

ДВА ПОДХОДА К СИНТЕЗУ ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ КОНЕЧНОЙ ТОЧКОЙ ДВУХЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА¹

Антипов А. С.², Грезнев П. П.³
(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассматривается задача отслеживания конечной точкой двухзвенного манипулятора желаемой траектории, заданной на плоскости в рабочем пространстве конечной точки, в условиях действия внешних возмущений. Эти возмущения полагаются согласованными (действуют по одним каналам с управлениями, в качестве которых рассматриваются обобщенные моменты). Стандартные подходы к управлению опираются на решение обратной задачи кинематики, которое может быть неоднозначным и, как правило, требует использования численных методов. Из-за данных недостатков актуальной является проблема разработки законов управления без решения обратной задачи кинематики. Для создания такого подхода к управлению предлагается рассмотреть в качестве выходных переменных координаты конечной точки в декартовой системе. Тогда на основе однозначной зависимости выхода от обобщенных координат можно перейти от исходного описания системы в терминах обобщенных координат к описанию в терминах положений конечной точки и решать задачу синтеза управления на основе преобразованной системы. Построение управления осуществляется с помощью блочного подхода, который позволяет разбить задачу на две элементарные подзадачи синтеза фиктивного и истинного управлений. Для проведения сравнительного анализа также разработан метод синтеза управляющих моментов, предполагающий решение обратной задачи кинематики. В обоих методах используются гладкие и ограниченные S-образные обратные связи, обеспечивающие подавление возмущений с заданной точностью и монотонность переходных процессов. Представлены результаты численного моделирования, подтверждающие эффективность подхода без решения обратной задачи кинематики.

Ключевые слова: двухзвенный манипулятор, управление положением конечной точки, слежение, обратная задача кинематики, внешние возмущения, блочный подход.

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 24-21-20009).

² Алексей Семенович Антипов, к.т.н., с.н.с. (scholess18@mail.ru).

³ Павел Павлович Грезнев, техник (greznev@gmail.com).

1. Введение

Роботы-манипуляторы широко применяются для автоматизации промышленных процессов. Их математическая модель отличается нелинейностью, многосвязностью, наличием параметрических неопределенностей, внешних возмущений и неполнотой измерений. Из задач управления манипулятором наиболее общей и распространенной является задача слежения, которая заключается в построении управления, обеспечивающего движение конечной точки с закрепленным рабочим органом по желаемой траектории. При этом данную траекторию удобно задавать в декартовой системе координат, начало которой находится в основании манипулятора. Однако в качестве выхода (регулируемых переменных), как правило, исследователи рассматривают вектор обобщенных координат манипулятора. В этом случае для построения управления требуется преобразовать желаемую траекторию конечной точки, заданную в декартовой системе координат, в задающие воздействия для обобщенных координат, т.е. решить обратную задачу кинематики. После этого появляется возможность применить стандартные подходы к управлению: ПД- и ПИД-регулирование [8, 19, 22], методы оптимального управления [6, 11, 16], робастного [17, 18, 20] и адаптивного [21] управления.

Решение обратной задачи кинематики сопряжено с рядом сложностей. Аналитическое решение имеется лишь для узкого класса роботов-манипуляторов, поэтому обычно приходится использовать численные методы [2, 3, 5, 13]. Это увеличивает количество вычислений в реальном времени, при этом решение обратной задачи кинематики не всегда однозначно. Его качество существенно зависит от выбора подходящего начального приближения для запуска итерационных процессов. В настоящее время идет активное развитие методов с использованием машинного обучения, в том числе применение нейронных сетей для решения обратной задачи кинематики [7, 14, 15, 23]. Однако точность решения зависит от качества обучающей выборки. В силу данных трудностей актуальной представляется разработ-

ка законов управления, не требующих решения обратной задачи кинематики [4, 9].

В данной работе рассматривается проблема синтеза статической обратной связи для двухзвенного плоскостного робота-манипулятора при действии на объект внешних согласованных возмущений. Ставится задача отслеживания конечной точкой манипулятора желаемой траектории. Цель состоит в разработке двух методов управления и проведении их сравнительного анализа: с решением обратной задачи кинематики и без нее. В этих методах для синтеза управления используется блочный подход [1, 12]. В первом методе исходная система приводится к блочной форме относительно ошибки слежения обобщенными координатами за заданной траекторией, полученной в результате решения обратной задачи кинематики. Во втором – к блочной форме относительно ошибки слежения положениями конечной точки объекта за желаемой траекторией, заданной в декартовой системе координат. Научная новизна связана с разработкой второго метода без решения обратной задачи кинематики. Для подавления возмущений в обоих методах применяются гладкие и ограниченные S-образные обратные связи [1, 12].

Из прошлых работ авторов [9] и [12] близки к тематике данной. В [12] на примере трехзвенного манипулятора было продемонстрировано преимущество использования сигмовидных обратных связей вместо стандартных линейных в рамках блочного подхода. В [9] был предложен подход без решения обратной задачи кинематики с указанием его потенциальных плюсов в плане уменьшения вычислительных затрат по сравнению с применением подходов с решением обратной задачи кинематики. Однако не проводился строгий сравнительный анализ: в качестве приложения был выбран трехзвенный манипулятор, для которого существовало однозначное аналитическое решение обратной задачи кинематики, что позволяло управлять исходной системой в терминах обобщенных координат с помощью стандартных подходов. В отличие от работ [9, 12], в данном исследовании объектом управления является двухзвенный манипулятор, для которого в общем случае нет однозначного аналитического решения обратной задачи кинематики. Таким

образом, в данной работе восполняется пробел [12]: проводится сравнительный анализ подходов с решением обратной задачи кинематики и без него на основе количественных показателей.

