РЕДУКЦИЯ ИЕРАРХИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ: ИССЛЕДОВАНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПО ФАКТОРАМ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА КОНЕЧНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ[1]

Сысоев А. С.[2], **Погодаев А. К.**[3], **Сараев П. В.**[4]
(*ФГБОУ ВО «Липецкий государственный технический университет», Липецк*)

Выбранный класс математических моделей определяет методы, применяемые при исследовании системы или процесса, подходы к управлению ими. Одним из направлений управления структурой модели является ее редукция, понимаемая как сокращение числа факторов с целью построения менее ресурсоемкой с точки зрения использования вычислительных ресурсов модели. Данная задача может быть отнесена к понятию математического ремоделирования — построения новой модели на основе известной. Среди способов решения такой задачи стоит выделить анализ чувствительности модели по факторам, который можно провести различными способами. Один из таких способов основан на применении метода анализа конечных изменений для нахождения мер чувствительности. В основе этого метода — использование теоремы Лагранжа о промежуточной точке. Указанная теорема позволяет получить точное разложение конечного приращения отклика модели как взвешенной суммы конечных приращений ее факторов. В статье описывается подход, позволяющий произвести анализ чувствительности такого типа на каждом из уровней иерархической системы, а также сквозной анализ, предполагающий нахождение оценок мер влияния выходов моделей предшествующих уровней на выход модели верхнего уровня. Представлены численные примеры, демонстрирующие применимость метода. В качестве класса моделей, описывающих уровни иерархии системы, использованы классические полносвязные нейронные сети.

Ключевые слова: математическое моделирование, редукция, ремоделирование, анализ чувствительности, анализ конечных изменений.

1. Введение

Выбранный класс математических моделей определяет методы, применяемые при исследовании системы или процесса, под-

[1] *Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00474, https://rscf.ru/project/24-21-00474/.*

[2] *Антон Сергеевич Сысоев, к.т.н., доцент* (*sysoev_as@stu.lipetsk.ru*).

[3] *Анатолий Кирьянович Погодаев, д.т.н., профессор* (*pak@stu.lipetsk.ru*).

[4] *Павел Викторович Сараев, д.т.н., доцент* (*psaraev@yandex.ru*).

ходы к управлению ими. Методы оценки построенной модели (квалиметрирования) могут быть разделены на две группы [4]: управление свойствами выборки и управление свойствами самой математической модели. Управление свойствами выборки позволяет решить задачу построения несмещенных выборок экспериментальных данных, нахождения несмещенных оценок дисперсий случайных величин, построения доверительных интервалов и проверки статистических гипотез. Решению таких задач посвящено большое количество классических работ, среди которых необходимо отметить работы Эфрона [7]. Управление свойствами модели может преследовать решение задач редуцирования, функционального, структурного и параметрического преобразования модели, агрегации, декомпозиции. Под редуцированием понимается процесс снижения размерности модели и трудоемкости вычислений по ней. Направлениями решения этой задачи являются методы планирования эксперимента, методы анализа чувствительности, а также достаточно большие классы статистических и аналитических подходов [13]. Многие реальные процессы могут быть представлены в виде заданной последовательности подпроцессов, находящихся в иерархическом подчинении [2]. Также редукция модели интерпретируется как один из подходов математического ремоделирования [11].

Анализ чувствительности – это исследование того, как неопределенность входных данных влияет на неопределенность выходов системы [3, 10]. Такое определение предполагает исследование связи поведения отклика системы с изменениями ее факторов с целью определить, какой вклад каждый из факторов вносит в изменение отклика. В зависимости от используемых инструментов предложены различные подходы к оценке чувствительности модели. Некоторые из них универсальны, другие могут быть применены только в том случае, если модель имеет заранее определенную структуру. Следует отметить, что в последнее десятилетие интерес к исследованию чувствительности в прикладных задачах возрос. Среди примеров таких задач можно привести применение анализа чувствительности в медицине. В работе

[9] параметрический метод локального анализа чувствительности применяется к модели кровеносной системы человека для выявления наиболее важных ее электрических и структурных факторов. В работе [15] используются индексы Соболя, примененные к модели коронавирусной инфекции для изучения индивидуальных эффектов ее факторов, а также их взаимного влияния параметров на выходные переменные модели. В работе [8] проведен глобальный анализ чувствительности на основе коэффициента корреляции частичных рангов для выявления ключевых параметров, вносящих наиболее существенный вклад в абсорбцию и распределение лекарств и наночастиц в различных органах человеческого тела. Еще одна область, где широко применяется анализ чувствительности, — экологические исследования. Например, исследование [12] направлено на решение проблемы выбора размера выборки и нахождения пороговых значений для выявления нечувствительных входных факторов для экологических моделей.

