

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ГИБКИМ ОБЪЕКТОМ¹

Ромадов С. В.², Козырь А. В.³, Ефромеев А. Г.⁴
(ФГБОУ ВО Тульский государственный университет,
Тула)

Решается задача управления гибким объектом. Рассмотрены вопросы построения математической модели неоднородного гибкого звена на основе уравнения Эйлера – Бернулли. В качестве расчётной схемы была выбрана простейшая модель, которая может описывать колебания однозвенного манипулятора, транспортировки закреплённого в некоторой точке груза, лопасти вертолёт. Представлен универсальный алгоритм определения параметров упругой системы и составления ее математической модели. Предложен метод аналитического определения собственных форм колебаний неоднородной конструкции. Модель колебаний строится методом начальных параметров с дискретизацией распределения масс и изгибной жесткости. Уравнения динамики системы получаются с помощью интегрирования уравнения Эйлера – Бернулли. Полученная математическая модель с достаточно высокой точностью описывает динамику объектов, для которых характерно постоянное или ступенчатое распределение массы и жёсткости по длине. Система управления, обеспечивающая высокое быстродействие при минимальных колебаниях, разработана с использованием методов аналитического конструирования оптимальных регуляторов и модального управления на основе решения системы линейных матричных неравенств (LMI). Показано, что формулирование задачи управления в виде LMI позволяет учитывать ограничение управляющего воздействия. Результаты подтверждены компьютерным моделированием.

Ключевые слова: упругое звено, модель Эйлера – Бернулли, АКОР, LMI, вибрации, модальное управление.

1. Введение

Задача управления движением гибкой конструкцией возникает в различных приложениях робототехники и мехатроники. Манипуляторы, построенные из тонкого профиля,

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках государственного задания по теме FEWG-2022-0003.

² Сергей Владимирович Ромадов, студент (romadovsergey5@gmail.com).

³ Андрей Владимирович Козырь, к.т.н., доцент (Kozyr_A_V@mail.ru).

⁴ Андрей Геннадьевич Ефромеев, к.т.н., доцент (age.sau@mail.ru).

могут обеспечить высокую грузоподъемность и энергоэффективность по сравнению с традиционными конструкциями [8, 18]. Такие системы используются в космосе, медицине, под водой и при проведении быстрых операций [19]. Однако упругое поведение гибких звеньев приводит к нежелательным вибрациям [17], что затрудняет разработку системы управления такими системами. Те же проблемы актуальны для крыльев самолетов, кранов, лопастей вертолетов, фюзеляжей летательных аппаратов [13]. Притом наибольшую сложность и актуальность задача обретает именно в управлении летательными аппаратами [6, 10, 14, 16].

Методы анализа колебаний малой амплитуды особенно широко освещены в учебной и теоретической литературе [15, 20]. В работе [7] проведён сравнительный анализ таких методов на основе уравнения Эйлера – Бернулли с различными допущениями, среднеквадратичных отклонений и метода конечных элементов для однородной балки. Динамика объектов, описываемых простейшими расчётными схемами, описана в [1]. В [3] та же модель применялась для качественного анализа флаттера крыла. В то же время существуют и методы нелинейного описания изгибных колебаний, позволяющие работать с колебаниями большой амплитуды [11]. При этом в некоторых работах [7, 13, 20], результаты которых сопровождаются экспериментом, отмечается, что точность линейных моделей является достаточной для синтеза.

Для управления гибкими динамическими системами уже были предложены методы аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР, LQR) и построения ПИД-регуляторов [7, 11], модального [5] и нечеткого логического управления [18]. Естественным решением видится и подход к решению задачи модального управления на основе решения системы линейных матричных неравенств (LMI) [9, 12].

