ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РАВНОВЕСИЯ В БЕЗОПАСНЫХ СТРАТЕГИЯХ ПО РЕНИ

Искаков М. Б.[1], Искаков А. Б.[2]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Статья является продолжением цикла статей 2018, 2022, 2023 годов посвященного теоретическому обоснованию равновесия в безопасных стратегиях (РБС), как концепции решения игровых задач. Представлен метод конструирования теорем существования РБС из известных теорем существования равновесия Нэша (РН). При этом исходная теорема существования РН приводится к стандартной формулировке, которая, как условие, вставляется в текст мета-теоремы существования РБС. Согласно данному методу из теоремы Рени (1999) существования равновесий Нэша получены и доказаны две альтернативных теоремы существования РБС. Общая схема вывода теорем существования выглядит следующим образом. В разделе 2 кратко изложены теоремы, опубликованные в предыдущих работах автора. В разделе 3 приводятся две оригинальные теоремы из работы Рени. В разделе 4 дается подробная интерпретация условий теорем Рени в сравнении с условиями теоремы Дебре. В разделе 5 дается подробный анализ теоремы Рени. На ряде примеров условие теоремы интерпретируется как условие отсутствия точек перескока или точек, гарантирующих наилучший ответ. В разделе 6 формально, методом мета-теоремы, строятся два критерия существования для РБС, использующие исходные теоремы существования РН. В разделах 7 и 8 сформулированы и доказаны две теоремы, специально доработанные для решения прикладных задач (пространственная конкуренция Хотеллинга, конкуренция за ренту Таллока, олигополия Бертрана – Эджворта). Все рассмотренные теоремы сведены в итоговую таблицу.

Ключевые слова: равновесие в безопасных стратегиях, равновесие Нэша, теоремы существования решения игровых задач, теорема Рени, задача пространственной конкуренции Хотеллинга, задача конкуренции за ренту Таллока – Скапердаса.

[1] *Михаил Борисович Искаков, к.т.н.* (*mih_iskakov@mail.ru*).
[2] *Алексей Борисович Искаков, к.ф.м.н.* (*isk_alex@mail.ru*).

1. Введение

Концепция РБС была предложена в статье [1, 2]. Поскольку модель равновесия была более широкой, чем РН, то первоначальное направление исследований сводилось к поиску задач, для которых оно работает. Сначала проверялось наличие РБС для отдельных задач.

Если рассматривать РН как базовую классическую модель решения в теории игр, то для очень многих задач оно не просто существует, но имеется большое множество РН, причем возникает проблема выбора из этого множества предпочтительных решений. Противоположный случай менее распространен, но имеется ряд классических задач, для которых РН не существует. Такой ряд наиболее известных и важных задач был рассмотрен в классической статье [9], и именно он был взят за основу для тестирования модели РБС.

В работе Дасгупты и Маскина рассматриваются задачи: пространственной конкуренции Хотеллинга [5, 13], дуополия Бертрана – Эджворта [6, 11], модель рынка страхования Ротшильда – Стиглица – Вильсона [15, 20]. Кроме них была также рассмотрена задача конкуренции за ренту Таллока – Скапердаса [17, 18, 19]. Оказалось, что весь рассмотренный ряд наиболее известных задач без РН имеет решение РБС, причем с хорошими свойствами, сравнительно с альтернативными подходами к их решению: равновесием Нэша в смешанных стратегиях, ad hoc решениями для частного случая конкретной задачи, стратегий наказания при переходе к динамической модели повторяющихся игр, коллективно оптимальных моделей решения (оптимальность по Парето, кооперативные, коалиционные игры и т.д.). Все РБС решения этого ряда задач представлены в итоговой статье [12].

Сравнение с альтернативами проведено в [4]. В качестве РБС-решений были найдены принципиально новые решения с убедительными интерпретациями; другие методы не давали таких решений. Сравнительно с решениями в смешанных стратегиях, достоинством РБС является простота и возможность получить решение в явном виде. Сравнительно с народными теоремами – единственность равновесий или их небольшое количество (одно-два). Сравнительно с ad hoc методами – универсальная применимость к многим разным задачам. Сравнительно с методами решения в угрозах и контругрозах (которые кажутся наиболее близкими по идеологии к РБС) получались совершенно другие решения, которые проявили различие в подходе к возникающим игровым угрозам. Подход РБС стремится найти устойчивые профили не на основе стратегий наказания, а через введение дополнительных правил индивидуального поведения игроков, следующих принципу осторожности.

Поскольку для представительной выборки задач без РН были найдены РБС решения, то естественно возник вопрос, можно ли получить какие-то общие условия существования РБС, очертить круг задач, к которым применимы данные решения, т.е. построить теорию существования РБС. Данная статья является непосредственным продолжением статей [3, 4]. Статьи написаны по плану, сформулированному совместно с Клодом д'Апремоном и Алексеем Искаковым во время работы над статьей [12]. Автор выражает глубокую благодарность своим соавторам.

План теоретического обоснования равновесия в безопасных стратегиях как концепции решения игровых задач предполагал преодоление ряда проблем. В настоящий момент разрешены следующие из них.

1. В качестве теоретической основы метода сформулирован вывод определения равновесия в безопасных стратегиях (РБС) как развитие концепции теоретико-игрового равновесия по Нэшу (РН).

2. На этой основе разработан метод конструирования теорем существования РБС из известных теорем существования РН. При этом исходная теорема существования РН приводится к стандартной формулировке, которая вставляется в текст мета-теоремы существования РБС как условие.

3. Метод конструирования теорем существования опробован на трех исходных теоремах: Дебре (1952) [10], Рени (1999) [14], Бика (2009) [8].

4. Полученные теоремы существования РБС опробованы и доработаны на хрестоматийных задачах Хотеллинга [13, 5], Таллока – Скапердаса [17, 18, 19], Бертрана – Эджворта [6, 11], не имеющих РН при некоторых значениях параметров. При этом

если условия стандартной формулировки не выполняются для тестовых задач, слишком жесткие, то разрабатывается смягченный вариант теоремы, под условия которого попадают тестовые задачи.

5. Таким образом, в рамках общего метода сформулированы три рабочих теоремы существования РБС решений, применимые на тестовых эталонных задачах. Разрешение первого пункта плана опубликовано в [4], второго – в [3]. В первой из статей дается система определений РБС, выведенная из определения РН, а также обсуждается место концепции РБС среди других моделей ограниченной рациональности. Во второй статье на основе этой аналогии строится метод конструирования теорем существования РБС из известных теорем существования РН. Теорема существования РБС по теории существования социального равновесия Дебре с тестированием на указанных задачах опубликована в совместной работе [12]. В данной статье предложенный метод получения теорем существования РБС тестируется на теории существования РН Рени.

2. Необходимые исходные понятия, утверждения и теоремы

Приведем введенные определения и доказанные результаты из предыдущих статей [3, 4], используемые в этой. Система определений равновесия в безопасных стратегиях. Рассматривается некооперативная игра n участников $G = (i \in N,\ s_i \in S_i, u_i \in \mathbb{R})$ в нормальной форме.

Определение 2.1. **Угрозой** игрока j игроку i в профиле стратегий s называется такая пара профилей $\{s, (s'_j, s_{-j})\}$, что $u_j\big(s'_j, s_{-j}\big) > u_j(s)$ и $u_i\big(s'_j, s_{-j}\big) < u_i(s)$. Профиль стратегий s называется **содержащим угрозу**, а s' – **угрожающим** игроку i со стороны игрока j.

Определение 2.2. Стратегия s_i игрока i называется **безопасной стратегией** для этого игрока при заданных стратегиях s_{-i} всех других игроков, если профиль s не содержит угроз игроку i. Профиль стратегий s называется **безопасным профилем**, если все его стратегии безопасны.

Определение 2.3. **Безопасным отклонением** игрока i в профиле s называется такая стратегия $s_i{}'$, что $u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s)$ и $u_i(s_i', s_j', s_{-ij}) \geq u_i(s)$ для любой угрозы $\{(s_i', s_{-i}), (s_i', s_j', s_{-ij})\}$ любого игрока $j \neq i$ игроку i.

Определение 2.4. Безопасный профиль стратегий называется **равновесием в безопасных стратегиях (РБС)**, если ни один игрок не может увеличить свой выигрыш безопасным отклонением.

Первое важное свойство РБС вытекает непосредственно из его определения.

Утверждение 2.1. Любое равновесие Нэша является равновесием в безопасных стратегиях.

Доказательство. В равновесии Нэша нет угроз, поэтому он является безопасным профилем. Никакой игрок в равновесии Нэша не может увеличить свой выигрыш никаким отклонением. Оба условия РБС выполнены. □

Чтобы охарактеризовать содержащиеся в игре угрозы количественно, можно поставить в соответствие исходной игре такую, в которой функции выигрышей учитывают ожидание наихудшей имеющейся в профиле угрозы. Обозначим как $Q_i(s_{-i})$ множество безопасных стратегий игрока i при заданных стратегиях s_{-i} других игроков. Заметим, что $Q_i(s_{-i})$ может оказаться пустым, если все стратегии игрока i небезопасны при s_{-i}. Обозначим как $Q^{(i)}$ множество безопасных профилей игрока в игре.

Определение 2.5. **Безопасный выигрыш** игрока i в профиле стратегий s равен его выигрышу при реализации наихудшей угрозы в небезопасном профиле и совпадает с его выигрышем в безопасном профиле, т.е.

$$v_i(s) = \begin{cases} \inf\limits_{i \neq j, s_i' : u_j(s_j', s_{-j}) > u_j(s)} u_i(s_j', s_{-j}), s_i \notin Q_i(s_{-i}), \\ u_i(s), s_i \in Q_i(s_{-i}). \end{cases}$$

Соответствующей игре G **игрой угроз** называется игра $\tilde{G} = (S_i, v_i)_{i=1}^N$.

Введённая функция $v_i(s)$ позволяет охарактеризовать безопасность профиля и безопасность отклонений простым способом. Будем рассматривать только такие отклонения $s \xrightarrow{i} s'$, для которых $u_i(s') \geq u_i(s)$ (будем называть их выгодными отклонениями).

Утверждение 2.2. Профиль s безопасен для игрока $i \Leftrightarrow u_i(s) = v_i(s)$.

Профиль s небезопасен для игрока $i \Leftrightarrow u_i(s) > v_i(s)$.

Выгодное отклонение $s \xrightarrow{i} s'$ безопасно для игрока $i \Leftrightarrow v_i(s') \geq u_i(s)$.

Выгодное отклонение $s \xrightarrow{i} s'$ небезопасно для игрока $i \Leftrightarrow v_i(s') < u_i(s)$.

Утверждение 2.3. Если безопасный профиль s^* является строгим равновесием Нэша в игре угроз $\tilde{G}$, то он является РБС в исходной игре. Если s^* является РБС в исходной игре G, то s^* является он является равновесием Нэша в игре угроз $\tilde{G}$.

Слабое равновесие в безопасных стратегиях.

Определение 2.6. **Безопасное отклонение** $s_i{}'$ игрока i в профиле s называется **тривиальным**, если существует такая угроза $\{(s_i', s_{-i}), (s_i', s_j', s_{-ij})\}$ игрока $j \neq i$ игроку i, что $u_i\left(s_i', s_j', s_{-ij}\right) = u_i(s)$.

Определение 2.7. Безопасный профиль стратегий называется **слабым равновесием в безопасных стратегиях**, если ни один игрок не может сделать не тривиальное безопасное отклонение.

Утверждение 2.3 ставит в соответствие РБС и равновесие Нэша. Теорема утверждает более сильный результат, как необходимое и достаточное условие.

Теорема 2.1. *Профиль s^* является равновесием в безопасных стратегиях тогда и только тогда, когда выполняются три условия:*

1) s^* *– безопасный профиль;*
2) s^* *– равновесие Нэша в игре угроз* $\tilde{G}$*;*
3) $\forall i, \forall s_i' \colon v_i(s_i', s_{-i}^*) = v_i(s^*) \Longrightarrow u_i(s_i', s_{-i}^*) = u_i(s^*)$.

Доказательство приведено в [3] как «теорема 1». □

Следствие. Профиль в игре G является слабым равновесием в безопасных стратегиях тогда и только тогда, когда он безопасен в игре G и является равновесием Нэша в игре угроз $\tilde{G}$.

Метатеорема. Теоремы существования РБС строятся, как конструктор, из известных теорем существования РН, приведенных к стандартному виду. В литературе формулировки этих теорем различны. Требуется эквивалентно переформулировать их так, чтобы они различались только определенным условием, которое будет переменной частью в метатеореме.

Рассмотрим произвольную игру в нормальной форме: $G = (N, S_i, u_i(s_1, \dots, s_n), i \in N, s_i \in S_i)$. Обозначим как «(#)» некоторое ограничивающее условие, однозначно определяющее подмножество множества всех возможных игр *G*. Это условие и будет переменной частью в метатеореме.

Пример 2.1. Определим функцию наилучшего ответа: $BR_i(s_{-i}) = \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$. Пусть условие задается так: (#1):= «$\forall i, \forall s_{-i}, \exists! BR_i(s_{-i})$, функции $BR_i(s_{-i})$ непрерывны по s_{-i}». *Это условие является достаточным условием для существования РН в игре*.

Метод конструирования теорем существования РБС основан на двух идеях. Первой составляющей является понятие сильной угрозы.

Определение 2.8. **Угроза** игроку i в профиле s является **сильной**, если существует безопасная стратегия $s' = (s_i', s_{-i})$ такая, что $u_i(s') = v_i(s') > v_i(s)$. Для игрока i в игре *G* выполняется **условие сильных угроз**, если для него содержащиеся в любом опасном профиле угрозы являются сильными. Игра G называется игрой **с сильными угрозами**, если для всех игроков в ней выполняется условие сильных угроз.

Вторая составляющая идеи метатеоремы существования РБС состоит в том, что если для игры выполняется требование сильных угроз и имеется некоторая известная теорема существования равновесия Нэша, то можно потребовать выполнения условий этой теоремы только на безопасном множестве (или даже на некотором предпочтительном подмножестве этого множества, содержащего в себе наилучшую безопасную альтернативу – достигаемое максимальное значение безопасного выигрыша), и этого будет достаточно для существования РБС.

Пусть имеется некоторое верное утверждение (исходная теорема, приведенная к стандартному виду): «*Если для игры выполняется условие* (#), *то в игре существует равновесие Нэша*». Пусть это условие (#) выполняется на множествах безопасных стратегий игроков. Такое предположение надо сформулировать строго. Введем константу $C_{\min} \leq u_i(s), \forall i, s$, которая обозначает некоторое штрафное значение выигрыша.

Определение 2.9. Пусть дана игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ с множествами безопасности $Q^{(i)} \subseteq S$. Игра $\bar{G}_{Q^{(i)}}(S_i, \bar{u}_i), \bar{u}_i(s) = = \begin{cases} u_i(s), s \in Q^{(i)}, \\ C_{min}, s \notin Q^{(i)} \end{cases}$ называется **соответствующей ей обрезанной игрой**. Условие (#) существования равновесия Нэша **выполняется для игры *G* на безопасных множествах** $Q^{(i)} \subseteq S$, если оно выполняется для соответствующей обрезанной игры.

Таким образом, если для игры выполняются два условия: *условие теоремы* существования *равновесия Нэша на безопасном множестве* и *условие сильных угроз*, то можно ожидать, что в данной игре имеется РБС. Условие исходной теоремы (#) обеспечивает наличие равновесия в нужном множестве, а условие сильных угроз гарантирует его устойчивость в смысле РБС для всей игры. Метатеорема:

Теорема 2.2. *Пусть верно утверждение: «Если для игры выполняется условие* (#)*, то в игре существует равновесие Нэша». Если для игры* $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ *выполняется условие сильных угроз, а на её безопасных множествах* $Q^{(i)} \subseteq S$ *выполняется условие* (#) *существования равновесия Нэша, тогда в игре G существует равновесие в безопасных стратегиях.*

Доказательство приведено в [3] как «теорема 2». □

Для рассмотренного выше примера 2.1 полученная при помощи метатеоремы 2.2 теорема существования РБС будет формулироваться так: *«Если для игры* $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ *выполняется условие сильных угроз, а на её безопасных множествах* $Q^{(i)} \subseteq S$ *выполняется условие* $\forall i \ \forall s_{-i} \ \exists! BR_i(s_{-i})$, *функции* $BR_i(s_{-i})$ *непрерывны по* s_{-i}, *тогда в игре G существует равновесие в безопасных стратегиях».*

Локальный вариант теоремы. Утверждение теоремы носит общий характер и содержательно слабо, так как требуемые в ней условия достаточно сильны. Ослабление условия *сильных угроз* заключается в том, что его выполнение требуется только по отношению к некоторому множеству $B = \times_{i=1}^{N} B_i$, где множества B_i предполагаются компактными выпуклыми подмножествами S_i.

Определение 2.10. Для игрока i выполняется **условие сильных угроз в *B***, если для каждого $s_{-i} \in B_{-i}$ существует непустое подмножество $\tilde{Q}_i(s_{-i}) \subseteq Q_i(s_{-i}) \cap B_i$ такое, что для каждой стратегии $s_i \notin \tilde{Q}^{(i)}$ существует стратегия $s_i' \in \tilde{Q}^{(i)}$ такая, что $u_i(s_i', s_{-i}) = v_i(s_i', s_{-i}) > v_i(s_i, s_{-i})$. Игра G называется игрой ***с сильными угрозами по отношению к B***, если для всех игроков выполняется условие сильных угроз в *B*.

Теорема 2.3. *Пусть верно утверждение: «Если для игры выполняется условие* (#)*, то в игре существует равновесие Нэша». Если игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^{N}$ является игрой с сильными угрозами по отношению к B, а на её безопасных множествах $Q^{(i)} \subset S$ выполняется условие* (#) *существования равновесия Нэша, тогда в игре G существует равновесие в безопасных стратегиях.*

Доказательство приведено в [3] как «теорема 3». □

3. Теорема Рени (1999)

Статья Рени [14] предлагает результат существования равновесий по Нэшу в чистых стратегиях для большого класса разрывных игр. Покажем подробно на ее примере, как работает метатеорема. Результаты Рени основаны на условии, называемом *гарантией лучшего ответа*. Игра гарантирует лучший ответ, если для каждой неравновесной стратегии s^* и каждого предела вектора выигрыша u^*, возникающего при приближении стратегий игроков к s^*, у некоторого игрока i имеется стратегия, приносящая выигрыш строго выше u_i, даже если другие игроки слегка отклоняются от s^*. Главный результат заключается в том, что игры с компактными выпуклыми пространствами стратегий и с выигрышами, которые являются квазивогнутыми по собственным стратегиям, обладают равновесием по Нэшу в чистых стратегиях, если при этом они гарантируют лучший ответ.