Пусть задана векторная переменная (факторы, входы) $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, влияющая на скалярную функцию (отклик, выход) y, которая описывается с помощью некоторого соотношения:

$$y = f(x_1, \ldots, x_n) = f(\mathbf{x}). \tag{1}$$

Глобальный анализ чувствительности предполагает получение результатов с учетом одновременных изменений всех факторов модели с целью учета возможных взаимодействий между ними. Наиболее известным примером глобальных мер чувствительности является индекс чувствительности первого порядка, предложенный Соболем (см. [13]):

$$S_i = \frac{V_{x_i}(E_{\mathbf{x}\sim i}(y|x_i))}{V(y)}, \tag{2}$$

где $V(y)$ — безусловная дисперсия y, получаемая при варьировании всех факторов x_i; $E_{\mathbf{x}\sim i}(y|x_i)$ — среднее значение y при фиксированном одном факторе. Глобальный подход применяется, когда модель (1) имеет нелинейный характер и ее факторы независимы друг от друга.

Иерархические системы в настоящее время широко используются для описания сложных (многоступенчатых) объектов и систем [14]. Среди существующих стратегий проведения анализа чувствительности для таких систем можно выделить ряд подходов.

Первая группа предполагает, что сложная модель рассматривается как «черный ящик», существующие связи между ее компонентами игнорируются. Это очевидный сценарий, который может быть применен для относительно небольших и вычислительно «недорогих» моделей. В случае наличия связей между входами сложных систем такой подход может оказаться неэффективным. Когда модель требует больших вычислительных ресурсов, большое количество запусков может сделать анализ чувствительности невыполнимым. В таком случае для сокращения количества входов модели можно провести анализ чувствительности для подмоделей, а затем выбрать наиболее чувствительные входы из всего множества возможных.

Возможно также использование подхода, при котором каждая подмодель анализируется независимо, оцениваются коэффициенты чувствительности для каждого входа до того, как рассматривается иерархическая связь. Однако такой анализ не может полностью объяснить поведение факторов вне контекста. Чтобы устранить эту проблему, можно провести анализ чувствительности, изменяя только определенные входы выбранных подмоделей, но при этом оценивая связанные составные части иерархии или даже всю модель. Такой подход отличается от предыдущего тем, что модель не рассматривается как «черный ящик», ее составные части рассматриваются как отдельные, но взаимодействующие компоненты. Входы и выходы можно сравнивать для нескольких возможных комбинаций, что позволяет понять поведение всей системы.

Третья группа подходов может быть использована, когда система имеет четкую иерархическую структуру, каждый уровень получает входные данные только от связанных подмоделей нижнего уровня. Тогда применяется стратегия «сверху вниз». При таком подходе анализ чувствительности выполняется на каждом уровне иерархии для каждой подмодели независимо, при этом следует отметить, что анализ на более высоком уровне может выполняться без анализа связанных подмоделей нижнего уровня, но с заменой их на входы, имитирующие их наличие. Результаты чувствительности каждого уровня иерархии могут быть объединены в глобальный индекс чувствительности.

В данной работе предлагается метод анализа чувствительности по факторам математической модели иерархической системы, соотвествующий двум типам стратегий: рассмотрение всего множества входов всех подмоделей иерархической структуры и стратегии «сверху вниз». Такой подход может быть использован для редукции входов сложной иерархической модели. Использование информации о чувствительности моделей позволяет применить подход к построению множества данных для математического ремоделирования. Для факторов, по которым модель более чувствительна, целесообразно включить в обучающее множество большее количество уровней данных.

2. Метод анализа чувствительности, основанный на применении анализа конечных изменений

Задача анализа конечных изменений заключается в построении для имеющейся математической модели новой модели зависимости конечного изменения отклика от конечных изменений оказывающих на него влияние факторов. Такую задачу можно рассматривать как процесс перехода от исходной формы модели к форме, описываемой в терминах приращений; в этом смысле процесс имеет аналогию с ремоделированием [11].