В данной работе рассмотрим простейшую расчётную схему (рис. 1) в виде упругого тела (балки), вращающегося относительно крайней точки, соответствующей неподвижному соединению (жёсткой заделке). Ей может соответствовать

динамика, например, однозвенного манипулятора или свободного участка перевозимого по воздуху груза или испытательного стенда, исследованного в работах по соответствующей тематике [8, 18]. Математическое описание будет построено в линейной форме, удобной для синтеза алгоритмов управления. Будут исследованы возможности моделей с прогнозированием и их преимущества перед классическим модальным управлением.

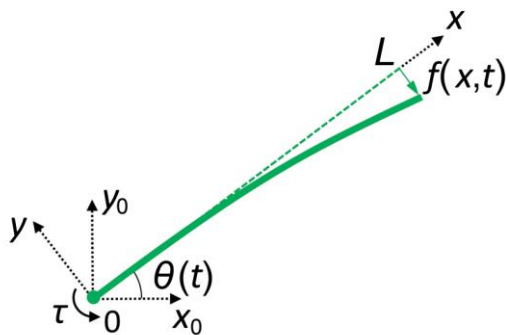


Рис. 1. Расчётная схема упругой системы

2. Математическая модель

2.1. МОДЕЛЬ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ

Уравнение Эйлера-Бернулли для неоднородной балки:

$$(1) \quad \left(1 + h \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ_z(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right) + m_0(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t),$$

где h – коэффициент внутреннего трения [3, 11], с; x – координата точки продольной оси, м; $EJ_z(x)$ – изгибная жесткость, Н·м²; $y(x,t)$ – прогиб, м; $m_0(x)$ – распределённая по длине масса, кг/м; $q(x,t)$ – распределённая нагрузка, Н/м. Чтобы найти решение, используют разделение переменных в форме

$$(2) \quad f(x,t) = \varphi(x)\eta(t).$$

После подстановки соотношения (2) в уравнение (1) при отсутствии нагрузки можно получить:

$$(3) \quad \frac{1}{m_0(x)\varphi} \frac{d^2}{dx^2} \left(EJ_z(x) \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right) = - \frac{\frac{d^2}{dt^2}\eta}{\eta + h \frac{d}{dt}\eta}.$$

Помимо констант в правую часть выражения (3) входят функции, зависящие только от времени t , а в левую часть – только от координаты x . Это возможно только тогда, когда правая и левая части – константы. Обозначим эту константу как ω^2 . Тогда из уравнения (3) можно получить

$$(4) \quad \frac{d^2}{dt^2}\eta(t) + h\omega^2 \frac{d}{dt}\eta(t) + \omega^2\eta(t) = 0,$$

$$(5) \quad \frac{1}{m_0(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ_z(x) \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2} \right) + \omega^2\varphi(x) = 0.$$

Уравнение (4) представляет собой уравнение свободных колебаний. Уравнение (5) будет использовано для аналитического вычисления форм колебаний, однако распределённый характер параметров балки предварительно сменим ступенчатым, что соответствует характеристикам рассматриваемых в данной теории объектов. Разобьём балку на k участков длиной l_i с постоянными параметрами EJ_{zi} и m_{0i} в их пределах [15]. Теперь рассмотрим уравнение (5) для i -того участка:

$$(6) \quad \frac{d^4}{dx^4}\varphi_i(x) + \beta_{i,n}^4\varphi_i(x) = 0,$$

где $\beta_{i,n}$ – постоянный коэффициент, m^{-1} :

$$(7) \quad \beta_{i,n} = \sqrt{\omega_n^4 \frac{m_{0i}}{EJ_{zi}}}.$$

Уравнение (6) имеет бесконечное количество решений, каждое из которых соответствует собственному значению собственной частоты колебаний ω_n , рад/с. Тогда отклонения i -го участка будут равны

$$(8) \quad f_{i,n}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{i,n}(x) q_n(t),$$

где $\varphi_{i,n}(x)$ – n -я форма колебаний i -го участка, м; $q_n(t)$ – обобщённая координата деформации по n -й форме колебаний. Каждая главная форма колебаний $\varphi_{i,n}(x)$ характеризуется собственной частотой колебаний ω_n .

