ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ВОЗМУЩЕННЫХ ВЫБОРОЧНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ИНДУЦИРОВАННЫХ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК[1]

Биттер И. И.[2]

(*Международная лаборатория стохастического анализа и его приложений, НИУ ВШЭ, Москва*)

Выводится локальная предельная теорема для возмущенных выборочных траекторий нормализованных сумм индуцированных порядковых статистик, полученных из последовательности независимых одинаково распределенных случайных векторов при слабых условиях регулярности на коэффициенты. Рассматриваемая ситуация является типовым примером задачи оценки скорости сходимости дискретных по времени марковских процессов к диффузиям, когда соответствующие тренды и коэффициенты диффузии марковской цепи и диффузионного предела совпадают лишь асимптотически. При описываемых выше условиях оказывается неприменимым классический результат Конакова и Маммена (2000) о скорости слабой сходимости треугольных массивов дискретных марковских процессов к диффузионному процессу с коэффициентами, совпадающими с коэффициентами цепей. Наш подход основан на изучении равномерного расстояния между переходными плотностями заданной неоднородной цепи Маркова и предельного гауссовского диффузионного процесса. В частности, оценка скорости сходимости получена с использованием классической предельной теоремы и оценок устойчивости типа параметрикса.

Ключевые слова: диффузионный процесс, индуцированные порядковые статистики, переходная плотность, локальные предельные теоремы.

1. Введение

1.1. Постановка задачи

Данная статья посвящена оценке скорости сходимости выборочных траекторий для индуцированных порядковых статистик. Общая концепция индуцированных порядковых статистик была впервые независимо введена Дэвидом [7] и Бхаттачарьей [3].

[1] *Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24–11-00123)*

Автор выражает благодарность Конакову В. Д. за ценное обсуждение содержания статьи.

[2] *Илья Игоревич Биттер, стажер-исследователь* (*ilya.bitter@yandex.ru*).

Асимптотическая теория индуцированных порядковых статистик обсуждается в [7, 8, 9, 16, 21].

Слабая сходимость распределений дискретных по времени марковских процессов к диффузиям широко изучена. Классическая литература в этой области включает результаты Скорохода [18], Струка и Варадхана [19]. Эти результаты получены вероятностными методами. Однако в последнее время был представлен ряд результатов, полученных с использованием аналитического подхода к рассмотрению сходимости переходных плотностей марковских цепей к диффузиям, см. [13, 14, 17]. А именно, применение метода параметрикса для параболических УРЧП и модификация этого метода для дискретных по времени марковских цепей позволили количественно оценить слабую сходимость, упомянутую выше. Этот подход также может быть использован для доказательства локальных предельных теорем для алгоритмов стохастической аппроксимации, известных как процедуры Роббинса – Монро [12]. Более подробную информацию о применении метода параметрикса можно найти в [1, 10, 15].

В [13] авторы рассматривали треугольные массивы дискретных марковских процессов, которые слабо сходятся к диффузионному процессу с коэффициентами, совпадающими с коэффициентами цепей. Целью данной статьи является распространение результата скорости сходимости [13] на случай марковской цепи, сгенерированной индуцированными порядковыми статистиками, когда соответствующие тренды и коэффициенты диффузии марковской цепи и диффузионного предела совпадают асимптотически.

Пусть $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные векторы с распределением (X, Y), где $X \in \mathbb{R}$ и $Y \in \mathbb{R}^d$. Мы предполагаем, что первые компоненты векторов имеют непрерывную функцию распределения F с функцией квантиля F^{-1}, поэтому с вероятностью 1 для k-й порядковой статистики X_{nk}, полученной из $X_1, \ldots, X_n$, мы имеем $X_{n1} < \ldots < X_{nn}$. Определим индуцированные порядковые статистики $Y_{n1}, \ldots, Y_{nn}$ как $Y_{nk} = Y_j$, если $X_{nk} = X_j$. Обозначим через $m(x)$ условное математическое ожидание, а через $\sigma^2(x)$ — условную ковариационную матрицу Y при условии $X = x$, и пусть $\psi(t) = \int_{\infty}^{F^{-1}(t)} \sigma^2(x)dF(x), 0 \leqslant t \leqslant 1$.

