РАСПОЛОЖЕНИЕ В ЗАДАННЫХ МНОЖЕСТВАХ УПРАВЛЕНИЯ И ВЫХОДА ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ

Глущенко А. И.[1], **Ласточкин К. А.**[2]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

В публикациях [3, 15] предложен метод управления нелинейными системами с гарантией нахождения регулируемой переменной и управления в заданных множествах. Основные теоремы этих работ справедливы для одномерных и многомерных систем с произвольной относительной степенью. Однако конструктивные алгоритмы синтеза управления предложены для систем с единичной относительной степенью. В этой работе упомянутые результаты расширяются на класс одномерных систем, имеющих произвольную относительную степень и устойчивую внутреннюю динамику. Для такого класса систем предложен новый закон управления, позволяющий обеспечить компенсацию параметрической неопределенности и сигнальных возмущений совместно с нахождением регулируемой переменной и управления в заданных множествах. При этом ограничение на сигнал управления доставляется явно путем использования в законе управления гладкой нелинейности, которая допредельно аппроксимирует функцию насыщения, а при недостатке ресурса управления полученное решение позволяет динамически изменять множество ограничений на регулируемый выход, устраняя таким образом разрывы в обратной связи. Теоретические результаты иллюстрируются с помощью математического моделирования на примере системы второго порядка и могут применены, например, в задачах управления пространственными и угловыми координатами твердых тел.

Ключевые слова: заданное качество управления, заданные множества управления и выхода, ограниченное управление, компенсация возмущений, устойчивость.

1. Введение

Технические задания на разработку систем автоматического управления обычно формулируются в терминах инженерных показателей качества – перерегулирования, времени нарастания и длительности переходного процесса по регулируемой вели-

[1] *Антон Игоревич Глущенко, д.т.н., доцент, в.н.с.* (*aiglush@ipu.ru*).
[2] *Константин Андреевич Ласточкин, м.н.с., аспирант* (*lastconst@ipu.ru*).

чине. В классической теории автоматического управления хорошо известны методы ЛАЧХ, эталонной передаточной функции, модального синтеза по полиномам Ньютона и Баттерворта, позволяющие при известной модели системы обеспечить выполнение этих показателей. Однако эти решения работоспособны и эффективны только при незначительных вариациях параметров системы и действии квазипостоянных возмущений. С другой стороны, методы адаптивного и робастного управления с компенсацией параметрических и сигнальных возмущений гарантируют только асимптотические свойства регулируемого выхода и не позволяют на стадии синтеза заложить гарантий выполнения инженерных показателей качества.

Для преодоления этого противоречия между потребностями практики и имеющейся теории на западе широкое распространение получил метод управления с гарантированными инженерными показателями качества [9, 10]. В общих чертах его суть заключается в а) формализации инженерных показателей качества в виде множества, задающего ограничение на выход, и б) преобразовании задачи управления с ограничениями на выход к задаче стабилизации некоторой системы без ограничений. С помощью такого подхода решены задачи управления нелинейными системами, представленными в блочных (strict/pure feedback form) [7, 8, 11] и нормальных (normal form, feedback linearizable systems) [6, 9, 10] формах, а также получено множество других обобщений и улучшений базовых результатов, например, см. обзоры [13, 26]. В этом же направлении в отечественной литературе [1] предложен новый метод управления системами с гарантированным качеством управления, который, в отличие от [6–11], не требует асимптотической сходимости функций, задающих множество ограничений, и благодаря этому расширяет класс решаемых задач.