2.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ

Рассматривая какую-либо форму колебаний, определим вектор формы u_n из значений прогиба, угла поворота, изгибающего момента и перерезывающей силы для i -го участка:

$$(9) \quad u_n(x) = \left(\varphi_n \quad \frac{d}{dx} \varphi_n \quad EJ_z \frac{d^2}{dx^2} \varphi_n \quad EJ_z \frac{d^3}{dx^3} \varphi_n \right)^T.$$

Далее составляют матрицу перехода через i -й участок $\Phi_{n,i}(x)$ [15]. Её коэффициенты для краткости не приводим. Матрица должна быть составлена таким образом, чтобы вектор формы в любой точке некоторого участка мог быть связан с вектором формы в его начале выражением:

$$(10) \quad u_n(x) = \Phi_{n,i} \left(x - \sum_{j=1}^{i-1} l_j \right) \left[\prod_{j=1}^{i-1} \Phi_{n,j}(l_j) \right] u_n(0) = \Gamma_n(x) u_n(0),$$

где i – номер участка, которому принадлежит рассматриваемая координата x ; l_j – длина j -го участка; $\Gamma_n(x)$ – матрица, связывающая значения вектора формы в начале и на координате x произвольного участка.

Граничные условия для закреплённой с одного конца балки:

$$u_1(0) = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad u_3(l) = 0, \quad u_4(l) = 0$$

означают, что изгибающий момент и перерезывающая сила на левом (свободном) конце балки и прогиб и угол поворота на правом конце равны 0. Используя граничные условия и уравнение (10), можно записать систему уравнений, нетривиальному решению которой соответствует равенство нулю определителя:

$$(11) D_n = \begin{vmatrix} \Gamma_n(l)^{3,3} & \Gamma_n(l)^{3,4} \\ \Gamma_n(l)^{4,3} & \Gamma_n(l)^{4,4} \end{vmatrix} = 0.$$

Выражение для этого определителя включает коэффициенты $\beta_{i,n}$, которые в соответствии с выражением (7) зависят от параметров m_{0i} и EJ_{zi} для i -го участка и собственной частоты для формы колебаний φ_n . Таким образом, уравнение (11) позволяет определить собственные частоты после подстановки выражения (7).

Из той же системы можно определить выражение для n -й формы колебаний:

$$(12) \varphi_n(x) = u_n^3(0) \left(\Gamma_n^{1,3}(x) - \frac{\Gamma_n^{3,3}(l)}{\Gamma_n^{3,4}(l)} \Gamma_n^{1,4}(x) \right),$$

где коэффициенты матрицы Γ_n вычисляются в соответствии с (14); $u_n^3(0)$ – начальное значение эпюры изгибающего момента.

2.3. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ СИСТЕМЫ

В соответствии с расчётной схемой, показанной на рис. 1, у рассматриваемого упругого тела помимо главных форм колебаний с соответствующими резонансными частотами есть ещё одна, характеризующая нулевой частотой. Она отвечает за поворот тела:

$$(13) y(x,t) = \varphi_0(x)\eta_0(t) + \sum_{n=1}^N \varphi_n(x)\eta_n(t) = x\theta(t) + \sum_{n=1}^N \varphi_n(x)\eta_n(t).$$

где $\theta(t)$ – угол поворота балки как жёсткого тела, рад; N – число учтённых форм колебаний.

Распределённую нагрузку в уравнении (1) перепишем в виде

$$(14) q(x,t) = R(x)Q(t).$$

Обобщённой силой в данном случае является момент $\tau(t)$. В соответствии с соотношением (14)

$$Q(t) = \tau(t), \quad R(x) = \frac{d}{dx} \delta(x),$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Перепишем уравнение (1) с учётом соотношений (2) и (14):

$$(15) \quad \sum_{n=1}^N \left(\eta + h \frac{d}{dt} \eta \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ_z \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) + \sum_{n=1}^N m_0 \varphi \frac{d^2 \eta}{dt^2} + x m_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = R(x) Q(t).$$