Гарантия лучшего ответа объединяет и обобщает два условия: *взаимную верхнюю полунепрерывность* и *гарантию выигрыша*. Игра взаимно верхнеполунепрерывна, если всякий раз, когда выигрыш какого-либо игрока прыгает вниз, выигрыш какого-то другого игрока прыгает вверх. Игра гарантирует выигрыш, если для каждого вектора стратегий s у каждого игрока есть стратегия, которая фактически гарантирует ему выигрыш, который он получает в s, даже если другие игроки сыграют немного иначе, чем в s. Оба условия выполняются во многих экономических играх, и их часто довольно просто проверить.

Формально эти понятия задаются следующим образом. Имеется N игроков. Каждый игрок $i = 1, 2, ..., N$ имеет множество чистых стратегий S_i – непустое компактное подмножество топологического векторного пространства, а также ограниченную функцию $u_i\colon S \to \mathbb{R}$, где $S = \times_{i=1}^{N} S_i$. При этих условиях игра $G = (S_i, u_i)_{i=1}^{N}$ называется *компактной игрой.*

Вектор выигрышей игроков обозначается как u: $S \to \mathbb{R}^N$ и определяется как $u(s) = (u_1(s), ..., u_N(s))$ для каждого $s \in S$. Графиком вектора выигрышей является подмножество множества $S \times \mathbb{R}^N$, определяемое как $\{(s, u) \in S \times \mathbb{R}^N |\, u = u(s)\}$. Наконец, если каждое S_i выпукло и для каждого i и каждого $s_{-i} \in S_{-i}$, $u_i(\cdot, s_{-i})$ квазивогнута на S_i, то определяется, что $G = (S_i, u_i)_{i=1}^{N}$ *квазивогнута*.

Определение 3.1. (*Рени-1*). Игрок i **может гарантировать выигрыш** $\alpha \in \mathbb{R}$ при $s \in S$, если существует $s_i' \in S_i$, такое что $u_i(s_i', s_{-i}') \geq \alpha$ для всех s_{-i}' в некоторой открытой окрестности s_{-i}.

Таким образом, выигрыш может быть гарантирован игроком i в профиле s, если игрок i имеет стратегию, которая гарантирует по крайней мере этот выигрыш, даже если другие игроки немного отклоняются от s.

Определим множество *графика вектора выигрышей игры* как $\Gamma(G) = \{(s, u(s)), s \in S\}$. Дальнейшее определение использует понятие *замыкания графика вектора выигрышей игры*. В контексте метрического пространства под этим понимается следующее: пара $(s^*, u^*) \in \overline{\Gamma(G)}$ находится в замыкании графика вектора выигрышей, если предельные значения вектора выигрышей u^* являются пределом последовательности векторов выигрышей $\left(s_i^k, u_i(s_i^k)\right) \xrightarrow{k\to\infty} (s^*, u^*)$, некоторой последовательности стратегий, сходящейся к s^*. При этом может быть $u(s^*) \neq u^*$.

Определение 3.2. (*Рени-2*). Игра $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$ **гарантирует лучший ответ** (better-reply secure – BRS), если всякий раз, когда (s^*, u^*) находится в замыкании графика её вектора выигрышей и s^* не является равновесием, некоторый игрок i может гарантировать выигрыш строго больше u_i^* в профиле s^*.

Таким образом, игра гарантирует лучший ответ, если для любого неравновесного профиля стратегий s^* и любого вектора выигрышей u^*, возникающего как предел при последовательности стратегий, приближающихся к s^*, некоторый игрок i имеет стратегию, дающую выигрыш строго больше u_i^*, даже если другие игроки немного отклоняются от s^*.

Теперь можно сформулировать основную теорему Рени.

Теорема 3.1 (Рени, т. 3.1 [14]). *Если игра* $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$ *компактна, квазивогнута и гарантирует лучший ответ, то она обладает равновесием Нэша в чистых стратегиях.*

Соответствующее условие (#2):= «*игра* $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$ *компактна, квазивогнута и гарантирует лучший ответ*».

В то время как гарантия лучшего ответа проверяется непосредственно, иногда проще проверить другие приводящие к ней условия. Рени предложил также два довольно полезных условия, которые в совокупности подразумевают гарантию лучшего ответа.

Определение 3.3. (*Рени-3*). Игра $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$ **гарантирует выигрыш** (payoff secure – PS), если для каждого $s \in S$ и каждого $\varepsilon > 0$ каждый игрок i может гарантировать выигрыш $u_i(s) - \varepsilon$ в (профиле стратегий) s.

Гарантия выигрыша требует, чтобы для каждого профиля стратегий s каждый игрок имел (такую) стратегию, которая фактически гарантирует ему выигрыш, который он получает в точке s, даже если остальные игроки слегка отклонятся от s.

Определение 3.4. (*Рени-4*). Игра $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$ **взаимно верхнеполунепрерывна (в.в.п.н.)** (reciprocally upper semicontinuous – RUSC), если всякий раз, когда (s, u) находится в замыкании графа её вектора выигрышей и $u_i(s) \leq u_i$ для каждого игрока i, тогда $u_i(s) = u_i$ для каждого игрока i.

Взаимная в.п.н. была впервые предложена под названием свойства *дополняющих разрывностей*. Она означает, что выигрыш некоторого игрока должен прыгать вверх всякий раз, когда выигрыш некоторого другого игрока прыгает вниз.

***Утверждение 3.1.* (*Рени*).** Если игра $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$ взаимно верхнеполунепрерывна и гарантирует выигрыш, то она гарантирует лучший ответ.

Следствие 3.1 (*Рени, сл.* 3.3 [14]]). Если игра $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$ компактна, квазивогнута, взаимно верхнеполунепрерывна и гарантирует выигрыш, то в ней имеется равновесие Нэша в чистых стратегиях.

Соответствующее условие (#3):= «*игра $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$ компактна, квазивогнута, взаимно верхнеполунепрерывна и гарантирует выигрыш*»

Результаты Рени были развиты в статье [5], которые также использованы при разработке теоремы существования РБС, так что здесь их также следует привести.

Определение 3.5. (*Баг, Джофр*). Игра $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$ **слабо взаимно верхнеполунепрерывна (с.в.в.п.н.)** (weakly reciprocally upper semicontinuous – WRUSC), если для любого $(s^*, u^*) \in \overline{\Gamma(G)} \backslash \Gamma(G)$ существует игрок i и $s'_i \in S_i$, такие что $u_i(s'_i, s^*_{-i}) > u^*_i$.

***Утверждение 3.2.* (*Баг, Джофр*, утв. 1 [7]).** Если игра $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$ слабо взаимно верхнеполунепрерывна и гарантирует выигрыш, то она гарантирует лучший ответ.

Соответствующее условие (#4):= «*игра $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$ компактна, квазивогнута, слабо взаимно верхнеполунепрерывна и гарантирует выигрыш*»

Таким образом, для существования равновесия Нэша в игре достаточно компактности, квазивогнутости, свойств гарантии выигрыша и с.в.в.п.н.

4. Анализ и интерпретация условий теоремы Рени. Сравнение с теоремой Дебре

Чтобы продемонстрировать **соотношения между разными теоремами существования**, рассмотрим несколько примеров. Хотя теорема Рени более мощная, но следствие Рени оперирует более понятными и легко проверяемыми условиями, поэтому именно следствие, как правило, становится основой для дальнейших исследований. То, что применимость теоремы Рени существенно шире, чем её следствия, иллюстрирует следующий пример.

Пример 4.1. Игра $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$, где $N = 2$, $S_i = [0, 1]$,

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \begin{cases} 1 - \left(s_i - \frac{1+s_{-i}}{2}\right)^2, s_i \in \left[s_{-i}, \frac{3+s_{-i}}{4}\right], \\ 0, s_i \notin \left[s_{-i}, \frac{3+s_{-i}}{4}\right]. \end{cases}$$

Игра имеет единственное равновесие Нэша $(s_1^*, s_2^*) = (1, 1)$. Она компактна, квазивогнута, верхнеполунепрерывна. Игра гарантирует лучший ответ, так как для $\forall(s_i, s_{-i}) \neq (1, 1)$ либо один, либо другой игрок могут отклониться в точку максимума своей целевой функции $s_i = \frac{1+s_{-i}}{2}$ так, что малое отклонение игрока $(-i)$ не выведет исход игры в область, где $u_i(s_i, s_{-i}) = 0$, т.е. условие определения Рени-2 выполняется. Но игра не гарантирует выигрыш, так как для точек $s_i < 1$, $s_{-i} = 1$ игрок i может отклониться в единственную точку с ненулевым выигрышем $(s_i^*, s_{-i}^*) = (1,1)$, а любое малое отклонение игрока $(-i)$ выведет исход игры в область, где $u_i(s_i, s_{-i}) = 0$, т.е. условие определения Рени-3 гарантированного выигрыша не выполняется. То есть для этой игры выполняются условия теоремы Рени, где ограничение накладывается на хотя бы одного из двух игроков, но ни следствие Рени, ни утверждение Бага – Жофра с ограничением на обоих игроков не могут быть применены.

В задаче Хотеллинга возникает именно такая ситуация, что заставило сформулировать более сложные варианты теорем в последующих разделах 7 и 8.

Сравнение теорем Дебре и Рени.

Теорема Дебре (1952) формулируется следующим образом [10].

Полигедрон – множество в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфное геометрическому полигедрону (т.е. объединению конечного числа выпуклых оболочек в $\mathbb{R}^n$). Он очевидно замкнут.

Пусть при заданном s_{-i} (т.е. действиях всех остальных) выбор i-го агента ограничен *непустым компактным* множеством $A_i(s_{-i}) \subset S_i$. Агент i выбирает s_i из $A_i(s_{-i})$ так, чтобы максимизировать $u_i(\, s_{-i},\, s_i)$, которая предполагается непрерывной по s_i в $A_i(s_{-i})$. Множества $A_i(s_{-i})$ интерпретируется как задающие совокупность социально приемлемых выборов. Это делает интуитивным следующее определение *социального равновесия по Дебре*.

Определение (*Дебре*). s^* является **точкой социального равновесия**, если для всех $i = 1, \dots, n$: $s_i^* \in A_i(s_{-i}^*)$ *и* $u_i(s^*) = \max\limits_{s_i \in A_i(s_{-i}^*)} u_i(s_{-i}^*,\, s_i)$.

График функции $A_i(s_{-i}^*)$ определяется как подмножество $S_{-i} \times S_i$ следующего вида: $\Gamma_i = \{(s_{-i}, s_i) \mid s_i \in A_i(s_{-i})\}$. Для любого s_{-i}, множество $A_i(s_{-i})$ всегда предполагается непустым.

Теорема 4.1. (Дебре, т.1 [10]). *Пусть для всех $i = 1, \dots, n$ множества S_i – стягиваемые полигедроны, $A_i(s_{-i})$ – многозначные функции из S_{-i} в S_i с замкнутыми графиками Γ_i, u_i – непрерывные функции из Γ_i в дополненную ось действительных чисел такие, что $\varphi_i(s_{-i}) = \max\limits_{s_i \in A_i(s_{-i})} u_i(s_{-i}, s_i)$ непрерывна. Если для каждого i и s_{-i} множество $M_{s_{-i}} = \{s_i \in A_i(s_{-i}) \mid u_i(s_{-i}, s_i) = \varphi_i(s_{-i})\,\}$ стягиваемо, то существует точка социального равновесия.*

Если взять в качестве множества социально приемлемых выборов все множество стратегий $A_i(s_{-i}) = S_i$, то из теоремы Дебре получается теорема существования РН.

Теорема 4.2. *Пусть для всех $i = 1, \dots, n$ множества S_i – стягиваемые полигедроны, графики $\Gamma_i^S = \{(s_{-i}, s_i) \mid s_i \in S_i\}$ замкнуты, u_i – непрерывные функции из Γ_i в дополненную ось дей-*

ствительных чисел такие, что $\varphi_i(s_{-i}) = \max\limits_{s_i \in S_i} u_i(s_{-i}, s_i)$ *непрерывна. Если для каждого* i *и* s_{-i} *множество* $M_{s_{-i}} = \{s_i \in S_i \mid u_i(s_{-i}, s_i) = \varphi_i(s_{-i})\}$ *стягиваемо, то существует точка РН.*

Если взять в качестве множества социально приемлемых выборов множество безопасных стратегий стратегий $A_i(s_{-i}) = Q_i(s_{-i})$, то из теоремы Дебре получается теорема существования РБС. Соответствующее условие (#5):= «*в игре* $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$ *для всех* $i = 1, \dots, n$ *множества* S_i *– стягиваемые полигедроны,* $Q_i(s_{-i})$ *– многозначные функции из* S_{-i} *в* S_i *с замкнутыми графиками* Γ_i, u_i *– непрерывные функции из* Γ_i *в дополненную ось действительных чисел такие, что* $\varphi_i(s_{-i}) = \max\limits_{s_i \in Q_i(s_{-i})} u_i(s_{-i}, s_i)$ *непрерывна. Если для каждого* i *и* s_{-i} *множество* $M_{s_{-i}} = \{s_i \in Q_i(s_{-i}) \mid u_i(s_{-i}, s_i) = \varphi_i(s_{-i})\}$ *стягиваемо*»

Теорема 4.3. *Пусть для всех* $i = 1, \dots, n$ *множества* S_i *– стягиваемые полигедроны,* $Q_i(s_{-i})$ *– многозначные функции из* S_{-i} *в* S_i *с замкнутыми графиками* Γ_i, u_i *– непрерывные функции из* Γ_i *в дополненную ось действительных чисел такие, что* $\varphi_i(s_{-i}) = \max\limits_{s_i \in Q_i(s_{-i})} u_i(s_{-i}, s_i)$ *непрерывна. Если для каждого* i *и* s_{-i} *множество* $M_{s_{-i}} = \{s_i \in Q_i(s_{-i}) \mid u_i(s_{-i}, s_i) = \varphi_i(s_{-i})\}$ *стягиваемо, то существует точка РБС.*

В качестве частного, более простого, вытекающего из теоремы Дебре утверждения можно взять пример 2.1: *если функции наилучшего ответа игроков непрерывны, то они пересекутся и в этой точке будет существовать равновесие Нэша или точка социального равновесия Дебре*.

Доказанные Дебре и Рени результаты пересекаются, но не совпадают и не вкладываются друг в друга. Приведём два примера игр, для которых действует одна теорема и не действует другая.

Пример 4.2. Игра $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$, где $N = 2$, $S_i = [0, 1]$,

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \begin{cases} 1, s_i = s_{-i}, \\ 0, s_i \neq s_{-i}. \end{cases}$$

Здесь выполняются условия теоремы Дебре, функции наилучшего ответа игроков непрерывны. Условие гарантированного выигрыша Рени не выполняется, поскольку максимумы целевых функций достигаются на разрывах функций выигрыша, в выколотых вверх точках.

Пример 4.3. Игра $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$, где $N = 2$, $S_i = [0,\ 1]$,

$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{3}{4} - s_1\right)^2, s_2 \le \frac{1}{3}, \\ 1 - \left(\frac{1}{4} - s_1\right)^2, s_2 > \frac{1}{3}; \end{cases} \quad u_2(s_1, s_2) = 1 - \left(\frac{1}{2} - s_2\right)^2.$$

Здесь условия теоремы Дебре не выполняются, непрерывности наилучшего ответа нет. Все условия теоремы Рене выполнены, в том числе и свойство гарантированного выигрыша.

Тем не менее следует прояснить, **насколько подходы Дебре и Рени пересекаются**, степень их общности. Для этого поясним на примере и в последующем теоретическом обобщении, как принцип непрерывности функции наилучшего ответа проявляется в рамках подхода Рени.

Пример 4.4. Рассмотрим две игры $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$, где $N = 2$, $S_i = [0, 1]$. Вариант А:

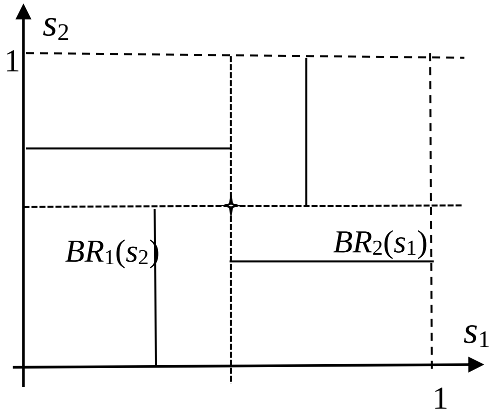
$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{3}{4} - s_1\right)^2, s_2 \le \dfrac{1}{2}, \\ 1 - \left(\dfrac{1}{4} - s_1\right)^2, s_2 > \dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

$$u_2(s_1, s_2) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{1}{4} - s_2\right)^2, s_2 \le \dfrac{1}{2}, \\ 1 - \left(\dfrac{3}{4} - s_2\right)^2, s_1 > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Вариант Б:

$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{3}{4} - s_1\right)^2, s_2 \le \frac{1}{2}, \\ 1 - \left(\frac{1}{4} - s_1\right)^2, s_2 > \frac{1}{2}; \end{cases} \quad u_2(s_1, s_2) = 1 - (s_1 - s_2)^2.$$

В этих играх нет равновесных по Нэшу точек, нет непрерывности функций наилучшего ответа (см. рис. 1), не выполняется свойство лучшего гарантированного ответа. Если рассмотреть более подробно, то условие лучшего гарантированного ответа не выполняется в обеих играх только на одной точке: $(s_1, s_2) = (0{,}5;\ 0{,}5)$. Именно в этой точке в обоих случаях происходит «перескок одной через другую» функций наилучшего ответа. То есть если сравнить примеры 4.3 и 4.4, получается, что условие лучшего гарантированного ответа Рени «ловит» не все разрывы данных функций, а только те, в которых функции перескакивают друг через друга, создавая предпосылку для отсутствия решения игры по Нэшу. Вывод из этого наблюдения надо сформулировать строго.