Основной результат [3] касается предельного поведения в случае $d = 1$ выборочных траекторий

$$\left\{ S_{n,k} = \sum_{j=1}^{k} \left(Y_{nj} - m\left(X_{nj}\right)\right), k = 1, \ldots, n \right\}.$$

В данной статье мы заинтересованы в количественной оценке сходимости цепи Маркова

(1) $$Z_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{n}} \psi^{-\frac{1}{2}}(1) \hat{S}_{n,k},$$

где $\hat{S}_{n,k}$ — многомерный возмущенный аналог $S_{n,k}$:

$$\left\{ \hat{S}_{n,k} = \sum_{j=1}^{k} \left(Y_{nj} - m\left(X_{nj}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}} \psi^{-\frac{1}{2}}(1) \phi(X_{nj}) \right), k = 1, \ldots, n \right\}$$

к диффузии с ненулевым трендом

(2) $$dX_t = \psi^{-1}(1)\phi(F^{-1}(t))dt + \psi^{-1}(1)\sigma\left(F^{-1}(t)\right)dB_t.$$

Процесс (1) имеет следующую динамику с $t_k = \dfrac{k}{n}$ для $k = 1, \ldots, n$:

(3)

$$Z_{n,k+1} = Z_{n,k} + \frac{1}{n}\psi^{-1}(1)\phi(X_{n,k+1}) + \frac{1}{\sqrt{n}}\psi^{-\frac{1}{2}}(1)\sigma\left(F^{-1}\left(t_{k+1}\right)\right)\bar{\delta}_{k+1},$$

где инновации $\bar{\delta}_{k+1}$ имеют вид

(4) $$\bar{\delta}_{k+1} = \sigma^{-1}\left(F^{-1}\left(t_{k+1}\right)\right)\left(Y_{n,k+1} - m\left(X_{n,k+1}\right)\right).$$

Условное среднее и дисперсия инноваций (4) при $X_1, \ldots, X_n$ равны

$$\begin{aligned}
E\bar{\delta}_{k+1} &= 0, \\
\operatorname{Cov}\bar{\delta}_{k+1} &= \operatorname{Cov}\left(\sigma^{-1}\left(F^{-1}\left(t_{k+1}\right)\right)\left(Y_{n,k+1} - m\left(X_{n,k+1}\right)\right)\right) = \\
&= \sigma^{-1}\left(F^{-1}\left(t_{k+1}\right)\right)\sigma\left(F_n^{-1}\left(t_{k+1}\right)\right) \times \\
&\times \left[\sigma^{-1}\left(F^{-1}\left(t_{k+1}\right)\right)\sigma\left(F_n^{-1}\left(t_{k+1}\right)\right)\right]^*,
\end{aligned}$$

где F_n — условная эмпирическая функция распределения $X_1, \ldots, X_n$ с соответствующей функцией квантиля F_n^{-1}, а A^* — транспонированная матрица для матрицы A.

Лемма 1. *Если компоненты однопараметрической условной ковариационной матрицы* $\sigma^2(x) = E\left[\{Y - m(x)\}\{Y - m(x)\}^* \mid X = x\right]$ *имеют ограниченную вариацию на* $(-\infty, \infty)$*, то* $\operatorname{Cov} \bar{\delta}_{k+1} \to I_d, n \to \infty$.

Доказательство. Поскольку $\sup \sigma^2(x) < \infty$ и $\sigma^2(x)$ имеет ограниченную вариацию на $(-\infty, \infty)$, лемма доказывается интегрированием по частям и применением теоремы Гливенко – Кантелли.

Замечание 1. В случае, когда ковариационная матрица инноваций в точности является единичной (не асимптотически), можно применить оценку скорости сходимости из [13].

1.2. Список предположений и основной результат

В этом разделе мы приводим список предположений, которым удовлетворяют коэффициенты уравнений.

(A) (**Непрерывность маргинального распределения первой компоненты**) Функция распределения F случайных величин $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ непрерывна.

(B) (**Конечность некоторого момента инноваций.**) Для некоторого целого $S > d + 1$ выполняется $E|\bar{\delta}_1|^S < \infty$.

(C) (**Непрерывность по Гёльдеру композиций с функцией квантиля**) Композиция обобщенной обратной функции F^{-1} для F с трендом ϕ и коэффициентом диффузии σ^2 являются α- и θ-непрерывными по Гёльдеру с $\alpha, \theta \leqslant 1$ соответственно.