Обычно значение величины x измеримо, и его измерение $\mu(x)$ может иметь различные формы. Наиболее часто используемые из них:

– абсолютное приращение $\mu(x) = \Delta x = x^1 - x^0$;

– индекс $\mu(x) = i(x) = \dfrac{x^1}{x^0}$;

– относительное приращение $\mu(x) = \delta x = \dfrac{x^1 - x^0}{x^0} = \dfrac{\Delta x}{x^0} = i(x) - 1$.

В этом исследовании представлены результаты применения абсолютного приращения в качестве основной формы конечного изменения величины.

Задача анализа конечных изменений в таком случае может быть сформулирована следующим образом: пусть имеется структурно и параметрически идентифицированная модель

$$y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_n), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \tag{3}$$

определяющая связь между откликом y и его аргументами x_i. Необходимо привести модель (3) к виду

$$\mu(y) = \phi(\mathbf{x}) = \phi(\mu(x_1), ..., \mu(x_n)), \tag{4}$$

описывающему связь между конечными изменениями отклика $\mu(y)$ и конечными изменениями $\mu(x_i)$ его аргументов x_i.

С одной стороны, во многих практических задачах конечные приращения можно считать малыми. В случае же бесконечно малых приращений, если функция $y = f(\mathbf{x})$, описывающая рассматриваемую модель, определена и непрерывна в замкнутой области и имеет непрерывные частные производные в этой области, приближенная связь между конечным приращением отклика и малыми приращениями его аргументов имеет вид

$$\Delta y = f(\mathbf{x}^0 + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i,$$

где x^0 – начальное значение фактора; Δx – конечное приращение фактора.

Но с другой стороны, в некоторых прикладных задачах приращения не могут рассматриваться как малые величины, однако могут интерпретироваться как конечные. В такой ситуации возможно применить модель, которая позволяет привести (3) к виду (4), являясь при этом точной связью между конечными приращениями отклика и его аргументов. Эта модель определена теоремой Лагранжа о промежуточной точке для функций нескольких переменных и может быть представлена следующим образом:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{int})}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i, \tag{5}$$

$$x^{int} = (x_1^{int}, ..., x_n^{int}), \quad x_i^{int} = x_i^0 + \alpha \cdot \Delta x_i, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Здесь средние (или промежуточные) значения аргументов x_i^{int} определяются значением параметра α.

Пусть в текущий момент времени аргументы находятся в некотором начальном состоянии $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и, соответственно, отклик имеет вид $y^0 = f(\mathbf{x}^0)$. В следующий момент фиксации аргументы претерпели изменения и представимы как $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)$, соответственно отклик принимает вид $y^1 = f(\mathbf{x}^1)$.

Таким образом, абсолютное приращение отклика можно определить, с одной стороны, как разность нового и предыдущего значений, а с другой стороны, по теореме Лагранжа (5), т.е. составить и решить следующее уравнение относительно параметра α:

$$y^1 - y^0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}(\ldots, x_i^0 + \alpha \cdot \Delta x_i, \ldots) \cdot \Delta x_i, \tag{6}$$

что позволяет оценить влияние конечных изменений аргументов на конечное изменение отклика и получить модель вида

$$\begin{aligned}\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}(\ldots, x_i^{(0)} + \alpha \cdot \Delta x_i, \ldots) \cdot \Delta x_i = \\ = S_{x_1}\Delta x_1 + \cdots + S_{x_n}\Delta x_n.\end{aligned} \tag{7}$$

Описанная выше процедура повторяется t раз (где t – количество доступных наблюдений); численные результаты анализа должны быть усреднены для построения меры чувствительности [6]. В частности, можно применить процедуру нахождения среднего взвешенного Тьюки для построения точечной и интервальной оценки множества найденных мер чувствительности.

3. Иерархический анализ чувствительности на основе анализа конечных изменений

Для описания сложных многоуровневых систем и процессов могут быть использованы иерархические системы различной структуры. В зависимости от характера подсистем (подпроцессов), являющихся частями основной системы (процесса), для описания каждого компонента может быть использована модель своей заданной структуры. Математически такая система может быть построена с помощью набора функций, каждая из которых зависит от определенного набора факторов.