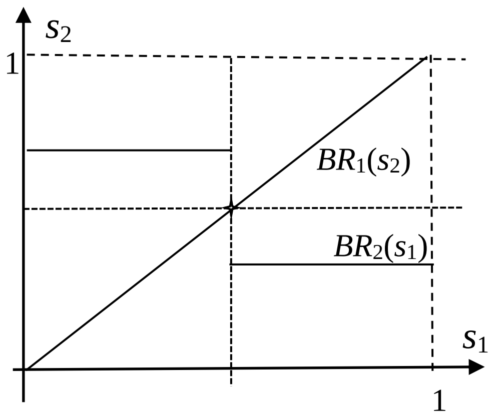


Рис. 1. Примеры 4.3, 4.4, функции наилучшего ответа и точки перескока

5. Точки перескока

Точки перескока. Интересно было бы узнать ответ на вопрос, насколько общими являются условия утверждений из п. 3. Чтобы получить его, рассмотрим более подробно условие гарантированного лучшего ответа Рени в примерах 4.3 и 4.4, обращая внимание прежде всего на точки, где оно нарушается. Если записать отрицание определения Рени-2 гарантирования лучшего ответа, привязанное к профилю s^*, то получится следующее.

Определение 4.1. Профиль s^*, не являющийся равновесием Нэша, называется **негарантирующим лучший ответ** в игре $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$, если $\exists (s^*, u^*) \in \overline{\Gamma(G)}$: $\forall i, \forall \alpha > u_i^*, \forall\, s_i' \in S_i, \forall$ окрестности $U(s_{-i}^*) \subset S_{-i}$ (т.е. открытого множества, содержащего s_{-i}^*), $\exists s_{-i}' \in U(s_i', s_{-i}^*)$ такое, что $u_i(s_i', s_{-i}') < \alpha$.

В примере 4.3 второй игрок не может гарантировать лучший ответ во всех профилях s, где $s_2 = \frac{1}{2}$, при этом его стратегии являются лучшими ответами. Первый игрок не может гарантировать лучший ответ на множестве профилей: $\left(s_2 \le \frac{1}{3}, s_1 = \frac{3}{4}\right) \cup$ $\cup \left(s_2 > \frac{1}{3}, s_1 = \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4} \le s_1 < \frac{3}{4}, s_2 = \frac{1}{3}\right)$. При этом на первых двух подмножествах стратегия первого игрока является наилучшим ответом. В профилях третьего подмножества в точке разрыва своей функции лучшего ответа, по стратегии партнёра, стратегия первого игрока лежит между предельными значениями этой функции справа и слева. Единственная точка $(s_1, s_2) = (0{,}25; 0{,}5)$, где ни один игрок не может гарантировать лучший ответ, является равновесием Нэша.

В примере 4.4, рассуждая аналогично, можно увидеть, что единственной точкой, где оба игрока не могут гарантировать лучший ответ, есть точка $(s_1, s_2) = (0{,}5; 0{,}5)$. При этом в случае А стратегии обоих игроков лежат между предельными значениями своих функций лучшего ответа, в точке разрыва. А в случае Б это верно только для одного первого игрока, а второй игрок выбирает стратегию наилучшего ответа.

Следует заметить, что нарушения условия гарантирования лучшего ответа не всегда связано с точкой перескока. Это может получиться, например, из-за того, что лучший ответ является выколотой вверх точкой разрыва функции выигрыша, что демонстрирует пример 4.2.

Для игр двух участников с одномерными стратегиями и кусочно-непрерывными функциями лучшего ответа возможны только два случая перескока, показанные на примере: перескок одной функции через непрерывную другую и встречный перескок двух функций (см. рис. 2). Только при наличии таких точек, в которых нарушается условие лучшего гарантированного ответа Рени, в игре возможно отсутствие равновесия Нэша. Соответствующие точки однозначно определяются либо как точка разрыва функции одного игрока и значение функции другого, либо как точки разрыва функции обоих игроков.

Подводя итог, можно сказать, что теорема Рени развивает идею теоремы Дебре, хотя на первый взгляд это не очевидно. Она является «в целом» более тонким и мощным необходимым условием существования равновесия Нэша, хотя далеко не достаточным. Слова «в целом» означают, что формально условия теоремы Рени не вкладываются полностью в условия теоремы Дебре, что было показано выше на примерах. Для того чтобы поймать одну и ту же содержательную ситуацию, используются различные формальные инструменты. Поэтому и строго вложения полученных результатов нет.

Такое далёкое отступление от РБС к теме сравнения теорем Рени и Дебре и перескоков функций наилучшего ответа друг через друга потребовалось, чтобы прояснить далеко не очевидный содержательный смысл сложных конструкций теоремы Рени и некоторые их тонкости, которые окажутся полезными на следующем этапе конструирования теоремы существования РБС на основе теоремы Рени и приведения всех требуемых этой теоремой условий. Следует заметить, что теорема Рени требует аккуратной работы с предельными точками, а это требует серьёзной доработки условий, сформулированных в теоремах 2.1, 2.2 и 2.3.

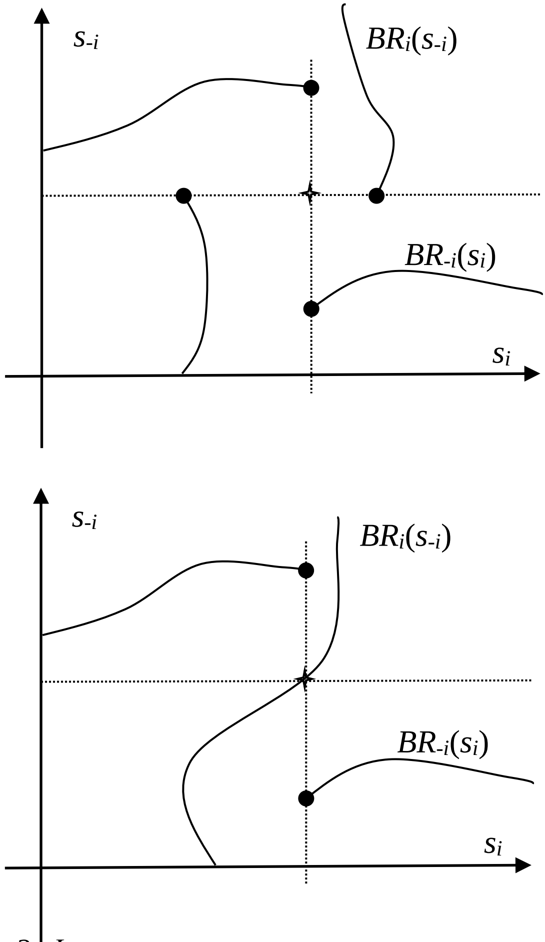


Рис. 2. Функции лучшего ответа и точки перескока для двух игроков

6. Теоремы существования РБС по Рени

Воспользуемся теоремой 2.3, подставив в неё в качестве исходных утверждения, сформулированные Рени. В качестве базовых формулировок можно взять собственно основную теорему

Рени и следствие (из утверждения) Рени. Поскольку второй вариант имеет условия, которые, хотя и более слабы по существу, но проверяются легче, то на практике, в публикациях развивающих подход Рени, как правило используется именно следствие Рени. Оба варианта требуют ввести уточняющие формулировки соответствующих определений.

Конкретизируем условие (#2) из теорем 2.2, 2.3 для случая теоремы Рени. Игра должна быть *компактна*, *квазивогнута* и *гарантировать лучший ответ* на безопасных множествах. Компактная игра, естественно, будет компактной и на безопасных множествах.

Определение 6.1. Игра $G(S_i,u_i)_{i=1}^N$ **квазивогнута на безопасных стратегиях**, если для любого игрока i при любом окружении s_{-i} функции $u_i(s)$ квазивогнуты по s_i при $s_i \in Q_i(s_{-i})$.

Это определение неявно предполагает, что множества безопасных стратегий $Q_i(s_{-i}) \subseteq S_i$ являются выпуклыми, так как если $Q_i(s_{-i})$ не выпуклы, то функции $u_i(s)$ не могут быть определены как квазивогнутые.

Чтобы применить условие *гарантирования лучшего ответа* к обрезанной функции в теореме 2.3 (определение 2.9), удобно разделить его на два случая: безопасных и небезопасных для игрока профилей. Для этого сначала следует ввести определение понятия, исходно данного для игры в целом, привязанное к игроку, его конкретному окружению (ситуации игры для него), либо даже к отдельному профилю.

Определение 6.2. Игрок i **имеет гарантированный безопасный ответ при окружении** s_{-i}, если $\exists s_i' \in S_i, \exists$ открытая окрестность $U_{s_{-i}} \subseteq S_{-i}, \forall s_{-i}' \in U_{s_{-i}}: s' = (s_i', s_{-i}') \in Q^{(i)}$. Игрок i **имеет гарантированный безопасный ответ в игре** G, если он его имеет при любых окружениях.

Это определение требует подробного комментария. На первый взгляд, оно искусственно переусложнено, но это необходимо. В теореме Рени требуется очень тонкая работа со всеми недостигаемыми предельными точками $(s^*, u^*) \in \overline{\Gamma(G)} \backslash \Gamma(G)$. При этом небольшие различия в обозначениях множеств безопасных стратегий при введении РБС, при взятии их замыканий обретают различное значение. Напомним, что множество $Q^{(j)} \subseteq S$ было определено при введении *обрезанной игры* (определение 3.2) как множество профилей безопасных для игрока j в игре, т.е. $Q^{(j)} = \{s: s_j \in Q_j(s_{-j}) \subseteq S_j\}$. Хотя сами обозначаемые множества профилей идентичны, но замыкание множества $\overline{Q^{(j)}} \subseteq S$ и совокупность замыканий множеств $\overline{Q_j(s_{-j})} \subseteq S_j$ образуют различные множества. Таким образом, «s^* – безопасные профили» является более узким множеством, чем «$s_j^* \in \overline{Q_j(s_{-j})} \subseteq S_j$», которое содержит предельные точки множества при его замыкании в измерении S_j, а это множество, в свою очередь, является более узким, чем множество $s^* \in \overline{Q^{(j)}} \subseteq S$, где замыкание берётся уже на множестве S и где содержатся также предельные точки и по измерениям S_{-j}. Теорема Рени требует рассмотрения именно последнего, самого широкого множества предельных точек $(s^*, u^*) \in \overline{\Gamma(G)}$.

Поскольку для случая небезопасных профилей дополнительные ограничения накладываются на множество безопасных для игрока профилей, куда происходит безопасный переход игрока, то имеет смысл соединить в отдельном термине требования условия сильных угроз и требования, вытекающие из подхода Рени. Определение формулируется для всех частных вариантов: для профиля, окружения, игрока, игры в целом.

Определение 6.3. Небезопасный для игрока i профиль s **доминируется безопасными стратегиями**, если угроза игроку i в нём является сильной и у него имеется гарантированный безопасный ответ. Для игрока i **безопасные стратегии доминируют при окружении $\boldsymbol{s_{-i}}$ (в игре *G*)**, если любая небезопасная для него стратегия при окружении s_{-i} (в игре G) доминируется безопасными стратегиями. Игра G называется **доминирующей в безопасных стратегиях**, если безопасные стратегии доминируют для всех игроков.

Для безопасных профилей условие выглядит следующим образом.

Определение 6.4. Безопасная стратегия s_i игрока i в профиле s, не являющимся РБС, **имеет гарантированный лучший ответ в безопасных стратегиях**, если $\forall (s, u) \in \overline{\Gamma(G(s, \bar{u}(s))}$ $\exists \alpha > u_i$

$\exists s_i' \in Q_i(s_{-i}), \exists$ *открытая окрестность* $U_{s_{-i}} \subseteq S_{-i}$: $\forall s'_{-i} \in U_{s_{-i}}$: $s' = (s_i', s'_{-i}) \in Q^{(i)}$ (безопасен для i) и $u_i(s') \geq \alpha > u_i$.

Теперь, наконец, можно собрать то условие, которое требуется теоремой Рени, – *гарантию лучшего ответа*, помня о том, что в каждом профиле требуется его выполнение хотя бы для одного игрока.

Определение 6.5. Игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ **гарантирует лучший ответ в безопасных стратегиях**, если $\forall s \in S, \exists$ игрок i такой что: он имеет гарантированный безопасный ответ, если его стратегия s_i не безопасна, и гарантированный лучший ответ в безопасных стратегиях, если его стратегия s_i безопасна.

Итак, сформулированный «в лоб» вариант теоремы Рени, применённый для задачи поиска РБС, будет иметь следующий вид.

Теорема 6.1. *Предположим, игра* $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ *компактна, квазивогнута на безопасных стратегиях, все множества безопасных стратегий в ней являются выпуклыми компактными множествами, гарантирует лучший ответ в безопасных стратегиях, с сильными угрозами, тогда в игре* G *существует РБС.*

Доказательство. Условия «*компактна, квазивогнута на безопасных стратегиях, имеет лучший ответ в безопасных стратегиях*» являются ослаблением условий Рени на безопасные стратегии. Условие «*гарантированного безопасного ответа*» обеспечивает соблюдение условий теоремы Рени для не безопасных профилей. Условие «*выпуклости безопасных множеств*» необходимо для корректности условия квазивогнутости на безопасных стратегиях. А условие «*с сильными угрозами*» обеспечивает, что острожные игроки не будут выходить за пределы безопасных стратегий. Общая схема доказательства следующая: введение обрезанной функции; применение к ней теоремы Рени; доказательство, что равновесие Нэша обрезанной игры будет РБС исходной игры.

Рассмотрим обрезанную игру $\bar{G} = (S_i, \bar{u}_i)_{i=1}^N$, где $\bar{u}_i(s) = \begin{cases} u_i(s), s \in Q^{(i)}, \\ C_{\min}, s \notin Q^{(i)}. \end{cases}$

Проверкой определений 6.1, 6.2, 6.4 показываем, что обрезанная игра $\bar{G} = (S_i, \bar{u}_i)_{i=1}^N$ компактна, квазивогнута, имеет лучший гарантированный ответ. Рассмотрим определение 6.1. Квазивогнутость игры означает квазивогнутость функции выигрыша $u_i(s_i, s_{-i})$ по s_i при любом окружении s_{-i}. То есть квазивогнутость на выпуклом множестве $Q_i(s_{-i})$ означает, что для любой константы C множество $M_C^{u_i}(s_{-i}) = \{s_i \in Q_i(s_{-i}): u_i(s_i, s_{-i}) \geq C\} \subseteq$ $\subseteq S_i$ выпукло. Это же является условием квазивогнутости игры $\bar{G}$.

Определение 6.2 для игры G эквивалентно выполнению требований определения Reny-2 лучшего гарантированного ответа для игры $\bar{G}$, для небезопасных профилей игры G: если $s_i \notin Q_i(s_{-i})$, то игрок i может в игре $\bar{G}$ гарантировать себе выигрыш $u_i(s_i{}', s_{-i}) \geq C_{min} = \overline{u_\iota}(s_i, s_{-i})$ выбором s_i': $(s_i{}', s_{-i}) \in \mathrm{Q}^{(\mathrm{i})} \setminus \overline{\mathrm{Q}^{(\mathrm{\imath})}}$.

Определение 6.4 для игры G эквивалентно выполнению требований определения Reny-2 лучшего гарантированного ответа для игры $\bar{G}$, для безопасных профилей игры G: если $s_i \in Q_i(s_{-i})$, то игрок i может в игре $\bar{G}$ гарантировать себе выигрыш $u_i(s_i{}', s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) = \overline{u_\iota}(s_i, s_{-i})$ выбором s_i': $(s_i{}', s_{-i}) \in Q^{(i)} \setminus \overline{Q^{(\imath)}}$.

Выполняются условия теоремы Рени, => в игре $\bar{G} = (S_i, \bar{u}_i)_{i=1}^N$ имеется равновесие Нэша s^*. Согласно условию сильных угроз, это есть безопасный профиль игры G.

Применим условие сильных угроз. Пусть s^* равновесие Нэша в игре $\bar{G}$. Для любого i рассмотрим отклонение s_i': $v_i(s_i', s_{-i}^*) > u_i(s^*)$, где v_i – безопасный выигрыш. Безопасным для i профиль (s_i', s_{-i}^*) не может быть, так как s^* – равновесие Нэша в игре $\bar{G}$. То есть $v_i(s_i', s_{-i}^*) > u_i(s_i', s_{-i}^*)$. По определению игры с сильными угрозами, $\exists s_i''$: $u_i(s_i'', s_{-i}^*) > v_i(s_i', s_{-i}^*)$, где s_i'' – безопасная для i стратегия. => $u_i(s_i'', s_{-i}^*) > v_i(s_i', s_{-i}^*) > u_i(s^*)$, чего не может быть, так как s^* – равновесие Нэша в игре $\bar{G}$. Значит отклонение s_i' невозможно, для $\forall s_i'$: $v_i(s_i', s_{-i}^*) \leq u_i(s^*)$, для безопасных отклонений, и $v_i(s_i', s_{-i}^*) < u_i(s^*)$, для не безопасных отклонений. То есть, согласно теореме 2.1, s^* – РБС игры $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$. □

Аналогично строим условие (#3) из теоремы 2.2 **для следствия Рени**. Игра должна быть *компактна, квазивогнута, гарантировать выигрыш* и быть *взаимно верхнеполунепрерывной* на безопасных множествах. Выполнение двух последних свойств следствия Рени является более узким частным случаем выполнения условия *гарантирования лучшего ответа* теоремы Рени и теоремы 6.1.

Аналогично сформулируем требуемое понятие *гарантированного выигрыша* сначала для профиля.

Определение 6.6. Безопасная стратегия s_i игрока i в профиле s **имеет гарантированный выигрыш в безопасных стратегиях**, если $\forall \varepsilon > 0, \exists s_i' \in Q_i(s_{-i}), \exists$ открытая окрестность $U_{s_{-i}} \subseteq S_{-i}$: $\forall s_{-i}' \in U_{s_{-i}}$: $s' = (s_i', s_{-i}') \in Q^{(i)}$ (безопасен для i) и $u_i(s') \geq u_i(s) - \varepsilon$.

Теперь можно сформулировать понятие для игры, помня, что в этом случае оно должно соблюдаться для всех игроков.

Определение 6.7. Игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ **гарантирует выигрыш в безопасных стратегиях**, если для $\forall s \in S, \forall$ игрока i: имеется гарантированный безопасный ответ, если его стратегия s_i не безопасна, и гарантированный выигрыш в безопасных стратегиях, если его стратегия s_i безопасна.

Взаимная верхняя полунепрерывность на содержательном уровне формулируется как следующее свойство игры в точках разрыва целевых функций игроков: если в такой точке выигрыш какого-либо игрока скачком падает вниз, то должен найтись хотя бы один игрок, у которого в этой же точке выигрыш скачком изменяется вверх [5, 8, 9].

