где  $\bar{V}, U, \bar{U}$  – проектные ограничения по норме на скорость, перегрузку и скорость изменения перегрузки для конкретного

БПЛА. Верхняя оценка нормы вектора ускорения вычисляется с учетом значения  $U$ :

$$(4) \quad \|\dot{y}_2\| = g \|a + B(\theta, \Psi)u\| \leq 3gU.$$

### 3. Основные результаты

Базовая математическая модель динамического генератора для обработки задающего воздействия строится как копия системы (1) в виде

$$(5) \quad \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = ag + Bgw,$$

где  $w = (w_1, w_2, w_3)^T$  – вектор корректирующих воздействий, формирующиеся для обеспечения отслеживания выходными переменными генератора  $x_1(t) \in R^3$  сигнала  $\chi_1(t) \in R^3$ ,  $x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13})^T$  – оценка вектора задающих воздействий,  $x_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23})^T$  и  $\dot{x}_2 = (\dot{x}_{21}, \dot{x}_{22}, \dot{x}_{23})^T$  – восстанавливаемые первая и вторая производные задания соответственно. Предполагается, что на участках непрерывности норма вектора скорости задания меньше, чем ограничение на норму вектора скорости БПЛА  $\|\dot{\chi}_1(t)\| \leq X_2 < \bar{V}$ ,  $t \geq 0$ . Ставится задача обеспечить в замкнутой системе (5) соответствующие ограничения (3), (4), а именно:

$$(6) \quad \|x_2(t)\| \leq \bar{V}, \|w(t)\| \leq U \Rightarrow \|\dot{x}_2(t)\| \leq 3gU, \|\dot{w}(t)\| \leq \bar{U}, t \geq 0,$$

которые определяют достижимую величину ошибки слежения  $e_1(t) = x(t) - \chi_1(t)$ . В результате выход генератора  $x_1(t)$  будет порождать сглаженный естественным образом аналог сигнала  $\chi_1(t)$ , который подается как задающее воздействие в систему управления БПЛА.

Для выполнения заданных ограничений (6) предлагается при синтезе корректирующих воздействий  $w$  использовать блочный принцип управления и нелинейные ограниченные обратные связи в виде  $S$ -образной сигма-функции (для синтеза фиктивного и истинного управления) [1, 4]. Она определена на всей числовой оси, гладкая, нечетная и ограниченная.

С целью настройки в сигма-функцию вводятся два масштабирующих коэффициента –  $k, m = \text{const} > 0$ :

$$m\sigma(kx) = m \frac{1 - \exp(-kx)}{1 + \exp(-kx)}, \quad 0,8 \leq m |\sigma(kx)| < m,$$

$$|x| > \Delta \geq 2,2/k, \quad |x| \leq \Delta$$

с помощью которых сигма-функцию можно растягивать и сжимать вдоль вертикальной и горизонтальной осей соответственно.

Для решения задачи слежения система (5) записывается относительно ошибки слежения:

$$\dot{e}_1 = -m_1\sigma(k_1e_1) + e_2 - \dot{\chi}_1, \quad \dot{e}_2 = ag + 0,5m_1k_1\Lambda_1(x_2 - \dot{\chi}_1) + Bgw,$$

где

$$\Lambda_1 = \text{diag}(\Lambda_{1j}), \quad \Lambda_{1j} = 1 - \sigma^2(k_1e_{1j}), \quad 0 < \Lambda_{1j} \leq 1, \quad j = 1, 2, 3.$$

При этом формируются сигмоидальные локальные связи

$$x_2^* = m_1 - \sigma(k_1e_1),$$

$$\sigma(k_1e_1) = (\sigma(k_{11}e_{11}), \sigma(k_{12}e_{12}), \sigma(k_{13}e_{13}))^T, \quad m_1, k_1 = \text{const} > 0,$$

где переменная состояния  $x_2$  трактуется как фиктивное управление. Задача слежения сводится к задаче стабилизации ошибки слежения и невязки между реальным и выбранным фиктивным управлением  $e_2 = x_2 - x_2^* = x_2 + m_1\sigma(k_1e_1)$ .