Подход, основанный на применении анализа конечных изменений, учитывает, что каждый подпроцесс (функция, узел в графе системы) имеет свой индивидуальный набор входов.

Предположим, что существует $m \times n$ факторов (входов), обозначим их через x_{ij}, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$. Функции f_j зависят от этих факторов, т.е. определены вектор-функции, зависящие от вектор-аргументов, каждая функция имеет свой уникальный набор входов: $f = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $f \in \mathbf{R}^n$; f_j – скалярная функция, зависящая от векторного аргумента.

Рассмотрим переход системы из состояния $\mathbf{x}^0$ в состояние $\mathbf{x}^1$, т.е. входы испытывали конечные приращения $\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0 = \Delta x_{ij}$. Соответственно, функции (выходы подпроцессов) также получили свои конечные приращения, определяемые как $\Delta f_j = f_j(x_{ij}+$ $+\Delta x_{ij}) - f_j(x_{ij})$.

Предположим, что функции f_j дифференцируемы и можно применить теорему Лагранжа о промежуточной точке в форме (5):

$$\Delta f_j = \big((\Delta f_j)_L\big)_{\alpha_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_{ji}}(\mathbf{x} + \alpha_j \cdot \Delta \mathbf{x}) \cdot \Delta x_{ji}, \tag{8}$$

где $\alpha_j \in (0, 1)$ в соответствии с условием теоремы Лагранжа. Здесь и далее L ассоциируется с *Lagrange*.

Пусть p – показатель, агрегирующий выходы подсистем f_j в виде скалярной функции, зависящей от векторного аргумента и представленной в виде $p = p(f) = p(..., f_j, ...)$. Ее конечное приращение $\Delta p = p(f + \Delta f) - p(f)$ может быть также представлено в соответствии с (5) следующим образом:

$$\Delta p = ((\Delta p)_L)_\beta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial f_j}(f + \beta \cdot \Delta f) \cdot \Delta f_j, \quad \beta \in (0, 1). \tag{9}$$

Напомним, что каждый выход f_j имеет свое конечное приращение и выражение (9) может быть предтсавлено следующим образом:

$$\Delta p = ((\Delta p)_L)_\beta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial f_j}(..., f_j + \beta \cdot \Delta f_j, ...) \cdot \Delta f_j. \tag{10}$$

Подстановка выражения (8) в (10) дает:

$$\Delta p = \left(\left(((\Delta p)_L)_\beta\right)_L\right)_{(...,\alpha_j,...)} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial p}{\partial f_j} \left(..., f_j + \beta \cdot \left((\Delta f_j)_L\right)_{\alpha_j}, ...\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_{ji}} (\mathbf{x} + \alpha_j \Delta \mathbf{x}) \right) \cdot \Delta x_{ji} \right],$$

и после изменения порядка суммирования получаем следующее:

$$\Delta p = \left(\left(((\Delta p)_L)_\beta\right)_L\right)_{(...,\alpha_j,...)} =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial f_j} \left(..., f_j + \beta \cdot \left((\Delta f_j)_L\right)_{\alpha_j}, ...\right) \times \right. \tag{11}$$
$$\left. \times \frac{\partial f_j}{\partial x_{ji}} (\mathbf{x} + \alpha_j \Delta \mathbf{x}) \cdot \Delta x_{ji} \right].$$

Пусть $\hat{p}(x) = p(f(x))$, тогда

$$\Delta \hat{p} = \hat{p}(x+\Delta x) - \hat{p}(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_{ji}} (x+\gamma \Delta x) \cdot \Delta x_{ji} = ((\Delta \hat{p})_L)_\gamma,$$

где $\gamma \in (0, 1)$ может быть вычислена для каждой функции.