2. Математическая модель объекта управления и постановка задачи

Математическая модель объекта управления без учета динамики исполнительных устройств (механическая система) описывается уравнениями Эйлера – Лагранжа [10]:

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2, \\ \dot{q}_2 &= H^{-1}(q_1)(u - C(q_1, q_2)q_2 - G(q_1) - \eta(t)), \end{aligned}$$

где $q_1 = (q_{11}, q_{12})^T$ – вектор положений звеньев манипулятора; $q_2 = (q_{21}, q_{22})^T$ – вектор скоростей; $H(q_1) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ – положительно-определенная нелинейная симметрическая матрица инерции; $C(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ – матрица центробежных и кориолисовых сил, зависящих от вектора обобщенных координат и скоростей; $G(q_1) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ – вектор гравитационных сил; $\eta(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ – неизвестные моменты сил, действующие на систему, которые будем рассматривать как внешние возмущения; $u \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ – вектор обобщенных моментов, который полагается управлением. Для двухзвенного манипулятора элементы матриц системы (1) имеют следующий аналитический вид [10]:

$$(2) \quad \begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \cos(q_{11} - q_{12}) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(q_{11} - q_{12}) & m_2 l_2^2 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} 0 & m_2 l_1 l_2 \sin(q_{11} - q_{12}) \\ -m_2 l_1 l_2 \sin(q_{11} - q_{12}) & 0 \end{pmatrix}, \\ G &= \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)\bar{g}l_1 \cos q_{11} \\ m_2 \bar{g}l_2 \cos q_{12} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где m_i и l_i – массы и длины звеньев соответственно, $i = 1, 2$; $\bar{g} = 9,81$ – ускорение свободного падения.

Вектор $y_1 = (y_{11}, y_{12})^T$ определяет положения конечной точки манипулятора в ее рабочей области. Элементы этого вектора однозначно выражаются через обобщенные координаты [10]:

$$(3) \quad \begin{aligned} y_{11} &= h_1(q_1) = l_1 \cos q_{11} + l_2 \cos q_{12}, \\ y_{12} &= h_2(q_1) = l_1 \sin q_{11} + l_2 \sin q_{12}. \end{aligned}$$

Решение обратной кинематической задачи в явном аналитическом виде можно получить только для манипулятора со звеньями одинаковой длины, но оно не является однозначным.

Относительно модели (1)–(2) выдвигаются следующие предположения.

1. Массы m_i и длины звеньев l_i точно известны.
2. Обобщенные скорости ограничены по модулю:

$$(4) \quad |q_{2i}(t)| \leq Q_{2i}, \quad t \geq 0.$$

3. Внешние возмущения $\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t))^T$ принадлежат классу кусочно-гладких ограниченных функций:

$$(5) \quad |\eta_i(t)| \leq H_{ii}, \quad t \geq 0.$$

4. Помимо положений конечной точки $y_1(t)$ и их эталонных траекторий $g(t) = (g_1(t), g_2(t))^T$, заданных в системе координат конечной точки, измеряются обобщенные координаты $q_1(t)$, скорости $q_2(t)$ и производные задающих воздействий $\dot{g}_i(t)$, $\ddot{g}_i(t)$, которые являются гладкими и ограниченными функциями времени:

$$|g_i^{(j)}(t)| \leq G_{ji}, \quad t \geq 0, \quad j = 0, 1, 2, \quad i = 1, 2.$$

При этом шумы измерений отсутствуют.

В данных предположениях ставится задача синтеза управления u в форме статической обратной связи, обеспечивающей отслеживание конечной точкой манипулятора эталонной траектории с заданной точностью:

$$(6) \quad |y_{1i}(t) - g_i(t)| \leq \Delta_i, \quad t \geq t_{1i},$$

где Δ_i – желаемая величина ошибки в установившемся режиме; $t_{1i} > 0$ – время регулирования, $i = 1, 2$. При этом в данной работе не ставится цель обеспечить желаемое время регулирования.

3. Синтез управления с решением обратной задачи кинематики

Стандартные подходы к построению управления требуют решения обратной задачи кинематики. Оно заключается в том, чтобы пересчитать желаемые траектории $g_1(t)$, $g_2(t)$, определенные в рабочей области конечной точки, в задающие воздействия для обобщенных координат $q_{11}(t)$, $q_{12}(t)$. Как правило, для этого используют численные методы решения системы нелинейных уравнений (3) относительно q_{11} , q_{12} [2, 3, 5, 13]. Предположим, что получено решение этой задачи $q_{1d} = (q_{11d}, q_{12d})^T$. Тогда сформируем ошибку слежения $e_1 = q_1 - q_{1d}$ вектора обобщенных координат q_1 за задающим воздействием q_{1d} и найдем ее производную: $\dot{e}_1 = \dot{q}_1 - \dot{q}_{1d}$, где $\dot{q}_{1d} = (\dot{q}_{11d}, \dot{q}_{12d})^T$. Для удобства дальнейшего синтеза управления переменную q_2 в этом уравнении можно трактовать как фиктивное управление и воспользоваться блочным подходом. Чтобы избежать перерегулирования, характерного для стандартных линейных обратных связей [12], примем стабилизирующую часть желаемого фиктивного управления в виде гладкого и ограниченного гиперболического тангенса [1]:

$$(7) \quad q_2^* = \dot{q}_{1d} - M_1 \tanh(K_1 e_1),$$

где $M_1 \tanh(K_1 e_1) = (m_{11} \tanh(k_{11} e_{11}), m_{12} \tanh(k_{12} e_{12}))^T$, $m_{1i} > 0$ – амплитуды управления; $k_{1i} > 0$ – большие коэффициенты в аргументе гиперболического тангенса $\tanh(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, $i = 1, 2$.