Для ее решения при синтезе корректирующих воздействий вводится стабилизирующая сигмоидальная обратная связь с компенсацией известных членов:

$$(7) \quad w = -B^T(m_2\sigma(k_2e_2) + ag + 0,5m_1k_1\Lambda_1x_2) / g, \\ m_2, k_2 = \text{const} > 0, \quad \sigma(k_2e_2) = (\sigma(k_{2e_{21}}), \sigma(k_{2e_{22}}), \sigma(k_{2e_{23}}))^T.$$

Формулируя достаточные условия стабилизации полученной системы  $\|e_2(t)\| \leq 2,2/k_2 \Rightarrow \|e_1(t)\| \leq 2,2/k_1$ , при которых задача слежения будет решена с некоторой точностью, остается обеспечить выполнение заданных ограничений (6). С этой целью составим неравенств для выбора параметров корректирующих воздействий, при которых будут выполнены ограничения на переменные  $x_2(t)$  и  $\dot{x}_2(t)$ , являющиеся аналогом вектора скорости и ускорения БПЛА:

$$\|x_2(t)\| \leq 2,2 / k_2 + 0,8m_1, \quad t \geq 0.$$

$$\|\dot{x}_2(t)\| \leq 0,8m_2 + 0,5m_1k_1(2,2 / k_2 + 0,8m_1), \quad t \geq 0.$$

С учетом сформулированных требований составим систему двойных неравенств для выбора параметров сигмоидальной связи:

$$(8) \quad \begin{cases} 2,2/k_2 + X_2 < 0,8m_1 \leq \bar{V} - 2,2/k_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow k_2 > 4,4/(\bar{V} - X_2), \\ 0,5m_1k_1X_2 < 0,8m_2 \leq 3gU - 0,5m_1k_1\bar{V} \Rightarrow \\ \Rightarrow m_1k_1 < 6gU/(\bar{V} + X_2). \end{cases}$$

Рассматривается случай, когда на сигнал  $\chi_1(t)$  накладывается неизвестный шум  $\eta(t)$  и в систему управления поступает зашумленный сигнал  $\bar{\chi}_1(t) = \chi_1(t) + \eta(t)$ . Полагается, что  $\eta(t)$  – нормальная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и ограниченной дисперсией. Тогда замкнутая модель генератора (5), (7) примет вид:

$$(9) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = -m_2\sigma(k_2(x_2 + m_1\sigma(k_1(x_1 - \bar{\chi}_1)))) - \\ &- 0,5m_1k_1 \text{diag}\{1 - \sigma^2(k_1(x_{1j} - \bar{\chi}_{1j}))\}x_2. \end{aligned}$$

В генераторе (9) реализуется задача слежения, в силу метода он является блочным интегратором второго порядка, где зашумленный сигнал действует только по входу в виде аргументов сигмоидальных функций. В такой системе шум на входе слабо влияет на выход вследствие естественной фильтрации интегрирующими звеньями. Следует ожидать, что в сигналах  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  системы (9), которые восстанавливают задающий сигнал и его первую производную, паразитные составляющие будут достаточно малы без установки дополнительных фильтров.

Первая гипотеза заключается в том, что в системе объекта управления (1), замкнутой обратной связью, без дополнительных фильтров обеспечивается инвариантность выхода  $y_1(t)$  по отношению к шуму в задающем воздействии.

На входе системы (9) паразитные шумы присутствуют в виде аргументов сигмоидальных функций с большим коэффициентом  $k_1(x_1 - \bar{\chi}_1)$ . Поэтому вторая гипотеза заключается в том, что для лучшей фильтрации следует снизить значение большого коэффициента  $k_1$ , при этом ошибки слежения  $e_1(t) = x_1(t) - \chi_1(t)$ , следовательно,  $\xi_1 = y_1 - x_1$ , увеличатся по модулю в установив-



шемся режиме. Это аналог известной проблемы фильтра Калмана, для разрешения которой устанавливают компромисс между быстродействием и фильтрующими свойствами.

#### 4. Численное моделирование

Для численного моделирования разработанных алгоритмов (которые проводились в среде MATLAB-Simulink с методом интегрирования Эйлера с фиксированным шагом 0,001 с) рассматривался микро-БПЛА. Такие беспилотные летательные аппараты выполняют разведывательные функции и предоставляют информацию о текущей обстановке. Для этой установки был построен динамический генератор (9) с начальными значениями  $x_1(0) = \chi_1(0) = (0, 100, 0)^T$ ,  $x_2(0) = (0,01, 0,01, 0,01)^T$  и с параметрами, принятыми на основе неравенств (8) с учетом ограничений данного БПЛА по скорости и перегрузке в виде:

$$(10) \quad m_1 = 4, k_1 = 4, m_2 = 22, k_2 = 10.$$

Поступающий на вход генератора опорный сигнал определяет желаемую траекторию движения БПЛА в первом приближении. Он задается в виде непрерывной, но негладкой пространственной ломаной линии:

$$(11) \quad \begin{aligned} & \chi_{11} = 0, \chi_{12} = 2t + 100, \chi_{13} = 2t, \quad t \in [0; 5); \\ & \chi_{11} = 2t - 10, \chi_{12} = 115 - t, \chi_{13} = 10, \quad t \in [5; 10); \\ & \chi_{11} = 10, \chi_{12} = 125 - 2t, \chi_{13} = 30 - 2t, \quad t \in [10; 15); \\ & \chi_{11} = 40 - 2t, \chi_{12} = t + 80, \chi_{13} = 0, \quad t \in [15; 20); \\ & \chi_{11} = 0, \chi_{12} = 2t + 60, \chi_{13} = 2t - 40, \quad t \geq 20, \chi_{1j} [\text{м}], t [\text{с}]. \end{aligned}$$