Многие из упомянутых решений позволяют обеспечить заданное качество управления системами с неизвестными параметрами и произвольными ограниченными сигнальными возмущениями, но не учитывают наличие в системе ограничений на сигнал управления. Следовательно, актуальной задачей является построение системы управления, обеспечивающей заданное качество при ограниченном ресурсе управления. Эта задача может быть рассмотрена в двух различных постановках. В первой постановке [21, 29, 32] считается, что имеющегося ресурса управления достаточно, чтобы при допустимых возмущениях обеспечить заданные показатели качества (то есть ограничения на выход и управление непротиворечивы). Во второй постановке [12, 14, 20, 23, 24, 28, 30, 31] считается, что управление может оказываться недостаточным для ограничения выхода в заданном множестве на некоторых интервалах времени и при некоторых значениях сигнальных и параметрических возмущений (конфликт между ограничениями на выход и управление). Первая постановка задачи сегодня не представляет большого интереса и может быть решена на основании результатов [6–11] с помощью применения функции Нуссбаума [27] или λ-фильтров [33]. Актуальность второй постановки задачи связана с тем, что стандартные схемы управления с заданным качеством [13, 26] устроены так, что могут содержать разрывы в обратной связи при пересечении выходной переменной границы области ограничений. Однако такое пересечение неизбежно при наличии несогласованных ограничений на управление и выход. Для решения этой проблемы к сегодняшнему дню предложены различные подходы [12, 14, 20, 23, 24, 28, 30, 31], концептуально связанные идеей ослабления/изменения ограничений на регулируемую переменную в режиме насыщения управления.

В отечественной работе [3] выполнено расширение результата [1] на случай ограниченного управления. Однако, во-первых, предполагается, что ограничения на управление и выход не являются противоречивыми и могут быть выполнены одновременно (т.е. результат относится к первой постановке задачи в принятой классификации), во-вторых, рассмотрен класс систем с единичной относительной степенью, а в-третьих, разработанный закон управления не использует в явном виде функцию насыщения или ее аппроксимацию, является сложным (многокомпонентным) и для параметрической настройки требует решения линейных матричных неравенств. В данной работе предлагается получить более простой вид закона управления, при этом явно учитывающий наличие ограничения на управление, а также выполнить расширение результатов [3] на а) класс одномерных линеаризуемых обратной связью систем, т.е. имеющих произвольную относительную степень и устойчивую внутреннюю динамику и б) случай, когда ограничения на управление и выход могут быть противоречивы.

В целом отличительными особенностями этой работы по сравнению с результатами [3] можно считать следующее:

– рассмотрен класс одномерных систем с произвольной относительной степенью и устойчивой внутренней динамикой;

– ограничение на сигнал управления доставляется явно путем использования в законе управления гладкой нелинейности, которая допредельно аппроксимирует функцию насыщения;

– полученное решение позволяет динамически изменять множество ограничений на регулируемый выход при недостатке ресурса управления, устраняя таким образом разрывы в обратной связи;

– предлагаемый закон управления является простым и интуитивно понятным.

Дальнейшая работа устроена следующим образом. В разделе 2 приводится строгая постановка задачи и дается описание рассматриваемого класса систем. В разделе 3 кратко обозреваются результаты [1]. В разделе 4 формулируется основной результат этой работы, выстраивается закон управления, располагающий в заданных множествах управление и выход рассматриваемого класса систем. В разделе 5 приводятся результаты математического моделирования. Статья завершается заключением, в котором обозначены достоинства и недостатки предлагаемого решения, а также выделены области возможного практического использования результатов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ &\vdots \\ &\dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t), \\ &\dot{x}_n(t) = bu(t) + d(x, u, t), \\ &y(t) = x_1(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x_i(t) \in \mathbb{R}$ – измеряемые состояния; $u(t) \in \mathbb{R}$ – формируемое управление; $d(x, u, t)$ – неизвестное возмущение (далее $d(t) := d(x, u, t)$ для краткости); $y(t)$ – регулируемый выход.

Требуется сформировать управление $u(t)$ так, чтобы для всех $t \geqslant t_0$ одновременно выполнялись условия

$$y \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}, u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{U}$ – заранее заданные множества:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &:= \left\{ y \in \mathbb{R} \colon \underline{g}_y(t) < y(t) < \overline{g}_y(t) \right\}, \\ \mathcal{U} &:= \{ u \in \mathbb{R} \colon |u(t)| \leqslant u_{UB} \}, \end{aligned} \tag{3}$$

а $\underline{g}_y(t), \overline{g}_y(t)$ – ограниченные вместе со своими производными функции времени.

Для существования решений поставленной задачи принимаются выполненными следующие допущения.

