ОПТИМИЗАЦИЯ КРЕДИТНОГО ПОРТФЕЛЯ БАНКА С УЧЕТОМ РЫНОЧНОГО РИСКА НА ОСНОВЕ МЕТОДА МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Гераськин М. И.[1], Иванова М. В.[2]
(*ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева», Самара*)

Рассматривается проблема формирования оптимального портфеля кредитов коммерческого банка. Предметом исследования является механизм формирования прибыли банка за счет кредитования физических лиц. Актуальность темы исследования обусловлена тем, что в текущее время в условиях увеличивающейся конкуренции на рынке финансовых услуг одной из актуальных задач банков является оптимизация кредитных портфелей. Один из способов решения этой задачи – разработка математической модели, которая позволит эффективно управлять кредитным портфелем и оптимизировать финансовые риски. Разработана оптимизационная модель и также проанализированы статистические данные, на основе которых составляются регрессионные модели, анализируются ограничения, учитываемые в модели. Предложены условия оптимизации кредитного портфеля банка, позволяющие максимизировать прибыль банка. Оптимизационные модели позволяют выбрать такие доли видов кредитования, которые максимизируют совокупную прибыль банка от кредитования физических лиц. Также определен комплекс условий оптимального кредитного портфеля, обеспечивающий ограничение на риск волатильности процентных ставок, который является одним из видов рыночного риска. Приведены результаты численных экспериментов на примере банка ПАО «ВТБ», показывающие экономический эффект от предложенных разработок. Полученные результаты и разработанные модели оптимизации кредитного портфеля могут применяться для планирования банками своей деятельности. Выполненное исследование расширяет научные рамки понимания значимости применения процессов оптимизации при составлении кредитного портфеля банками.

Ключевые слова: банковский кредит, оптимизация, функция Лагранжа, кредитный портфель, ипотечный кредит, автомобильный кредит, потребительский кредит.

---

[1] *Михаил Иванович Гераськин, д.э.н., профессор* (*innovation@ssau.ru*).
[2] *Мария Владимировна Иванова, аспирант* (*ivanova.maria.ami@gmail.com*).

1. Введение

В настоящее время на рынке финансовых услуг наблюдается общая тенденция роста процентных ставок по кредитам, что приводит к увеличивающейся конкуренции среди коммерческих банков. Наряду с этим возрастает волатильность процентных ставок, что обусловливает все большие колебания доходности кредитных операций. Вследствие этого растут риски волатильности процентных ставок банков.

Коммерческий банк всегда стоит перед выбором: выдавать кредиты с высоким риском и получать большие доходы или предоставлять менее рисковые кредиты с меньшей доходностью. При этом имеется в виду риск колебания доходности, приводящий к снижению прибыли. Решая эту дилемму, банк должен учитывать множество факторов. Один из способов предотвращения потерь в результате рассматриваемого риска – это диверсификация кредитов.

В представленных условиях одной из актуальных задач банков является оптимизация кредитных портфелей таким образом, чтобы эффективность деятельности стала максимальной. Один из способов решения этой задачи – разработка математической модели, которая позволит эффективно управлять кредитным портфелем и оптимизировать риски волатильности процентных ставок.

2. Обзор литературы

Исследователи [5, 14] уделяют значительное внимание связям между депозитной политикой и кредитной политикой банков. Другие исследователи [2, 16, 20] рассматривают проблему банковских рисков, в том числе связанных с кредитованием физических лиц. Среди этих рисков мы анализируем риски волатильности процентных ставок, которые относятся к рыночным банковским рискам.

В качестве основы при составлении кредитных портфелей предлагается использовать модель Гарри Марковица.

Рассмотрим подходы, которые применяют различные авторы к реализации этой модели.

В работе Т.О. Калугиной при применении модели Марковица [8] составляют оптимальный кредитный портфель банка так, чтобы достигался максимум процентного дохода и минимизровался кредитный риск.

В работах В.И. Дубровина и О.И. Юськив, В.В. Лупандина и И.С. Егорова, Р.С. Олексик, Т.С. Коршуновой, У.Н. Гарибовой, Е.В. Симоненковой для оптимизации инвестиционного портфеля агента финансового рынка авторы ставят целью минимизацию риска портфеля [3, 6, 9, 11, 13, 17].

А.А. Федосеев в работах [18, 19] предлагает модификацию модели Марковица для формирования инвестиционного портфеля путем добавления дополнительных критериев, которыми являются ликвидность актива, определяемая по близости реальных цен покупки и продажи акций, и оборот актива. Таким образом сформированы трехкритериальная и четырехкритериальная модели.

Л.М. Мамедова и Ш.Э. Казимов решают портфельную задачу Марковица с акциями фондового рынка США [12]. Для этого модель Марковица модифицируется путем сведения модели к однокритериальной задаче оптимизации с помощью линейной свертки критериев.

К.В. Криничанскиий и А.В. Безруков представляют решение задачи оптимизации портфеля ценных бумаг в рамках обобщения модели Марковица для случая квадратичной зависимости риска от доходности и линейной функции полезности, объединяющей риск и доходность портфеля; оптимизация портфеля в такой упрощенной постановке производится с применением функции Лагранжа [10].

И.С. Иванченко и Д.Д. Осеи описывают результаты оптимизации портфеля золотовалютных резервов при помощи модели Блэка – Литтермана, максимизируя доходность без анализа влияния доходности портфеля на его риск, и применяют метод множителей Лагранжа [7].

Таким образом, обзор литературы подтверждает научную значимость темы работы. В рассмотренных публикациях не представлено решение задач оптимизации портфеля активов для реальных статистических данных с помощью метода Лагранжа, применение которого позволяет нам исследовать чувствительность оптимального портфеля к параметрам функций доходности активов и уровню ограничения на риск портфеля.

Предлагаемый нами подход позволяет найти систему уравнений оптимизации, которая дает возможность проанализировать чувствительность оптимального решения к параметрам задачи, т.е. при задании определенного значения объема кредитования и определенного значения максимального значения риска можно узнать, каким образом изменятся доли кредитов в портфеле. При этом можно исследовать зависимость доходности от уровня ограничения на риск. Также наше исследование включает проведение численных экспериментов на основе реальных статистических данных в банковской деятельности, что позволяет оптимизировать реальные процессы при помощи построенной модели.

3. Постановка и решение задачи оптимизации кредитного портфеля

Целью коммерческого банка является получение прибыли, которая в значительной части формируется от кредитования физических лиц. Кредитный портфель банка определяется как структура различных видов кредитов, сумма долей которых в портфеле представляет собой естественное ограничение (сумма равна единице). Поскольку каждый из видов кредитов приносит различную прибыль в зависимости от объемов и доходности кредитования и приводит к различным рискам волатильности в зависимости от волатильности доходности, то необходимо оптимизировать кредитный портфель таким образом, чтобы общая прибыль банка была максимальной и риск волатильности процентных ставок не превышал допустимый уровень.