(D) (**Регулярность коэффициентов**) Коэффициент диффузии $\sigma^2(x) = E\left[\{Y - m(x)\}\{Y - m(x)\}^* \mid X = x\right]$ равномерно эллиптичен, γ-непрерывен по Гёльдеру с $\gamma \leqslant 1$ и имеет ограниченную вариацию на $(-\infty, \infty)$. Коэффициент тренда ϕ является β-непрерывным по Гёльдеру с $\beta \leqslant 1$.

(E) (**Stability**) Разница между функцией квантиля F^{-1} и ее эмпирическим аналогом

$$\Delta_n = \sup_t \left| F^{-1}(t) - F_n^{-1}(t) \right| \xrightarrow{a.s.} 0 \tag{5}$$

как $n \longrightarrow \infty$.

(F) Условные характеристические функции инноваций $\bar{\delta}_k$ принадлежат классу $L_1(\mathbb{R}^d)$ для всех n и $1 \leqslant k \leqslant n$.

Следующая лемма из [3] подтверждает условную независимость Y_{nk}.

Лемма 2. *Для каждого n и почти всех $(X_1, \ldots, X_n)$, $Y_{n1}, \ldots,$ Y_{nn} условно независимы при заданных $X_1, \ldots, X_n$ с условными функциями распределения $G_{X_{n1}}, \ldots,$ $G_{X_{n\pi}}$ соответственно.*

Доказательство.

Для любого $\mathbf{x}_n = (x_1, \ldots, x_n)$, любые две координаты которого не равны, пусть $\lambda(k, \mathbf{x}_n) = j$, если x_j является k-м наименьшим из $x_1, \ldots, x_n$. По Предположению 1, $\lambda(k, \mathbf{X}_n)$, $k = 1, \ldots, n$, определены п.в. и $X_{nk} = X_{\lambda(k,\mathbf{x}_n)}$, $Y_{nk} = Y_{\lambda(k,\mathbf{x}_n)}$. Следовательно, условная совместная функция распределения $Y_{n1}, \ldots, Y_{nn}$ при условии $X_1, \ldots, X_n$ совпадает с условной совместной функцией распределения $Y_{\lambda(k,\mathbf{x}_n)}$, $k = 1, \ldots, n$, при условии $X_{\lambda(k,\mathbf{x}_n)}$, $k = 1, \ldots, n$, которая, как легко видеть, является произведением $\prod_{k=1}^{n} G_{X_{\lambda(k,\mathbf{x}_n)}} = \prod_{k=1}^{n} G_{X_{nk}}$ из-за независимости Y_i и X_j для каждого $i \neq j = 1, \ldots, n$.

Для неотрицательного параметра u и S из Предположения **(B)** определим полиномиальное ядро $\mathcal{Q}_u(x) = u^{-d/2}\dfrac{1}{1+|x|^S}$. Теперь сформулируем основной результат данной работы.

Теорема 1. *Пусть $p(t,x,y)$ и $p_n(t,x,y)$ — переходные плотности процессов* (2) *и* (1) *соответственно. Тогда существуют константы $C > 0$ и $0 < c \leqslant 1$, зависящие только от параметров из предположений, такие, что для всех $0 \leqslant t_k \leqslant 1$ и $(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$*

$$|p - p_n|(t_k, x, y) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C|\psi^{-1}(1)|}{\sqrt{t_k}} \left(\max(\Delta_n^{\beta}, \Delta_n^{\gamma}) + \frac{1}{n^{\min(\alpha,\theta,1/2)}} \right) \cdot \mathcal{Q}_{t_k}\left(\frac{y-x}{\sqrt{t_k}}\right).$$

В дальнейшем мы будем обозначать через $|\cdot|$ евклидову норму на $\mathbb{R}^d$. Мы также сохраним обозначение $D_x^\nu = \prod\limits_{i=1}^{d} D_{x_i}^{\nu_i}$ для дифференцирования по мультииндексу $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d) \in \mathbb{N}^d$, для которого $|\nu| = \sum_{i=1}^d \nu_i$. В дальнейшем буква C обозначает положительную константу, которая зависит только от параметров в предположениях; в контексте доказательств ее значение может меняться от строки к строке.

2. Локальная предельная теорема

2.1. Сходимость квантильных процессов

В этом подразделе мы представляем некоторые оценки сходимости квантильного процесса Δ_n, следуя [5] и [6].

Следующее предложение показывает, что при условии непрерывности функции квантиля F^{-1} теорема Гливенко – Кантелли будет подразумевать сходимость п.н. F_n^{-1} к F^{-1} (см. [20]).