Применяя свойство инвариантности формы дифференциала сложной функции к функции $\hat{p}(x) = p(f(x))$, получим следующее представление ее производных:

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x_{ji}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial p}{\partial x_{ji}}(f(\mathbf{x})) = \frac{\partial p}{\partial f_j}(f(\mathbf{x})) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_{ji}}(\mathbf{x}).$$

Теперь конечное приращение отклика подсистемы верхнего уровня, представленное в виде теоремы Лагранжа (5), имеет вид

$$\Delta p = \Delta \hat{p} = ((\Delta \hat{p})_L)_\gamma =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial f_j}(f(\mathbf{x}) + \gamma \Delta \mathbf{x}) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_{ji}}(\mathbf{x} + \gamma \Delta \mathbf{x}) \cdot \Delta x_{ji} \right]. \tag{12}$$

Чтобы найти параметры α_j, $j = 1, ..., n$, β и γ, нужно приравнять (11) и (12):

$$\sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial f_j} \left(..., f_j + \beta \cdot ((\Delta f_j)_L)_{\alpha_j}, ... \right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial f_j}{\partial x_{ji}}(\mathbf{x} + \alpha_j \Delta \mathbf{x}) \cdot \Delta x_{ji} \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial f_j}(f(\mathbf{x} + \gamma \Delta \mathbf{x})) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_{ji}}(\mathbf{x} + \gamma \Delta \mathbf{x}) \cdot \Delta x_{ji} \right].$$

Полученная модель связывает параметры α_j, β, $\gamma \in (0, 1)$. Если предположить, что $p(x)$ описывает всю сложную систему с ее входами x_{ij} и одновременно с ее узлами (подсистемами) f_j, а f_j описывает зависимость каждой подсистемы от ее входов, то полученное выражение может связать конечные приращения отклика подсистемы верхнего уровня с конечными приращениями подсистем на нижних уровнях.

4. Численный пример

4.1. Описание исходных данных и анализируемых моделей

Предположим, иерархическая система состоит из двух уровней. Ее структура представлена на рис. 1.

Как на верхнем, так и на нижнем уровне подсистемы моделируются нейросетевыми структурами. Все три модели (подмодели y_1 и y_2, модель z) представляют собой классические полносвязные нейронные сети структуры:

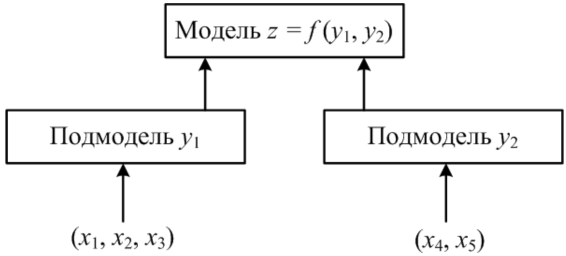

Рис. 1. Модельный пример иерархической системы

$$y = \phi_1\left(b_0 + \sum_{i=1}^{m} w_i \phi_2\left(b_i + \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j\right)\right), \tag{13}$$

где $y \in \mathbf{R}$ – значение выхода; $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ – вектор входов; w_i и w_{ij} – весовые коэффициенты выходного и скрытого слоев соответственно; b_0 и b_i – свободные коэффициенты выходного и скрытого слоев соответственно; $\phi_1(net) = \phi_2(net) = \dfrac{1}{(1+\exp(-net))}$ – логистические функции активации.

Для моделей определены следующие метапараметры:

– подмодель y_1: 1 скрытый слой, состоящий из 2 нейронов;

– подмодель y_2: 1 скрытый слой, состоящий из 1 нейрона;

– модель z: 1 скрытый слой, состоящий из 2 нейронов;

для всех нейронов использованы логистические функции активации.

В качестве данных для параметрической идентификации использовался набор данных neuraldat из пакета NeuralNetTools среды обработки данных R [5]. Набор содержит 2000 реализаций, что позволяет получить 1999 конечных приращений отклика и соответствующие им аргументы. Описанный набор данных содержит три независимые и две зависимые переменные (для построения модели и исследования на данном этапе в качестве выходных данных использовалась только одна зависимая переменная). Количество входов было увеличено до 5, использовалась нелинейная связь между выходами для имитации структуры рассматриваемой системы (предполагалось, что модель z имеет следующий вид: $z = exp(y_1) \cdot y_2$). Средняя абсолютная ошибка аппроксимации составила 3,78%.

Следуя описанной выше стратегии «сверху вниз», сначала были оценены меры чувствительности выходов подмоделей y_1 и y_2 в качестве входов модели z. Результаты представлены на рис. 2. Полученные оценки чувствительности усреднены и нормированы в соотвествии с подходом, представленным в [6]. В данном случае можно говорить о большем вкладе изменении выходов подмодели y_2 в изменение модели z.