Для решения задачи формирования оптимального кредитного портфеля предлагается разработать математическую модель.

В качестве целевой функции рассматривается прибыль банка, определяемая следующим выражением:

(1) $$\pi(Q) = \sum_{k=1}^{3} \pi_k(Q_k),$$

где Q – общий объем кредитования банка, $Q = \sum_{k=1}^{3} Q_k$; π_k – прибыль от k-го вида кредитования ($k = 1$ – ипотечное кредитование, $k = 2$ – автомобильное кредитование, $k = 3$ – потребительское кредитование).

Доли видов кредитов X_k в суммарном кредитном портфеле Q связаны с объемами различных видов кредитования Q_k через величину общего объема кредитного портфеля:

$$Q_k = QX_k,$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1.$$

Прибыль от k-го вида кредитования вычисляется по формуле

(2) $$\pi_k = r_k - C_k,$$

где r_k – доходы от k-го вида кредитования:

(3) $$r_k = A_k(Q_k + W_k)^{B_k+1},$$

где Q_k – объем кредитования k-го вида; A_k, B_k, W_k – коэффициенты регрессии.

Издержки на k-й вид кредитования вычисляются по формуле

(4) $$C_k = c_k(Q_k + \omega_k)^{\rho_k},$$

где C_k – издержки на кредитование k-го вида; c_k, ρ_k, ω_k – коэффициенты регрессии.

Степенные функции вида (3), (4) позволяют выразить разнообразие свойств бизнес-процесса организации. В степенных функциях издержек (4) параметр ρ_k характеризует темп роста издержек; тип агента с низким темпом роста издержек соответствует положительной (возрастающей) отдаче (эффекту) от расширения масштаба, тип агента с высоким темпом роста – отрицательной (убывающей) отдаче [23]. Аналогично в степенных функциях доходов (3) показатель степени W_k выражает наклон кривой спроса на продукт организации.

Для учета риска будем использовать параметры дисперсии σ_k^2 и корреляции cor_{ik} ретроспективных значений доходности по видам кредитов. Для нахождения значений σ_k^2 и cor_{ik} воспользуемся формулами [4, стр. 100, 147]:

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(r_{it} - \overline{r}_i)^2}{n}, \tag{5}$$

$$cor_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{n}(r_{it} - \overline{r}_i)(r_{jt} - \overline{r}_j)}{\sigma_i \sigma_j}, \tag{6}$$

где $i, j = 1, 2, 3$ – индексы, соответствующие виду кредита; r_{it}, r_{jt} – доходы от i-го и j-го видов кредитования в период времени t; $\overline{r}_i, \overline{r}_j$ – средние доходы от i-го и j-го видов кредитования; n – количество анализируемых ретроспективных периодов,

При этом задача учитывает параметр вариации кредитного портфеля σ_p, или риск волатильности процентных ставок портфеля, [4, стр. 148]:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} X_k^2 \sigma_k^2 + 2(X_1 X_2 cor_{12}\sigma_1\sigma_2 + X_1 X_3 cor_{13}\sigma_1\sigma_3 + X_2 X_3 cor_{23}\sigma_2\sigma_3)}, \tag{7}$$

который не должен превышать заданный уровень допустимого риска $\sigma_{доп}$.

Поскольку при максимизации прибыли оптимальное решение (доли кредитов в портфеле) будет находиться на верхней границе ограничения по риску [1], то от неравенства ($\sigma_р \le \sigma_{доп}$) возможен переход к равенству ($\sigma_р = \sigma_{доп}$).

Задача формирования оптимального кредитного портфеля примет вид:

$$
(8)\quad \begin{cases}
\pi = \sum_{k=1}^{3} \pi_k(QX_k) = \sum_{k=1}^{3} (A_k(QX_k + W_k)^{B_k+1} - c_k(QX_k + \omega_k)^{\rho_k}) \to \max, \\
\sigma_p = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} X_k{}^2\sigma_k{}^2 + 2(X_1X_2cor_{12}\sigma_1\sigma_2 + X_1X_3cor_{13}\sigma_1\sigma_3 + X_2X_3cor_{23}\sigma_2\sigma_3)} = \sigma_{\text{доп}}, \\
\sum_{k=1}^{3} X_k = 1, \\
X_k \geq 0.
\end{cases}
$$

Целью исследования будет являться нахождение таких значений X_k, которые позволят максимизировать π.

4. Методы решения

Решение задачи оптимизации (8) предлагается основывать на методе множителей Лагранжа. Составим функцию Лагранжа для задачи оптимизации портфеля из n активов:

$$
(9)\quad \mathcal{L} = \sum_{k=1}^{3} \pi_k + \lambda_0(1 - \sum_{k=1}^{3} X_k) + \lambda_1(\sigma_{доп}{}^2 - \sum_{k=1}^{3} X_k{}^2\sigma_k{}^2 -
$$
$$
-2(X_1X_2cor_{12}\sigma_1\sigma_2 + X_1X_3cor_{13}\sigma_1\sigma_3 + X_2X_3cor_{23}\sigma_2\sigma_3).
$$

Необходимые условия оптимальности примут вид:

$$
\mathcal{L}'_{X_1} = \pi'_{1X_1} + \pi'_{2X_1} + \pi'_{3X_1} - \lambda_0 - (\lambda_1 X_1{}^2\sigma_1{}^2)'_{X_1} -
$$
$$
-(\lambda_1 X_2{}^2\sigma_2{}^2)'_{X_1} - (\lambda_1 X_3{}^2\sigma_3{}^2)'_{X_1} - (\lambda_1 2X_1X_2cor_{12}\sigma_1\sigma_2)'_{X_1} -
$$
$$
-(\lambda_1 2X_1X_3cor_{13}\sigma_1\sigma_3)'_{X_1} - (\lambda_1 2X_2X_3cor_{23}\sigma_2\sigma_3)'_{X_1} = 0,
$$
$$
\mathcal{L}'_{X_2} = \pi'_{1X_2} + \pi'_{2X_2} + \pi'_{3X_2} - \lambda_0 - (\lambda_1 X_1{}^2\sigma_1{}^2)'_{X_2} -
$$
$$
-(\lambda_1 X_2{}^2\sigma_2{}^2)'_{X_2} - (\lambda_1 X_3{}^2\sigma_3{}^2)'_{X_2} - (\lambda_1 2X_1X_2cor_{12}\sigma_1\sigma_2)'_{X_2} -
$$
$$
-(\lambda_1 2X_1X_3cor_{13}\sigma_1\sigma_3)'_{X_2} - (\lambda_1 2X_2X_3cor_{23}\sigma_2\sigma_3)'_{X_2} = 0,
$$
$$
\mathcal{L}'_{X_3} = \pi'_{1X_3} + \pi'_{2X_3} + \pi'_{3X_3} - \lambda_0 - (\lambda_1 X_1{}^2\sigma_1{}^2)'_{X_3} -
$$
$$
-(\lambda_1 X_2{}^2\sigma_2{}^2)'_{X_3} - (\lambda_1 X_3{}^2\sigma_3{}^2)'_{X_3} - (\lambda_1 2X_1X_2cor_{12}\sigma_1\sigma_2)'_{X_3} -
$$
$$
-(\lambda_1 2X_1X_3cor_{13}\sigma_1\sigma_3)'_{X_3} - (\lambda_1 2X_2X_3cor_{23}\sigma_2\sigma_3)'_{X_3} = 0,
$$
$$
\mathcal{L}'_{\lambda_0} = 1 - X_1 - X_2 - X_3 = 0,
$$