Введем ошибку слежения $e_2 = q_2 - q_2^*$ переменной q_2 за желаемой функцией (7). Следовательно, замена переменных

$$(8) \quad \begin{aligned} e_1 &= q_1 - q_{1d}, \\ e_2 &= q_2 - q_2^* = q_2 - \dot{q}_{1d} + M_1 \tanh(K_1 e_1), \end{aligned}$$

преобразует систему (1) к виду

$$(9) \quad \begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 - M_1 \tanh(K_1 e_1), \\ \dot{e}_2 &= H^{-1}(q_1)(u - C(q_1, q_2)q_2 - G(q_1) - \eta(t)) - \ddot{q}_{1d} + \Lambda_1, \end{aligned}$$

где $\Lambda_1 = (m_{11}k_{11}(1 - \tanh^2(k_{11}e_{11}))\dot{e}_{11}, m_{12}k_{12}(1 - \tanh^2(k_{12}e_{12}))\dot{e}_{12})^T$ – вектор полных производных гиперболического тангенса, $\ddot{q}_{1d} = (\ddot{q}_{11d}, \ddot{q}_{12d})^T$.

Истинное управление u также выберем в виде гиперболического тангенса, который, как гладкий аналог разрывного управления, позволит подавить возмущения во втором уравнении системы (9) [1]:

$$(10) \quad u = -H(q_1)M_2 \tanh(K_2 e_2),$$

где $M_2 \tanh(K_2 e_2) = (m_{21} \tanh(k_{21}e_{21}), m_{22} \tanh(k_{22}e_{22}))^T$, $m_{2i} > 0$, $k_{2i} > 0$, $i = 1, 2$. Тогда приходим к следующей замкнутой системе:

$$(11) \quad \begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 - M_1 \tanh(K_1 e_1), \\ \dot{e}_2 &= f - M_2 \tanh(K_2 e_2), \end{aligned}$$

где вектор-функцию

$$f = (f_1, f_2)^T = -H^{-1}(q_1)(C(q_1, q_2)q_2 + G(q_1) + \eta(t)) - \ddot{q}_{1d} + \Lambda_1$$

рассмотрим как новое возмущение, $|f_i(t)| \leq F_i$, $t \geq 0$, при этом константы F_i известны из допустимых областей изменения переменных (4) системы (1)–(2) и внешних возмущений (5).

Замечание. Поскольку в силу постановки задачи все параметры объекта считаются известными, вместо управления (10) можно применить комбинированное управление с частью, компенсирующей вектор-функцию:

$$f_0 = -H^{-1}(q_1)(C(q_1, q_2)q_2 + G(q_1)) + \Lambda_1.$$

Однако управление (10), имеющее силовой характер, было выбрано специально так, чтобы не вычислять составляющие f_0 на каждом шаге дискретизации и таким образом сократить количество вычислений в реальном времени.

Лемма 1 [1]. Если в системе (11) вектор-функция f ограничена $|f_i(t)| \leq F_i$, $t \geq 0$, то тогда для сколь угодно малого $\tilde{\Delta}_{1i} > 0$ и любого начального условия $e_{ij}(0)$ найдутся такие $\bar{k}_{ij} > 0$, $\bar{m}_{ij} > 0$, что при любых $k_{ij} > \bar{k}_{ij}$, $m_{ij} > \bar{m}_{ij}$ будет обеспечена стабилизация ошибки слежения с заданной точностью $|e_{ij}(t)| \leq \tilde{\Delta}_{1i}$, $t \geq \tilde{t}_{1i}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$.

В конструктивном доказательстве Леммы 1, которое здесь не приводится, получены нижние оценки для выбора коэффициентов нелинейного регулятора, зависящие от заданных $\tilde{\Delta}_{li}$. При этом в системе (1), (10) цель управления (6) достигается, если назначить $\tilde{\Delta}_{li}$ с учетом заданной ошибки слежения для конечной точки в силу (3).

4. Синтез управления без решения обратной задачи кинематики

Чтобы не решать обратную задачи кинематики предлагается продифференцировать y_1 (3) и от уравнений (1)–(2) перейти к следующей системе:

$$(12) \quad \begin{aligned} \dot{y}_1 &= R(q_1)q_2, \\ \dot{q}_2 &= H^{-1}(q_1)(u - C(q_1, q_2)q_2 - G(q_1) - \eta(t)), \end{aligned}$$

где

$$R(q_1) = \begin{pmatrix} -l_1 \sin q_{11} & -l_2 \sin q_{12} \\ l_1 \cos q_{11} & l_2 \cos q_{12} \end{pmatrix}.$$

Выходом этой системы является вектор положений конечной точки $y_1(t)$. Введем ошибку $e_1 = y_1 - g$ его отслеживания эталонной траектории $g(t)$, заданной в системе координат конечной точки. Ее производная имеет вид $\dot{e}_1 = R(q_1)q_2 - \dot{g}$, где $\dot{g} = (\dot{g}_1, \dot{g}_2)^T$. В этом уравнении переменную $y_2 = R(q_1)q_2$ будем трактовать как фиктивное управление и, как и для предыдущего метода управления, применим блочный подход. Замена переменных

$$e_1 = y_1 - g,$$

$$e_2 = y_2 - y_2^* = R(q_1)q_2 - \dot{g} + M_1 \tanh(K_1 e_1),$$

$$y_2^* = \dot{g} - M_1 \tanh(K_1 e_1)$$

приводит систему (12) к виду

$$\dot{e}_1 = e_2 - M_1 \tanh(K_1 e_1),$$

$$\dot{e}_2 = \dot{R}q_2 - \dot{g} + \Lambda_1 + R(q_1)H^{-1}(q_1)(u - C(q_1, q_2)q_2 - G(q_1) - \eta(t)),$$

где

$$M_1 \tanh(K_1 e_1) = (m_{11} \tanh(k_{11} e_{11}), m_{12} \tanh(k_{12} e_{12}))^T,$$

$$\dot{R}(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} -l_1 \cos(q_{11}) q_{21} & -l_2 \cos(q_{12}) q_{22} \\ -l_1 \sin(q_{11}) q_{21} & -l_2 \sin(q_{12}) q_{22} \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_1 = (m_{11} k_{11} (1 - \tanh^2(k_{11} e_{11})) \dot{e}_{11}, m_{12} k_{12} (1 - \tanh^2(k_{12} e_{12})) \dot{e}_{12})^T,$$

$$\ddot{g} = (\ddot{g}_1, \ddot{g}_2)^T.$$

Невырожденность матрицы $R(q_1)H^{-1}(q_1)$ при истинном управлении u в замкнутой локальными связями системы определяется условием $\det R(q_1) = -l_1 l_2 \sin(q_{11} - q_{12}) \neq 0$, которое выполняется при $q_{11}(t), q_{12}(t): \sin(q_{11}(t) - q_{12}(t)) \neq 0 \Rightarrow q_{12}(t) \neq q_{11}(t) - \pi n, n \in Z, t \geq 0$. Таким образом, использование подхода без решения обратной задачи кинематики ограничивает область допустимых обобщенных координат, при которых преобразование системы в термины координат конечной точки не нарушает свойство управляемости.