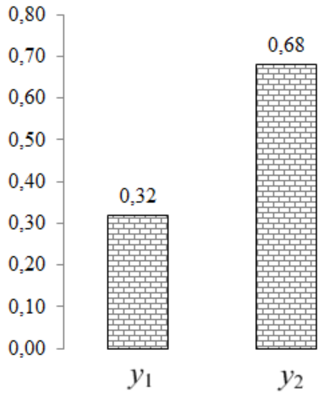

Рис. 2. Результат анализа чувствительности для модели верхнего уровня

Аналогичная ситуация наблюдается и при анализе чувствительности подмоделей y_1 и y_2 (см. рис. 3).

Предлагаемый подход к оценке мер чувствительности не использует аппроксимационную процедуру для моделирования статистических параметров исследуемой структуры и оперирует как с параметрами, так и с факторами модели. Таким образом, предлагаемый подход к оценке чувствительности не включает в себя источник неопределенности, что позволяет построить точные меры чувствительности выхода модели верхнего уровня (в представленном примере выход модели z) в зависимости от входов моделей нижнего уровня (подмоделей $y_1(x_1, x_2, x_3)$ и $y_2(x_4, x_5)$).

Результаты сквозного анализа представлены на рис. 4.

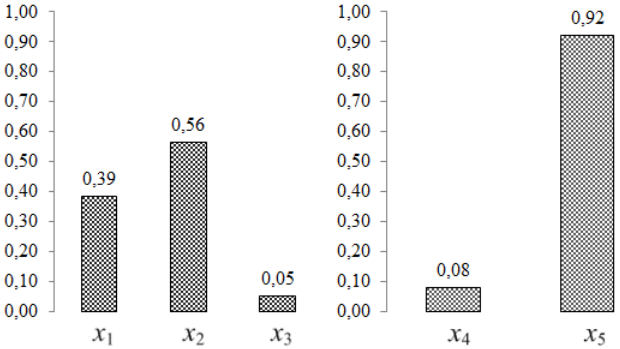

Рис. 3. Результат иерархического анализа чувствительности для подмоделей y_1 и y_2

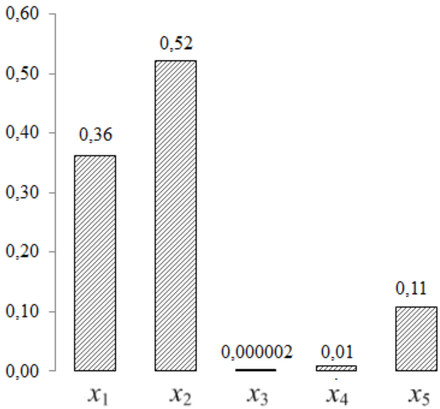

Рис. 4. Результаты сквозного иерархического анализа чувствительности для модели верхнего уровня по входам моделей нижнего уровня

Анализируя результаты исследования чувствительности модели верхнего уровня и подмоделей, можно сделать следующие выводы. Несмотря на то, что наиболее значимым является выход подмодели y_2, сквозной анализ показывает, что непосредственно большее влияние на выход модели z оказывают входы подмодели y_1. При этом присутствуют два входа (x_3 и x_4), влияние которых минимально. Полученная информация быть использована в целях редукции модели.

5. Выводы и перспективы

В данном исследовании представлен метод иерархического анализа чувствительности, основанный на использовании анализа конечных изменений в качестве инструмента для оценки значимости исследуемых переменных. В работе также синтезирован подход к измерению чувствительности иерархических моделей, когда в качестве факторов выступают структурные элементы системы. Проведенные численные эксперименты показывают возможность применения подхода в случаях, когда элементы рассматриваемой иерархической системы представлены нейронными сетями. Перспективным направлением исследований является применение различных классов моделей для описания структурных элементов иерархических систем, включая ситуации, когда некоторые подмодели заданы таблично. В таком случае потребуется аппроксимировать соотвествующие производные для дальнейшей процедуры анализа чувствительности.