$$\mathcal{L}'_{\lambda_1} = \sigma^2_{\text{доп}} - X_1^2\sigma_1^2 - X_2^2\sigma_2^2 - X_3^2\sigma_3^2 -$$
$$-2X_1X_2cor_{12}\sigma_1\sigma_2 - 2X_1X_3cor_{13}\sigma_1\sigma_3 - 2X_2X_3cor_{23}\sigma_2\sigma_3 = 0.$$

Подставим в эти формулы производные функций прибыли (2) с учетом (3), (4), а затем выразим из этих формул λ_0:

$$\lambda_0 = \left[A_1Q(B_1+1)(QX_1+W_1)^{B_1} - c_1Q\rho_1(QX_1+\omega_1)^{\rho_1-1}\right] -$$
$$-2X_1\lambda_1\sigma_1^2 - 2\lambda_1X_2cor_{12}\sigma_1\sigma_2 - 2\lambda_1X_3cor_{13}\sigma_1\sigma_3,$$
$$\lambda_0 = \left[A_2Q(B_2+1)(QX_2+W_2)^{B_2} - c_2Q\rho_2(QX_2+\omega_2)^{\rho_2-1}\right] -$$
$$-2X_2\lambda_1\sigma_2^2 - 2\lambda_1X_1cor_{12}\sigma_1\sigma_2 - 2\lambda_1X_3cor_{23}\sigma_2\sigma_3,$$
$$\lambda_0 = \left[A_3Q(B_3+1)(QX_3+W_3)^{B_3} - c_3Q\rho_3(QX_3+\omega_3)^{\rho_3-1}\right] -$$
$$-2X_3\lambda_1\sigma_3^2 - 2\lambda_1X_1cor_{13}\sigma_1\sigma_3 - 2\lambda_1X_2cor_{23}\sigma_2\sigma_3$$

Эта система уравнений приводит к следующим соотношениям:

$$\left[A_1Q(B_1+1)(QX_1+W_1)^{B_1} - c_1Q\rho_1(QX_1+\omega_1)^{\rho_1-1}\right] -$$
$$-2X_1\lambda_1\sigma_1^2 - 2\lambda_1X_2cor_{12}\sigma_1\sigma_2 - 2\lambda_1X_3cor_{13}\sigma_1\sigma_3 =$$
$$= \left[A_2Q(B_2+1)(QX_2+W_2)^{B_2} - c_2Q\rho_2(QX_2+\omega_2)^{\rho_2-1}\right] -$$
$$-2X_2\lambda_1\sigma_2^2 - 2\lambda_1X_1cor_{12}\sigma_1\sigma_2 - 2\lambda_1X_3cor_{23}\sigma_2\sigma_3,$$
$$\left[A_1Q(B_1+1)(QX_1+W_1)^{B_1} - c_1Q\rho_1(QX_1+\omega_1)^{\rho_1-1}\right] -$$
$$-2X_1\lambda_1\sigma_1^2 - 2\lambda_1X_2cor_{12}\sigma_1\sigma_2 - 2\lambda_1X_3cor_{13}\sigma_1\sigma_3 =$$
$$= \left[A_3Q(B_3+1)(QX_3+W_3)^{B_3} - c_3Q\rho_3(QX_3+\omega_3)^{\rho_3-1}\right] -$$
$$-2X_3\lambda_1\sigma_3^2 - 2\lambda_1X_1cor_{13}\sigma_1\sigma_3 - 2\lambda_1X_2cor_{23}\sigma_2\sigma_3.$$

Выразим из этих уравнений λ_1:

$$\lambda_1 = \frac{\left[A_1Q(B_1+1)(QX_1+W_1)^{B_1} - c_1Q\rho_1(QX_1+\omega_1)^{\rho_1-1}\right]}{2\left[X_1\sigma_1^2 + 2X_2cor_{12}\sigma_1\sigma_2 + X_3cor_{13}\sigma_1\sigma_3 - X_2\sigma_2^2 - X_1cor_{12}\sigma_1\sigma_2 - X_3cor_{23}\sigma_2\sigma_3\right]} -$$
$$-\frac{\left[A_2Q(B_2+1)(QX_2+W_2)^{B_2} - c_2Q\rho_2(QX_2+\omega_2)^{\rho_2-1}\right]}{2\left[X_1\sigma_1^2 + 2X_2cor_{12}\sigma_1\sigma_2 + X_3cor_{13}\sigma_1\sigma_3 - X_2\sigma_2^2 - X_1cor_{12}\sigma_1\sigma_2 - X_3cor_{23}\sigma_2\sigma_3\right]},$$

$$\lambda_1 = \frac{\left[A_1 Q(B_1+1)(QX_1+W_1)^{B_1} - c_1 Q\rho_1(QX_1+\omega_1)^{\rho_1-1}\right]}{2\left[X_1\sigma_1^2 + 2X_2 cor_{12}\sigma_1\sigma_2 + X_3 cor_{13}\sigma_1\sigma_3 - X_3\sigma_3^2 - X_1 cor_{13}\sigma_1\sigma_3 - X_2 cor_{23}\sigma_2\sigma_3\right]} -$$

$$-\frac{\left[A_3 Q(B_3+1)(QX_3+W_3)^{B_3} - c_3 Q\rho_3(QX_3+\omega_3)^{\rho_3-1}\right]}{2\left[X_1\sigma_1^2 + 2X_2 cor_{12}\sigma_1\sigma_2 + X_3 cor_{13}\sigma_1\sigma_3 - X_3\sigma_3^2 - X_1 cor_{13}\sigma_1\sigma_3 - X_2 cor_{23}\sigma_2\sigma_3\right]}.$$