Определение 6.8. Игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ **взаимно-верхнеполунепрерывна в безопасных стратегиях (в.в.п.н.б.с.)** в профиле s, если для соответствующей этой игре обрезанной игры $\bar{G}(S_i, \bar{u}_i)_{i=1}^N$, для $\forall (s, u) \in \overline{\Gamma(\bar{u})}$ выполняется условие: $u_i(s) \leq u_i$, $\forall i \Rightarrow u_i(s) = u_i, \forall i$. Игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ **в.в.п.н.б.с.**, если она в.в.п.н.б.с. любом профиле $s \in S$.

А формально, если при просто верхней непрерывности значения всех функций в точках разрыва определяются по верхнему предельному значению, то для взаимной верхней полунепрерывности достаточно, чтобы это свойство выполнялось хотя бы для одного игрока (из тех, у кого в этой точке имеется разрыв целевой функции). Возвращаясь к играм в безопасных стратегиях, можно заметить, что, во-первых, безопасные выигрыши игроков как раз часто разрывны на границах их множеств безопасности и эти множества безопасности часто незамкнуты, не содержат своих границ. А во-вторых, почти во всех рассмотренных играх с непрерывными множествами стратегий свойства взаимной верхней полунепрерывности и просто верхней полунепрерывности либо выполняются, либо не выполняются одновременно. Поэтому было сочтено возможным ослабить ограничение взаимной верхней полунепрерывности до простой верхней полунепрерывности, при которой каждого игрока можно рассматривать отдельно, и это намного удобнее, так как множества безопасности у всех игроков разные, границы их не совпадают и формулировать для них взаимность показалось слишком сложным и громоздким. Но здесь сначала получим формулировку теоремы «в лоб», по следствию Рени, с точным соблюдением всех условий.

Теорема 6.2. *Предположим, игра* $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ *компактна, квазивогнута на безопасных стратегиях, все множества безопасных стратегий в ней являются выпуклыми компактными множествами, гарантирует выигрыш на безопасных стратегиях, взаимно-верхнеполунепрерывна в безопасных стратегиях, с сильными угрозами, тогда в игре G существует РБС.*

Доказательство. Рассмотрим игру $\bar{G}$. Определение 6.7 => $\bar{G}$ гарантирует выигрыш. Определение 6.8 => верхняя полунепрерывность в безопасных стратегиях $\bar{G}$. То есть $\bar{G}$ компактна, квазивогнута, гарантирует выигрыш, взаимно-верхнеполунепрерывна => {утверждение Рени и следствие из него} => $\bar{G}$ компактна, квазивогнута, имеет лучший гарантированный ответ => $\bar{G}$ имеет равновесие по Нэшу. Далее – как в предыдущей теореме. □

Чтобы получить **локальный вариант теорем** в множестве $B = \times_{i=1}^N B_i, B_i \subseteq S_i$, достаточно использовать определение 2.10 сильных угроз по отношению к *B* и переписать определения 6.1–6.8 «в множестве *B*»: на множествах $s_i \in Q_i(s_{-i}) \cup B_i$ вместо $s_i \in Q_i(s_{-i})$ для стратегий окружения $s_{-i} \in B_{-i}$. Тогда теоремы 6.1 и 6.2 предстанут в следующем виде.

Теорема 6.1′. *Предположим, игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ компактна, квазивогнута на безопасных стратегиях в B, все множества безопасных стратегий в ней являются выпуклыми компактными множествами в B, имеет лучший ответ в безопасных стратегиях в B, имеет лучший ответ в безопасных стратегиях в B, с сильными угрозами по отношению к B, тогда для игры G существует РБС в B.*

Теорема 6.2′. *Предположим, игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ компактна, квазивогнута на безопасных стратегиях в B, все множества безопасных стратегий в ней являются выпуклыми компактными множествами в B, гарантирует выигрыш на безопасных стратегиях в B, верхнеполунепрерывна в безопасных стратегиях в B, с сильными угрозами по отношению к B, тогда для игры G существует РБС в B.*

Доказательство теорем 6.1′ и 6.2′. Введём игру $\bar{G}_B =$, $= (B_i, \bar{u}_i)_{i=1}^N$, определённую на множествах $s_i \in B_i$. В этой игре согласно теоремам 6.1 и 6.2 существует равновесие Нэша s^*, совпадающее с РН в игре $\bar{G} = (S_i, \bar{u}_i)_{i=1}^N$. Это равновесие s^* игры $\bar{G}_B(B_i, \bar{u}_i)_{i=1}^N$ при условии сильных угроз по отношению к B является РБС исходной игры $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$. □

Итак, получены теоремы 6.1 и 6.2, как формальное применение теоремы 2.2 к теореме Рени и следствию Рени. Но требования условий этих теорем оказываются слишком жёсткими для многих прикладных задач. Хотелось бы иметь такие утверждения, которые позволили бы применять их к задачам, рассматриваемым ниже. С другой стороны, желательно, чтобы эти условия были просты и легко проверяемы, формулировались бы в терминах простых свойств функций выигрыша или безопасного выигрыша. Также желательно, чтобы было достаточно выполнения этих условий только на локальном узком подмножестве безопасных стратегий, не привлекая значения целевых функций за их пределами. То есть чтобы достаточно было бы для всей игры выполнения локального условия сильных угроз, которые сами по себе гарантируют, что игра не выйдет из положения устойчивости, за пределы желаемого хорошего множества, а за этими пределами игра может вести себя сколь угодно плохо. Таким образом, в дальнейших более сложных формальных конструкциях реализуется план коррекции теорем 6.1 и 6.2 в соответствии с этими пожеланиями, при этом доказательство полученных результатов существенно усложнилось.

7. Большая теорема. Первый вариант

Этот раздел написан в соавторстве с А.Б. Искаковым.

Строим теорему на основе теоремы 6.2 и следствия Рени. Сначала сформулируем модифицированный вариант условий Рени *на безопасных множествах* из этих утверждений: *квазивогнутость, гарантирование выигрыша, верхнюю полунепрерывность*. Для начала в качестве критерия существования равновесия Нэша в «безопасной области» воспользуемся стандартными условиями непрерывности и квазивогнутости функций выигрыша. В компактной и квазивогнутой игре с непрерывными функциями выигрыша существует равновесие Нэша (см. например, Дебре (1952) [10]).

Ещё раз сформулируем соответствующие понятия на множествах безопасности игроков, уделяя особенное внимание границам этих множеств, причём как той части граничного множества, которая входит в ограничиваемое им множество, так и той, что не входит. В качестве данных множеств рассматриваются множества безопасных стратегий и являющиеся их совокупностью множества безопасных профилей игроков. Но при этом совокупность границ множеств безопасных стратегий хотя и вложена в границу множества безопасных профилей, но часто с ней не совпадает. Кроме того, на этих множествах определены функции выигрыша и безопасного выигрыша игроков, в которых, особенно на границах множеств безопасности, встречаются точки недостигаемых пределов. Для работы с ними будут рассматриваться (аналогично конструкциям у Рени (1999) [14]) графики этих функций, взятые как множества, и предельные точки этих множеств, в особенности не принадлежащие этим множествам. Теперь зададим эти конструкции формально.

Пусть $Q_i(s_{-i}) \subseteq S_i$ обозначает множество безопасных стратегий игрока i при заданных стратегиях других игроков s_{-i}, а $Q^{(i)} \subseteq S$ – множество всех профилей, в которых стратегии игрока i безопасны $\{s: s_i \in Q_i(s_{-i})\}$. Будут рассматриваться отдельно случаи внутренних безопасных стратегий $s \in Q^{(i)} \backslash \partial Q^{(i)}$ и граничных безопасных стратегий $s \in Q^{(i)} \cap \partial Q^{(i)}$. При рассмотрении условия квазивогнутости также потребуется понятие выпуклой оболочки множества безопасных стратегий $s_i \in \mathrm{co}(Q_i(s_{-i}))$.

График функции безопасного выигрыша определяется как подмножество $S \times \mathbb{R}$ следующего вида: $\Gamma(v_i) = \{(s, v_i): v_i = v_i(s)\}$. При этом существенным будет рассмотрение точек, принадлежащих замыканию графика функции, $(s, v_i^*) \in \overline{\Gamma(v_i)}$, и точек недостигаемых пределов функции безопасного выигрыша $(s, v_i^*) \in \overline{\Gamma(v_i)} \backslash \Gamma(v_i)$.

Теперь, переходя к рассмотрению условия Рени, прежде всего остановимся на условии непрерывности. Естественно ожидать, что функция выигрыша $u_i(s)$ и особенно безопасного выигрыша $v_i(s)$ игрока i может быть разрывной на границах множества его безопасных стратегий $\partial Q^{(i)}$. Поэтому можно наложить несколько усиленное требование непрерывности на $u_i(s) = v_i(s)$ только во внутренних безопасных стратегиях, когда $s \in Q^{(i)} \backslash \partial Q^{(i)}$, а случай границы безопасных стратегий, где $s \in Q^{(i)} \cap \partial Q^{(i)}$, рассмотреть особо.

Определение 7.1. Игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ является **непрерывной во внутренних безопасных стратегиях (continuous at interior secure strategies),** если функция выигрыша $u_i(s)$ каждого игрока i непрерывна при $s \in Q^{(i)} \backslash \partial Q^{(i)}$.

Условие гарантированности выигрыша, предложенное Рени, будет наложено только на границе безопасных стратегий, $s \in Q^{(i)} \cap \partial Q^{(i)}$. Разумеется, непрерывность игры во внутренних безопасных стратегиях также означает, что игра гарантирует там выигрыш в том же смысле, что и определение 6.6 для границы безопасных стратегий, поскольку $u_i(s) = v_i(s)$ при $s \in Q^{(i)} \backslash \partial Q^{(i)}$ (в соответствии с утверждением 2.2).

Определение 7.2. Игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ **гарантирует выигрыш на границе безопасных стратегий (payoff secure at boundary secure strategies)**, если для каждого игрока i для каждого $s \in$

$Q^{(i)} \cap \partial Q^{(i)}$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует s_i' такое, что $v_i(s_i', s_{-i}') \geq u_i(s) - \varepsilon$ для всех s'_{-i} в некоторой окрестности s_{-i}.

Рассмотрим теперь квазивогнутость. Определение квазивогнутости 6.1 (к теореме 6.1) неявно предполагало выпуклость множеств безопасности. Теперь следует дать более точное и более сложное определение этого понятия при предположении, что этой выпуклости нет. Следуя стандартным определениям выпуклого анализа, определим квазивогнутую оболочку функции выигрыша $u_i(s_i, s_{-i})$ игрока i на множестве его безопасных стратегий $s_i \in Q_i(s_{-i})$ при заданных стратегиях других игроков s_{-i} в форме следующей функции, определённой при $s_i \in co(Q_i(s_{-i}))$: $\hat{u}_i(s_i, s_{-i}) = \inf\{h(s_i): h: co(Q_i(s_{-i})) \to \mathbb{R}$, таких, что h квазивогнута и на $Q_i(s_{-i})$ $u_i(\cdot, s_{-i}) \leq h(\cdot)\}$, т.е. квазивогнутой оболочки обрезанной функции. Тогда квазивогнутость игры в безопасных стратегиях можно определить следующим образом.

Определение 7.3. Игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^{N}$ **квазивогнута в безопасных стратегиях (quasiconcave in secure strategies),** если функция выигрыша каждого игрока i совпадает с ее квазивогнутой оболочкой на множестве безопасных стратегий этого игрока, т.е. $\forall i, \forall s$: $s_i \in Q_i(s_{-i})$ выполняется $u_i(s) = \hat{u}_i(s)$.

Итак, выполнение условий данных определений даёт выполнение следующих из условий Рени: квазивогнутость, гарантирование выигрыша на безопасных множествах, (верхняя полу-) непрерывность на внутренних безопасных множествах.

Теперь определим формально условие, аналогичное условию сильных угроз, согласно которому игроки с небезопасными стратегиями всегда могут отклониться в безопасные стратегии и увеличить при этом свой выигрыш, защищённый от угроз. В этом случае будем говорить, что игроки имеют *лучшую безопасную альтернативу* (*a better secure alternative*).

Определение 7.4. При заданных стратегиях других игроков s_{-i} игрок i имеет **лучшую безопасную альтернативу (a better secure alternative) (BSA)** в непустом множестве $\tilde{Q}_i(s_{-i}) \subseteq Q_i(s_{-i})$, если для каждого $\left((s_i, s_{-i}), v_i^*\right) \in \overline{\Gamma(v_\iota)}, s_i \notin \tilde{Q}_i(s_{-i})$ и для каждого $\left((s_i, s_{-i}), v_i^*\right) \in \overline{\Gamma(v_\iota)} \backslash \Gamma(v_i), (s_i, s_{-i}) \in \partial Q^{(i)}$ существует $s_i' \in \tilde{Q}_i(s_{-i})$ такое, что $u_i(s_i', s_{-i}) > v_i^*$.

Заметим, что в условие BSA включены также предельные значения функции $v_i(s)$ в точках разрывности, которые могут возникать на границе безопасных стратегий при $s \in Q^{(i)} \cap \partial Q^{(i)}$ и $s \in \partial Q^{(i)} \backslash Q^{(i)}$.

Определение 7.5. Игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ **предоставляет лучшую безопасную альтернативу (или является BSA-игрой) (provides better secure alternative or is a BSA-game)**, если для всех $s \in S$ каждый игрок i имеет лучшую безопасную альтернативу в некотором непустом множестве $\tilde{Q}_i(s_{-i}) \subseteq Q_i(s_{-i})$. Кроме того, если для всех $s \notin \overline{\times_{i=1}^N \tilde{Q}_i(s_{-i})}$ существует игрок j такой, что $s_j \notin co(\tilde{Q}_j(s_{-j}))$, то игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ **предоставляет лучшую безопасную альтернативу в выпуклом множестве**.

Если попытаться нестрого-словесно охватить в целом требования, налагаемые всеми определениями, то можно сказать следующее. *Квазивогнутость* на невыпуклых безопасных множествах должна выполняться в смысле, обобщённым на этот случай. *Лучшая безопасная альтернатива* даёт игрокам возможность отклониться в безопасные стратегии и при этом увеличить свой выигрыш, защищённый от угроз. При этом в точке отклонения безопасный выигрыш игрока должен быть непрерывным по стратегиям окружения других игроков, чтобы выполнялось требование *гарантированного выигрыша*. Это особенно важно для граничных точек множества безопасных профилей, откуда должна быть обеспечена возможность отклонения туда, где есть непрерывность безопасного выигрыша по стратегиям окружения, даже если точка отклонения находится на границе множества безопасных стратегий или профилей. То есть необходимо обеспечить игроку в точке его отклонения как *безопасность* от односторонних угроз других игроков по отдельности, так и *гарантированность* от малых отклонений других игроков во всей их совокупности. Теперь можно сформулировать и доказать теорему существования.

Теорема 7.1. *Если игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ компактна, квазивогнута в безопасных стратегиях, непрерывна во внутренних безопасных стратегиях, гарантирует выигрыш на границе безопасных стратегий и предоставляет лучшую безопасную альтернативу в выпуклом множестве, то в игре G существует РБС.*

Доказательство.

Общий план доказательства, состоящего из шести частей. **(1)** В специальной лемме доказывается представление для квазивогнутой оболочки функции, которое является основным рабочим инструментом, используемым для доказательства основного результата. **(2)** Вводится модифицированная игра, функцией выигрыша в которой принимается квазивогнутая оболочка безопасного выигрыша исходной игры. Для этой функции доказываются условия Баг, Джофр [7], из выполнения которых следует существование равновесия Нэша в этой игре. А именно, доказываются свойства гарантирования выигрыша **(3)** и слабой взаимной верхней полунепрерывности **(4)**. Далее доказывается, что существующее равновесие Нэша модифицированной игры является безопасным профилем исходной игры **(5)**. После чего доказывается, что этот профиль является РБС в исходной игре **(6)**. В конце каждой части и всего доказательства приводится краткий конспект хода рассуждений без формальных выкладок, выделенный *курсивом*.

(1). Прежде всего докажем представление для квазивыпуклой оболочки функции (по аналогии с представлением, полученным в Бик, [8]), которое нам понадобится при доказательстве.

Лемма 7.1. *Квазивогнутую оболочку функции f, определяемую в виде:*

(1) $s \in Y \subseteq \mathbb{R}^d\colon \tilde{f}(s) = \inf\{h(s)\colon h\colon Y \to \mathbb{R}$, *таких, что h квазивогнута и на Y* $f(\cdot) \le h(\cdot)\}$,

можно представить в следующей форме:

(2) $\tilde{f}(s) = \sup\{\min\{f(s^{(1)}), \dots, f(s^{(d+1)})\}\}$,

где d – это размерность множества $Y \subseteq \mathbb{R}^d$ *и supremum берётся по всем семействам точек* $\{s^{(1)}, \dots, s^{(d+1)}\}$ *из Y таким, что* $s \in co\{s^{(1)}, \dots, s^{(d+1)}\}$.

Доказательство Леммы.