Для получения уравнений динамики системы следует умножить (15) на $\varphi_n(x)$ и проинтегрировать по x для каждого n , в том числе и для $n=0$. Общий вид уравнений динамики системы:

$$(16) \quad M \frac{d^2}{dt^2} r(t) + D \frac{d}{dt} r(t) + S r(t) = H \tau(t),$$

причём вектор обобщённых координат представляется в виде

$$r = (\theta \quad \eta_1 \quad \cdots \quad \eta_n \quad \cdots \quad \eta_N)^T.$$

Элементы матриц системы:

$$M_{i,j} = \int_0^l m_0(x) \varphi_{i-1}(x) \varphi_{j-1}(x) dx, \quad S_{i,j} = \omega_{i-1}^2 M_{i,j}, \quad D = hS,$$

$$H_j = \int_0^l R(x) \varphi_{j-1}(x) dx.$$

Представим систему (16) в пространстве состояний:

$$(17) \quad \frac{d}{dt} \chi = A \chi + B u,$$

где χ – вектор состояния, A – матрица системы; B – матрица входных воздействий; u – вектор входных воздействий:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}S & -M^{-1}D \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}H \end{pmatrix},$$

$$\chi = \left(\theta \quad q_1 \quad \cdots \quad q_n \quad \frac{d}{dt} \theta \quad \frac{d}{dt} \eta_n \quad \cdots \quad \frac{d}{dt} \eta_N \right)^T,$$

$$Q(t) = \tau(t),$$

где I – единичная матрица размерности $((4+2N) \times (4+2N))$.

Вид функции $R(x)$ зависит от типа приложенного воздействия. Коэффициент внутреннего трения h должен быть определён из эксперимента.

3. Система управления

Синтез регулятора будет осуществляться методами аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) и решением линейных матричных неравенств (LMI). Синтез регулятора осуществляется в форме обратной связи по переменным состояния:

$$u = -Kx,$$

где K – вектор коэффициентов обратной связи.

Собственные значения матрицы A будем задавать с помощью LMI-областей, определяемых симметричными матрицами W и E [9, 12]:

$$W \otimes X + E \otimes (AX + BY) + E^T \otimes (XA^T + Y^T B^T) < 0,$$

где « \otimes » обозначает произведение Кронекера; X , Y – положительно определенные матрицы, определяющие коэффициенты

$$K = YX^{-1}.$$

Желаемое расположение корней системы, выбранное в соответствии с корневыми критериями качества, может быть задано комбинацией вертикальной полосы от h_2 до h_1 и конического сектора с углом $\pi/2 - \alpha$.

Пересечение двух областей:

$$W = \begin{pmatrix} 2h_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Имеются также два неравенства для ограничения управления, гарантирующие выполнение $\|u(t)\| \leq \mu$ при $x(0) \leq x_0$.

$$\begin{pmatrix} W & x_0 \\ x_0^T & 1 \end{pmatrix} > 0, \quad \begin{pmatrix} W & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{pmatrix} > 0.$$

Таким образом, h_1 определяет быстродействие; h_2 определяет ограничение быстрой составляющей переходных процессов; α определяет коэффициент демпфирования; μ устанавливает ограничение управления.

Синтез методом АКОР основан на выборе значений весовых матриц Q и R критерия оптимальности

$$(18) \quad J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt.$$

Для удобства Q задаётся как диагональная матрица:

$$Q = \text{diag}(Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_M),$$

где M – размерность матрицы A .

Вектор коэффициентов обратной связи:

$$(19) \quad K = R^{-1} B^T P,$$

где P – матрица, определяемая уравнением Риккати:

$$(20) \quad A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0.$$

Чем больше i -й коэффициент матрицы Q , тем выше оказывается коэффициент передачи по i -й переменной. Аналогично: чем выше R , тем меньше по амплитуде управление.

4. Математическое моделирование

Результаты сравнения экспериментальных данных и данных компьютерного моделирования для свободных колебаний консольно закреплённой балки представлены на рис. 2.