В результате после проведения преобразований система уравнений, учитывающая параметр риска, примет вид

(10а)
$$\frac{\left[A_1 Q(B_1+1)(QX_1+W_1)^{B_1} - c_1 Q\rho_1(QX_1+\omega_1)^{\rho_1-1}\right]}{2\left[X_1\sigma_1^2 + 2X_2 cor_{12}\sigma_1\sigma_2 + X_3 cor_{13}\sigma_1\sigma_3 - X_2\sigma_2^2 - X_1 cor_{12}\sigma_1\sigma_2 - X_3 cor_{23}\sigma_2\sigma_3\right]} -$$

$$-\frac{\left[A_2 Q(B_2+1)(QX_2+W_2)^{B_2} - c_2 Q\rho_2(QX_2+\omega_2)^{\rho_2-1}\right]}{2\left[X_1\sigma_1^2 + 2X_2 cor_{12}\sigma_1\sigma_2 + X_3 cor_{13}\sigma_1\sigma_3 - X_2\sigma_2^2 - X_1 cor_{12}\sigma_1\sigma_2 - X_3 cor_{23}\sigma_2\sigma_3\right]} =$$

$$= \frac{\left[A_1 Q(B_1+1)(QX_1+W_1)^{B_1} - c_1 Q\rho_1(QX_1+\omega_1)^{\rho_1-1}\right]}{2\left[X_1\sigma_1^2 + 2X_2 cor_{12}\sigma_1\sigma_2 + X_3 cor_{13}\sigma_1\sigma_3 - X_3\sigma_3^2 - X_1 cor_{13}\sigma_1\sigma_3 - X_2 cor_{23}\sigma_2\sigma_3\right]} -$$

$$-\frac{\left[A_3 Q(B_3+1)(QX_3+W_3)^{B_3} - c_3 Q\rho_3(QX_3+\omega_3)^{\rho_3-1}\right]}{2\left[X_1\sigma_1^2 + 2X_2 cor_{12}\sigma_1\sigma_2 + X_3 cor_{13}\sigma_1\sigma_3 - X_3\sigma_3^2 - X_1 cor_{13}\sigma_1\sigma_3 - X_2 cor_{23}\sigma_2\sigma_3\right]},$$

(10б) $1 - X_1 - X_2 - X_3 = 0$,

(10в)
$$\sigma_{\text{доп}}^2 - X_1^2\sigma_1^2 - X_2^2\sigma_2^2 - X_3^2\sigma_3^2 - X_1 X_2 cor_{12}\sigma_1\sigma_2 -$$
$$- X_1 X_3 cor_{13}\sigma_1\sigma_3 - X_2 X_3 cor_{23}\sigma_2\sigma_3 = 0.$$

При этом в случае, когда $\sigma_{\text{доп}}{}^2 \to \infty$, т.е. в случае, когда параметр риска не учитывается, система (10) примет вид:

$$\left[A_1 Q(B_1+1)(QX_1+W_1)^{B_1} - c_1 Q\rho_1(QX_1+\omega_1)^{\rho_1-1}\right] =$$
$$= \left[A_2 Q(B_2+1)(QX_2+W_2)^{B_2} - c_2 Q\rho_2(QX_2+\omega_2)^{\rho_2-1}\right],$$
$$\left[A_1 Q(B_1+1)(QX_1+W_1)^{B_1} - c_1 Q\rho_1(QX_1+\omega_1)^{\rho_1-1}\right] =$$
$$= \left[A_3 Q(B_3+1)(QX_3+W_3)^{B_3} - c_3 Q\rho_3(QX_3+\omega_3)^{\rho_3-1}\right].$$

Таким образом, выведены системы уравнений, решение которых позволяет найти оптимальную структуру кредитного портфеля, состоящего из трех видов кредитов, при различных значениях допустимого уровня риска портфеля.

5. Результаты численных экспериментов

На основе фактических данных о доходах по видам кредитования и данных об объемах кредитования банка ПАО ВТБ [21] построены графики зависимости доходов от объемов кредитования (рис. 1–3), на основе которых можно составить регрессионные модели согласно формулам (3) и (4) для получения расчетных значений доходов.

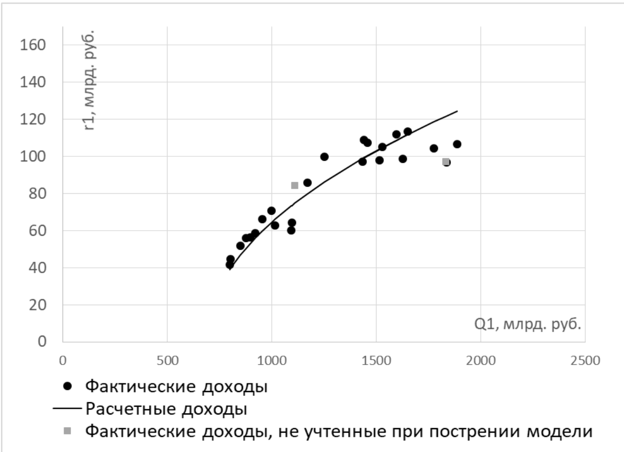

Рис. 1. Зависимость доходов от ипотечного кредитования от объемов ипотечного кредитования

Для построения графиков (рис. 1–7) были использованы данные за 24 периода (поквартально с 2015 до 2021 гг.), так как согласно решению Банка России от 29 декабря 2022 года на официальном сайте в сети Интернет Банк России не раскрывает отчетность и информацию, составленные кредитными организациями, начиная с отчетности за 2022 год и заканчивая отчетностью за 3 квартал 2023 года, в объеме, в котором она не раскрывается кредитными организациями [22].

Также некоторые периоды отражают особенности, не связанные с общими явлениями, поэтому соответствующие точки не учитывались при составлении модели; на рисунках такие точки показаны серым цветом.