В соответствии с (Бик [8], Утверждение 2.2) квазивогнутую оболочку (1) можно представить в форме

(3) $$\hat{f}(s) = \sup_{\substack{\forall k \in \mathbb{N}, \{s^{(1)}, \dots, s^{(k)}\} \in Y^k: \\ s \in co\{s^{(1)}, \dots, s^{(k)}\}}} \{\min\{f(s^{(1)}), \dots, f(s^{(k)})\}\}.$$

Докажем, что (2) и (3) совпадают, т.е. $\tilde{f} = \hat{f}$. Очевидно, что $\hat{f} \geq \tilde{f}$, поскольку supremum в (3) берётся по более широкому множеству, чем в (2). С другой стороны, для всех $\forall k \in \mathbb{N}$ и для всех таких семейств точек $\{s^{(1)}, \dots, s^{(k)}\} \in Y^k$, что $s \in co\{s^{(1)}, \dots, s^{(k)}\}$, в соответствии с теоремой Каратеодори (1911) о выпуклой оболочке, из множества точек $\{s^{(1)}, \dots, s^{(k)}\}$ всегда можно выбрать $d + 1$ таких точек $\{\tilde{s}^{(l)}\} \in \{s^{(1)}, \dots, s^{(k)}\}, l = 1, \dots, d + 1$, (быть может повторно), что $s \in co\{\tilde{s}^{(1)}, \dots, \tilde{s}^{(d+1)}\}$. В этом случае, очевидно, выполняется

$$\min\{f(\tilde{s}^{(1)}), \dots, f(\tilde{s}^{(d+1)})\} \geq \min\{f(s^{(1)}), \dots, f(s^{(k)})\}.$$

Переходя в этом неравенстве к supremum по всем $k \in \mathbb{N}$ и по всем соответствующим семействам точек $\{s^{(1)}, \dots, s^{(k)}\}$, получаем $\tilde{f}(s) \geq \hat{f}(s)$. Таким образом, равенство $\tilde{f} = \hat{f}$ доказано, и представление квазивогнутой оболочки в виде (2) выполняется. □

(2). Определим модифицированную игру $\hat{\hat{G}}(S_i, \hat{v}_i)_{i=1}^N$, где $\hat{v}_i(s_i, s_{-i})$ – квазивогнутая оболочка функции $v_i(s_i, s_{-i})$ на множестве $s_i \in S_i$. По построению игра $\hat{\hat{G}}$ квазивогнутая. Она также компактная, поскольку исходная игра G компактная. Для дальнейшего доказательства нам понадобится представление для квазивогнутой оболочки $\hat{v}_i(s)$ полученное в Лемме 7.1.:

$$(4)\quad \hat{v}_i(s_i, s_{-i}) = \\ = \sup_{\substack{\{s_i^{(1)}, \dots, s_i^{(d+1)}\} \in (S_i)^{(d+1)}: \\ s_i \in co\{s_i^{(1)}, \dots, s_i^{(d+1)}\}}} \left\{\min\left\{v_i\left(s_i^{(1)}, s_{-i}\right), \dots, v_i\left(s_i^{(d+1)}, s_{-i}\right)\right\}\right\},$$

$$\forall s_i \in S_i \subseteq \mathbb{R}^d,$$

где d – размерность множества $S_i \subseteq \mathbb{R}^d$ и супремум берётся по всем семействам точек $\left\{s_i^{(1)}, \dots, s_i^{(d+1)}\right\}$ из S_i таким, что $s_i \in co\left\{s_i^{(1)}, \dots, s_i^{(d+1)}\right\}$.

В соответствии с утверждением 2.2, $\forall s_i \in Q_i(s_{-i}): u_i(s_i, s_{-i}) = v_i(s_i, s_{-i})$. Введём определённую на $\{s: s_i \in co(Q_i(s_{-i}))\}$ функцию $\hat{u}_i(s)$ квазивогнутой оболочки обрезанной функции. Используя приведённое выше представление леммы 7.1 получаем для этой функции следующее неравенство:

$$(5)\quad \hat{u}_i(s_i, s_{-i}) = \\ = \sup_{\substack{\left\{s_i^{(1)},\dots,s_i^{(d+1)}\right\}\in\left(Q_i(s_{-i})\right)^{(d+1)}:\\ s_i\in co\left\{s_i^{(1)},\dots,s_i^{(d+1)}\right\}}} \left\{\min\left\{v_i\left(s_i^{(1)}, s_{-i}\right), \dots, v_i\left(s_i^{(d+1)}, s_{-i}\right)\right\}\right\} \le \\ \le \sup_{\substack{\left\{s_i^{(1)},\dots,s_i^{(d+1)}\right\}\in(S_i)^{(d+1)}:\\ s_i\in co\left\{s_i^{(1)},\dots,s_i^{(d+1)}\right\}}} \left\{\min\left\{v_i\left(s_i^{(1)}, s_{-i}\right), \dots, v_i\left(s_i^{(d+1)}, s_{-i}\right)\right\}\right\} = \\ = \hat{v}_i(s_i, s_{-i}).$$

То есть квазивогнутая оболочка обрезанной функции ограничена сверху квазивогнутой оболочкой функции безопасного выигрыша.

Мы докажем, что в модифицированной игре $\hat{\hat{G}}$ существует равновесие Нэша, используя теорему существования, предложенную Рени (1999) [14] и улучшенную Баг, Джофр (2006) [7]. Напомним еще раз определения из этих работ.

Определение 7.6 (*Рени-3*). Игра $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$ **гарантирует выигрыш** (payoff secure – PS), если для любого игрока i, для любого $s \in S$ и любого $\varepsilon > 0$, существует $s_i' \in S_i$, такое что $u_i(s_i', s_{-i}') \ge u_i(s) - \varepsilon$ для всех s_{-i}' в некоторой открытой окрестности s_{-i}.

Определение 7.7 (*Баг, Джофр* [7]). Игра $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$ **слабо взаимно верхнеполунепрерывна (с.в.в.п.н.)** (weakly reciprocally upper semicontinuous – WRUSC), если для любого $(s^*, u^*) \in \overline{\Gamma(u)} \backslash \Gamma(u)$ существует игрок i и $s_i' \in S_i$, такие что $u_i(s_i', s_{-i}^*) > u_i^*$.

Баг, Джофр [7] доказали, что в каждой компактной, квазивогнутой, (PS) и (WRUSC) игре существует равновесие Нэша. Мы докажем, что модифицированная игра $\hat{\hat{G}}$ удовлетворяет этим условиям, а затем покажем, что каждое равновесие Нэша в $\hat{\hat{G}}$ является РБС в исходной игре G.

(3). *Докажем, что* $\hat{\hat{G}}$ *гарантирует выигрыш* (определение 7.6). Выберем любого игрока i, любой профиль $s = (s_i, s_{-i}) \in S$ и любое

$\varepsilon > 0$. Из (4) следует, что существует $s_i' \in S_i$ такое, что $v_i(s_i', s_{-i}) > \hat{v}_i(s) - \varepsilon/2$. Либо $s_i' \in Q_i(s_{-i})$ и мы имеем $u_i(s_i', s_{-i}) = v_i(s_i', s_{-i})$, либо $s_i' \notin Q_i(s_{-i})$, и поскольку $((s_i', s_{-i}), v_i(s_i', s_{-i})) \in \overline{\Gamma(v_i)}$, то из BSA условия (определения 7.4 и 7.5) для игрока i следует, что существует $s_i'' \in Q_i(s_{-i})$ такое, что $u_i(s_i'', s_{-i}) > v_i(s_i', s_{-i})$. Таким образом, в обоих случаях существует $s_i'' \in Q_i(s_{-i})$ такое, что $u_i(s_i'', s_{-i}) = \hat{v}_i(s) - \varepsilon/2$. Игра G по условию теоремы непрерывна во внутренних безопасных стратегиях (определение 7.1) и гарантирует выигрыш на границе безопасных стратегий (определение 7.2). Отсюда следует, что условие гарантированности выигрыша (в смысле определения 6.6) для u_i удовлетворяется во всех безопасных стратегиях, и в частности для $s_i'' \in Q_i(s_{-i})$. Используя это условие для $\varepsilon/2$, мы получаем, что существует $s_i''' \in Q_i(s_{-i})$ такое, что $v_i(s_i''', s_{-i}') = u_i(s_i'', s_{-i}) - \varepsilon/2 > \hat{v}_i(s) - \varepsilon$ для всех s_{-i}' в некоторой окрестности s_{-i}. Из представления квазивогнутой оболочки (4) следует, что $\hat{v}_i(s_i''', s_{-i}') \geq v_i(s_i''', s_{-i}')$, и мы получаем условие гарантированности выигрыша для функции $\hat{v}(s)$, т.е. по определению Рени $\hat{\hat{G}}$ гарантирует выигрыш (определение 7.6 (Рени-3)).

Таким образом, для получения требуемой определением Рени-3 гарантированного выигрыша оценки требуется ряд переходов: от квазивогнутой оболочки безопасного выигрыша $\hat{v}_i(s)$ *к безопасному выигрышу* $v_i(s)$*, к выигрышу в исходной игре* $u_i(s)$ *и обратно, к* $v_i(s)$ *и* $\hat{v}_i(s)$. *Оценка гарантированного выигрыша получается следующим образом:* $\hat{v}_i(s_i''', s_{-i}') \geq \{$*представление* (4) *квазивогнутой оболочки по лемме* 7.1$\} \geq v_i(s_i''', s_{-i}') \geq \{$*условия теоремы непрерывности во внутренних безопасных стратегиях и гарантирования выигрыша на границе безопасных стратегий, определения* 7.1, 7.2$\} \geq u_i(s_i'', s_{-i}) - \varepsilon/2 > \{$*определения* 7.4, 7.5 *лучшей безопасной альтернативы*$\} > v_i(s_i', s_{-i}) - \varepsilon/2 \geq$ $\geq \{$*представление* (4) *квазивогнутой оболочки по лемме* 7.1$\} \geq$ $\geq \hat{v}_i(s) - \varepsilon$.

(4). *Докажем, что* $\hat{\hat{G}}$ *является WRUSC.* Рассмотрим произвольный вектор $(s^*, \hat{v}^*) \in \overline{\Gamma(\hat{v})} \backslash \Gamma(\hat{v})$. Существует последовательность профилей $\{s^n\} \to s^*: \{\hat{v}(s^n)\} \to \hat{v}^*$. Для произвольного i используем выражение (4) для $\hat{v}_i(s^n)$ и выберем последовательность семейств точек $\left\{s_i^{n(1)}, \dots, s_i^{n(d+1)}\right\}$ такую, что

$\forall n: s_i^n \in$
$\in co\left\{s_i^{n(1)}, \dots, s_i^{n(d+1)}\right\}, \min\{v_i\left(s_i^{n(1)}, s_{-i}^n\right), \dots, v_i\left(s_i^{n(d+1)}, s_{-i}^n\right)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \hat{v}_i^*$.

Поскольку игра $\tilde{G}$ компактна, то из этой последовательности можно выбрать такую подпоследовательность $\left\{\tilde{s}_i^{n(1)}, \dots, \tilde{s}_i^{n(d+1)}\right\}$, что все её члены и соответствующие величины функций сходятся:

$$\left\{\tilde{s}_i^{n(l)}\right\} \to s_i^{(l)}, \left\{v_i\left(\tilde{s}_i^{n(l)}, \tilde{s}_{-i}^n\right)\right\} \to v_i^{(l)} \ge \hat{v}_i^*, l = 1, \dots, d+1.$$

Поскольку для всех n мы имеем $\tilde{s}_i^n \in co\left\{\tilde{s}_i^{n(1)}, \dots, \tilde{s}_i^{n(d+1)}\right\}$ и $\{\tilde{s}_i^n\} \to s_i^*$, то в пределе мы получаем $s_i^* \in co\left\{s_i^{(1)}, \dots, s_i^{(d+1)}\right\}$.

Возможны два случая. Либо существуют такие i и l, что точка $\left(\left(s_i^{(l)}, s_{-i}^*\right), v_i^{(l)}\right) \in \overline{\Gamma(v_l)}$ удовлетворяет BSA условию для игрока i (определение 7.4). В таком случае в соответствии с этим условием существует такая $s_i' \in \tilde{Q}_i(s_{-i}^*) \subseteq Q_i(s_{-i}^*)$, что $u_i(s_i', s_{-i}^*) > v_i^{(l)} \ge \hat{v}_i^*$. Учитывая (5) и условие квазивогнутости $\hat{u}_i(s_i', s_{-i}^*) = u_i(s_i', s_{-i}^*)$ для $s_i' \in \tilde{Q}_i(s_{-i}^*) \subseteq Q_i(s_{-i}^*)$, получаем $\hat{v}_i(s_i', s_{-i}^*) \ge \hat{u}_i(s_i', s_{-i}^*) = u_i(s_i', s_{-i}^*) > \hat{v}_i^*$, т.е. условие WRUSC выполняется для точки $(s^*, \hat{v}^*)$ (определение 7.7 Баг, Джофр [7]).

Во втором случае для любых i и l точка $\left(\left(s_i^{(l)}, s_{-i}^*\right), v_i^{(l)}\right) \in$ $\in \overline{\Gamma(v_l)}$ не удовлетворяет BSA условию для игрока i (определение 7.4). Отрицание условий определения означает, что $\forall i, \forall l: s_i^{(l)} \in Q_i(s_{-i}^*)$, т.е. $v_i\left(s_i^{(l)}, s_{-i}^*\right) = u_i\left(s_i^{(l)}, s_{-i}^*\right)$. Кроме того, по BSA-условию, это означает, что либо $\left(\left(s_i^{(l)}, s_{-i}^*\right), v_i^{(l)}\right) \in$ $\in \Gamma(v_i)$; либо $\left(s_i^{(l)}, s_{-i}^*\right) \notin \partial Q^{(i)}$, т.е. $v_i = u_i$ в некоторой окрестности $\left(s_i^{(l)}, s_{-i}^*\right)$, и из непрерывности u_i во внутренних безопасных стратегиях также следует непрерывность v_i в $\left(s_i^{(l)}, s_{-i}^*\right)$.

В обоих случаях имеем: $\forall l\colon \hat{v}_i^* \le v_i^{(l)} = \lim_{n\to\infty} v_i\left(\tilde{s}_i^{n(l)}, \tilde{s}_{-i}^n\right) = = v_{\mathrm{i}}\left(s_i^{(l)}, s_{-i}^*\right) = u_i\left(s_i^{(l)}, s_{-i}^*\right)$.

Поскольку $s_i^* \in co\left\{s_i^{n(1)}, \dots, s_i^{n(d+1)}\right\}$, отсюда, согласно квазивогнутости $u_i(s)$ на безопасных стратегиях, получаем:

$$\hat{u}_i(s^*) \ge \min\left\{u_i\left(s_i^{(1)}, s_{-i}^*\right), \dots, u_i\left(s_i^{(d+1)}, s_{-i}^*\right)\right\} =$$
$$= \min\left\{v_i\left(s_i^{(1)}, s_{-i}^*\right), \dots, v_i\left(s_i^{(d+1)}, s_{-i}^*\right)\right\} \ge \hat{v}_i^*.$$

Учитывая, что согласно (5), $\hat{u}_i(s_i, s_{-i}) \le \hat{v}_i(s_i, s_{-i})$, имеем $\hat{v}_i(s^*) \ge \tilde{v}_i^*$ для любых i. Но поскольку с самого начала мы предполагали $(s^*, \hat{v}^*) \notin \Gamma(\hat{v})$, то существует такое j, что $\hat{v}_j(s^*) > \hat{v}_j^*$. Это означает, что условие WRUSC (определение 7.7 Баг, Джофр [7]) удовлетворяется для игрока j и $s_j' = s_j^*$.

Таким образом, чтобы получить оценку слабой взаимной верхней полунепрерывности для произвольной точки недостигаемого предела $(s^*, \hat{v}^*)$ из замыкания графика игры, требуется следующий ряд шагов: для каждого игрока i *построить последовательность окружающих профиль s^* семейств точек $\left\{s_i^{n(1)}, \dots, s_i^{n(d+1)}\right\}$, сходящихся к ней: $\{s^n\} \to s^*\colon \{\hat{v}(s^n)\} \to \hat{v}^*$; выделить из неё предельное семейство (набор) $\left(\left(s_i^{(l)}, s_{-i}^*\right), v_i^{(l)}\right)$ окружающий s^* и ограничивающих сверху значение недостигаемого предела $v_i^{(l)} \ge \hat{v}_i^*$; рассмотреть два случая выполнения хотя бы для одной из точек предельного семейства и хотя бы одного игрока / (невыполнения для всех точек и игроков) условий BSA; в первом случае оценкой будет значение совпадающих функций выигрыша в точке отклонения в безопасную область $v_i = u_i = \hat{u}_i = \hat{v}_i(s_i', s_{-i}^*)$; во втором случае оценка $\hat{v}_i(s_i', s_{-i}^*)$ получается через минимальное значение из предельных точек окружающего семейства $v_i\left(s_i^{(l)}, s_{-i}^*\right) = v_i^{(l)}$, лежащих в безопасном множестве; строгое выполнение неравенства $\hat{v}_j(s^*) > \hat{v}_j^*$ хотя бы для одного игрока следует из того, что что профиль $(s^*, \hat{v}^*)$ является точкой недостигаемого предела.*

(5). *Покажем, что равновесие игры* $\hat{\hat{G}}$ *является безопасным профилем.* Мы доказали, что игра $\hat{\hat{G}}$ квазивогнута, гарантирует выигрыш (PS) и является WRUSC. По теореме Баг, Джофр [7] в ней существует равновесие Нэша s^*.

Предположим, что s^* является не безопасным профилем. Тогда $s^* \notin \times_{i=1}^{N} \tilde{Q}_i(s_{-i}^*)$ и в соответствии с BSA условием существует игрок j со стратегией $s_j^* \notin \overline{co(\tilde{Q}_J(s_{-J}^*))}$ в профиле s^*. Используя представление (4) для $\hat{v}_j(s^*)$, выберем такую последовательность семейств точек $\left\{s_j^{n(1)}, \dots, s_j^{n(d+1)}\right\}$, чтобы

$$\forall n: s_j^* \in$$
$$\in co\left\{s_j^{n(1)}, \dots, s_j^{n(d+1)}\right\}, \min\{v_j\left(s_j^{n(1)}, s_{-j}^*\right), \dots, v_j\left(s_j^{n(d+1)}, s_{-j}^*\right)\}$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \hat{v}_j(s^*).$$

Существует некоторое положительное расстояние $\rho_0 = dist\left(\left\{s_j^*\right\}, \overline{co\left(\tilde{Q}_J\left(s_{-J}^*\right)\right)}\right) > 0$ между точкой $\left\{s_j^*\right\}$ и замкнутым множеством $\overline{co\left(\tilde{Q}_J\left(s_{-J}^*\right)\right)} \subseteq S_j$. Для каждого n выберем такую точку $\left\{s_j^{n(l)}\right\} \in \left\{s_j^{n(1)}, \dots, s_j^{n(d+1)}\right\}$, чтобы расстояние $dist\left(\left\{s_j^{n(l)}\right\}, \overline{co\left(\tilde{Q}_J\left(s_{-J}^*\right)\right)}\right) \geq \rho_0 > 0$. Её можно выбрать благодаря выпуклости множества $\overline{co\left(\tilde{Q}_J\left(s_{-J}^*\right)\right)}$. Выберем из последовательности $\left\{s_j^{n(l)}\right\}$ сходящуюся подпоследовательность $\left\{\tilde{s}_j^{n(l)}\right\} \to s_j'$ так, чтобы значения соответствующих величин v_j также сходились: $\left\{v_j\left(\tilde{s}_j^{n(l)}, s_{-j}^*\right)\right\} \to v_j' \geq \hat{v}_j(s^*)$. Для каждого n расстояние $dist\left(\left\{\tilde{s}_j^{n(l)}\right\}, \overline{co\left(\tilde{Q}_J\left(s_{-J}^*\right)\right)}\right) \geq \rho_0 > 0$ и потому $s_j' \notin \tilde{Q}_j\left(s_{-j}^*\right)$. Из условия BSA (определение 7.4) для точки $\left(\left(s_j', s_{-j}^*\right), v_j'\right) \in \overline{\Gamma(v_J)}$ существует такая стратегия $s_j'' \in \tilde{Q}_j\left(s_{-j}^*\right) \subseteq Q_j\left(s_{-j}^*\right)$, что $u_j\left(s_j'', s_{-j}^*\right) > v_j' \geq \hat{v}_j(s^*)$. Поскольку $\left(s_j'', s_{-j}^*\right)$ является безопасным профилем для игрока j, то $u_j\left(s_j'', s_{-j}^*\right) = v_j\left(s_j'', s_{-j}^*\right) \leq$ $\leq \hat{v}_j\left(s_j'', s_{-j}^*\right)$, т.е. мы получаем $\hat{v}_j\left(s_j'', s_{-j}^*\right) > \hat{v}_j(s^*)$ в противоречии с условием, что s^* является равновесием в $\hat{\hat{G}}$. Поэтому наше предположение было неверным и s^* является безопасным профилем.