***Предложение* 1.** *$F_n^{-1}(t) \overset{a.s.}{\to} F^{-1}(t)$ при каждом t, где F^{-1} непрерывна.*

Когда кумулятивная функция распределения F имеет конечный носитель и является дважды дифференцируемой функцией, имеются следующие результаты [5].

***Предложение* 2.** *Пусть F будет дважды дифференцируемой функцией распределения с $F' = f$, имеющей конечный носитель на $\mathbb{R}^1$. Предположим, что $\inf_{0\leqslant y\leqslant 1} f\left(F^{-1}(y)\right) > 0$ и $\sup_{0\leqslant y\leqslant 1} \left|f'\left(F^{-1}(y)\right)\right| < \infty$. Тогда $\sup_{0\leqslant y\leqslant 1} \left|F_n^{-1}(y) - F^{-1}(y)\right| \overset{a.s.}{\to} 0$.*

***Предложение* 3.** *При условиях предыдущего предложения относительно F*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{0\leqslant y\leqslant 1} n^{1/2} f\left(F^{-1}(y)\right) \frac{\left|F_n^{-1}(y) - F^{-1}(y)\right|}{(\log\log n)^{1/2}} \overset{a.s.}{=} 2^{-1/2}.$$

Однако во многих ситуациях, таких как гауссовские случайные величины, функция распределения не имеет конечного носителя.

В этом случае поведение Δ_n можно изучить с помощью слабого аналога теоремы Гливенко – Кантелли.

Предложение 4. *Пусть* $X_1, X_2, \ldots$ *будут независимыми одинаково распределенными случайными величинами с непрерывной функцией распределения* F*, которая также дважды дифференцируема на* (a, b)*, где* $a = \sup\{x : F(x) = 0\}$*,* $b = \inf\{x : F(x) = 1\}$ *и* $F' = f \neq 0$ *на* (a, b)*. Тогда можно определить броуновский мост* $\{B_n(y); 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ *для каждого* n*. Если* $\sup_{a<x<b} F(x)(1 - F(x)) \left|\frac{f'(x)}{f^2(x)}\right| \leqslant r$ *для некоторого* $r > 0$*, то*

$$\sup_{1/n \leqslant y \leqslant 1-1/n} f\left(F^{-1}(y)\right)\left|F_n^{-1}(y) - F^{-1}(y)\right| \xrightarrow{P} 0.$$

Теперь определим нормализованный квантильный процесс $q_n(y) = n^{\frac{1}{2}}\left(F_n^{-1}(y) - F^{-1}(y)\right), 0 < y < 1$. Напомним, что броуновский мост $\{B(y); 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ — это сепарабельный гауссовский процесс с $EB(y) = 0$ и ковариационной функцией $EB(y_1)B(y_2) = y_1 \wedge y_2 - y_1 \vee y_2$. Одним из основных результатов работы [6] является то, что квантильный процесс с точностью до некоторой нормировки может быть аппроксимирован последовательностью броуновских мостов.

Теорема 2. *Пусть* $X_1, X_2, \ldots$ *являются независимыми одинаково распределенными процессами с.в. с непрерывной функцией распределения* F*, которая также дважды дифференцируема на* (a, b)*, где* $a = \sup\{x : F(x) = 0\}, b = \inf\{x : F(x) = 1\}$ *и* $F' = f \neq 0$ *на* (a, b)*. Тогда можно определить броуновский мост* $\{B_n(y); 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ *для каждого* n*. Если* $\sup_{a<x<b} F(x)(1 - F(x)) \left|\frac{f'(x)}{f^2(x)}\right| \leqslant r$ *для некоторого* $r > 0$*, тогда*

$$\sup_{\delta_n \leqslant y \leqslant 1-\delta_n} \left|f\left(F^{-1}(y)\right) q_n(y) - B_n(y)\right| \overset{a.s.}{=} O\left(n^{-\frac{1}{2}} \log n\right)$$

где $\delta_n = 25n^{-1} \log\log n$*. Если, кроме того, мы также предположим, что* f *является неубывающей (невозрастающей) на* *интервале справа от a (слева от b), то*

$$\sup_{0<y<1} |f\left(F^{-1}(y)\right) q_n(y) - B_n(y)\,|$$
$$\overset{a.s.}{=} O\left(n^{-\frac{1}{2}}\log n\right), \qquad \text{если } r < 2$$
$$\overset{a.s.}{=} O\left(n^{-\frac{1}{2}}(\log\log n)^r(\log n)^{(1+\varepsilon)(r-1)}\right), \quad \text{если } r \geqslant 2,$$

где $\varepsilon > 0$ *произвольно.*

2.2. Доказательство основного результата

Доказательство основной теоремы 1 состоит из двух частей. В первой части мы аппроксимируем условную переходную плотность p_n цепи Маркова (1) вспомогательной гауссовской плотностью q. Следующая лемма количественно определяет указанную выше разницу.