В предположении $\det R(q_1) \neq 0$ сформируем закон истинного управления:

$$(13) \quad u = -(R(q_1)H^{-1}(q_1))^{-1} M_2 \tanh(K_2 e_2),$$

где $M_2 \tanh(K_2 e_2) = (m_{21} \tanh(k_{21} e_{21}), m_{22} \tanh(k_{22} e_{22}))^T, m_{2i} > 0, k_{2i} > 0, i = 1, 2$.

В результате приходим к замкнутой системе, внешний вид которой совпадает с системой (11):

$$(14) \quad \begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 - M_1 \tanh(K_1 e_1), \\ \dot{e}_2 &= f - M_2 \tanh(K_2 e_2), \end{aligned}$$

но здесь

$$f = \dot{R}(q_1, q_2) q_2 - \ddot{g} + \Lambda_1 - R(q_1)H^{-1}(q_1)(C(q_1, q_2)q_2 + G(q_1) + \eta(t)),$$

$$|f_i(t)| \leq F_i, t \geq 0.$$

Согласно Лемме 1 найдутся такие числа $\bar{k}_{ij} > 0, \bar{m}_{ij} > 0$, которые обеспечат подавление возмущений и стабилизацию ошибки слежения $e_1 = y_1 - g$ с заданной точностью (6).

5. Результаты численного моделирования

Для проверки работоспособности разработанных алгоритмов управления и сравнительного анализа результатов их работы было проведено численное моделирование в MATLAB/Simulink. Были приняты следующие значения параметров объекта [10]:

$$m_1 = 1 \text{ [кг]}, m_2 = 1 \text{ [кг]}, l_1 = 2 \text{ [м]}, l_2 = 1 \text{ [м]}.$$

Ставилась задача отслеживания положениями конечной точки y_1 эталонной траектории $g(t) = (g_1(t), g_2(t))^T$, заданной в декартовой системе координат, из начальных условий:

$$q_{11}(0) = 0,1 \text{ [рад]}, q_{12}(0) = 0,5 \text{ [рад]},$$

$$q_{21}(0) = 0 \text{ [рад/с]}, q_{22}(0) = 0 \text{ [рад/с]}.$$

Требовалось, чтобы значение ошибки слежения по модулю в установившемся режиме составляло не более чем 0,01 м.

При этом полагалось, что обобщенные скорости изменяются в следующих допустимых областях:

$$|q_{2i}(t)| \leq 1,5 \text{ [рад/с]}, t \geq 0, i = 1, 2.$$

Внешние возмущения описывались функциями

$$\eta_1 = 0,2 \sin t, \eta_2 = 0,2 \cos t,$$

для синтеза системы управления были известны только их допустимые границы изменения $|\eta_i| \leq 0,2, t \geq 0, i = 1, 2$.

Моделировались замкнутые системы (1), (10) с решением обратной задачи кинематики и последующим управлением системой в терминах обобщенных координат, а также (1), (13) без решения обратной задачи кинематики и управлением системой в терминах положений конечной точки. Для первой системы на каждом шаге дискретизации обратная задача кинематики (3) решалась с помощью встроенной в MATLAB функции «fsolve» с параметрами по умолчанию, предназначенной для численного решения систем нелинейных уравнений. В этом случае для поиска решения используется метод сопряженных направлений Пауэлла. Для запуска итерационного процесса на каждом шаге дискретизации эмпирически было принято одинаковое начальное приближение $(-0,5; 0,6)$. Для объективности сравнения ре-

зультатов коэффициенты регуляторов (10) и (13) выбирались так, чтобы обеспечить примерно одинаковую точность. Исходя из данного условия для закона управления (10) с решением обратной задачи кинематики были приняты значения коэффициентов

$$(15) \quad \begin{aligned} m_{11} &= 0,23, \quad m_{12} = 0,30, \quad k_{11} = 35, \quad k_{12} = 35, \\ m_{21} &= 200, \quad m_{22} = 200, \quad k_{21} = 1, \quad k_{22} = 1. \end{aligned}$$

Для закона управления (13) без решения обратной задачи кинематики были выбраны следующие значения:

$$(16) \quad \begin{aligned} m_{11} &= 0,53, \quad m_{12} = 0,50, \quad k_{11} = 33, \quad k_{12} = 35, \\ m_{21} &= 200, \quad m_{22} = 200, \quad k_{21} = 1, \quad k_{22} = 1. \end{aligned}$$

Численное интегрирование замкнутых систем выполнялось с помощью неявного метода Эйлера с постоянным шагом дискретизации 10^{-3} [с].

Было проведено два эксперимента с разными эталонными траекториями. В первом из них эталонная траектория была выбрана специально в виде (3):

$$\begin{aligned} g_1 &= l_1 \cos q_{11d} + l_2 \cos(q_{12d}), \\ g_2 &= l_1 \sin q_{11d} + l_2 \sin(q_{12d}), \end{aligned}$$

где $q_{11d} = 0,1 \sin t + 0,15$, $q_{12d} = 0,1 \cos t + 0,45$ для существования аналитического решения обратной задачи кинематики. Это было сделано для проверки корректности работы метода сопряженных направлений Пауэлла и последующего сравнения численного решения с аналитическим. На рис. 1 приведены графики полученного численного решения обратной задачи кинематики $q_{1id,num}(t)$, на рис. 2 – графики ошибок $q_{1id}(t) - q_{1id,num}(t)$, $i = 1, 2$.