В данном подразделе представляются результаты моделирования замкнутой системы (9) в следующих конфигурациях:

1. Эксперимент 1: без дополнительных фильтров.
2. Эксперимент 2: с дополнительными низкочастотными фильтрами на задающий сигнал  $\bar{\chi}_1(t)$  перед его подачей в генератор (9).
3. Эксперимент 3: с дополнительными низкочастотными фильтрами на вторую производную генератора  $\dot{x}_2(t)$  перед ее подачей на объект управления.

4. Эксперимент 4: с дополнительными низкочастотными фильтрами и на задающий сигнал  $\bar{\chi}_1(t)$ , и на вторую производную генератора  $\dot{x}_2(t)$ .

На рис. 1–2 представлены графики эксперимента 1а: результаты моделирования системы (9) без дополнительных фильтров.

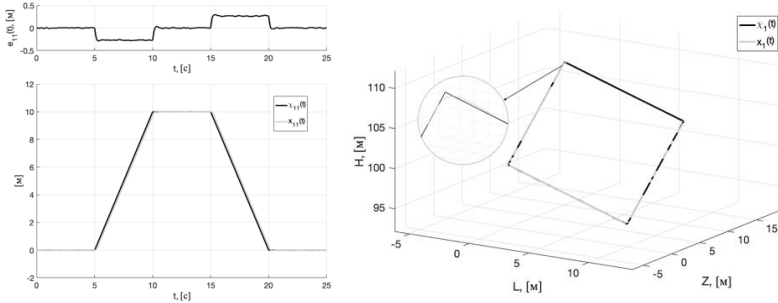


Рис. 1. Эксперимент 1а. Слева – графики опорного сигнала  $\chi_{11}(t)$  (11), его обработки  $x_{11}(t)$  и ошибки слежения  $e_{11}(t)$ . Справа – пространственные графики опорной траектории и точки в фазовом пространстве динамического генератора (9)

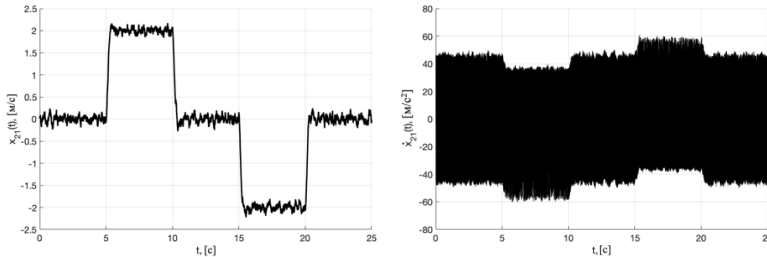


Рис. 2. Эксперимент 1а. Графики  $x_{21}(t)$  и  $\dot{x}_{21}(t)$  генератора (9)

На рис. 3–4 представлены графики эксперимента 1б: результаты моделирования системы (9) без дополнительных фильтров с параметрами генератора (12)  $m_1 = 4, k_1 = 1,5, m_2 = 8, k_2 = 10,$

где большой коэффициент  $k_1$  в 2,6 раз меньше, чем в эксперименте 1а.

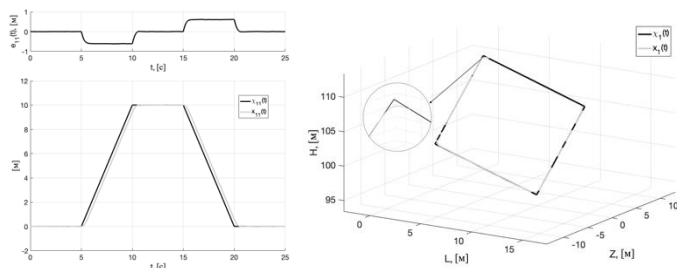


Рис. 3. Эксперимент 1б. Слева – графики опорного сигнала  $\chi_{11}(t)$  (11), его обработки  $x_{11}(t)$  и ошибки слежения  $e_{11}(t)$ . Справа – пространственные графики опорной траектории и точки в фазовом пространстве динамического генератора (9)

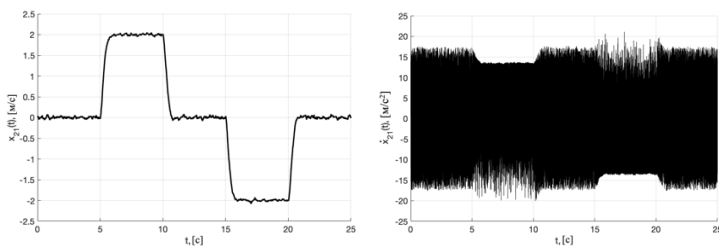


Рис. 4. Эксперимент 1б. Графики  $x_{21}(t)$  и  $\dot{x}_{21}(t)$  генератора (9)