Лемма 3. *Пусть q будет плотностью перехода вспомогательного гауссовского процесса со средним значением и дисперсией, совпадающими с параметрами цепи Маркова* (1) *при заданных $X_1, \ldots, X_n$. Тогда существует константа $C > 0$ такая, что для всех $k = 1, \ldots, n$ и $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$*

$$|p_n - q|\,(t_k, x, y) \leqslant \frac{C|\psi^{-1}(1)|}{\sqrt{t_k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \mathcal{Q}_{t_k}\left(\frac{y-x}{\sqrt{t_k}}\right). \tag{6}$$

Доказательство. Напомним, что $p_n(t_k, x, \cdot)$ — это плотность случайного вектора

$$x + \sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{n}\psi^{-1}(1)\phi(X_{n,k+1}) + \sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\psi^{-\frac{1}{2}}(1)\sigma\left(F^{-1}\left(t_{i+1}\right)\right)\bar{\delta}_{i+1}$$

при заданных $X_1, \ldots, X_n$. Пусть $f_{n,k}(x)$ будет плотностью нормализованной суммы

$$S_{n,k} = D_{n,k}^{-1/2}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\psi^{-\frac{1}{2}}(1)\sigma\left(F^{-1}\left(t_{i+1}\right)\right)\bar{\delta}_{i+1},$$

где $D_{n,k} = \sum\limits_{i=0}^{k-1}\frac{1}{n}\psi^{-\frac{1}{2}}(1)\sigma^2\left(F_n^{-1}\left(t_{i+1}\right)\right)(\psi^{-\frac{1}{2}}(1))^*$. Очевидно, что

$$p_n\left(t_k, x, y\right) = \det D_{n,k}^{-1/2} f_{n,k}\left(D_{n,k}^{-1/2}(y - x - \sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{n}\psi^{-1}(1)\phi(X_{n,k+1}))\right).$$

Из **(D)** следует, что

$$C^{-1}t_k^{-1/2} \leqslant w^* D_{n,k}^{-1/2} w \leqslant C t_k^{-1/2},$$

$$C^{-1}t_k^{-d/2} \leqslant \det D_{n,k}^{-1/2} \leqslant C t_k^{-d/2} \tag{7}$$

с $C \geqslant 1$ для всех $w \in \mathbb{R}^d$, $|w| = 1$. Наша стратегия заключается в применении теоремы 19.3 из [2] для нормализованной суммы $S_{n,k}$. Для этого утверждения нам нужно проверить следующие условия. Прежде всего матрица B_n из [2] соответствует $B_k = k^{1/2} \cdot D_{n,k}$. Конечность в условии (19.27) теперь следует из **(B)**. Далее, условие **(F)** в сочетании с (7) гарантирует, что условия (19.27) и (19.30) также выполняются. Это означает, что для $S_{n,k}$ локальное классическое предельное предложение применимо со следующей гауссовой плотностью в качестве ведущего члена

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det D_{n,k}}}\phi_{0,I}\left(D_{n,k}^{-1/2}(y - x - \sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{n}\psi^{-1}(1)\phi(X_{n,k+1}))\right).$$

Чтобы завершить доказательство этой леммы, отметим, что существует константа $C > 0$ такая, что $\exp(-x^2) \leqslant \dfrac{C}{1+|x|^S}$.

Вторая часть — вывод верхней оценки для разности между вспомогательной плотностью q и переходной плотностью предельного процесса (2). Эта оценка зависит от того, насколько близки параметры упомянутых процессов. В следующей лемме будет дана оценка для разности средних.