Далее будем варьировать параметры объекта управления, т.е. менять коэффициенты матриц A и B в системе (17) с отклонением в пределах 5%. Полученные переходные процессы, соответствующие решению задачи поворота упругого тела на угол 90° , показаны на рис. 3 и 4. Дополнительно покажем также график расположения полюсов и нулей системы (рис. 5).

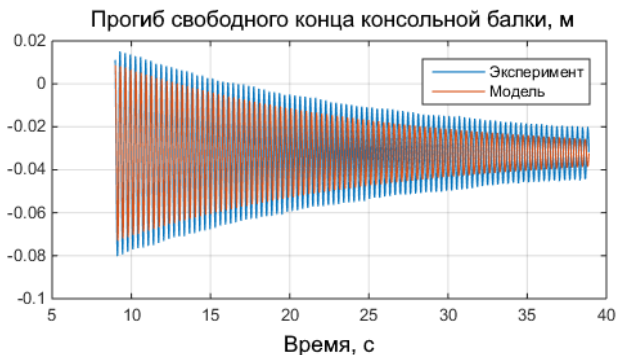


Рис. 2. Сравнение данных эксперимента и модели

Как случайное отклонение на рис. 3–5 обозначен случай, когда отклонение разных коэффициентов системы неодинаково. Переходные процессы показаны на рис. 6.

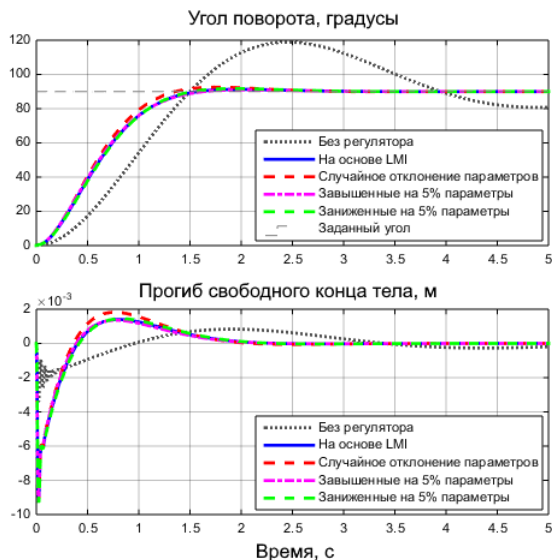


Рис. 3. Переходные процессы в системе с построенным с помощью LMI регулятором

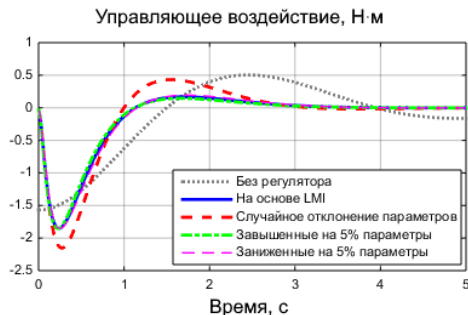


Рис. 4. Управляющее воздействие в системе с построенным с помощью LMI регулятором

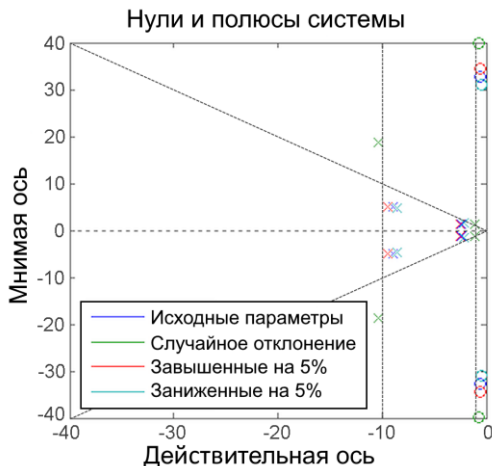


Рис. 5. Полюсы (крестики) и нули (кружки) системы с построенным с помощью LMI регулятором

При использовании LQR и LMI были получены эквивалентные результаты: время регулирования составило около 1,5 с, а перерегулирование не превысило 2,5%. Прогиб в случае LMI оказался меньше. Однако очевидно, что система с коэффициентами обратной связи, рассчитанными методом АКОР, является более чувствительной к изменению параметров объекта.