Первая и вторая гипотезы подтверждаются. В сигналах  $x_{21}(t) \approx \dot{x}_{21}(t)$  (рис. 2, 4) и особенно в  $x_1(t) \approx \chi_1(t)$  (рис. 1, 3) паразитная составляющая достаточно мала. Эффекты сглаживания углов и ограниченности всех переменных сохраняются. За счет уменьшения большого коэффициента  $k_1$  в 2,6 раз в эксперименте 1б (рис. 3–4) по сравнению с экспериментом 1а (рис. 1–2) зашумленность сигналов меньше, однако ошибки слежения увеличились (рис. 1, 3). При этом в обоих случаях сигналы  $\dot{x}_{21}(t)$  (рис. 2, 4), на которые непосредственно действуют помехи, сильно зашумлены. В следующих экспериментах, направленных

на улучшение фильтрации векторного сигнала  $\dot{x}_2(t)$  с помощью дополнительных низкочастотных фильтров, будет использоваться динамический генератор с параметрами (12).

В эксперименте 2 вводится дополнительный блочный фильтр на опорный сигнал  $\bar{\chi}_1(t)$  перед подачей в генератор (9):

$$(13) \mu_1 \dot{\tau}_1 = -\tau_1 + \bar{\chi}_1 = -\tau_1 + \chi_1 + \eta(t), \tau_1 = (\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13})^T, \tau_1(0) = \bar{0},$$

где  $\mu_1 = \text{const} > 0$  – постоянная времени фильтра. Ее выбирают так, чтобы сохранить полезный сигнал  $\chi_1(t)$  и при этом подавить паразитные высокочастотные составляющие  $\eta(t)$ .

Обычно при настройке фильтра используют следующие соотношения [6]:

$$\mu_1 = 1/\omega_c, \omega_c > \omega,$$

где  $\omega_c$  – желаемая частота среза, при которой мощность сигнала после фильтрации уменьшается в два раза, а его амплитуда – в  $\sqrt{2}$  раз;  $\omega$  – предполагаемая частота сигнала, подлежащего фильтрации. Чем ближе принятое значение  $\omega_c$  к  $\omega$ , тем больше искажается полезный сигнал в окрестности  $\omega$ , но при этом сильнее подавляются паразитные составляющие. Наоборот, с ростом  $\omega_c$  полезный сигнал искажается меньше, но при этом ухудшается фильтрация. На практике ищут компромисс, исходя из априорных знаний о паразитной составляющей  $\eta(t)$ . При моделировании в нижеследующих экспериментах было принято  $\mu_1 = 10$ .

На рис. 5–6 представлены графики эксперимента 2: результаты моделирования с предварительным фильтром (13) генератора (9) с параметрами (12).

Как видно из рис. 6, паразитная составляющая во входных сигналах  $\dot{x}_{21}(t)$  заметно уменьшилась по сравнению с экспериментом 1, а выходные сигналы и ошибки слежения (рис. 5) значительно не изменились. Эффекты сглаживания углов, ограниченности всех переменных и управлений сохраняются.

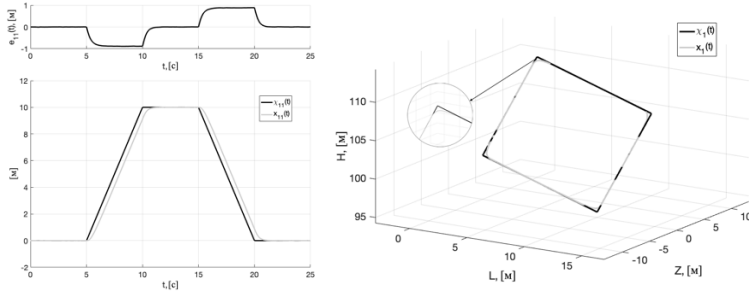


Рис. 5. Эксперимент 2. Слева – графики опорного сигнала  $\chi_{11}(t)$  (11), его обработки  $x_{11}(t)$  и ошибки слежения  $e_{11}(t)$ . Справа – пространственные графики опорной траектории и точки в фазовом пространстве динамического генератора (9)

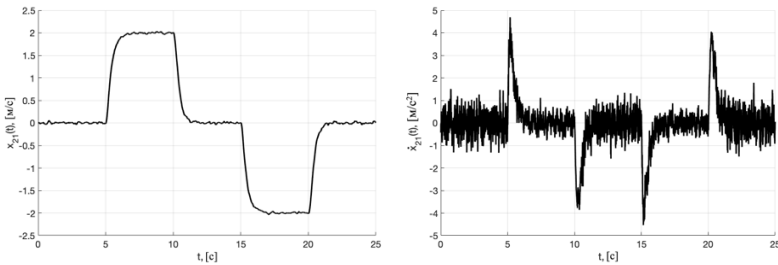


Рис. 6. Эксперимент 2. Графики  $x_{21}(t)$  и  $\dot{x}_{21}(t)$  генератора (9)