Лемма 4. *При заданных $X_1, \ldots, X_n$ имеем*

$$|E(Z_{n,k}) - E(X_{t_k})| \leqslant C t_k |\psi^{-1}(1)| \left(\Delta_n^\beta + \frac{1}{n^\alpha}\right). \tag{8}$$

Доказательство. Используя тот факт, что $\{t_k\}_{k=1}^n$ является разбиением интервала $[0, 1]$, имеем

$$|E_i(Z_{n,k}) - E_i(X_{t_k})| =$$

$$= \left| \frac{1}{n} \psi_i^{-1}(1) \sum_{j=0}^{k-1} \phi_i(F_n^{-1}(t_{j+1})) - \psi_i^{-1}(1) \int\limits_0^{t_k} \phi_i(F^{-1}(u)) du \right| =$$

$$= \left| \psi_i^{-1}(1) \sum_{j=0}^{k-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \phi_i(F_n^{-1}(t_{j+1})) du - \psi_i^{-1}(1) \sum_{j=0}^{k-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \phi_i(F^{-1}(u)) du \right| \leqslant$$

$$\leqslant \psi_i^{-1}(1) \sum_{j=0}^{k-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \left| \phi_i(F_n^{-1}(t_{j+1})) - \phi_i(F^{-1}(u)) \right| du \leqslant$$

$$\leqslant \psi_i^{-1}(1) \sum_{j=0}^{k-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \left| \phi_i(F_n^{-1}(t_{j+1})) - \phi_i(F^{-1}(t_{j+1})) \right| du +$$

$$+ \psi_i^{-1}(1) \sum_{j=0}^{k-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \left| \phi_i(F^{-1}(t_{j+1})) - \phi_i(F^{-1}(u)) \right| du :=$$

$$:= I + II.$$

Теперь, принимая во внимание предположения **D** и **E**, получаем

$$I \leqslant C\psi_i^{-1}(1) \sum_{j=0}^{k-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \Delta_n^{\beta} du = C t_k \psi_i^{-1}(1) \cdot \Delta_n^{\beta},$$

$$II \leqslant C\psi_i^{-1}(1) \sum_{j=0}^{k-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \left| t_{j+1} - u \right|^{\alpha} du = C t_k \psi_i^{-1}(1) \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Следующая лемма количественно определяет разницу ковариационных матриц.

Лемма 5. *При заданных* $X_1, \ldots, X_n$ *имеем*

(9) $$|Cov(Z_{n,k}) - Cov(X_{t_k})| \leqslant C t_k |\psi^{-2}(1)| \left(\Delta_n^{\gamma} + \frac{1}{n^{\theta}} \right).$$

Доказательство. Еще раз действуя так же, как в доказательстве леммы (8), для $1 \leqslant i, j \leqslant d$ получаем

$$|Cov_{ij}(Z_{n,k}) - Cov_{ij}(X_{t_k})| =$$

$$= \left|\psi_{ij}^{-2}(1)\sum_{l=0}^{k-1}\int\limits_{t_l}^{t_{l+1}}\sigma_{ij}^2(F_n^{-1}(t_{l+1}))du-\right.$$

$$\left.-\psi_{ij}^{-2}(1)\sum_{l=0}^{k-1}\int\limits_{t_l}^{t_{l+1}}\sigma_{ij}^2(F^{-1}(u))du\right| \leqslant$$

$$\leqslant \psi_{ij}^{-2}(1)\sum_{l=0}^{k-1}\int\limits_{t_l}^{t_{l+1}}\left|\sigma_{ij}^2(F_n^{-1}(t_{l+1}))-\sigma_{ij}^2(F^{-1}(t_{l+1}))\right|du+$$

$$+\,\psi_{ij}^{-2}(1)\sum_{l=0}^{k-1}\int\limits_{t_l}^{t_{l+1}}\left|\sigma_{ij}^2(F^{-1}(t_{l+1}))-\sigma_{ij}^2(F^{-1}(u))\right|du :=$$

$$:= I + II.$$

Используя тот факт, что ограниченность и непрерывность по Гёльдеру σ влекут непрерывность по Гёльдеру и ограниченность σ^2 с тем же параметром γ, мы легко получаем

$$I \leqslant C\psi_{ij}^{-2}(1)\sum_{l=0}^{k-1}\int\limits_{t_l}^{t_{l+1}}\Delta_n^{\gamma}du = Ct_k\psi_{ij}^{-2}(1)\cdot\Delta_n^{\gamma},$$

$$II \leqslant C\psi_{ij}^{-2}(1)\sum_{l=0}^{k-1}\int\limits_{t_l}^{t_{l+1}}\left|t_{l+1}-u\right|^{\theta}du = Ct_k\psi_{ij}^{-2}(1)\cdot\frac{1}{n^{\theta}}.$$

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы 1.