Евклидова норма вектора ошибок численного решения $(\max|q_{11d}(t) - q_{11d,num}(t)|, \max|q_{12d}(t) - q_{12d,num}(t)|)^T$ составила $1,36 \cdot 10^{-5}$ [рад]. Таким образом, была проведена верификация численного метода решения обратной задачи кинематики.

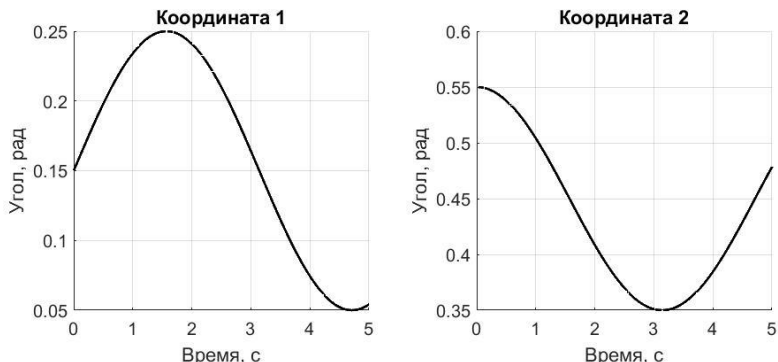


Рис. 1. Графики численного решения обратной задачи кинематики $q_{1id,num}(t)$, $i = 1, 2$

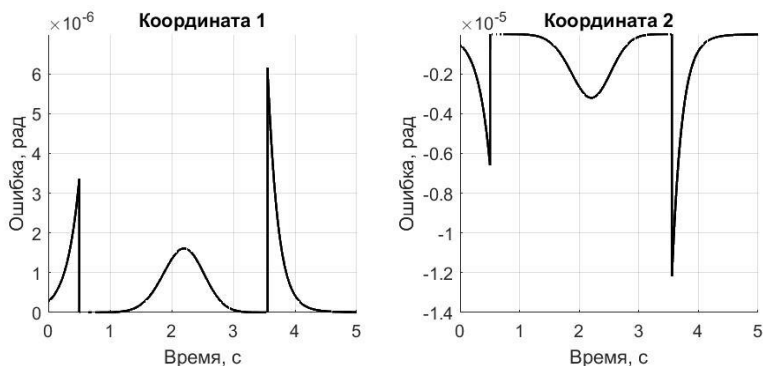


Рис. 2. Графики ошибок $q_{1id}(t) - q_{1id,num}(t)$, $i = 1, 2$

Для двух замкнутых систем (1), (10) и (1), (13) на рис. 3 представлены графики координат конечной точки $y_{1i}(t)$ и их задающих воздействий $g_i(t)$, на рис. 4 – графики ошибок слежения $e_{1i}(t) = y_{1i}(t) - g_i(t)$. На рис. 5 представлены графики желаемой траектории и фактических траекторий конечной точки на плоскости. На рис. 6 приведены графики управлений u_i , $i = 1, 2$.

На основе результатов моделирования были рассчитаны следующие показатели качества регулирования: времена регулирования t_{1i} [с]: $|e_{1i}(t)| \leq 0,01$ [м], $t \geq t_{1i}$, ошибок в установив-

шемся режиме $\Delta_{i1} = \max |e_{1i}(t)|$ [м], $t \geq 2$ [с], максимальных по модулю управлений в переходном $u_{max,t,i} = \max |u_i(t)|$ [Н·м], $0 \leq t < 2$ [с] и в установившемся $u_{max,s,i} = \max |u_i(t)|$ [Н·м], $t \geq 2$ [с] режимах. В таблице 1 представлены значения евклидовых норм соответствующих векторов $t_1 = (t_{11}, t_{12})^T$, $\Delta_1 = (\Delta_{11}, \Delta_{12})^T$, $u_{max,t} = (u_{max,t,1}, u_{max,t,2})^T$, $u_{max,s} = (u_{max,s,1}, u_{max,s,2})^T$.

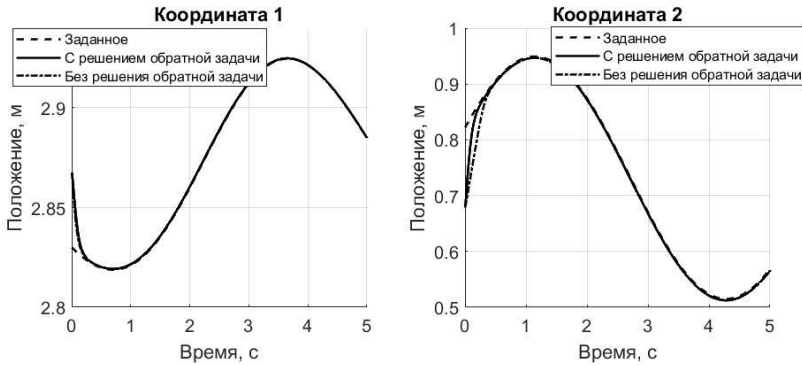


Рис. 3. Графики положений конечной точки $y_{1i}(t)$ и эталонной траектории $g_i(t)$, $i = 1, 2$