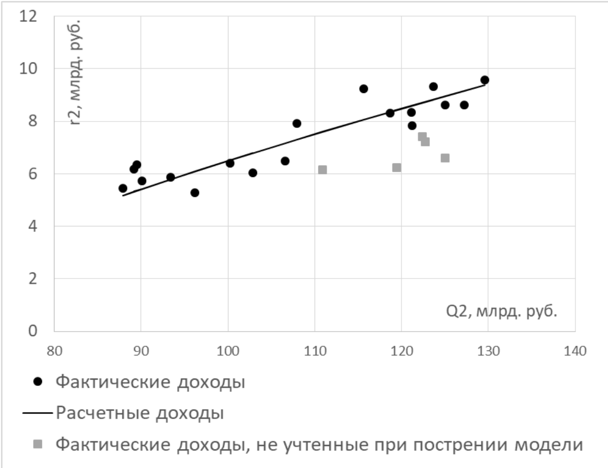

Рис. 2. Зависимость доходов от автомобильного кредитования от объемов автомобильного кредитования

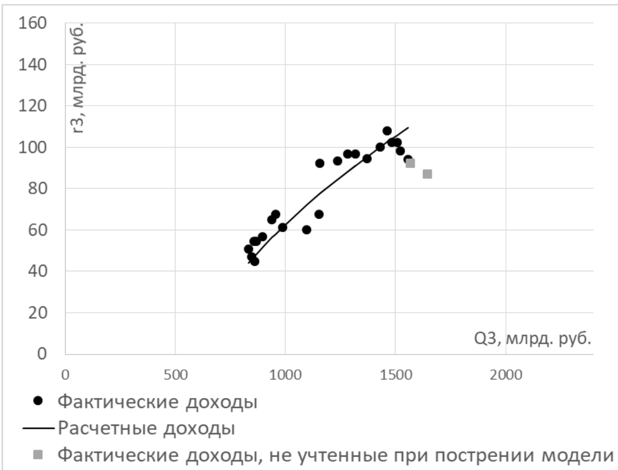

Рис. 3. Зависимость доходов от потребительского кредитования от объемов потребительского кредитования

Регрессионные модели функций дохода вида (3), рассчитанные методом наименьших квадратов в табличном процессоре Excel, а также значения коэффициента детерминации и критерия Фишера представлены в таблице 1.

Таблица 1. Регрессионные модели дохода от различных видов кредитования

Вид кредитования	Регрессионная модель	Коэффициент детерминации	Критерий Фишера (расчетный)	Табличное значение критерия Фишера (при уровне значимости 0,05)
Ипотечное	$r_1 = 4(Q_1 - 690)^{0,485}$	$R^2 = 0,88$	$F = 154$	$F = 2,06$
Автомобильное	$r_2 = 0,411(Q_2 - 55)^{0,725}$	$R^2 = 0,83$	$F = 73,24$	$F = 2,37$
Потребительское	$r_3 = 1,46(Q_3 - 610)^{0,63}$	$R^2 = 0,87$	$F = 133,85$	$F = 2,1$

Коэффициенты детерминации моделей выше граничного значения 0,7, принятого для оценки достоверности [15], поэтому представленные регрессионные модели будут использованы в дальнейшем для вычисления расчетного дохода банка от разных видов кредитования.

На основе фактических данных расходов по видам кредитования построены графики зависимости издержек от объемов кредитования (рис. 5–7), на основе которых можно составить регрессионные модели для получения расчетных значений издержек.

Поскольку графики доходов являются вогнутыми, а графики издержек выпуклые, то это позволит найти оптимальное решение, т.е. функции прибыли будут вогнутые и унимодальные.

Регрессионные модели издержек вида (4), а также значения коэффициента детерминации и критерия Фишера представлены в таблице 2.

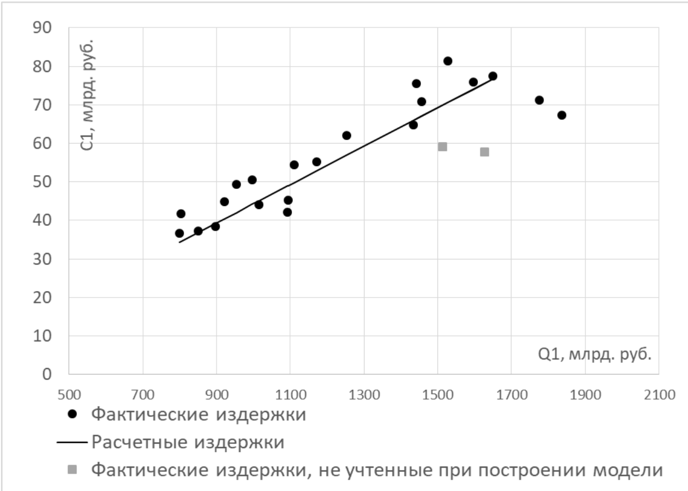

Рис. 5. Зависимость издержек на ипотечное кредитование от объемов ипотечного кредитования

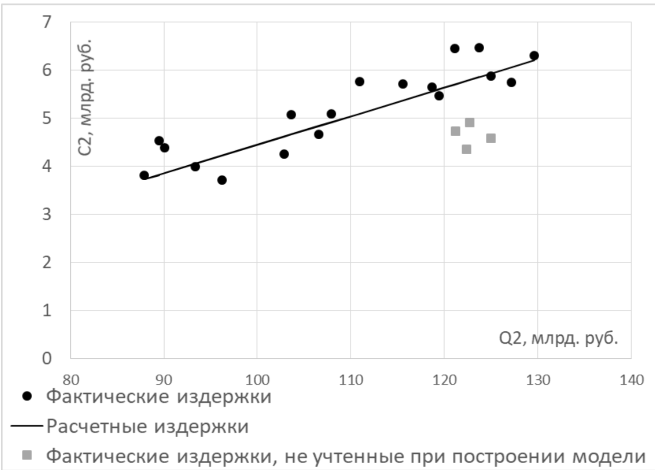

Рис. 6. Зависимость издержек на автомобильное кредитование от объемов автомобильного кредитования

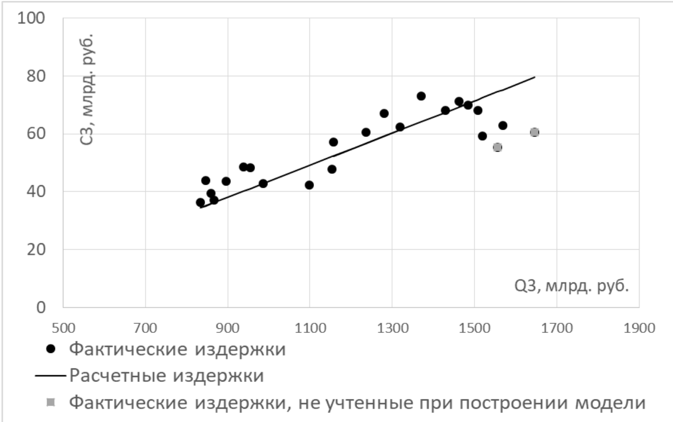

Рис. 7. Зависимость издержек на потребительское кредитование от объемов потребительского кредитования

Таблица 2. Регрессионные модели издержек на различные виды кредитования

Вид кредитования	Регрессионная модель	Коэффициент детерминации	Критерий Фишера (расчетный)	Табличное значение критерия Фишера (при уровне значимости 0,05)
Ипотечное	$C_1 = 0{,}0046(Q_1 - 100)^{1{,}01}$	$R^2 = 0{,}85$	$F = 102$	$F = 2{,}19$
Автомобильное	$C_2 = 0{,}058(Q_2 - 25)^{1{,}005}$	$R^2 = 0{,}78$	$F = 56{,}7$	$F = 2{,}3$
Потребительское	$C_3 = 0{,}05(Q_3 - 200)^{1{,}013}$	$R^2 = 0{,}73$	$F = 51{,}4$	$F = 2{,}14$

Подставив регрессионные модели из таблиц 1, 2 в формулу (2), частные формулы прибыли от видов кредитования примут вид:

(11) $\pi_1 = 4(Q_1 - 690)^{0{,}485} - 0{,}0046(Q_1 - 100)^{1{,}01}$,

(12) $\pi_2 = 0{,}411(Q_2 - 55)^{0{,}725} - 0{,}058(Q_2 - 25)^{1{,}005}$,

(13) $\pi_3 = 1,46(Q_3 - 610)^{0,63} - 0,05(Q_3 - 200)^{1,013}$.