В эксперименте 3 в генератор (9) по-прежнему поступает зашумленный сигнал  $\bar{\chi}_1(t)$ , а дополнительный блочный фильтр вводится только на вторую производную генератора  $\dot{x}_2(t)$  перед ее подачей в закон управления (2):

$$\mu_2 \dot{\tau}_2 = -\tau_2 + \dot{x}_2 = -\tau_2 - m_2 \sigma(k_2(x_2 + m_1 \sigma(k_1(x_1 - \bar{\chi}_1)))) -$$

$$(14) \quad -0,5 m_1 k_1 \text{diag}\{1 - \sigma^2(k_1(x_{1j} - \bar{\chi}_{1j}))\} x_2,$$

$$\tau_2 = (\tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{23})^T, \tau_2(0) = \vec{0},$$

где  $\mu_2 = \text{const} > 0$  – постоянная времени фильтра. В фильтре (14) паразитные сигналы находятся в аргументах сигмоидальных функций, поэтому область изменения подлежащего фильтрации

сигнала заведомо ограничена. При моделировании в нижеследующих экспериментах было принято  $\mu_2 = 20$ .

На рис. 7–8 представлены графики эксперимента 3: результаты моделирования с предварительным фильтром (14) генератора (9) с параметрами (12).

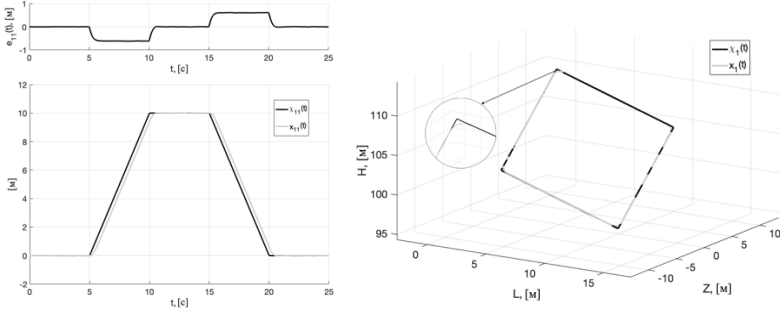


Рис. 7. Эксперимент 3. Слева – графики опорного сигнала  $\chi_{11}(t)$  (11), его обработки  $x_{11}(t)$  и ошибки слежения  $e_{11}(t)$ . Справа – пространственные графики опорной траектории и точки в фазовом пространстве динамического генератора (9)

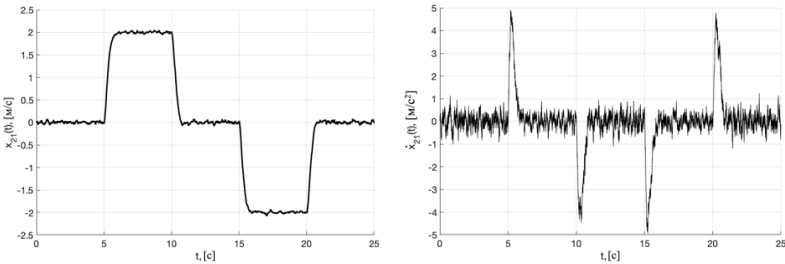


Рис. 8. Эксперимент 3. Графики  $x_{21}(t)$  и  $\dot{x}_{21}(t)$  генератора (9)

Как было отмечено, переменные генератора поступают в систему управления БПЛА в качестве задающих воздействий, их первой и второй производных. В законе управления (2) приняты следующие параметры обратной связи:

$$C_1 = \text{diag}\{14, 15,5, 14,5\}, C_2 = \text{diag}\{167, 166, 165\}.$$

На рис. 9 показаны графики управляющих воздействий  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $u_3(t)$  (2) для экспериментов 2 и 3 для корректного сравнения полученных в них результатов. Они ограничены, их величины соответствуют допустимым перегрузкам.