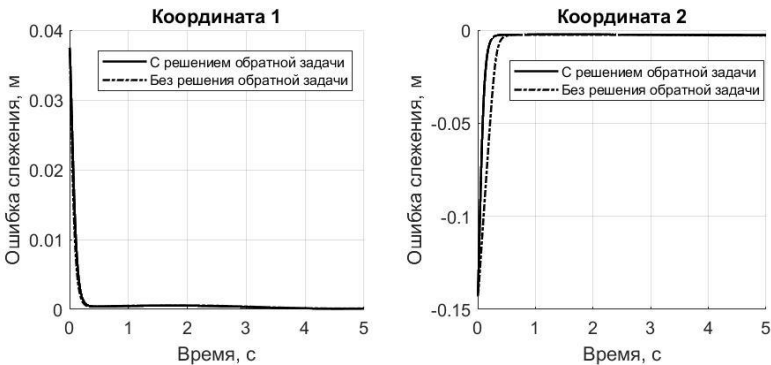


Рис. 4. Графики ошибок слежения $e_{1i} = y_{1i}(t) - g_i(t)$, $i = 1, 2$

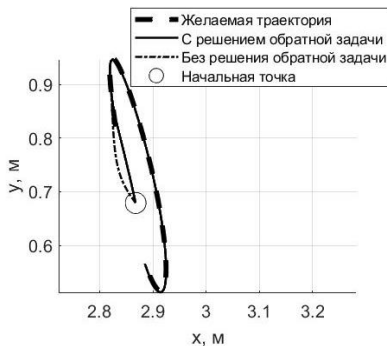


Рис. 5. Графики траекторий конечной точки на плоскости

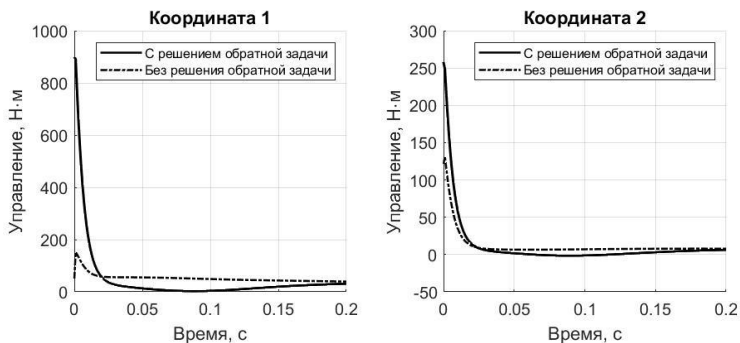


Рис. 6. Графики управлений $u_i(t)$, $i = 1, 2$

Таблица 1. Значения показателей качества регулирования

Показатель	Закон управления	
	С решением обратной задачи кинематики	Без решения обратной задачи кинематики
$\ t_1\ $, с	0,2125	0,3585
$\ \Delta_1\ $, мм	2,7005	2,8758
$\ u_{max,t}\ $, Н·м	935,8650	199,9219
$\ u_{max,s}\ $, Н·м	41,1334	40,7822

Для проверки робастности разработанных подходов к допустимым изменениям задающих воздействий и внешних возмущений был проведен второй эксперимент. По сравнению с экспериментом 1 были выбраны другие функции, описывающие внешние воздействия:

$$(17) \quad g_1 = 0,1 \sin(\cos(0,8t)) + 2,77, \quad g_2 = -0,2 \sin(0,8t) + 0,62, \\ \eta_1 = 0,2 \cos 2t, \quad \eta_2 = 0,2 \sin 2t.$$

Для траектории (17) не существовало аналитического решения обратной задачи кинематики. Численное решение находилось с помощью метода сопряженных направлений Пауэлла с начальным приближением $(-0,5; 0,6)$. Остальные условия эксперимента были такими же, как и в эксперименте 1, в том числе использовались те же коэффициенты регуляторов (15), (16).

Для двух замкнутых систем (1), (10) с решением обратной задачи кинематики и (1), (13) без решения на рис. 7 представлены графики координат конечной точки $y_{1i}(t)$ и их задающих воздействий $g_i(t)$, на рис. 8 – графики ошибок слежения $e_{1i}(t) = y_{1i}(t) - g_i(t)$. На рис. 9 приведены графики эталонной траектории и фактических траекторий конечной точки на плоскости. На рис. 10 – графики управлений $u_i, i = 1, 2$.

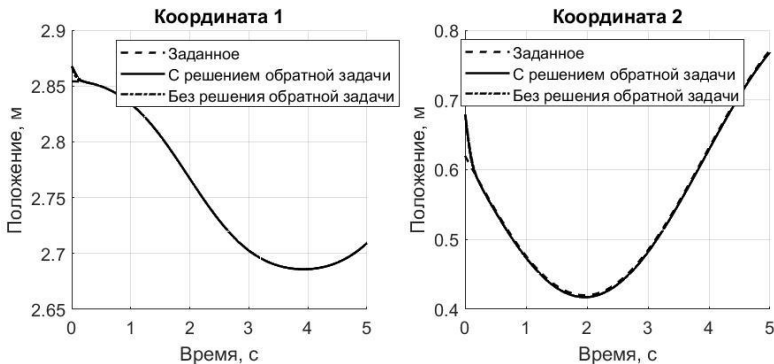


Рис. 7. Графики положений конечной точки $y_{1i}(t)$ и эталонной траектории $g_i(t), i = 1, 2$