Литература

1. НУРИСЛАМОВА Л.Ф., ГУБАЙДУЛЛИН И.М. *Исследование и редуцирование математической модели химической реакции методом Соболя* // Компьютерные исследования и моделирование. – 2016. – №8(4). – С. 633–646.
2. ОЖЕРЕЛЬЕВА Т.А. *Структурный анализ систем управления* // Государственный советник. – 2015. – №1(9). – С. 40–44.
3. САЛЬТЕЛЛИ А., СОБОЛЬ И.М. *Анализ чувствительности нелинейных математических моделей: численные опыты* // Математическое моделирование. – 1995. – №7. – С. 16–28.
4. СУВОРОВ А.И. *Методы оценки свойств и управления математических моделей* // Программные продукты и системы. – 1997. – №2.

5. ШИПУНОВ А.Б., БАЛДИН Е.М., ВОЛКОВА П.А. и др. *Наглядная статистика. Используем R!* – М.: ДМК Пресс, 2017. – 298 с.
6. ЩЕГЛЕВАТЫХ Р.В., СЫСОЕВ А.С. *Исследование нейросетевой модели обнаружения аномальных наблюдений в массивах данных* // Прикладная математика и вопросы управления. – 2021. – №1. – С. 23–40.
7. ЭФРОН Б. *Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа: сб. статей:* Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1988. – 263 с.
8. AZIZI T., MUGABI R. *Global sensitivity analysis in physiological systems* // Applied Mathematics. – 2020. – Vol. 11, No. 3. – P. 119–136.
9. GUL R., SCHUTTE C., BERNHARD S. *Mathematical modeling and sensitivity analysis of arterial anastomosis in the arm* // Applied Mathematical Modelling. – 2016. – Vol. 40, No. 17–18. – P. 7724–7738.
10. SALTELLI A. *Global Sensitivity Analysis: the Primer*. – Chichester: John Wiley & Sons, 2008.
11. SARAEV P., BLYUMIN S., GALKIN A. et al. *Mathematical remodeling concept in simulation of complicated variable structure transportation systems* // Transportation Research Procedia. – 2020. – No. 45. – P. 475–482.
12. SARRAZIN F., PIANOSI F., WAGENER T. *Global Sensitivity Analysis of environmental models: Convergence and validation* // Environmental Modelling & Software. – 2016. – Vol. 79. – P. 135–152.
13. SOBOL I.M. *Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates* // Mathematics and computers in simulation. – 2001. – No. 1–3. – P. 271–280.
14. RENARDY M., HULT C., EVANS S. et al. *Global sensitivity analysis of biological multiscale models* // Current opinion in biomedical engineering. – 2019. – No. 11. – P. 109–116.
15. ZHANG Z., GUL R., ZEB A. *Global sensitivity analysis of COVID-19 mathematical model* // Alexandria Engineering Journal. – 2021. – Vol. 60. – No. 1. – P. 565–572.

REDUCTION OF HIERARCHICAL MODELS: RESEARCHING SENSITIVITY BY FACTORS USING ANALYSIS OF FINITE FLUCTUATIONS

Anton Sysoev, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Cand.Sc., associate professor (sysoev_as@stu.lipetsk.ru).
Anatoly Pogodaev, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, D.Sc., professor (pak@stu.lipetsk.ru),
Pavel Saraev, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, D.Sc., associate professor (psaraev@yandex.ru).

Abstract: The selected class of mathematical models determines the methods used in the study of a system or process and approaches to their control. One of the directions of model structure control is its reduction, understood as a reduction in the number of factors in order to build a less computationally expensive model. This problem can be referred to the concept of mathematical remodeling – building a new model on the basis of a known one. Among the ways of solving such a problem is the Sensitivity Analysis of the model by factors, which can be carried out in various ways. One of these ways is based on applying the method of Analysis of Finite Fluctuations to estimate sensitivity measures. This method is based on the use of Lagrange mean value theorem. The mentioned theorem delivers an exact decomposition of the finite increment of a model's response as a weighted sum of the finite increments of its factors. The paper describes an approach that allows performing Sensitivity Analysis of this type at each of the levels of a hierarchical system, as well as an end-to-end analysis that involves finding estimates of the influence measures of the model outputs of the preceding levels on the output of the model of the upper level. Numerical examples demonstrating the applicability of the method are presented. Classical full-connected neural networks are used as a class of models describing the hierarchical levels of the system.

Keywords: mathematical modeling, reduction, remodeling, sensitivity analysis, analysis of finite fluctuations.

УДК 519.7
ББК 22.18

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.В. Горбуновой.

Поступила в редакцию 17.09.2024.
Дата опубликования 31.01.2025.