Таким образом, определены формулы вычисления показателей прибыли банка от разных видов кредитования, на основе которых проводится оценка эффективности деятельности организации.

Прибыль без учета оптимизации рассчитывается по сформированным регрессионным моделям, в которые подставляются прогнозируемые объемы кредитов. Для решения систем уравнений (10) в таблице 3 приведем значения σ_k^2, σ_k и cor_{ik}.

Таблица 3. Параметры дисперсии и корреляции

Параметр	σ_1^2	σ_2^2	σ_3^2	σ_1	σ_2	σ_3	cor_{12}	cor_{13}	cor_{23}
Значение параметра	21,8	0,2	24,5	4,7	0,45	4,95	0,91	0,97	0,94

Из таблицы можно сделать вывод о том, что наиболее рискованным является потребительский кредит, наименее рискованным является автомобильный кредит. Корреляции между видами кредитов высоки, что говорит о том, что при увеличении долей кредитов риск также будет увеличиваться.

После подстановки численных данных в систему (10) из регрессий (таблицы 1 и 2) систему можно будет решить. Для решения системы уравнений, состоящей из 3 уравнений, т.е. для нахождения 3 неизвестных (X_1, X_2, X_3), необходимо подставить значения Q и $\sigma_{доп}$, а затем воспользоваться инструментом «Поиск решений» в процессоре MS Excel.

Для тестирования реалистичности модели на рис. 8 представлены диаграммы, позволяющие сравнить величины фактических и оптимизированных долей кредитов по состоянию на 31.03.2021, когда Q = 3798,8 млрд руб. При этом фактическое значение риска было равно σ = 4,63 млрд руб., а ограничение на риск при оптимизации установлено $\sigma_{доп}$ = 4 млрд руб.

На основе рисунка можно сделать вывод о том, что при оптимизации сократилась доля ипотечных кредитов и выросли доли автомобильных и потребительских кредитов.

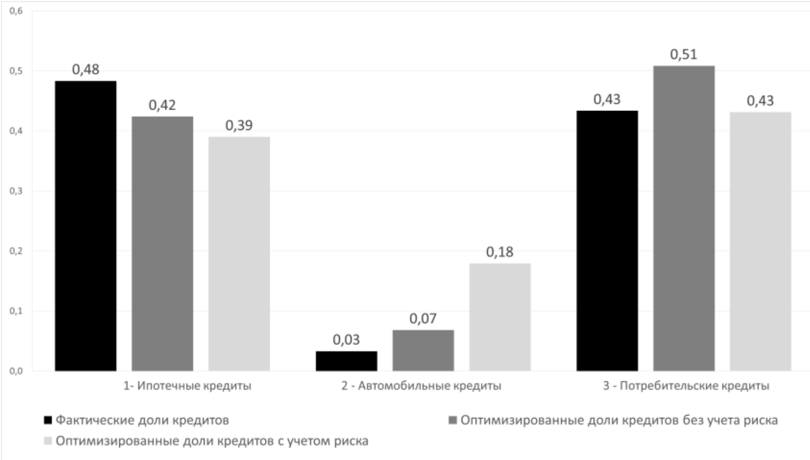

Рис. 8. Сравнение фактических и оптимизированных долей кредитов на 31.03.21 с учетом и без учета риска

Оптимизация без учета параметра риска приводит к тому, что по сравнению с фактическими данными:

– доля ипотечных кредитов снижается до 0,42;
– доля автомобильных кредитов повышается до 0,07;
– доля потребительских кредитов повышается до 0,51.

Потребительский кредит обладает большей прибыльностью, чем ипотечный и автомобильный кредиты, поэтому оптимизация приводит к распределению долей кредитов таким образом, чтобы суммарная прибыль банка была наибольшей.

Оптимизация с учетом параметра риска приводит к тому, что по сравнению с долями, полученными без учета параметра риска:

– доля ипотечных кредитов снижается до 0,39;
– доля автомобильных кредитов повышается до 0,18;
– доля потребительских кредитов остается на уровне 0,43.

Такой результат связан с параметром дисперсии, который характеризует рискованность каждого из видов кредитов. При оптимизации риска снижаются доли кредитов, у которых дисперсия наибольшая (ипотечный, потребительский), и повышается доля кредита, у которого значение дисперсии наименьшее (автомобильный).

На рис. 9 представлены диаграммы, позволяющие сравнить показатели фактической и оптимизированной прибыли портфеля на 31.03.21.

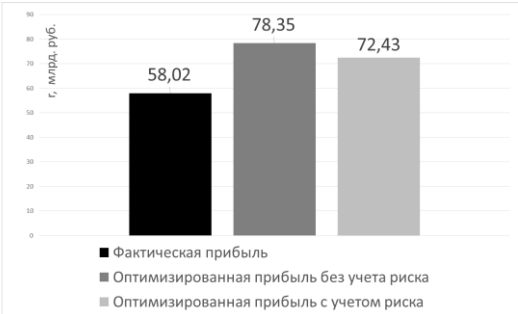

Рис. 9. Сравнение фактической и оптимизированной прибыли портфеля

На основе рисунка можно сделать вывод о том, что при оптимизации долей кредитов без учета риска прибыль банка по сравнению с фактической увеличивается на 20,33 млрд руб., а с учетом риска – на 14,41 млрд руб.

Составим прогноз суммарного объема кредитования физических лиц. Для этого построим график объемов кредитования за 25 периодов (31.03.2015 – 30.06.2021 гг.) и подберем к нему линию тренда, которая будет наиболее точно отражать динамику объема кредитования во времени.

При этом регрессионная модель принимает вид $Q = 4(t + 37)^{1,67}$, коэффициент детерминации $R^2 = 0,94$, критерий Фишера расчетный $F_{расч} = 360$, критерий Фишера табличный $F_{табл} = 1,996$. Регрессионная модель может считаться адекватной и достоверной.