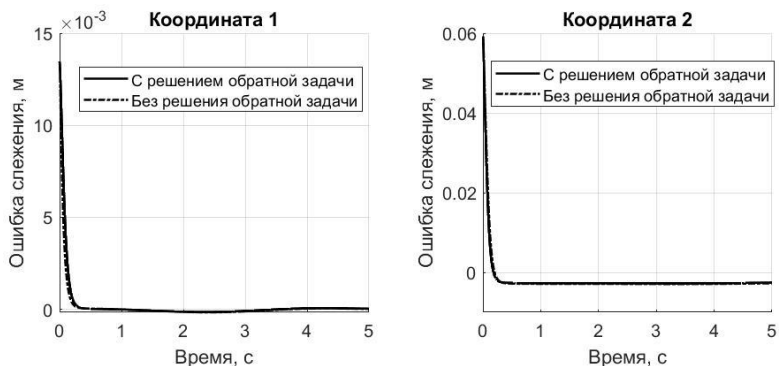


Рис. 8. Графики ошибок слежения $e_{1i} = y_{1i}(t) - g_i(t)$, $i = 1, 2$

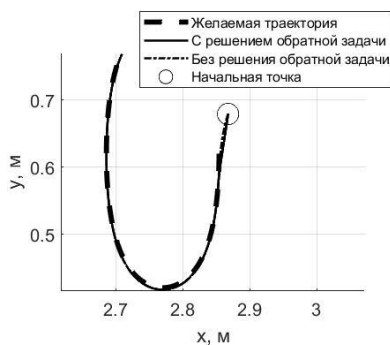


Рис. 9. Графики траекторий конечной точки на плоскости

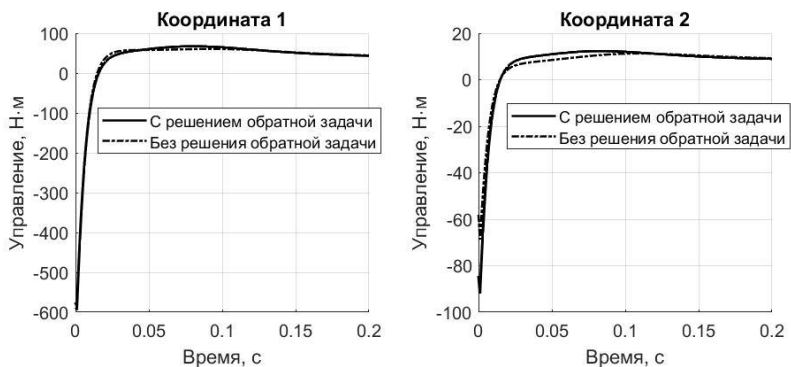


Рис. 10. Графики управлений $u_i(t)$, $i = 1, 2$

Таблица 2. Значения показателей качества регулирования

Показатель	Закон управления	
	С решением обратной задачи кинематики	Без решения обратной задачи кинематики
$\ t_1\ $, с	0,1119	0,1238
$\ \Delta_i\ $, мм	2,7740	2,9391
$\ u_{max,t}\ $, Н·м	592,5884	598,4613
$\ u_{max,s}\ $, Н·м	40,2688	40,2680

6. Обсуждение результатов

Из рис. 1, 2 и таблицы 1 следует, что в эксперименте 1 цель управления была достигнута для обоих законов управления: значения ошибок слежения в установившемся режиме по модулю не превысили заданную величину 10 [мм]. При этом законы управления обеспечили сопоставимую точность. Для первой координаты величина ошибки составила примерно 0,6 [мм], для второй – примерно 3 [мм].

Для сравнительного анализа также было проведено пять моделирований двух замкнутых систем с решением обратной задачи кинематики и без него на отрезке времени от 0 до 5 [с] с последующим вычислением длительности моделирования (длительность может незначительно меняться от запуска к запуску из-за текущей загруженности процессора и возможностей вычислительной среды). Для закона управления с решением обратной задачи кинематики получились следующие значения длительности: 118,5020, 125,4926, 121,2107, 118,9608, 111,6349 [с], а для закона без решения обратной задачи кинематики – 0,7431, 0,7455, 0,7357, 0,7336, 0,6844 [с]. Таким образом, средняя длительность моделирования составила 119,1602 [с] и 0,7285 [с] соответственно. Следовательно, для закона с решением обратной задачи кинематики вычисления происходили примерно в 163 раза дольше по сравнению с законом без решения обратной задачи кинематики, что может быть недопусти-

мым для производственных задач, где особенно важно быстродействие. В таком случае предпочтительнее использовать закон управления без решения обратной задачи кинематики, либо, если это возможно, решить обратную задачу кинематики и рассчитать траекторию до применения системы управления, а в режиме реального времени использовать аппроксимацию этого решения, например, с помощью нейросетевого подхода [23].

Проблемным моментом подхода без решения обратной задачи кинематики является потеря управляемости при переходе в термини координат конечной точки при определенных значениях обобщенных координат. Эта проблема связана с преобразованием (3). В дальнейшем планируется исследовать такие случаи.

Подчеркнем еще раз, что для уменьшения количества вычислений в данной работе были выбраны управления (10) и (13) без компенсации всех известных составляющих модели, имеющие силовой характер. Реализация комбинированного управления потребовала бы расчета матриц механической системы и привела бы к большим вычислительным затратам.

Из рис. 7–10 и таблицы 2 следует, что при допустимом изменении задающего воздействия и внешних возмущений в эксперименте 2 цель управления также была достигнута, как и в эксперименте 1. Таким образом, эти результаты продемонстрировали робастность предложенных подходов к допустимым изменениям внешних воздействий.

В будущем планируется распространить предложенный подход для более адекватной модели объекта с учетом динамики исполнительных устройств, параметрических неопределенностей, а также разработать наблюдатель возмущений для повышения качества регулирования.

Литература

1. АНТИПОВ А.С., КРАСНОВА С.А., УТКИН В.А. *Синтез инвариантных нелинейных одноканальных систем слежения с сигмоидальными обратными связями с обеспечением*

- заданной точности слежения // Автоматика и телемеханика. – 2022. – №1. – С. 40–66.
2. КОЛТЫГИН Д.С., СЕДЕЛЬНИКОВ И.А., ПЕТУХОВ Н.В. Аналитический и численный методы решения обратной задачи кинематики для робота Delta // Вестник ИрГТУ. – 2017. – №5. – С. 87–96.
 3. КОРОВИН О.С. Обзор методов решения обратной задачи кинематики для манипулятора с избыточностью // «Поли-технический молодежный журнал» МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2022. – № 2. – С. 1–8.
 4. КРАСНОВА С.А., УТКИН В.А., УТКИН А.В. и др. Прямой метод синтеза системы управления рабочим органом манипулятора при неполных измерениях // Проблемы управления. – 2008. – №1. – С. 10–18.
 5. НЕЛАЕВА Е.И., ЧЕЛНОКОВ Ю.Н. Решение прямых и обратных задач кинематики роботов-манипуляторов с использованием дуальных матриц и бикватернионов на примере стэнфордского манипулятора. Часть 2 // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2015. – №16. – С. 456–463.
 6. ОВЦОВ С.А., САРОКА В.В. Разработка оптимальной системы управления роботом-манипулятором гальванической линии для погашения колебаний подвески в переходных режимах // Труды БГТУ. Серия 3: физико-математические науки и информатика. – 2017. – №3. – С. 63–68.
 7. ОСЬКИН Д.А., ДЫДА А.А., КОНСТАНТИНОВА Е.А. Нейросетевое моделирование задачи обратной кинематики для манипуляционного робота // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – №12. – С. 254–257.
 8. ПАРАЕВ Ю.И., КОЛЕСНИКОВА С.И., ЦВЕТНИЦКАЯ С.А. Управление роботом-манипулятором в условиях неопределенности // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2021. – №57. – С. 4–12.
 9. ANTIPOV A.S., KOKUNKO J.G., KRASNOVA S.A. et al. Direct control of the endpoint of the manipulator under non-smooth uncertainty and reference trajectories // Journal of The Franklin Institute. – 2023. – Vol. 360, Iss. 17. – P. 13430–13458.