Допущение 1. Множества (3) заданы так, что $y(t_0) \in \mathcal{Y}$, $u(t_0) \in \mathcal{U}$.

Допущение 2. Существует сигнал $u^* \in \mathcal{U}$ такой, что $y \in \mathcal{Y}$ при ограничении (3).

Допущение 1 необходимо принять, поскольку требуется обеспечить (3) в начальный момент времени $t \geqslant t_0$. Допущение 2 хотя и является неконструктивным, но означает формальную достижимость поставленной цели (3). Отметим, что допущение 2 далее будет ослаблено, но оба введенных допущения не ограничительны и могут быть выполнены путем соответствующего выбора целевых множеств (3).

***Замечание* 1.** Модель (1) является естественной во многих прикладных задачах управления. Например, пространственные и угловые координаты твердого тела (квадрокоптера, подводного аппарата и т.д.) после ряда координатных преобразований [16–18] описываются моделью вида (1) при $n = 2$. Кроме того, к модели (1) при определенных требованиях к правой части приводятся нелинейные системы с устойчивой внутренней динамикой и произвольной относительной степенью [19] (в этом случае возмущение $d(t)$ содержит также вклад внутренней динамики, который может быть интерпретирован в виде некоторой функции от состояний $x(t)$). Наконец, моделью (1) может быть описан выход минимально-фазовой линейной системы с произвольной относительной степенью. В [3, 15] рассматривались системы с единичной относительной степенью от управления к выходу, поэтому в рамках подхода [3, 15] цель $y \in \mathcal{Y}$, $u \in \mathcal{U}$ для (1) еще не была достигнута.

Замечание 2. Измерение полного вектора состояний не является ограничительным условием для системы вида (1), поскольку на основании измеряемого выхода $y(t)$ вектор состояний $x(t)$ всегда может быть восстановлен с помощью различных дифференциаторов [25, с. 68], [5, с. 46]. Например, с помощью линейного алгоритма:

$$\begin{aligned}&\dot{\hat{x}}(t) = A_0\hat{x}(t) + B_0u(t) + L(\hat{y}(t) - y(t)),\\&\hat{y}(t) = C_0^\top\hat{x}(t),\end{aligned}$$

где

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0_{n-1} & I_{(n-1)\times(n-1)} \\ & 0_{1\times n} \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 0_{n-1} \\ b \end{bmatrix},$$

$$C_0^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0_{1\times(n-1)} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} -\mu a_0 \\ -\mu^2 a_1 \\ \vdots \\ -\mu^n a_{n-1} \end{bmatrix}$$

и $a_i > 0$ – коэффициенты многочлена $(s+l)^n, l > 0$, $\mu > 0$ – достаточно большое число.

Анализ устойчивости схем управления с подобными дифференциаторами, как правило, сводится к тому, что коэффициент $\mu > 0$ должен иметь достаточно большое значение [22]:

$$\lim_{\mu\to\infty}\left(sI - A_0 - LC_0^\top\right)^{-1} B\mathcal{L}\left(d\left(t\right)\right) = 0,$$

где $\mathcal{L}\left(.\right)$ – преобразование Лапласа.

Поэтому для ясности и простоты изложения далее в работе, в полном соответствии с поставленной задачей, шаг получения оценок $\hat{x}\left(t\right)$ опускается и априорно считается, что координаты состояния измеряемы (оценки $\hat{x}\left(t\right)$ отождествляются с состояниями $x\left(t\right)$).

3. Предварительные сведения

Решение поставленной задачи базируется на методе управления с гарантией нахождения выхода в заданном множестве, развитым в работах И.Б. Фуртата с соавторами [1, 3, 15]. В этом разделе кратко приведем основные положения этого подхода.

Рассматривается система общего вида:

$$\dot{x}\left(t\right) = F\left(x, u, t\right), \quad y\left(t\right) = h\left(x\right), \tag{4}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$.