Тогда в периоде №38 (30.06.2024), для которого будут проводиться численные эксперименты, объем кредитования банка будет равен $Q = 5412,68$ млрд руб. Ограничение на значение риска примем равным $\sigma_{доп} = 4,2$ млрд руб.

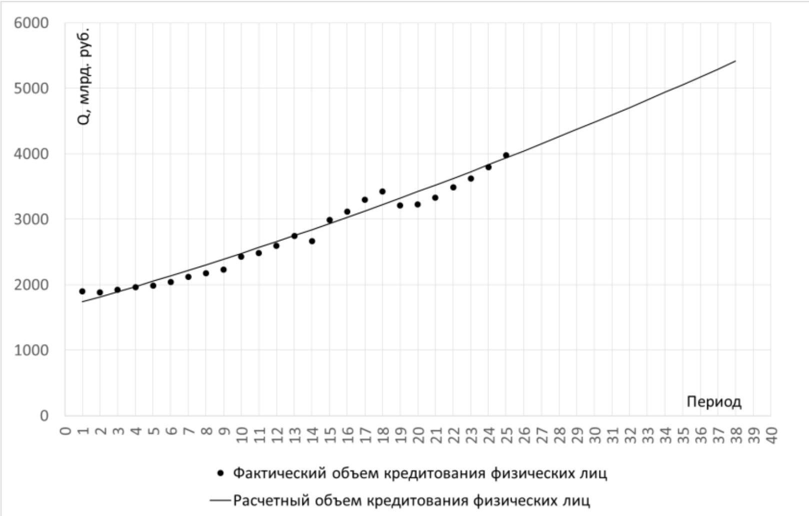

Рис. 10. Фактический и расчетный объем кредитования физических лиц

На основе системы уравнений оптимизации кредитного портфеля рассчитаем значения долей кредитов в общем объеме кредитования с учетом параметра риска и без учета параметра риска для периода №38 (рис. 11).

На основе рисунка можно сделать вывод о том, что при оптимизации сократилась доля ипотечных кредитов и выросли доли автомобильных и потребительских кредитов.

Оптимизация без учета параметра риска дает следующие результаты:

– доля ипотечных кредитов равна 0,38;
– доля автомобильных кредитов равна 0,09;
– доля потребительских кредитов равна 0,53.

Оптимизация с учетом параметра риска приводит к тому, что по сравнению с долями, полученными при оптимизации без учета риска:

– доля ипотечных кредитов снижается до 0,37;
– доля автомобильных кредитов увеличивается до 0,14;
– доля потребительских кредитов снижается до 0,49.

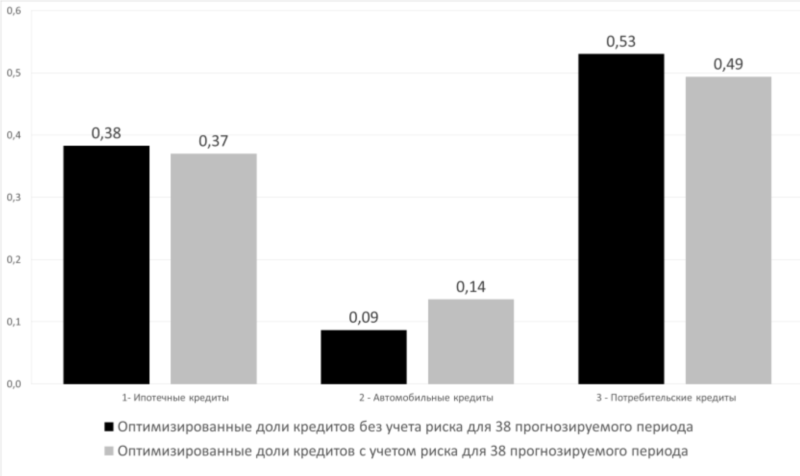

Рис. 11. Сравнение оптимизированных долей кредитов с учетом и без учета риска

Такой результат подтверждает выводы, сделанные на основе результатов расчетов, представленных ранее. Доля автомобильного кредита повышается при наложении ограничения на параметр риска, так как дисперсия этого вида кредитования наименьшая, а доли ипотечного и потребительского видов кредитования снижаются, так как их дисперсия наибольшая.

На рис. 12 представлены диаграммы, позволяющие сравнить показатели оптимизированных прибылей портфеля за 38-й прогнозный период с учетом и без учета риска, а также показать, как изменился риск с учетом оптимизации.

На основе рисунка можно сделать вывод о том, что при оптимизации портфеля кредитов с учетом параметра риска прибыль банка снижается с 82,95 млрд руб. до 81,65 млрд руб., а параметр риска снижается с 4,42 млрд руб. до 4,2 млрд руб.

Таким образом, в результате оптимизации кредитного портфеля при снижении риска снижается и сумма прибыли банка. Предложенная система оптимизации позволяет снизить риск на 5% при снижении прибыли на 2%.

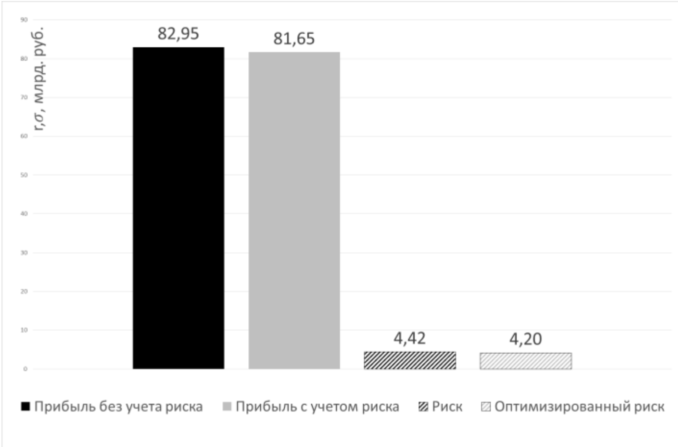

Рис. 12 Сравнение оптимизированной прибыли портфеля с учетом и без учета риска за 38 период

6. Заключение

Разработана модель, позволяющая оптимизировать прибыль коммерческого банка от кредитования физических лиц. Модель сформирована на основе методов регрессионного анализа и множителей Лагранжа и с учетом концепции Марковица.

В результате расчетов по модели на основе фактических статистических данных за период 31.03.2015 – 30.06.2021 гг. была сформирована оптимизированная структура кредитного портфеля банка, при которой максимизируется прибыль, а в случае ограничения параметра риска расчеты позволили максимизировать прибыль и снизить риск.