Таким образом эта часть доказательства проводится от противного: принимается допущение, что существующее равновесие Нэша s^* игры $\hat{\hat{G}}$ не является безопасным профилем, и из него выводится противоречие. Согласно условию лучшей безопасной альтернативы в выпуклом множестве, это равновесие должно хотя бы для одного игрока находится вне выпуклой оболочки его множества безопасных стратегий, на некотором расстоянии ρ_0 от него. Дальнейшее рассуждение строится при помощи тех же приёмов, что и в предыдущих частях доказательства: через построение последовательности окружающих s^* семейств точек и выделение предельного семейства из этой последовательности осуществляется переход от функции квазивогнутой оболочки безопасного выигрыша к безопасному выигрышу; потом из безопасного множества выбирается лучшая безопасная альтернатива, в которой все функции выигрыша, безопасного выигрыши и их квазивогнутые оболочки равны $v_i = u_i = = \hat{u}_i = \hat{v}_i$ и выигрыш в которой превосходит выигрыш в точке равновесия $\hat{v}_j(s^*)$. Полученное противоречие опровергает сделанное предположение.

(6). *Докажем существование РБС в исходной игре.* Покажем, что $v(s^*) = \hat{v}(s^*)$. Выберем произвольное i и воспользуемся опять выражением (4) для $\hat{v}_i(s^*)$. Возможны два случая.

В первом случае из любой последовательности семейств точек $\left\{s_i^{n(1)}, \dots, s_i^{n(d+1)}\right\} \in (S_i)^{d+1}$, удовлетворяющих условиям

(6) $\forall n$: $s_i^* \in$

$\in co\left\{s_i^{n(1)}, \dots, s_i^{n(d+1)}\right\}, \min\{v_i\left(s_i^{n(1)}, s_{-i}^*\right), \dots, v_i\left(s_i^{n(d+1)}, s_{-i}^*\right)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \hat{v}_i(s^*)$

можно выбрать такую подпоследовательность

(7) $\left\{\tilde{s}_i^{n(1)}, \dots, \tilde{s}_i^{n(d+1)}\right\}: \left\{\tilde{s}_i^{n(l)}\right\} \to s_i^{(l)}, \left\{v_i\left(\tilde{s}_i^{n(l)}, s_{-i}^*\right)\right\} \to v_i^{(l)} \geq \hat{v}_i(s^*);$

$l = 1, \dots, d+1$

что для всех l BSA условия не выполняются для $\left(\left(s_i^{(l)}, s_{-i}^*\right), v_i^{(l)}\right) \in \overline{\Gamma(v_i)}$ (определение 7.4). Это означает, что

$\forall l: s_i^{(l)} \in \tilde{Q}_i(s_{-i}^*) \subseteq Q_i(s_{-i}^*)$, и также, что либо $\left(\left(s_i^{(l)}, s_{-i}^*\right), v_i^{(l)}\right) \in$ $\in \Gamma(v_i)$, либо $\left(s_i^{(l)}, s_{-i}^*\right) \notin Q^{(i)}$, т.е. $u_i = v_i$ в некоторой окрестности $\left(s_i^{(l)}, s_{-i}^*\right)$, и из непрерывности u_i во внутренних безопасных стратегиях также следует непрерывность $v_i(s)$ в $\left(s_i^{(l)}, s_{-i}^*\right)$. В обоих случаях мы имеем $v_i\left(s_i^{(l)}, s_{-i}^*\right) = v_i^{(l)}$, и следовательно,

$\forall l: u_i\left(s_i^{(l)}, s_{-i}^*\right) = v_i\left(s_i^{(l)}, s_{-i}^*\right) = v_i^{(l)}$ и $\hat{u}_i(s^*) \geq \min\left\{v_i^{(1)}, \ldots, v_i^{(d+1)}\right\} \geq$ $\geq \hat{v}_i(s^*)$. Но из (5) мы имеем $\hat{u}_i(s^*) \leq \hat{v}_i(s^*)$, и потому $\hat{u}_i(s^*) = \hat{v}_i(s^*)$. Из квазивогнутости игры *G* в s^* и безопасности профиля s^* мы получаем $v_i(s^*) = u_i(s^*) = \hat{u}_i(s^*) = \hat{v}_i(s^*)$, и требуемое равенство $v_i(s^*) = \hat{v}_i(s^*)$ доказано.

Во втором случае существует последовательность семейств точек $\left\{s_i^{n(1)}, \ldots, s_i^{n(d+1)}\right\} \in (S_i)^{d+1}$, удовлетворяющих (6) и таких, что в любой подпоследовательности (7) существует такое *l*, что BSA условие удовлетворяется для точки $\left(\left(s_i^{(l)}, s_{-i}^*\right), v_i^{(l)}\right) \in \overline{\Gamma(v_i)}$. В соответствии с определением 7.4 мы получаем

$$\exists s_i'' \in Q_i(s_{-i}^*): u_i(s_i'', s_{-i}^*) > v_i^{(l)} \geq \hat{v}_i(s^*), \hat{v}_i(s_i'', s_{-i}^*) \geq$$
$$\geq u_i(s_i'', s_{-i}^*)$$

в противоречие с тем, что s^* является равновесием Нэша в $\hat{\hat{G}}$. Таким образом, равенство $v_i(s^*) = \hat{v}_i(s^*)$ доказано для каждого *i*.

Поскольку $\forall i, \forall l: \hat{v}_i(s^*) \geq v_i(s^*)$, отсюда следует, что s^* – равновесие Нэша не только в игре $\hat{\hat{G}}$, но также равновесие Нэша в игре угроз $\tilde{G} = (S_i, v_i)_{i=1}^N$. Рассмотрим отклонение s_i' произвольного игрока *i*. Если $s_i' \in Q_i(s_{-i}^*)$, то $u_i(s_i', s_{-i}^*) = v_i(s_i', s_{-i}^*) \leq$ $\leq v_i(s^*) = u_i(s^*)$ и отклонение не выгодное. Если $s_i' \notin Q_i(s_{-i}^*)$, то $\left((s_i', s_{-i}^*), v_i(s_i', s_{-i}^*)\right) \in \overline{\Gamma(v_i)}$, и в соответствии с BSA условием существует такое $s_i'' \in Q_i(s_{-i}^*)$, что $u_i(s_i'', s_{-i}^*) > v_i(s_i', s_{-i}^*)$. Поскольку $u_i(s_i'', s_{-i}^*) = v_i(s_i'', s_{-i}^*) \leq v_i(s^*) = u_i(s^*)$, мы получаем $v_i(s_i', s_{-i}^*) < u_i(s^*)$, и в соответствии с утверждением 2.2 отклонение s_i' не безопасно. Таким образом, в безопасном профиле s^* ни один игрок не имеет выгодных безопасных отклонений, т.е. s^* является РБС в исходной игре *G*.

Таким образом, для доказательства $v(s^*) = \hat{v}(s^*)$ снова были рассмотрены всевозможные последовательности окружающих равновесный профиль наборов точек (s, v), из них выделяются предельные наборы, ограничивающие сверху значение $\hat{v}_i(s^*)$; далее применяется условие BSA, если оно не выполняется для всех последовательностей и предельных точек, то s^* находится во внутренних безопасных стратегиях, если выполняется хотя бы в одном случае, то из BSA-условия получается противоречие. Из того, что $v(s^*) = \hat{v}(s^*) = u(s^*) = \hat{u}(s^*)$ во внутренних безопасных стратегиях из элементарных свойств РБС следует, что s^* – РБС.

Итак, результат во всех частях доказательства достигается переходами между функциями $v, \hat{v}, u, \hat{u}$ и обратно, которые осуществлялись посредством формулы представления леммы 7.1, отклонения в безопасную область по условиям определения лучшей безопасной альтернативы и через построение последовательности окружающих семейств профилей и выделения из них предельного набора. □

Заметим, что **условие квазивогнутости** в безопасных стратегиях **может быть ослаблено**. Доказательство практически не изменяется, если потребовать выполнения условия квазивогнутости функций выигрыша не на множествах безопасных стратегий, а только на их подмножествах $\tilde{Q}_i(s_{-i}) \subseteq Q_i(s_{-i})$ из BSA условия. Назовем их BSA-множествами.

Определение 7.8. BSA-Игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ называется **квазивогнутой на BSA-множествах**, если функция выигрыша каждого игрока i совпадает со своей квазивогнутой оболочкой на BSA-множествах, т.е. $\forall i, \forall s$: $s_i \in \tilde{Q}_i(s_{-i})$ выполняется $u_i(s) = \hat{u}'_i(s)$, где $\hat{u}'_i(s_i, s_{-i}) = inf\{h(s_i): co(\tilde{Q}_i(s_{-i})) \to \mathbb{R}$: квазивогнутая, $u_i(s_i, s_{-i}) \le h(s_i), s_i \in \tilde{Q}_i(s_{-i})\}$.

Отсюда получаем следующее Следствие.

Следствие 7.1. Если игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ компактна, непрерывна во внутренних безопасных стратегиях, гарантирует выигрыш в границе безопасных стратегий и предоставляет лучшую безопасную альтернативу в выпуклом множестве и квазивогнута на BSA-множествах, то в игре G существует РБС.

Доказательство. Будем проводить его по схеме доказательства теоремы 7.1, отмечая необходимые изменения, заключающиеся в замене множества безопасных стратегий на его BSA-подмножество из определения 7.4: $Q_i(s_{-i}) \to \tilde{Q}_i(s_{-i})$; а также квазивогнутой оболочки функции обрезанной на безопасном множестве на соответствующую функцию на BSA-множестве из определения 7.6: $\hat{u}_i(s) \to \hat{u}_i'(s)$.

(1). Основным инструментом доказательства является представление (2) квазивогнутой оболочки функции (1) из леммы 7.1 без изменений.

(2). Для модифицированной игры $\hat{\hat{G}}(S_i, \hat{v}_i)_{i=1}^N$, определяемой равенством (4), при помощи представления леммы 7.1 вместо оценки (5) получаем оценку

$$(8)\quad \hat{u}_i'(s_i, s_{-i}) = \\ = \sup_{\substack{\left\{s_i^{(1)},\dots,s_i^{(d+1)}\right\} \in \left(\tilde{Q}_i(s_{-i})\right)^{(d+1)}: \\ s_i \in co\left\{s_i^{(1)},\dots,s_i^{(d+1)}\right\}}} \left\{\min\left\{v_i\left(s_i^{(1)}, s_{-i}\right), \dots, v_i\left(s_i^{(d+1)}, s_{-i}\right)\right\}\right\} \le \\ \le \sup_{\substack{\left\{s_i^{(1)},\dots,s_i^{(d+1)}\right\} \in (S_i)^{(d+1)}: \\ s_i \in co\left\{s_i^{(1)},\dots,s_i^{(d+1)}\right\}}} \left\{\min\left\{v_i\left(s_i^{(1)}, s_{-i}\right), \dots, v_i\left(s_i^{(d+1)}, s_{-i}\right)\right\}\right\} = \\ = \hat{v}_i(s_i, s_{-i})$$

То есть квазивогнутая оболочка обрезанной на BSA-множестве функции ограничена сверху квазивогнутой оболочкой функции безопасного выигрыша.

(3). *Доказательство, что $\hat{\hat{G}}$ гарантирует выигрыш* – идентично соответствующему доказательству теоремы, учитывая, что используемые там отклонения s_i', s_i'', s_i''' определяются по BSA-условию, а это означает, что эти отклонения принадлежат не только безопасному множеству, но и его BSA-подмножеству: $s_i', s_i'', s_i''' \in \tilde{Q}_i(s_{-i})$.

(4). *Доказательство, что $\hat{\hat{G}}$ является WRUSC*. Как в теореме, для произвольного вектора $(s^*, \hat{v}^*) \in \overline{\Gamma(\hat{v})} \backslash \Gamma(\hat{v})$ строится последовательность окружающих профиль s^* семейств точек $\left\{s_i^{n(1)}, \dots, s_i^{n(d+1)}\right\}$, сходящихся к ней, и выделяется набор точек

$\left(\left(s_i^{(l)}, s_{-i}^*\right), v_i^{(l)}\right), i = 1, \dots, N, l = 1, \dots, d$. Если в наборе существует точка, удовлетворяющая BSA-условию, то по нему $\exists s_i' \in \in \tilde{Q}_i(s_{-i}^*) \colon u_i(s_i', s_{-i}^*) > v_i^{(l)} \geq \hat{v}_i^*$. В соответствии с (8) и условием квазивогнутости следствия $\hat{u}_i'(s_i', s_{-i}^*) = u_i(s_i', s_{-i}^*), s_i' \in \tilde{Q}_i(s_{-i}^*)$, получается условие WRUSC для точки $(s^*, \hat{v}^*)$: $\hat{v}_i(s_i', s_{-i}^*) \geq \geq \hat{u}_i(s_i', s_{-i}^*) = \hat{u}_i'(s_i', s_{-i}^*) > \hat{v}_i^*$. Если ни одна точка набора не удовлетворяет BSA-условию, то соответствующая часть доказательства идентична теореме.

(5). *Доказательство, что равновесие Нэша игры* $\hat{\hat{G}}$ *является безопасным профилем.* В доказательстве теоремы при предположении, что профиль s^* (равновесие Нэша) не является безопасным, получено противоречие. При этом доказательство проведено для профиля $s^* \notin \times_{i=1}^N \tilde{Q}_i(s_{-i}^*)$, т.е. к данным профилям принадлежат не только небезопасные, но также и любые профили, не принадлежащие BSA-подмножеству, что и требуется для доказательства следствия.

(6). *Доказательство существования РБС в исходной игре.* Так как в предыдущем пункте уже доказано, что профиль s^* принадлежит BSA-подмножеству, то это значит, что и на этом более узком множестве по условию (следствия) квазивогнутости на BSA-подмножествах выполняется $u_i(s^*) = \hat{u}_i'(s^*)$, которое требуется для доказательства равенства $v_i(s^*) = \hat{v}_i(s^*)$. Дальнейшее доказательство идентично доказательству теоремы. □

Ослабим условия существования ещё на один шаг и покажем, что для существования РБС будет достаточно, чтобы условия теоремы 7.1 выполнялись на более узком множестве стратегий. Рассмотрим компактную область профилей игры в некотором прямоугольном множестве $s \in B = \times_{i=1}^N B_i$, где $B_i \subseteq S_i$ – непустое замкнутое выпуклое множество стратегий игрока i. Переопределим условия теоремы 7.1, если их брать только по отношению к множеству B.

Определение 7.1'. Игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ является **непрерывной во внутренних безопасных стратегиях в *B* (continuous at inte-**

rior secure strategies in *B*), если функция выигрыша $u_i(s)$ каждого игрока i непрерывна в множестве $\{s: s \in Q^{(i)} \setminus \partial Q^{(i)}, s_{-i} \in B_{-i}\}$.

Определение 7.2′. Игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ **гарантирует выигрыш на границе безопасных стратегий в *B* (payoff secure at boundary secure strategies in *B*)**, если для каждого игрока i для каждого $s \in Q^{(i)} \cap \partial Q^{(i)} \cap B$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $s_i' \in B_i$ такое, что $v_i(s_i', s_{-i}') \geq u_i(s) - \varepsilon$ для всех s_{-i}' в некоторой окрестности s_{-i} в B_{-i}.

Определение 7.5′. Игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ **предоставляет лучшую безопасную альтернативу в выпуклом множестве в *B* (provides better secure alternative in convex set in *B*)**, если (i) каждый игрок i при заданных стратегиях других игроков $s_{-i} \in B_{-i}$ имеет лучшую безопасную альтернативу в некотором непустом множестве $\tilde{Q}_i(s_{-i}) \subseteq Q_i(s_{-i}) \cap B_i$, и (ii) для всех $s \notin \times_{k=1}^N \tilde{Q}_k(s_{-k})$ таких, что $s_{-i} \in B_{-i}$ для некоторого i, существует такой игрок j, что $s_j \notin \overline{co(\tilde{Q}_j(s_{-j}))}$.

Определение 7.6′. BSA-Игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ называется **квазивогнутой на BSA-множествах в *B***, если функция выигрыша каждого игрока i совпадает со своей квазивогнутой оболочкой на BSA-множествах при $s_{-i} \in B_{-i}$, т.е. $\forall i, \forall s$: $s_i \in \tilde{Q}_i(s_{-i}), s_{-i} \in B_{-i}$ выполняется $u_i(s) = \hat{u}_i'(s)$, где $\hat{u}_i'(s_i, s_{-i}) = inf\{h(s_i): co(\tilde{Q}_i(s_{-i})) \to \mathbb{R}$: квазивогнутая, $u_i(s_i, s_{-i}) \leq h(s_i), s_i \in \tilde{Q}_i(s_{-i})\}$.

Тогда теорему 7.1 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 7.1′. *Если существует такое множество стратегий $B = \times_{i=1}^N B_i$, где $B_i \subseteq S_i$ – непустые замкнутые выпуклые множества, что игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ компактна, непрерывна во внутренних безопасных стратегиях в B, гарантирует выигрыш в граничных безопасных стратегиях в B, предоставляет лучшую безопасную альтернативу в выпуклом множестве в B и квазивогнута на BSA-множествах в B, то в игре G существует РБС $s^* \in B$.*

Доказательство. Буквально повторяет доказательство теоремы 7.1, за исключением того, что в качестве модифицированной игры следует рассматривать $\hat{\hat{G}}_B = (B_i, \hat{v}_i)_{i=1}^N$, где $\hat{v}_i(s_i, s_{-i})$ – квазивогнутая оболочка функции $v_i(s_i, s_{-i})$ на множестве $s_i \in S_i$. Также во всех соответствующих местах доказательства следует выбирать отклонения $s_i' \in Q_i(s_{-i}) \cap B_i$ вместо $s_i' \in Q_i(s_{-i})$. □

Чтобы использовать теоремы 7.1 и 7.1′, необходимо исследовать структуру безопасных стратегий игроков. Такой шаг кажется неизбежным при поиске РБС. Тем не менее в некоторых хорошо известных играх множества безопасных стратегий устроены достаточно просто. Показано на задачах, что предложенные теоремы хорошо работают. Соответствующий материал предполагается опубликовать в отдельной статье.