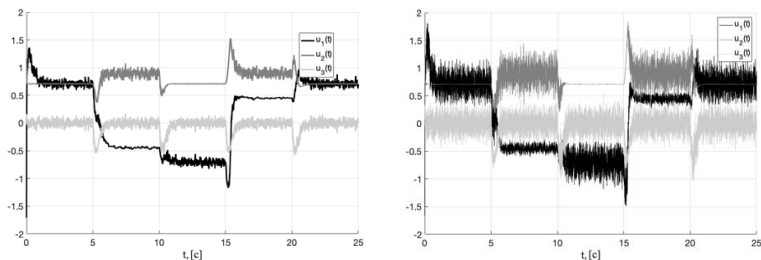


Рис. 9. Графики  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $u_3(t)$  (2) для экспериментов 2 и 3

Эффекты фильтрации, сглаживания и ограниченности сигналов сохраняются, как и в эксперименте 2. Однако видно, что по сравнению с экспериментом 2 с фильтром на сигнал  $\bar{\chi}_1(t)$  в эксперименте 3 ошибка слежения  $e_{11}(t) = x_{11}(t) - \chi_{11}(t)$  оказалась меньше, но при этом качество фильтрации управления  $u(t)$  ухудшилось.

И, наконец, на рис. 10–11 представлены графики эксперимента 4: результаты моделирования с двумя фильтрами (13), (14), генератора (9) с параметрами (12).

В таблице 1 приведены показатели качества замкнутых систем и обработки сигналов в экспериментах 1б, 2, 3 и 4. Рассчитывались выборочное среднее значение (Mean), исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение (Std) и максимальное значение (Max) модуля: ошибки слежения переменной генератора за опорным сигналом  $e_{11}(t) = x_{11}(t) - \chi_{11}(t)$ , ошибки слежения выходной переменной объекта за переменной генератора  $\zeta_{11}(t) = y_{11}(t) - x_{11}(t)$ , управления  $u_1(t)$  (для остальных сигналов векторов  $e_1(t)$ ,  $\zeta_1(t)$ ,  $u(t)$  показатели аналогичные). Для расчета использовались значения выборок с временных интервалов, указанных в таблице 1: для  $\zeta_{11}(t)$  и  $u_1(t)$  – первый переходный процесс и установившийся режим, для  $e_{11}(t)$  – второй.

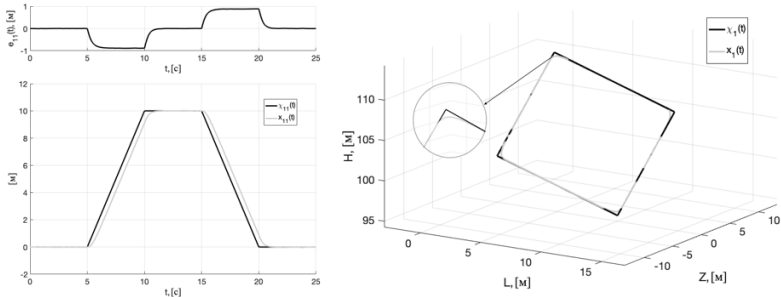


Рис. 10. Эксперимент 4. Слева – графики опорного сигнала  $\chi_{11}(t)$  (11), его обработки  $x_{11}(t)$  и ошибки слежения  $e_{11}(t)$ . Справа – пространственные графики опорной траектории и точки в фазовом пространстве динамического генератора (9)

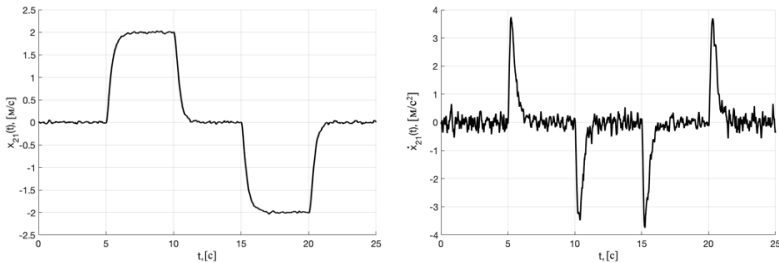


Рис. 11. Эксперимент 4. Графики  $x_{21}(t)$  и  $\dot{x}_{21}(t)$  генератора (9)

Таблица 1. Показатели качества замкнутых систем и обработки сигналов

Переменная	Временной интервал	Показатель	Номер эксперимента			
			16	2	3	4
$e_{11}(t)$ , м	$t \in (7; 10)$	Mean	0,58	0,81	0,58	0,81
	$t \in (7; 10)$	Std	0,30	0,31	0,30	0,31
	$t \in (5; 10)$	Max	1,91	2,11	1,91	2,11
$\zeta_{11}(t)$ , м	$t \in (2; 5)$	Mean	$1,14 \times 10^{-14}$	$4,04 \times 10^{-16}$	$7,54 \times 10^{-8}$	$3,47 \times 10^{-7}$
	$t \in (2; 5)$	Std	$8,55 \times 10^{-16}$	$4,68 \times 10^{-17}$	$5,30 \times 10^{-5}$	$3,16 \times 10^{-5}$
	$t \in (0; 5)$	Max	$4,30 \times 10^{-4}$	$4,30 \times 10^{-4}$	$3,97 \times 10^{-4}$	$4,34 \times 10^{-4}$
$u_1(t)$	$t \in (2; 5)$	Mean	0,71	0,71	0,71	0,71
	$t \in (2; 5)$	Std	0,99	0,02	0,10	0,02
	$t \in (0; 5)$	Max	3,12	1,36	1,71	1,35