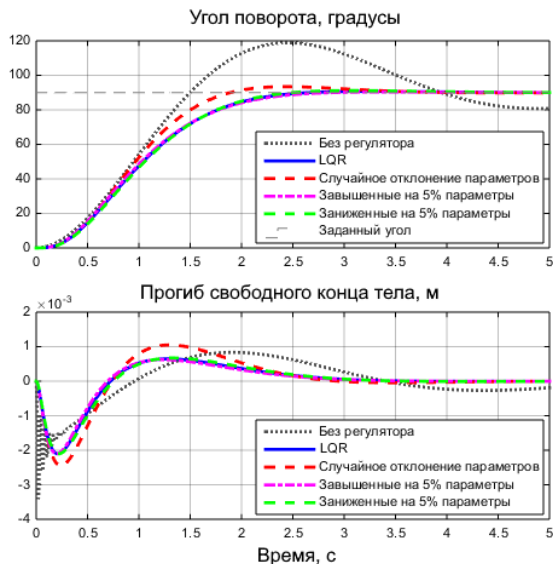


Рис. 6. Переходные процессы в системе с регулятором, построенным методом АКОР

5. Выводы

В статье рассматривается вывод системы дифференциальных уравнений, описывающей динамику воздушной транспортировки гибкого груза. Модель получена на основе уравнений теорий балок Эйлера – Бернулли и Тимошенко. Показано, что для данной системы с высокой эффективностью может быть использован метод LMI. Дальнейшая работа предполагает исследование возможностей уточнения математической модели с помощью экспериментальных данных.

Литература

1. АВРАМЕНКО А.А. Метод Рэлея – Ритца и метод начальных параметров в задаче расчета динамических характеристик составных упругих конструкций балочного типа //

- Вестник Самарского университета. Серия естествознания. – 2019. – №1. – С. 44–56.
2. ОГОРОДНИКОВ Ю.И. *Синтез наблюдателей состояния для линейных моделей упругих конструкций // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование.* – 2016. – №4. – С. 25–36.
 3. ХАЗАНОВ Х.С. *Механические колебания систем с распределенными параметрами: учеб. Пособие.* – Самара, Изд-во СГАУ, 2002. – 80 с.
 4. ABDULLAHI M.A., ZAHARUDDIN M., MUSTAPHA M. *Vibration control comparison of a single link flexible manipulator between fuzzy logic control and pole placement control // Int. Journal of Scientific & Technology Research.* – 2013. – No. 2. – P. 236–241.
 5. EL-ZOBAIDI H., CHAUDHURI B., PAL B.C. et al. *LMI approach to normalised H_∞ loop-shaping design of power system damping controllers // IET Proc. on Generation Transmission and Distribution.* – 2005. – No. 6(152). – P. 952–960.
 6. HICKNER M., FASEL U., NAIR A.G. et al. *Data-driven unsteady aeroelastic modeling for control // ARC.* – 2022. – Vol. 61, No. 2. – P. 123–146.
 7. MARTINS R.J., ZAHARUDDIN M., OSMAN TOKHI M. *Approaches for dynamic modelling of flexible manipulator systems // IEE Proc. Control Theory and Applications.* – 2003. – No. 4(150). – P. 401–411.
 8. RAHIMI H.N., NAZEMIZADEH M. *Dynamic analysis and intelligent control techniques for flexible manipulators: A review // Advanced Robotics.* – 2014. – No. 28(2). – P. 63–76.
 9. SCHERER C., WEILAND S. *Linear Matrix Inequalities in Control.* – Germany, University of Stuttgart, 2015. – 293 p.
 10. SHI P., LIU F., GU Y. et al. *The Development of a Flight Test Platform to Study the Body Freedom Flutter of BWB Flying Wings // Aerospace.* – 2021. – No. 8. – P. 390–408.
 11. WARMINSKI J., KLODA L., LATALSKI J. et al. *Nonlinear vibrations and time delay control of an extensible slowly ro-*