8. Большая теорема. Второй вариант

Второй подход к построению большой теоремы, как альтернативы первому. При этом хотелось бы избежать недостатков теоремы 7.1. Первый, самый очевидный из них, – её сложность и неочевидность конструкций как в системе требующихся определений и понятий, так и при доказательстве результата.

Более формальная претензия к ней заключается в том, что она использует значения функции безопасного выигрыша за пределами множеств безопасных стратегий игроков и даже их границ. Для применения теоремы 7.1 требуются значения этих функций в малых окрестностях особых точек границы множеств безопасности, где безопасные выигрыши должны быть непрерывны по окружению, т.е. угрозы в них не должны появляться скачком. А хотелось бы, чтобы для применения теоремы было достаточно условия сильных угроз или его небольшого усиления и значений выигрышей игроков строго в рамках их безопасного множества. И даже если за рамками безопасных множеств есть точки недостигаемого предела функций безопасного выигрыша, равного максимуму выигрыша на безопасном множестве, то всё равно при наличии равновесия Нэша в безопасной области (= РБС) и условия сильных угроз такие особые точки не будут препятствием для существования этого равновесия. Все эти пределы будут «убиваться» условием сильных угроз.

Основная идея второго варианта большой теоремы заключается в совмещении подходов теоремы Рени (=> теорема 6.1) и следствия Рени (=> теорема 6.2). Условия следствия просты и легко проверяемы, но они намного жёстче условий теоремы Рени и не всегда выполняются. Условия теоремы не так очевидны и применять их сложнее, а если сложность проверки условий теоремы существования и сложность прямой непосредственной проверки её вывода сравнимы, то такая теорема не очень полезна.

Казалось бы, объединяющий подход тавтологичен: зачем объединять в одном утверждении две формулировки, одна из которых является следствием другой? Но на практике было бы удобно иметь такой способ проверки, при котором можно было бы сначала убедиться, что более слабые условия выполняются почти везде, кроме некоторых особых точек, и только для этих особых отдельных случаев уже необходимо было бы проверять более сложное условие.

Условия и теоремы, и следствия Рени сформулированы как свойства игры (функций выигрыша) в целом. Чтобы применить комбинацию этих условий, достаточно показать, что их можно применять и к отдельным профилям, и что для отдельных профилей условие теоремы так же вытекает из условия следствия, как и для всей игры.

В основу теоремы также необходимо включить обобщённое условие квазивогнутости. В теореме 7.1, чтобы обеспечить его выполнение, в определение лучшей безопасной альтернативы было включено условие «в выпуклом множестве». Оно формулировалось так: *«*$\forall s \notin \times_{i=1}^{N} Q_i(s_{-i}), \exists j{:}\, s_j \notin \overline{co\big(Q_j(s_{-j})\big)}$*»*. Теперь необходимо извлечь это свойство из определения лучшей безопасной альтернативы и сформулировать более удобным образом, как свойство совокупности множеств безопасности игроков. Это можно сделать в следующей лемме.

Лемма 8.1. *Пусть дана игра* $G(S_i, u_i)_{i=1}^{N}$ *с множествами безопасных стратегий* $Q_i(s_{-i})$*, тогда два условия являются эквивалентными:*

– $\forall s \notin \times_{i=1}^{N} Q_i(s_{-i}), \exists j: s_j \notin \overline{co(Q_j(s_{-j}))}$;

– $\{s: s_i \in Q_i(s_{-i}), \forall i\} = \{s: s_i \in \overline{co(Q_i(s_{-i}))}, \forall i\}$.

Доказательство. Рассмотрим любой профиль s^* .

$s^* \notin \times_{i=1}^{N} Q_i(s_{-i}) \Leftrightarrow s^* \notin \{s: s_i \in Q_i(s_{-i}), \forall i\}$.

$\exists j: s_j \notin \overline{co(Q_j(s_{-j}))} \Leftrightarrow s^* \notin \{s: s_i \in \overline{co(Q_i(s_{-i}))}, \forall i\}$.

Значит, первое условие леммы можно переписать следующим образом.

$s^* \notin \{s: s_i \in Q_i(s_{-i}), \forall i\} \Rightarrow \{s: s_i \in \overline{co(Q_i(s_{-i}))}, \forall i\}$.

Поскольку множество безопасных профилей $\{s: s_i \in Q_i(s_{-i}), \forall i\} \subseteq \{s: s_i \in \overline{co(Q_i(s_{-i}))}, \forall i\}$, то первое условие будет эквивалентно следующему:

$s^* \in \{s: s_i \in Q_i(s_{-i}), \forall i\} \Rightarrow s^* \in \{s: s_i \in \overline{co(Q_i(s_{-i}))}, \forall i\}$.

А это и означает, что второе условие леммы выполнено. □

Доказанная лемма позволяет выделить и определить нужное свойство множеств безопасности игроков.

*Определение 8.1***.** В игре $G(S_i, u_i)_{i=1}^{N}$ с множествами безопасности игроков $Q_i(s_{-i})$ **множество безопасных профилей нерасширяемо** (выпуклыми оболочками безопасных стратегий), если $\{s: s_i \in Q_i(s_{-i}), \forall i\} = \left\{s: s_i \in \overline{co\left(Q_i(s_{-i})\right)}, \forall i\right\}$.

Ещё два усиливающих теорему условия – ослабление на подмножества безопасных стратегий $\tilde{Q}_i(s_{-i}) \subseteq Q_i(s_{-i})$ и на подмножества стратегий $B_i \subseteq S_i$ – будут сформулированы как локальный вариант теоремы вместе с уточнёнными для этого случая вариантами определений. Базовый вариант теоремы будет иметь следующий вид.

Теорема 8.1. *Игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^{N}$ компактна; квазивогнута на безопасных стратегиях; её множество безопасных профилей нерасширяемо; с сильными угрозами; для любого профиля $s \in S$: либо гарантирует выигрыш на безопасных стратегиях и взаимно-верхнеполунепрерывна в безопасных стратегиях; либо гарантирует лучший ответ в безопасных стратегиях; тогда в игре G существует РБС.*

Доказательство. Сведём условия теоремы 8.1 к условиям теоремы 6.1 (построенной на условиях теоремы Рени). Для этого надо сделать две вещи. Во-первых, доказать, что можно рассматривать условия гарантирования лучшего ответа, взаимной верхней полунепрерывности и гарантирования выигрыша на отдельных профилях, а не только в игре в целом, как доказано Рени в [14], и показать, что и для отдельных профилей из первого и второго следует третье. Для этого надо привести соответствующую часть доказательства из статьи Рени и убедиться, что оно действительно и на отдельных точках. Во-вторых, необходимо свести условия теоремы 8.1 к случаю с выпуклыми множествами безопасности и потом доказать, что найденное для них равновесие попадает в множества безопасности и для новой теоремы.

1. В условии теоремы «либо – либо» одна из альтернатив, взятая в целом для игры, строго сильнее другой. Если выполняется первая, то выполняется и вторая (но первую для задач проверять легче). То есть если мы покажем, что для всех профилей игры верна вторая альтернатива, то эта часть будет доказана. Приведём рассуждения из доказательства утверждения Рени применительно к нашему случаю. Пусть для профиля s^* игра гарантирует выигрыш на безопасных стратегиях и взаимно-верхнеполунепрерывна на безопасных стратегиях. То есть в профиле s^* $\forall i, \forall \varepsilon > 0$: игрок i может гарантировать себе выигрыш $u_i(s^*) - \varepsilon$ в s^*. Если s^* не является равновесием Нэша, то рассмотрим $\forall (s^*, u^*) \in \overline{\Gamma(\bar{G})}$. Тогда либо $\exists i \colon u_i(s^*) > u_i^*$, либо $\forall i \colon u_i(s^*) = u_i^*$. В первом случае, согласно взаимной верхней полунепрерывности, берём $s_i' = s_i^*$. Во втором случае, согласно той же взаимной верхней полунепрерывности и потому, что s_i^* не является равновесием Нэша, $\exists i, \exists\, s_i' \colon u_i(s_i', s_{-i}^*) > u_i^*$. В обоих случаях, согласно свойству гарантирования выигрыша, игрок i может гарантировать себе в (s_i', s_{-i}^*), а значит, и в s^*, выигрыш $u_i(s_i', s_{-i}^*) > u_i^*$. Свойство гарантирования лучшего ответа для s^* доказано.

Итак, для любого профиля из более сильного условия теоремы вытекает более слабое, а этого более слабого достаточно для выполнения утверждения теоремы. Более слабое условие, таким образом, выполняется для всех профилей игры и, соответственно, для игры в целом.

2. Обобщённая казивогнутость. В теореме 6.1 результат был доказан для случая выпуклых множеств безопасных стратегий.

Рассмотрим игру, обрезанную на выпуклых замыканиях безопасных множеств: $\bar{\bar{G}}(S_i, \bar{\bar{u}}_i), \bar{\bar{u}}_i(s) = \begin{cases} \hat{u}_i(s), s_i \in \overline{co(Q_i(s_{-i}))}, \\ C_{\min}, s_i \notin \overline{co(Q_i(s_{-i}))}, \end{cases}$ где $\hat{u}_i(s)$ – квазивогнутая оболочка выигрыша $u_i(s)$ игрока i на множестве $\overline{co(Q_i(s_{-i}))}$. Для этой игры теорема 6.1 верна, т.е. в этой игре существует равновесие Нэша s^*. Теперь остаётся доказать, что это равновесие Нэша попадает в множества безопасных стратегий всех игроков: $s_i^* \in Q_i(s_{-i}^*), \forall i$. Это следует из того, что множество безопасных стратегий расширяемо: $\left\{s: s_i \in \overline{co(Q_i(s_{-i}))}, \forall i\right\} =$ $= \{s: s_i \in Q_i(s_{-i}), \forall i\}$. Действительно, если допустим, что $\exists i: s_i^* \notin Q_i(s_{-i}^*)$, то, по лемме 8.1 найдётся игрок j, для которого $s_j^* \in \overline{co(Q_j(s_{-j}^*))}$. Для этого игрока $\bar{\bar{u}}_j(s^*) = C_{min}$ и, по условию сильных угроз, $\exists j: \bar{\bar{u}}_j(s_j', s_{-j}^*) > \bar{\bar{u}}_j(s^*)$. Получено противоречие.

Таким образом, все отличия теоремы 8.1 от условий теоремы 6.1 устранены и новое утверждение доказано сведением к уже доказанному предыдущему. □

Локальный вариант теоремы 8.1. Практически работающий вариант теоремы должен быть локальным, так как глобально, на всём множестве S_i, требования теоремы не выполняются почти нигде, ни на одной из рассмотренных задач. Для того чтобы получить его, надо внести в имеющуюся формулировку два изменения, две поправки в множества, на которых ищутся равновесные точки. Совершить два перехода. Во-первых, перейти от множества безопасных стратегий к некоторому его подмножеству: $Q_i(s_{-i}) \subseteq S_i \to \tilde{Q}_i(s_{-i}) \subseteq Q_i(s_{-i})$. Во-вторых, для окружения рассматривать не всё множество стратегий, а только его подмножество: $S_{-i} \to B_{-i} \subseteq S_{-i}$.

Локальный вариант условия в прямоугольном подмножестве $s \in B = \times_{i=1}^{N} B_i, B_i \subseteq S_i$ был введён в определении 2.10 как *условие сильных угроз в B*, и на его основе сформулирована теорема 2.3 как локальный вариант теоремы 2.2. Локальный вариант двух малых теорем 6.1 и 6.2 по теореме и следствию Рени был дан как теоремы 6.1′ и 6.2′. Для первого варианта большой теоремы случай подмножества безопасных стратегий был оформлен через определения 7.4, 7.5 *лучшей безопасной альтернативы* *на BSA множествах* для базового варианта теоремы и уточнён через определение 7.6 *квазивогнутости на BSA множествах* как следствие этой теоремы. Окончательный локальный вариант этой большой теоремы потребовал уточнения определений 3.1′, 3.2′, 3.5′, 3.6′ и был представлен как теорема 7.1′.

Аналогичным образом соберём и перепишем для случая «*на безопасном подмножестве* $\tilde{Q}$ *в множестве B*» все определения, прямо или косвенно требуемые условиями теоремы 8.1. Собираем в единый блок все упоминаемые там понятия, определения: 2.8 *сильной угрозы* (для профиля, игрока, игры), 6.2 *гарантированного безопасного ответа* (для окружения, игрока), 6.4 *гарантированного лучшего ответа в безопасных стратегиях* (для стратегии, = для профиля & игрока), 6.5 *гарантированного лучшего ответа в безопасных стратегиях* (для игры), 6.6 *гарантированного выигрыша в безопасных стратегиях* (для стратегии), 6.7 *гарантированного выигрыша в безопасных стратегиях* (для игры), 6.8 *взаимной верхней полунепрерывности в безопасных стратегиях* (для игры), 7.3 *квазивогнутости в безопасных стратегиях* (для игры), 8.1 *нерасширяемости множества безопасных профилей* (для игры).

Итак, пусть для игры $G(S_i, u_i)_{i=1}^{N}$ заданы прямоугольные подмножества стратегий $B = \times_{i=1}^{N} B_i, B_i \subseteq S_i$ и подмножества безопасных стратегий $\tilde{Q}_i(s_{-i}) \subseteq Q_i(s_{-i}) \cap B_i \subseteq S_i, \forall i, \forall s_{-i} \in B_{-i}$, а также соответствующие подмножества безопасных профилей $\tilde{Q}^{(i)} = \{s: s_i \in \ \tilde{Q}_i(s_{-i}), \forall i\}$.

Определение 2.8′. **Угроза** игроку i в профиле $s \in (S_i, B_{-i})$ является **сильной по отношению к подмножеству безопасных стратегий** $\boldsymbol{\tilde{Q}}$, если существует безопасная стратегия $s' = (s_i', s_{-i}), s_i \in \ \tilde{Q}_i(s_{-i})$ такая, что $u(s') = v(s') > v(s)$. Для игрока *i* в игре *G* выполняется **условие сильных угроз относительно подмножества безопасных стратегий** $\boldsymbol{\tilde{Q}}$ **в *B***, если для него содержащиеся в любом профиле $s \in (S_i, B_{-i})$, не содержащимися в подмножестве безопасных стратегий, угрозы являются сильными по отношению к подмножеству безопасных стратегий $\tilde{Q}$. Игра *G* называется игрой **с сильными угрозами относительно подмножества безопасных стратегий** $\boldsymbol{\tilde{Q}}$ **в *B***, если для всех игроков в ней выполняется условие сильных угроз относительно подмножества безопасных стратегий $\tilde{Q}$ в B.

Определение 6.2'. Игрок i **имеет гарантированный безопасный ответ на подмножестве безопасных стратегий $\widetilde{\boldsymbol{Q}}$ в $\boldsymbol{B}$ при окружении** $s_{-i} \in B_{-i}$, если $\exists s_i' \in B_i, \exists$ открытая окрестность $U_{s_{-i}} \subseteq B_{-i}, \forall s_{-i}' \in U_{s_{-i}}$: $s' = (s_i', s_{-i}') \in \tilde{Q}^{(i)}$. Игрок i **имеет гарантированный безопасный ответ на подмножестве безопасных стратегий $\widetilde{\boldsymbol{Q}}$ в $\boldsymbol{B}$ в игре $\boldsymbol{G}$**, если он его имеет при любых окружениях.

Определение 6.4'. Безопасная стратегия s_i игрока i в профиле $s \in (S_i, B_{-i})$, не являющемся РБС, **имеет гарантированный лучший ответ на подмножестве безопасных стратегий $\widetilde{\boldsymbol{Q}}$ в $\boldsymbol{B}$**, если $\forall (s, u) \in \overline{\Gamma(\bar{u})}, \exists \alpha > u_i, \exists s_i' \in \tilde{Q}_i(s_{-i}), \exists$ открытая окрестность $U_{s_{-i}} \subseteq B_{-i}$: $\forall s_{-i}' \in U_{s_{-i}}$: $s' = (s_i', s_{-i}') \in \tilde{Q}^{(i)}$ (безопасен для i) и $u_i(s') \geq \alpha > u_i$.

Определение 6.5'. Игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ **гарантирует лучший ответ на подмножестве безопасных стратегий $\widetilde{\boldsymbol{Q}}$ в $\boldsymbol{B}$**, если $\forall s \in B \;\; \exists$ игрок i такой что: он имеет гарантированный безопасный ответ на подмножестве безопасных стратегий $\tilde{Q}$ в B, если его стратегия s_i не безопасна, и гарантированный лучший ответ на подмножестве безопасных стратегий $\tilde{Q}$ в B, если его стратегия s_i безопасна.

Определение 6.6'. Безопасная стратегия s_i игрока i в профиле $s \in (S_i, B_{-i})$ **имеет гарантированный выигрыш на подмножестве безопасных стратегий $\widetilde{\boldsymbol{Q}}$ в $\boldsymbol{B}$**, если $\forall \varepsilon > 0$, $\exists s_i' \in \tilde{Q}_i(s_{-i}), \exists$ открытая окрестность $U_{s_{-i}} \subseteq B_{-i}$: $\forall s_{-i}' \in U_{s_{-i}}$: $s' = (s_i', s_{-i}') \in \tilde{Q}^{(i)}$ (безопасен для i) и $u_i(s') \geq u_i(s) - \varepsilon$.

Определение 6.7'. Игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ **гарантирует выигрыш на подмножестве безопасных стратегий $\widetilde{\boldsymbol{Q}}$ в $\boldsymbol{B}$**, если для $\forall s \in B, \forall$ игрока i: имеется гарантированный безопасный ответ на подмножестве безопасных стратегий $\tilde{Q}$ в B, если его стратегия s_i не безопасна, и гарантированный выигрыш на подмножестве безопасных стратегий $\tilde{Q}$ в B, если его стратегия s_i безопасна.