Доказательство. Давайте теперь определим переходные плотности для предельной диффузии (2) и вспомогательного процесса с $(d+1)\times d$ матрицами Ω_p и Ω_q, состоящими из первых строк, которые являются компонентами соответствующих средних векторов, и $d\times d$ ковариационных матриц.

Для $(d+1)\times d$ матрицы A мы обозначим через A_1 первую строку, а через $A_{2:d+1}$ – квадратную матрицу, составленную из строк от 2 до $d+1$.

Мы можем переписать $p(t_k, x, y)$ и $q(t_k, x, y)$ в терминах Ω_p и Ω_q:

$$p(t_k, x, y) = f(\Omega_p),$$
$$q(t_k, x, y) = f(\Omega_q),$$

где

$$f : \mathbb{R}^{(d+1)\times d} \to \mathbb{R},$$
$$A \mapsto f(A) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\det(A_{2:d+1})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle (A_{2:d+1})^{-1}(y - A_1 - x), y - A_1 - x\rangle\right).$$

Итак, применяя разложение Тейлора, имеем

$$|p-q|(t_k, x, y) = |f(\Omega_p) - f(\Omega_q)| =$$
$$= \left|\sum_{|\nu|=1} (\Omega_p - \Omega_q)^{\nu} \cdot \int\limits_0^1 (1-\lambda)\mathcal{D}^{\nu} f\{\Omega_p + \lambda(\Omega_q - \Omega_p)\}\, d\lambda\right| =$$
$$= \left|\sum_{i=1}^{d} (E_i(Z_{n,k}) - E_i(X_{t_k})) \cdot \int\limits_0^1 (1-\lambda)\mathcal{D}^{\nu_1^i} f\{\Omega_p + \lambda(\Omega_q - \Omega_p)\}\, d\lambda + \right.$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{d} (Cov_{ij}(Z_{n,k}) - Cov_{ij}(X_{t_k})) \times$$
$$\left. \times \int\limits_0^1 (1-\lambda)\mathcal{D}^{\nu_{2:d+1}^{ij}} f\{\Omega_p + \lambda(\Omega_q - \Omega_p)\}\, d\lambda\right| \leqslant$$
$$C \cdot |E(Z_{n,k}) - E(X_{t_k})| \cdot \sum_{i=1}^{d} \left|\int\limits_0^1 (1-\lambda)\mathcal{D}^{\nu_1^i} f\{\Omega_p + \lambda(\Omega_q - \Omega_p)\}\, d\lambda\right| +$$
$$+ C \cdot |Cov(Z_{n,k}) - Cov(X_{t_k})| \times$$
$$\times \sum_{i,j=1}^{d} \left|\int\limits_0^1 (1-\lambda)\mathcal{D}^{\nu_{2:d+1}^{ij}} f\{\Omega_p + \lambda(\Omega_q - \Omega_p)\}\, d\lambda\right|.$$

Из прямых вычислений для любого мультииндекса ν

$$|D_x^\nu p(t_k,x,y)| + |D_x^\nu q(t_k,x,y)| \leqslant$$

$$\frac{C}{t_k^{(|\nu|+d)/2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\det \mathrm{Cov}(X_{t_k})}} \phi_{0,I} \left[(\mathrm{Cov}(X_{t_k}))^{-1/2}(y - x - E(X_{t_k})) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\det \mathrm{Cov}(Z_{n,k})}} \phi_{0,I} \left[(\mathrm{Cov}(Z_{n,k}))^{-1/2}(y - x - E(Z_{n,k})) \right] \right).$$

Теперь, вспоминая, что дифференцирование гауссовской переходной плотности по i-му (i,j-му) элементу вектора средних (ковариационной матрицы) совпадает с дифференцированием по i-й координате начальной точки (двойное дифференцирование по i-й и j-й координатам начальной точки, умноженным на $\frac{1}{2}$) [см. [4]], и объединяя с оценками (8) и (9), завершаем доказательство теоремы 1.

Литература

1. BITTER I., KONAKOV V. *L1 and L_∞ stability of transition densities of perturbed diffusions* // Random Oper. Stoch. Eq. – 2021. – Vol. 29(4). – P. 287–308.
2. BHATTACHARYA R., RAO R. *Normal approximations and asymptotic expansions*. – Wiley and sons, 1976.
3. BHATTACHARYA P.K. *Convergence of Sample Paths of Normalized Sums of Induced Order Statistics* // Ann. Statist. – September, 1974. – Vol. 2(5). – P. 1034–1039.
4. CRAMER H., LEADBETTER M.R. *Stationary and related stochastic processes*. – Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004.
5. CSȮRGÓ M., RÉVÉSZ P. *Strong Approximations of the quantile process* // The Annals of Statistics. – 1978. – Vol. 6, No. 4. – P. 882–894.
6. CSȮRGÓ M. *Quantile Processes with Statistical Applications* // Society for IndustrialL and Applied Mathematics. – 1983.
7. DAVID H.A. *Concomitants of order statistics* // Bull. Internat. Statist. Inst. – 1973. – Vol. 45. – P. 295–300.