- tating beam* // Nonlinear dynamics. – 2021. – No. 103(8). – P. 3255–3281.
12. WERNER H. *Controller design using linear matrix inequalities* // Control systems, robotics, and automation. – 2009. – Vol. IX. – P. 168–201.
 13. YINAN W., XIAOWEI ZH., RAFAEL P. et al. *Aeroelastic Simulation of High Aspect Ratio Wings with Intermittent Leading-Edge Separation* // AIAA JOURNAL. – 2021. – 32 p.
 14. ZHANG C., ZHOU Z., ZHU X. et al. *A Comprehensive Framework for Coupled Nonlinear Aeroelasticity and Flight Dynamics of Highly Flexible Aircrafts* // Applied Sciences. – 2020. – Vol. 10, No. 3. – P. 949–966.
 15. ZHANG Y., LI B., CUI P. et al. *Numerical simulation of support interference characteristics on a low-aspect ratio flying-wing model* // J. Phys. Conf. Ser. – 2020. – 8 p.
 16. ZHAO W., GUPTA A., MIGLANI J. et al. *Finite Element Model Updating of Composite Flying-wing Aircraft using Global/Local Optimization* // Proc. of the AIAA Scitech-2019 Forum, 2019.
 17. ZHAO X., ZHANG S., LIU Z. et al. *Vibration control for flexible manipulators with event triggering mechanism and actuator failures* // IEEE Trans. on Cybernetics. – 2021. – P. 7591–7601.
 18. ZHAO Z., HE X., AHN C.K. *Boundary disturbance observer-based control of a vibrating single-link flexible manipulator* // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics: Systems. – 2021. – No. 51(4). – P. 2382–2390.
 19. ZHAO Z., LIU Z. *Finite-time convergence disturbance rejection control for a flexible Timoshenko manipulator* // IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica. – 2021. – No. 8(1). – P. 157–168.
 20. ZHILING T. *Modeling and control of flexible link robots.* – Singapore, National University of Singapore, 2004. – 153 p.

STUDY OF THE CHARACTERISTICS OF LINEAR FLEXIBLE OBJECT CONTROL SYSTEM

Sergey Romadov, Tula State University, Tula, student (romadovsergey5@gmail.com).

Andrey Kozyr, Tula State University, Tula, Cand.Sc., docent (Kozyr_A_V@mail.ru).

Andrey Efromeev, Tula State University, Tula, Cand.Sc., docent (age.sau@mail.ru).

Abstract: The paper solves a flexible object control problem. The issues of constructing a mathematical model of an inhomogeneous flexible link based on the Euler-Bernoulli equation are considered. The simple design model was chosen, which, for example, can describe the vibrations of a single-link manipulator, load bending during aerial transportation, or a helicopter blade. A universal algorithm for determining the parameters of an elastic system is presented. A convenient method is used to analytically determine mode shapes of an inhomogeneous structure. Vibrations model was built by the method of initial parameters with discretization of distributions of mass and bending rigidity. The system dynamics equations are obtained by integrating the Euler-Bernoulli equation, which makes mathematical formulation universal. The resulting mathematical model describes with sufficiently high accuracy the dynamics of objects, which are characterized by a constant or stepwise distribution of mass and stiffness along their length. The control system, providing high speed with minimal fluctuations, is developed using LQR and LMI methods. It is shown that the LMI method allows one to directly limit the control action and more intuitively set the required characteristics of the system, however, it is less resistant to changes in the parameters of the control object. Control system needs to be done more robust, and thus further research is necessary.

Keywords: flexible link, Euler – Bernoulli model, LQR, LMI, vibrations, modal control.

УДК 681.5

ББК 30.2

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.

Поступила в редакцию 16.09.2024.

Опубликована 31.01.2025.