10. BACCOUCH M., DODDS S. *A Two-Link Robot Manipulator: Simulation and Control Design* // Int. Journal of Robotic Engineering. – 2020. – Vol. 5, No. 2. – P. 1–17.
11. FEHR J., SCHMID P., SCHNEIDER G. et al. *Modeling, Simulation, and Vision-/MPC-Based Control of a PowerCube Serial Robot* // Appl. Sci. – 2020. – Vol. 10, No. 20. – P. 1–26.
12. KOCHETKOV S.A., KRASNOVA S.A., ANTIPOV A.S. *Cascade Synthesis of Electromechanical Tracking Systems with Respect to Restrictions on State Variables* // IFAC-PapersOnLine. – 2017. – Vol. 50, No 1. – P. 10142–10147.
13. LI J., YU H., SHEN N. et al. *A novel inverse kinematics method for 6-DOF robots with non-spherical wrist* // Mech. Mach. Theory. – 2020. – Vol. 67, No. 157. – P. 104–189.
14. LU J., ZOU T., JIANG X. *A Neural Network Based Approach to Inverse Kinematics Problem for General Six-Axis Robots* // Sensors. – 2022. – Vol. 22, No. 22. – P. 1–19.
15. MALIK A., LISCHUK Y., HENDERSON T. et al. *A Deep Reinforcement-Learning Approach for Inverse Kinematics Solution of a High Degree of Freedom Robotic Manipulator* // Robotics. – 2022. – Vol. 11, No. 2. – P. 1–17.
16. MASSARO M., LOVATO S., BOTTIN M. et al. *An Optimal Control Approach to the Minimum-Time Trajectory Planning of Robotic Manipulators* // Robotics. – 2023. – Vol. 12, No. 3. – P. 1–24.
17. MAZHAR A., TANVEER A., IZHAN M. et al. *Robust Control Approaches and Trajectory Planning Strategies for Industrial Robotic Manipulators in the Era of Industry 4.0: A Comprehensive Review* // Eng. Proc. – 2023. – Vol. 56, No. 1. – P. 1–6.
18. RAHMANI M., REDKAR S. *Robot Manipulator Control Using a Robust Data-Driven Method* // Fractal Fract. – 2023. – Vol. 7, No. 9. – P. 1–14.
19. TRAN D.T., NGUYEN T.N., NGUYEN X.T. et al. *Synchronous PD Control Using a Time Delay Estimator for a Four-Degree-of-Freedom Parallel Robot in Practice* // Machines. – 2023. – Vol. 11, No. 8. – P. 1–21.

20. WANG F., LIU P., JING F. et al. *Sliding Mode Robust Active Disturbance Rejection Control for Single-Link Flexible Arm with Large Payload Variations* // Electronics. – 2021. – Vol. 10, No. 23. – P. 1–15.
21. WEI B. *A Tutorial on Robust Control, Adaptive Control and Robust Adaptive Control—Application to Robotic Manipulators* // Inventions. – 2019. – Vol. 4, No. 3. – P. 1–13.
22. ZHANG C. *PD Plus Dynamic Pressure Feedback Control for a Direct Drive Stewart Manipulator* // Energies. – 2020. – Vol. 13, No. 5. – P. 1–13.
23. ZHAO A., TOUDESCHI A., EHSANI R. et al. *Data-Driven Inverse Kinematics Approximation of a Delta Robot with Stepper Motors*. Robotics. – 2023. – Vol. 12, No. 5. – P. 1–12.

TWO APPROACHES TO SYNTHESIZING THE END-POINT CONTROL LAW OF A TWO-LINK MANIPULATOR

Aleksey Antipov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., senior researcher (scholess@mail.ru).

Pavel Greznev, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, technician (greznevp@gmail.com).

Abstract: For a two-link manipulator endpoint, we consider the problem of tracking the desired trajectory defined on a plane in the endpoint workspace under the action of external disturbances. These perturbations are assumed to be matched (acting along the same channels with the controls, which are considered to be generalized torques). Standard approaches to control rely on the solution of the inverse problem of kinematics, which can be ambiguous and, as a rule, requires the use of numerical methods. Given these drawbacks, the problem of developing control laws without solving the inverse kinematics problem is relevant. To create such an approach to control, we consider the coordinates of the endpoint in the Cartesian system as output variables. Then, on the basis of the unambiguous dependence of the output on the generalized coordinates, we can transform the initial description of the system in terms of generalized coordinates to a description in terms of the endpoint positions and solve the problem of control synthesis on the basis of the transformed system. The control is constructed using the block approach, which allows us to divide the problem into two subproblems of synthesizing virtual and true controls in fully actuated subsystems. For comparative analysis, we also developed a method for synthesizing control torques, which involves solving the inverse problem of kinematics. In both methods, smooth and bounded S-shaped feedback is used, which suppresses disturbance with a given accuracy and monotonicity of

transients. Numerical simulation results are presented to confirm the effectiveness of the proposed approach without solving the inverse kinematics problem.

Keywords: two-link manipulator, endpoint position control, tracking, inverse kinematics problem, external disturbances, block approach.

УДК 62.50
ББК 32.817

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.А. Уткиным.*

*Поступила в редакцию 30.10.2024.
Опубликована 31.01.2025.*