8. DAVID H.A., GALAMBOS J. *The asymptotic theory of concomitants of order statistics* // J. Appl. Probab. – 1974. – Vol. 11. – P. 762–770.
9. DAVYDOV YU., EGOROV V. *Functional limit theorems for induced order statistics* // Mathematical Methods of Statistics. – January, 2000. – Vol. 9(3). – P. 297–313.
10. DELARUE F., MENOZZI S. *Density estimates for a random noise propagating through a chain of differential equations* // J. Funct. Anal. – 2010. – Vol. 259(6). – P. 1577–1630.
11. GALAMBOS J. *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*. – Krieger, Malabar, FL, 1987.
12. KONAKOV V., MAMMEN E. *Local Limit Theorems and Strong Approximations for Robbins-Monro Procedures* // arXiv:2304.10673. – 2023.
13. KONAKOV V., MAMMEN E. *Local limit theorems for transition densities of Markov chains converging to diffusions* // Probability Theory and Related Fields. – 2000. – Vol. 117. – P. 551–587.
14. KONAKOV V., KOZHINA A., MENOZZI S. *Stability of densities for perturbed diffusions and Markov chains* // ESAIM: Probability and Statistics. – 2017. – Vol. 21. – P. 88–112.
15. MENOZZI S., PESCE A., ZHANG X. *Density and gradient estimates for non-degenerate Brownian SDEs with unbounded measurable drift* // J. Diff. Eq. –2021. – Vol. 272. – P. 330–369.
16. SEN P.K. *A note on invariance principles for induced order statistics* // The Annals of Probab. – 1976. – Vol. 4. – P. 474–479.
17. KOZHINA A. *Weak error for the Euler scheme approximation of degenerate diffusions with nonsmooth coefficients* // Fundam. Prikl. Mat. – 2018. – Vol. 22, Iss. 3. – P. 91–118.
18. SKOROHOD A.V. *Studies in the theory of random processes*. – Addison-Wesley, Reading, Massachussetts, 1965. [English translation of Skorohod A.V. Issledovaniya po teorii sluchaynykh protsessov. – Kiev University Press, 1961.]
19. STROOCK D.W., VARADHAN S.R. *Multidimensional*

diffusion processes. – Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.
20. VAN DER VAAR A.W. *Asymptotic Statistics*. – Cambridge University Press, 1998.
21. YANG S.S. *General distribution theory of the concomitants of order statistics* // The Annals of Statist. – 1977. – Vol. 5. – P. 996–1002.

LOCAL LIMIT THEOREM FOR A PERTURBED SAMPLE PATHS OF INDUCED ORDER STATISTICS

Ilya Bitter, Research Intern of Laboratory of Stochastic Analysis and its Applications, HSE University, Moscow, (ilya.bitter@yandex.ru).

Abstract: In this paper we derive a local limit theorem for a perturbed sample paths of normalized sums of induced order statistics obtained from a sequence of independent identically distributed random vectors under weak regularity conditions on the coefficients. The situation under consideration is a typical example of the problem of estimating the rate of convergence of discrete-time Markov processes to diffusions, when the corresponding trends and diffusion coefficients of the Markov chain and the diffusion limit coincide only asymptotically. Under the conditions described above, the classical result of Konakov and Mammen (2000) on the rate of weak convergence of triangular arrays of discrete Markov processes to a diffusion process with coefficients that coincide with the coefficients of the chains turns out to be inapplicable. Our approach is based on the study of the uniform distance between the transition densities of the underlying inhomogeneous Markov chain and the limiting gaussian diffusion process. In particular, the convergence rate estimate derived from the well-known classical limit theorem and the parametrix-type stability bounds.

Keywords: diffusion process, induced order statistics, transition density, local limit theorems.

УДК 519.2
ББК 22.17

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.И. Орловым.

Поступила в редакцию 07.11.2024.
Дата опубликования 31.01.2025.