Модель может применяться для вычисления оптимальных структур кредитных портфелей в прогнозных периодах, а также позволяет управлять риском при планировании деятельности.

Важно отметить, что в результате сформировано две модели, позволяющие максимизировать прибыль кредитного портфеля. Одна из моделей включает в себя параметр риска, на который устанавливается ограничение, вторая модель максимизирует прибыль портфеля без учета параметра риска. Также произведен анализ экономической эффективности предложенной модели оптимизации.

Литература

1. БЕРЗОН Н.И., ВОЛОДИН С.Н. *Оценка финансовых активов по критерию «Риск – доходность» с учетом длительности инвестирования* // Экономический журнал ВШЭ. – 2010. – №3. – С. 311–325.
2. БОРИСЕНКО Ю.Л. *Анализ проблем кредитных отношений в работе банка* // Экономика, управление, финансы: теория и практика: сборник. – 2019. – С. 114
3. ГАРИБОВА У.Н. *Построение инвестиционного портфеля по модели г. Марковица* // Хроноэкономика. – 2017. – №6(8). – С. 41–46.
4. ГЕРАСЬКИН М.И., СИМАГИНА С.Г. *Управление инновациями: математические методы* : учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2018.
5. ДАНИЛОВА Т.Н., СМИРНОВА О. С. *Банк как финансовый посредник трансформации сбережений в инвестиции* // Финансы и кредит. – 2004. – №11(149). – С. 20–26.
6. ДУБРОВИН В.И., ЮСЬКИВ О.И. *Модели и методы оптимизации выбора инвестиционного портфеля* // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – 2008. – №1(19). – С. 49–59.
7. ИВАНЧЕНКО И.С., ОСЕИ Д.Д. *Оптимизация структуры российских золотовалютных резервов при помощи модели Блэка – Литтермана* // Финансовый журнал. – 2018. – №1(41). – С. 26–38.
8. КАЛУГИНА Т.О. *Применение портфельной теории Марковица при формировании оптимального кредитного портфеля* // Современные тенденции в экономике и управлении: новый взгляд. – 2014. – №30. – С. 167–171.

9. КОРШУНОВА Т.С. *Формирование инвестиционного портфеля по модели марковица* // Хроноэкономика. – 2021. – №6(34). – С. 37–42.
10. КРИНИЧАНСКИЙ К.В., БЕЗРУКОВ А.В. *Некоторые практические задачи модели оптимизации портфеля* // Журнал экономической теории. – 2012. – №3. – С. 142–147.
11. ЛУПАНДИН В.В., ЕГОРОВ И.С. *Применение модели Марковица для расчета оптимального портфеля* // Достижения науки и образования. – 2019. – №1(42). – С. 34–35.
12. МАМЕДОВА Л.М.К., КАЗИМОВ Ш.Э. О. *Оптимизация инвестиционного портфеля на основе многокритериальной математической модели на фондовом рынке способом линейной свертки* // Проблемы науки. – 2018. – №4(28). – С. 80–85.
13. ОЛЕКСИК Р.С. *Формирование инвестиционного портфеля на основнии модели Марковица* // Хроноэкономика. – 2016. – №2(2). – С. 29–31.
14. ПРОДОЛЯТЧЕНКО П.А. *Процесс депозитования в деятельности банка* // Финансы и кредит. – 2012. – №47(527). – С. 22–26.
15. СЕМЕНЫЧЕВ В.К. *Методология и цифровая платформа анализа динамики отраслевых циклов для сбалансированного и устойчивого пространственного развития России*. – Самара: Изд-во СамНЦ РАН, 2022. – 348 с.
16. СЕМУКОВА Ю.М. *Управление рисками в коммерческом банке* // Экономика и бизнес: теория и практика. – 2020. – №6. – С. 512–518.
17. СИМОНЕНКОВА Е.В. *Формирование инвестиционного портфеля по модели Марковица* // Хроноэкономика. – 2017. – №6(8). – С. 37–42.
18. ФЕДОСЕЕВ А.А. *Модификация модели Марковица путем учитывания дополнительных характеристик ценных бумаг* // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2015. – №3. – С. 117–126.

19. ФЕДОСЕЕВ А.А. *Решение трехкритериальной и четырехкритериальной моделей Марковица* // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2014. – №3. – С. 197–207.
20. ЧЕРНОВАЛОВ С.С. *Способы и инструменты риск-менеджмента при управлении банковскими рисками* // Известия СПбГЭУ. – 2012. – №3. – С. 124–127.
21. *https://www.vtb.ru/ir/statements/results/* (дата обращения: 07.05.2023).
22. *https://www.cbr.ru/about_br/dir/rsd_2022-12-29_23_03/* (дата обращения: 23.11.2023).
23. WALTERS A.A. *Production and cost functions: and econometric survey* // Econometrica. – 1963. – Vol. 31, No. 1. – P. 1–66.

OPTIMIZATION OF THE BANK'S LOAN PORTFOLIO TAKEN INTO ACCOUNT OF MARKET RISK BASED ON THE LAGRANGE MULTIPLIERS METHOD

Michail Geraskin, Samara National Research University, Samara, Doctor of Science, professor (innovation@ssau.ru).
Maria Ivanova, Samara National Research University, Samara, Graduate Student (ivanova.maria.ami@gmail.com).

Abstract: The article considers the problem of forming an optimal portfolio of commercial bank loans. The subject of the study is the mechanism of bank profit formation through lending to individuals. The relevance of the research topic is due to the fact that at present, in the conditions of increasing competition in the financial services market, one of the urgent tasks of banks is the optimization of loan portfolios. One of the ways to solve this problem is to develop a mathematical model that will allow effectively managing the loan portfolio and optimizing financial risks. An optimization model has been developed and statistical data have been analyzed, on the basis of which regression models are compiled, and the limitations taken into account in the model have been analyzed. The conditions for optimizing the bank's loan portfolio are proposed, allowing for maximizing the bank's profit. Optimization models allow choosing such shares of lending types that maximize the bank's total profit from lending to individuals. A set of conditions for the optimal loan portfolio has also been determined, providing a limit on the risk of interest rate volatility, which is one of the types of market risk. The results of numerical experiments on the example of PAO VTB Bank are presented, showing the economic effect of the proposed developments. The obtained results and the developed models of loan portfolio optimization can be used for planning of the banks' activities. The conducted research expands the scientific framework of *understanding the importance of applying optimization processes in compiling the loan portfolio by banks.*

Keywords: bank loan, optimization, Lagrange function, loan portfolio, mortgage loan, car loan, consumer loan.

УДК 330.4
ББК 65.05
DOI: 10.25728/ubs.2024.110.8

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.В. Клочковым.

Поступила в редакцию 18.12.2023.
Опубликована 31.07.2024.