Определение 6.8'. Игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ **взаимно-верхнеполунепрерывна в подмножестве безопасных стратегий (в.в.п.н.п.б.с.)**

в профиле $s \in B$, если для соответствующей этой игре обрезанной на подмножестве безопасных стратегий игры $\bar{G}(S_i, \bar{u}_i)_{i=1}^N$ для $\forall (s, u) \in \overline{\Gamma(\bar{u})}$ выполняется условие: $u_i(s) \leq u_i, \forall i \Rightarrow u_i(s) = u_i, \forall i$. Игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ **в.в.п.н.п.б.с. в *B***, если она в.в.п.н.п.б.с. любом профиле $s \in B$.

Определение 7.3′. Игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ **квазивогнута на подмножестве безопасных стратегий $\tilde{\boldsymbol{Q}}$ в *B***, если функция выигрыша каждого игрока i совпадает с ее квазивогнутой оболочкой на подмножестве безопасных стратегий этого игрока, т.е. $\forall i, \forall s\colon s_i \in \tilde{Q}_i(s_{-i})$ выполняется $u_i(s) = \hat{u}_i(s)$.

Определение 8.1′. В игре $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ с подмножествами безопасности игроков $\tilde{Q}_i(s_{-i})$ **подмножество безопасных профилей нерасширяемо** (выпуклыми оболочками безопасных стратегий), если:

$$\left\{s\colon s_i \in \tilde{Q}_i(s_{-i}), \forall i\right\} = \left\{s\colon s_i \in \overline{co\left(\tilde{Q}_\iota(s_{-\iota})\right)}, \forall i\right\}.$$

Теперь есть всё необходимое, чтобы сформулировать локальный вариант теоремы 8.1, т.е. её окончательный вариант, хорошо работающий на прикладных задачах.

Теорема 8.1′. *Игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$: компактна; квазивогнута на подмножестве безопасных стратегий $\tilde{Q}$ в B; её подмножество безопасных профилей нерасширяемо; с сильными угрозами относительно подмножества безопасных стратегий $\tilde{Q}$ в B; для любого профиля $s \in S$: либо гарантирует выигрыш на подмножестве безопасных стратегий $\tilde{Q}$ в B и взаимно-верхнеполунепрерывна на подмножестве безопасных стратегий $\tilde{Q}$ в B; либо гарантирует лучший ответ на подмножестве безопасных стратегий $\tilde{Q}$ в B; – тогда в игре G существует РБС.*

Комментарий. Утверждение теоремы остаётся корректным при переходе от множества безопасных стратегий к их подмножеству, – это следует из того, что при переходе от определения 2.8 к 2.8′ это более узкое множество оказывается в точно таком же отношении ко всем не входящим в него профилям, как более широкое множество в прежнем глобальном варианте теоремы. Все последующие понятия и рассуждения строятся на конструкции обрезанной функции, которая изначально намеренно была сформулирована безотносительно к тому, что отсекаемые ей значения функции выигрыша имеют именно небезопасную природу. Поэтому все рассуждения сохраняют свою силу и при переносе на более узкое множество при условии, что выполняется определение 2.8′.

Доказательство. Рассмотрим игру $\hat{G}'_B(B_i, \hat{u}'_i(s))_{i=1}^N$, где $\hat{u}'_i(s)$ – функция выигрыша обрезанная на BSA-множестве $\tilde{Q}_i(s_{-i})$. Эта игра компактна, квазивогнута (так как исходная игра G квазивогнута на BSA-множестве). По условию теоремы исходная игра G: либо гарантирует выигрыш на подмножестве безопасных стратегий $\tilde{Q}$ в B и взаимно-верхнеполунепрерывна на подмножестве безопасных стратегий $\tilde{Q}$ в B; либо гарантирует лучший ответ на подмножестве безопасных стратегий $\tilde{Q}$ в B. Из этого следует, что игра $\hat{G}'_B$ гарантирует лучший ответ.

Игра $\hat{G}'_B$ компактна, квазивогнута, гарантирует лучший ответ; следовательно, по теореме 3.1. (Рени): $\exists s^* \in B$ – равновесие Нэша этой игры.

Рассмотрим профиль s^* в исходной игре, произвольное отклонение s'_i произвольного игрока i от него, профиль (s'_i, s^*_{-i}). Рассмотрим безопасный выигрыш в этом профиле $v_i(s'_i, s^*_{-i})$. Так как s^* – равновесие Нэша в игре $\hat{G}'_B$ и по условию теоремы игра G – с сильными угрозами относительно подмножества безопасных стратегий $\tilde{Q}$ в B, то из этого следует, что $v_i(s'_i, s^*_{-i}) \le v_i(s^*)$. То есть s^*– равновесие Нэша игры угроз игра $\tilde{G}(S_i, v_i)_{i=1}^N$. При этом если $s'_i \notin \tilde{Q}_i(s^*_{-i})$, то $v_i(s'_i, s^*_{-i}) < v_i(s^*)$. Профиль s^* безопасен. Из этого, по теореме 2.1, следует, что s^* является РБС исходной игры G. □

В заключение рассмотрения теоремы 8.1′ можно добавить, что хотя её формулировка выглядит очень тяжеловесно, но тем не менее она весьма полезна. Дело в том, что локальная теорема требует выполнения намного меньших условий, чем теорема 8.1. А именно, условие сильных угроз должно выполняться на множествах $s \in (S_i, B_{-i})\ \ \forall i$, а для всех других условий теоремы достаточно выполнения на локальном множестве B. Чего и хотелось изначально добиться. Это позволяет рассматривать игры на маленьком подмножестве, имеющем внутри себя хорошие свойства и обладающем преимуществом сильных угроз при любых односторонних отклонениях за его пределы. За этими границами игра может вести себя как угодно плохо (ну разве что компактность игры там требуется), но если в игровой задаче удастся найти такое удобное подмножество, которое можно интерпретировать как область неантагонистичности игры, то к ней можно применять теорему и делать вывод о существовании в игре РБС.

9. Заключение

Целью статьи является продемонстрировать метод конструирования теорем существования РБС из имеющихся в литературе теорем существования равновесий Нэша (в чистых стратегиях). Приведен весь ряд необходимых утверждений – от метатеоремы и исходных теорем из источников до рабочих теорем, которые могут применяться к задачам. Чтобы объединить и привести в одной публикации всю цепочку теоретических результатов, потребовался достаточно большой объем статьи. Тестирование рабочих теорем на задачах планируется вынести в отдельную публикацию.

Общая схема получения рабочих теорем следующая. В разделе 2 приведены теоремы, опубликованные ранее в статьях [3, 4]. В теореме 2.1 представлено необходимое и достаточное условие существования РБС, которое проясняет необходимость использования игры угроз с безопасным выигрышем, взятом в качестве целевой функции. Метатеорема 2.1 представляет центральный теоретический результат, положенный в основу метода. В теореме 2.3 представлен локальный вариант теоремы, который является рабочим, т.е. достаточен для применения к задачам.

Существенным новым материалом, опубликованным в данном разделе, является описание метода приведения исходной теоремы (который в источниках может быть сформулирован различными способами) к стандартному виду, что позволило построить предлагаемый метод в форме метатеоремы. Все различия исходных теорем были свернуты внутри переменной части, обозначенной как (#). После этого все соответствующие конкретные формулировки, приведенные к стандартному виду, могут далее вставляться в гнездо внутри метатеоремы. Применение метода, приведение исходной теоремы к стандартному виду и получение из него конкретной теоремы существования РБС было пояснено примером 2.1.

В разделе 3 приведены две исходные теоремы из работы [14], теорема 3.1 и следствие 3.1. Они изложены нарочито подробно, с обильным цитированием источника, что необходимо для иллюстрации метода.

В разделе 4 приводится подробная интерпретация условий теорем Рени, в сравнении с так же подробно приведенным случаем теоремы Дебре (теорема 4.1), приведенным к стандартному виду (теорема 4.2), и полученной теоремой существования РБС (теорема 4.4). Эта теорема была первоначально сформулирована и опубликована в статье [12]. Далее в завершение раздела 4 и разделе 5 приводится подробный анализ теоремы Рени, на ряде примеров, условие теоремы трактуется как условие отсутствия точек перескока или точек, гарантирующих лучший ответ.

В разделе 6 строятся формально, по методу метатеоремы два критерия существования РБС по исходной теореме Рени (теорема 6.1) и по следствию Рени (теорема 6.2). По ним сформированы локальные варианты теорем 6.1′ и 6.2′.

Первоначально предполагалось этим и ограничиться. Но при попытках применить эти теоремы к прикладным задачам выяснились многочисленные **трудности и проблемы**. Оказалось, что требуемые построенными формально теоремами условия для задач (Хотеллинга и Таллока – Скапердаса) не выполняются, ни одно из них (!).

1. **Квазивогнутость** (на безопасных стратегиях) не выполняется даже для самой простой из моделей – задачи Хотеллинга, так как не выполняется условие выпуклости для множеств безопасных стратегий: они часто даже не являются связными. Множество безопасных профилей в задаче Хотеллинга не выпукло за счёт безопасных профилей с нулевым выигрышем.

2. **Гарантированность выигрыша** также не выполняется, например для игры цен в задаче Хотеллинга при определённых условиях: при сильно несимметричном расположении игроков на отрезке и случая, когда максимум безопасных стратегий одного

игрока лежит на границе безопасных стратегий, а другого – на максимуме целевой функции.

3. **Компактность** множества безопасных профилей и стратегий не выполняется почти на всех задачах за счёт тех областей безопасных профилей, которые не содержат свою границу.

4. **Верхняя полунепрерывность** также не выполняется, так как встречаются точки недостигаемых пределов, принадлежащие замыканию графика целевой функции, но не принадлежащие самому графику.

Таким образом, чтобы довести теоремы до применимости, пришлось провести их существенную доработку. При этом ставилась цель, чтобы новая усложнённая теорема была применима ко всем тестовым задачам. Были внесены следующие изменения.

А. Было введено *подмножество множества безопасных стратегий* $\tilde{Q}_i(s_{-i})$ вместо $Q_i(s_{-i}$). Это минимальное, самое простое изменение можно было ввести чисто формально.

Б. Были введены (для теоремы 7.1) дополнительные условия и определения *непрерывности во внутренних безопасных стратегиях* и *гарантирования выигрышей на границе безопасных стратегий* для корректной работы с граничными точками множеств безопасных стратегий.

В. Вместо *обрезанной функции* выигрыша была использована *функция безопасного выигрыша*, которая вела себя непрерывно, по крайней мере на рассмотренных задачах, т.е. *угрозы* в окрестности особой краевой точки, где нарушалось условие гарантированного выигрыша, *были малы* (это не обязательно должно быть так).

Г. В некоторых случаях альтернативой функции безопасного выигрыша (для несимметричной задачи Хотеллинга) оказалось использование в качестве исходной теоремы не *следствия Рени*, как это фактически общепринято, а исходной *теоремы Рени*. То есть соответствующий аналог теоремы 3.1 сильнее следствия 3.1.

Д. Очень много пришлось поработать над условием выпуклости множеств безопасных стратегий, заменив исходные *неквазивогнутые функции* их минимальными *квазивогнутыми оболочками*, введя сложное условие на выпуклость внутрь определения лучшей гарантированной альтернативы (*лучшая безопасная альтернатива в выпуклом множестве*).

Е. В качестве альтернативного подхода (для теоремы 8.1) был применён *комбинированный вариант* одновременного применения условий *следствия Рени* (для почти всех точек, где он выполнялся) и более сложных условия *теоремы Рени* (там, где более простые и одновременно более жёсткие условия не проходили).

При реализации этого плана и сами применяемые конструкции, и доказательство результатов существенно усложнилось, тем не менее удалось получить две работающие теоремы. Если попытаться сравнить их, то однозначного преимущества ни одной из них не видно, у каждой есть и достоинства, и недостатки: в теореме 7.1 приходится обращаться к значениям функций за пределами безопасных множеств; в теореме 8.1 приходится применять тяжёлые для проверки условия теоремы Рени к отдельным профилям, где не проходят условия следствия Рени, но по крайней мере только для отдельных плохих точек. В итоге получено две мощных теоремы с хорошей применимостью. По мощности они одинаково проходят этот тест на прикладных задачах (в локальном варианте). Но получить идеал всё-таки не удалось – получено два компромиссных, как бы дополнительных друг по отношению к другу варианта. Итак, в разделах 7 и 8 приведены формулировки и доказательства теорем, модифицированные под требования задач (7.1 и 8.1), а также их локальные (рабочие) варианты (7.1′ и 8.1′). Тестирование полученных теорем на задачах будет рассмотрено в отдельной статье. Все предложенные в статье теоремы можно свести в таблицу:

	Мета-теорема	Дебре	Рени, теорема	Рени, следствие
Исходные теоремы	2.2	4.1, 4.2	3.1	Следствие 3.1
Теоремы сущ. РБС (формальн.)	2.3	4.3	6.1	6.2
Локальные варианты			6.1′	6.2′
Модиф. под задачи вариант			7.1, следствие 7.1	8.1
Рабочий вариант	2.3	4.3	7.1′	8.1′

Литература

1. ИСКАКОВ М.Б. *Равновесие в безопасных стратегиях* // Управление большими системами. – 2004. – Вып. 9: «Лаборатория активных систем: 30 лет». – С. 145–157.
2. ИСКАКОВ М.Б. *Равновесие в безопасных стратегиях* // Автоматика и телемеханика. – 2005. – №3. – С. 139–153. (ISKAKOV M.B. *Equilibrium in Safe Strategies* // Automation and Remote Control. – 2005. – Vol. 66, No.3. – P. 465-478).
3. ИСКАКОВ М.Б. *Теоремы существования равновесия Нэша и равновесия в безопасных стратегиях* // Журнал новой экономической ассоциации. – 2022. – №4(56). – С. 12–27.
4. ИСКАКОВ М.Б., ИСКАКОВ А.Б. *Равновесие в безопасных стратегиях как развитие концепции равновесия Нэша* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2023. – Т. 15, Вып. 1. – С. 48–72.
5. D'ASPREMONT C., GABSZEWICZ J., THISSE J.-F. *On Hotelling's "Stability in Competition'* // Econometrica. – 1979. – 47(5). – P. 1145–1150.
6. BERTRAND J. *Review of Cournot's 'Rechercher sur la theoric mathematique de la richesse'* // Journal des Savants. – 1883. – P. 499-508.
7. BAGH A., JOFRE A. *Reciprocal upper semicontinuity and better reply secure games: a comment* // Econometrica. – 2006. – Vol. 74. – P. 1715–1721.
8. BICH P. *Existence of pure Nash equilibriua in discontinuous and non quasiconcave games* // Int. J. Game Theory. – 2009. – Vol. 38. – P. 395–410.
9. DASGUPTA P., MASKIN E. *The existence of equilibrium in discontinuous economic games, I: Theory* // Rev. Econ. Stud. – 1986. – Vol. 53(1). – P. 1–26.
10. DEBREU G. *A social equilibrium existence theorem* // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 1952. – Vol. 38(10). – P. 886–893.

11. EDGEWORTH F.M. *Papers relating to Political Economy I*. – London: Macmillan, 1925.
12. ISKAKOV M., ISKAKOV A., D'ASPREMONT C. *Games for cautious players: the Equilibrium in Secure Strategies* // Games and Economic Behavior. – July 2018. – Vol. 110. – P. 58–70.
13. HOTELLING H. *Stability in Competition* // Econ. J. – 1929. – Vol. 39(153). – P. 41–57.
14. RENY P.J. *On the existence of pure and mixed strategy Nash equilibria in discontinuous games* // Econometrica. – 1999. – Vol. 67(5). – P. 1029–1056.
15. ROTHSCHILD M., STGLITZ J.E. *Equilibrium in competitive insurance markets: an essay on the economics of imperfect information* // Q. J. of Econ. – 1976. – Vol. 90. – P. 629-649.
16. SIMON L. *Games with Discontinuous Payoffs* // Review of Economic Studies. – 1987. – Vol. 54. – P. 569–597
17. SKAPERDAS S. *Contest success functions* // Economic Theory. – 1994. – Vol. 7. – P. 283–290.
18. TULLOCK G. *The welfare costs of tariffs, monopoly and theft* // Western Econ. J. – 1967. – Vol. 5. – P. 224–232.
19. TULLOCK G. *Efficient rent seeking* // BUCHANAN J.M., TOLLISON R.D., TULLOCK G. E. *Toward a theory of the rent-seeking society* – College Station, TX: Texas A&M University Press, 1980. – P. 97–112.
20. WILSON C. *A model of insurance markets with incomplete information* // J. Econ. Theory. – 1977. – Vol. 16. – P. 167-207.

THE META-THEOREM FOR THE EXISTENCE OF EQUILIBRIUM IN SECURE STRATEGIES

Mikhail Iskakov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (mih_iskakov@mail.ru).
Alexey Iskakov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (isk_alex@mail.ru)

Abstract: The paper is a continuation of the cycle of papers in 2018-2023 devoted to the theoretical justification of equilibrium in secure strategies (EinSS) as a concept of solving non-cooperative games in pure strategies.A method for constructing EinSS existence theorems from known Nash equilibrium (NE) existence theorems is presented. In particular, theorems for the existence of Nash equilibria are formulated in a standard form and are inserted as a condition into the meta-theorem for the existence of EinSS. According to this method, two theorems for the existence of EinSS are derived and proven based on the theorem of Reny (1999) on the existence of Nash equilibria. The general scheme of deriving existence theorems is as follows. Section 2 summarizes the theorems published in the author's previous papers. Section 3 presents two original theorems from Reny's paper. Section 4 gives a detailed interpretation of the conditions of Reni's theorems, compared to the conditions of Debre's theorem. Section 5 gives a detailed analysis of Reni's theorem. Using a number of examples, the condition of the theorem is interpreted as the condition that there are no jump points or points that guarantee the best answer. Section 6 constructs formally, by the method of meta-theorem, two existence criteria for EinSS that use the original NE existence theorems. In Sections 7 and 8, two theorems are formulated and proved, which are specifically refined for solving applied problems (Hotelling's spatial competition, Tullock's rent competition, Bertrand – Edgeworth oligopoly). All considered theorems are summarized in a final table.

Keywords: equilibrium in secure strategies, Nash equilibrium, existence theorems, Reny's existence theorem, Hotelling's spatial competition, Tullock – Skaperdas rent-seeking contest.

УДК 519.833.2
ББК 22.18
DOI: 10.25728/ubs.2024.111.01

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 28.01.2024.
Опубликована 30.09.2024.