Из таблицы 1 видно, что цель управления БПЛА была достигнута во всех экспериментах: среднее значение ошибки слежения  $\zeta_{11}(t) = y_{11}(t) - x_{11}(t)$  при отслеживании объектом сглаженного сигнала генератора составило порядка  $10^{-16} \div 10^{-7}$  м (что обусловлено наличием шума и погрешностями численного интегрирования). Применение фильтров нижних частот в экспериментах 2–4 уменьшает среднеквадратическое отклонение (СКО) управляющего воздействия  $u_1(t)$  в  $9,9 \div 49,5$  раз по сравнению с экспериментом 1, где фильтры не используются. Значения показателей качества для  $e_{11}(t)$  и  $u_1(t)$  сопоставимы для экспериментов 2 и 4. Следовательно, дополнительная фильтрация второй производной генератора  $\dot{x}_2(t)$  избыточна (эксперимент 4), достаточно установки одного фильтра на опорный сигнал  $\bar{\chi}_1(t)$  (эксперимент 2). Результаты экспериментов 2 и 3 показывают, что фильтрация опорного сигнала  $\bar{\chi}_1(t)$  (эксперимент 2) позволяет уменьшить СКО управления в 5 раз по сравнению с фильтрацией второй производной генератора (эксперимент 3). Однако фильтр на опорный сигнал сильнее искажает полезную составляющую, что приводит к большей ошибке  $e_{11}(t)$  в эксперименте 2 ( $0,81$  [м]) по сравнению с экспериментом 3 ( $0,58$  [м]). Таким образом, эксперименты 2 и 3 являются наиболее перспективными для практической реализации.

## 5. Заключение

Цель исследования состояла в разработке динамического генератора с сигмоидальными корректирующими воздействиями как единого метода дифференцирования, фильтрации и сглаживания опорных сигналов для их дальнейшего использования в системе управления БПЛА. В динамическом генераторе оценочные сигналы задающего воздействия формируются не со входа, а с выхода интегрирующего блочного звена, что обеспечивает естественную фильтрацию и заметно снижает влияние на оценки паразитного шума. При этом генератор позволяет сглаживать сигналы, а при его настройке также учитывались ограничения на скорость и ускорение БПЛА. Для обеспечения филь-

трации оценки второй производной, получаемой со входа интегратора, и, следовательно, обратной связи, формируемой для решения задачи слежения, без увеличения порядка генератора, а именно ввода дополнительного интегрирующего звена, были введены дополнительные низкочастотные фильтры на задающий сигнал перед его подачей в генератор или на самую вторую производную генератора перед ее подачей в закон управления. Выбор конкретного варианта реализации зависит от рабочей области, в которой функционирует объект, требований к гладкости управления и возможностей вычислительных ресурсов.

### **Литература**

1. АНТИПОВ А.С., КРАСНОВА С.А., УТКИН В.А. *Синтез инвариантных нелинейных одноканальных систем слежения с сигмоидальными обратными связями с обеспечением заданной точности слежения* // Автоматика и телемеханика. – 2022. – №1. – С. 40–66.
2. ДЫЛЕВСКИЙ А.В., ЛОЗГАЧЕВ Г.И. *Применение метода пространства состояний для синтеза дифференциаторов* // Автоматика и телемеханика. – 1999. – №9. – С. 13–20.
3. ЕМЕЛЬЯНОВ С.В., АФАНАСЬЕВ А.П. *Дифференцирование сигнала в системах автоматического регулирования* // Автоматика и телемеханика. – 2015. – №12. – С. 27–42.
4. КОКУНЬКО Ю.Г., КРАСНОВА С.А. *Два подхода к синтезу инвариантной системы слежения для беспилотного летательного аппарата* // Управление большими системами. – 2020. – Вып. 85. – С. 113–142.
5. КРАСНОВ Д.В., УТКИН А.В. *Наблюдатель пониженного порядка для оценивания смешанных переменных в системах слежения при действии внешних несогласованных возмущений* // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, №12. – С. 1681–1694.
6. ALSANOUSI A.A. *Design and Optimization of Low Pass Filter*. Lap Lambert Academic Publishing. – Sunnyvale, CA, USA, 2017.
7. ANTIPOV A.S., KRASNOVA S.A., UTKIN V.A. *Methods of Ensuring Invariance with Respect to External Disturbances: Overview and New Advances* // *Mathematics*. – 2021. – Vol. 9(23). – P. 3140.
8. ASTOFI D., ZACCARIAN L., JUNGERS M. *On the use of low-pass filters in high-gain observers* // *Systems and Control Letters*. – 2021. – Vol. 148. – P.104856.

9. BUZIKOV M., GALYAEV A. *Minimum-time lateral interception of a moving target by a Dubins car* // Automatica. – 2021. – Vol. 135. – Art. No. 109968.
10. DESSEN F. *Optimizing Order to Minimize Low-Pass Filter Lag* // Circuits, Systems, and Signal Processing. – 2019. – Vol. 38. – P. 481–497.
11. GUO B.-Z., ZHAO Z.-L. *On convergence of tracking differentiator and application to frequency estimation of sinusoidal signals* // Proc. 8th Asian Control Conference (ASCC). – 2011. – P. 1470–1475.
12. KANATNIKOV A.N., KRISHCHENKO A.P. *Terminal control of spatial motion of flying vehicles* // Journal of Computer and System Sciences International. – 2008. – Vol. 47(5). – P. 718–731.
13. KIKUWE R., PASARIBU R., BYUN G. *A First-Order Differentiator with First-Order Sliding Mode Filtering* // IFAC-PapersOnLine. – 2019. – Vol. 52(16). – P. 771–776.
14. KOKUNKO Y.G., KRASNOVA S.A., UTKIN V.A. *Cascade Synthesis of Differentiators with Piecewise Linear Correction Signals* // Autom. Remote Control. – 2021. – Vol. 82(7). – P. 1144–1168.
15. KRASNOVA S.A. *Estimating the Derivatives of External Perturbations Based on Virtual Dynamic Models* // Autom. Remote Control. – 2020. – Vol. 81(5). – P. 897–910.
16. LAMBERT E., ROMANO R., WALTING D. *Optimal Path Planning with Clothoid Curves for Passenger Comfort* // Proc. of the 5th Int. Conf. on Vehicle Technology and Intelligent Transport Systems, May 3–5, 2019, Heraklion, Greece. – P. 609–615.
17. LEVANT A. *Robust exact differentiation via sliding mode technique* // Automatica. – 1998. – Vol. 34(3). – P. 379–384.
18. LEVANT A., LIVNE M., YU X. *Sliding-Mode-Based Differentiation and Its Application* // IFAC-PapersOnLine. – 2017. – Vol. 50(1). – P. 1699–1704.
19. RICHARD L., BURDEN J., DOUGLAS F. *Numerical Analysis*. – Brooks, Cole, 2000.
20. ROSU H.C., MANCAS S.C., HSIEH C.-C. *Generalized Cornu-type spirals and their Darboux parametric deformations* // Phys. Lett. A. – 2019. – Vol. 383. – P. 2692–2697.
21. SHANMUGAVEL M., TSOURDOS A., WHITE B.A., ZBIKOWSKI R. *Differential Geometric Path Planning of Multiple UAVs* // Trans. ASME. J. Dyn. Syst. Meas. Control. – 2005. – Vol. 129(5). – P. 620–632.

## **DYNAMIC DIFFERENTIATION AND SMOOTHING OF NOISY SIGNALS SPECIFYING THE TRAJECTORY OF AN UNMANNED AERIAL VEHICLE**

**Julia Kokunko**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences  
of RAS, Moscow (juliakokunko@gmail.com).

*Abstract: The problem of developing a complex approach to filtering and smoothing of reference trajectories, which are signal reference actions, and to recovery of their derivatives is considered on the example of an unmanned aircraft of the airplane type. To solve this problem, methods of design and algorithms for setting up a dynamic generator of acceptable trajectories are developed. The system of differential equations, which describes the generator of tasks, corresponds to the canonical model of the control plant "input - output". The output variables of the generator track the reference noisy and non-smooth vector signal of the reference actions. Thus, the generator is a tracking differentiator. To design its local links and corrective actions, smooth and bounded sigmoidal functions with bounded derivatives are used. This approach allows considering the restrictions on the speed and acceleration of a particular aircraft, so the output variables of the tracking differentiator generate a naturally smoothed spatial curve and its derivatives, which are used in the plant control system as a realizable reference trajectory. Numerical simulation results demonstrated the efficiency of the developed approach to dynamic differentiation and smoothing of vector signals both in the deterministic case and in the presence of noise. A comparative analysis of dynamic generators with different variants of additional low-pass filters is performed. The application of the developed approach is possible for processing the reference actions of various control plants, it is only necessary that their dynamic model be reduced to the canonical form.*

**Keywords:** trajectory planning, tracking differentiator, design constraints, signal filtering and differentiation, sigmoid function, realizable trajectories.

УДК 62.50

ББК 32.817

DOI: 10.25728/ubs.2024.107.08

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А.И. Алчиновым.*

*Поступила в редакцию 05.10.2023.*

*Опубликована 31.01.2024.*