Требуется обеспечить $y \in \mathcal{Y}$, где

$$\mathcal{Y}{:} = \left\{ y \in \mathbb{R}^p{:}\ \underline{g}_i\left(t\right) < y_i\left(t\right) < \overline{g}_i\left(t\right), i = 1, \ldots, p \right\}.$$

Для выхода системы (4) вводится замена переменных

$$y\left(t\right) = \Phi\left(\varepsilon, t\right), \tag{5}$$

где $\Phi{:}\ \mathbb{R}^p \times \left[t_0, \infty\right) \mapsto \mathbb{R}^p$ и $\varepsilon\left(t\right) \in \mathbb{R}^p$ – непрерывно дифференцируемая по t вектор-функция.

Тогда условия достижения цели $y \in \mathcal{Y}$ в терминах требований к замене (5) и производной $\dot{y}\left(t\right)$ могут быть сформулированы следующим образом.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi{:}\ \mathbb{R}^p \times \left[t_0, \infty\right) \mapsto \mathbb{R}^p$ *удовлетворяет следующим условиям:*

У1. $\underline{g}_i\left(t\right) < \Phi_i\left(\varepsilon, t\right) < \overline{g}_i\left(t\right), i = 1, \ldots, p$, *для любых* $t \geqslant t_0$ *и* $\varepsilon\left(t\right) \in \mathbb{R}^p$.

У2. $\Phi\left(\varepsilon, t\right)$ *непрерывно-дифференцируема по* $\varepsilon\left(t\right)$ *и* t, *а также* $\det\left\{\frac{\partial\Phi(\varepsilon,\, t)}{\partial\varepsilon}\right\} \neq 0$ *для всех* $y \in \mathcal{Y}$ *и* $t \geqslant t_0$.

У3. $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}$ *ограничена по* $t \geqslant t_0$ *для любых* $\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^p$.

Тогда:

а) если производная $\dot{y}(t) := \frac{\partial h(x)}{\partial x} F(x, u, t)$ *такая, что решения уравнения*

$$\dot{\varepsilon}(t) = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} \left(\dot{y}(t) - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}\right) \tag{6}$$

ограничены, то $y \in \mathcal{Y}_\alpha \subset \mathcal{Y}$.

б) если $\dot{y}(t)$ *такая, что решения* (6) *неограничены, то* $y \in \mathcal{Y}$.

Доказательство. Доказательство приведено в [1].

По теореме 1 задача обеспечения $y \in \mathcal{Y}$ сводится к обеспечению ограниченности переменной $\varepsilon(t)$. Типовые примеры замен переменных (5) приведены в [3].

4. Основной результат

В рамках рассмотренного в третьем разделе подхода предлагается каскадная процедура решения поставленной задачи. На первом этапе процедуры истинное управление предлагается формировать на основании гладкой нелинейной функции, допредельно аппроксимирующей функцию насыщения. Аргументом такой функции является новое, фиктивное управление. Далее с помощью рассмотренного в разделе 3 подхода выполняется переход от задачи управления с ограничением на выход к задаче без ограничений. После этого задача управления системой n-го порядка приводится к задаче управления системой первого порядка. Исходная система содержит неопределенность, параметризованную в виде возмущения $d(t)$. Поэтому полученная после всех преобразований система первого порядка также будут содержать такое же возмущение. Для его компенсации предлагается с помощью реализуемого дифференциатора получить оценку возмущения и использовать ее с обратным знаком в управлении.

В разделе 4.1 рассматривается алгоритм вычисления оценки возмущения. В разделах 4.2 и 4.3 решается поставленная задача (3) при выполнении и нарушении допущения 2 соответственно.

4.1. ОЦЕНКА ВОЗМУЩЕНИЯ

Введем в рассмотрение динамические фильтры ($k > 0$ – параметр):

$$\begin{aligned} &\dot{x}_f(t) = k(x_n(t) - x_f(t)), \, x_f(t_0) = x_n(t_0), \\ &\dot{u}_f(t) = k(bu(t) - u_f(t)), \, u_f(t_0) = u(t_0) \end{aligned} \tag{7}$$

и на основании их состояний зададим оценку возмущения:

$$\hat{d}(t) = k(x_n(t) - x_f(t)) - u_f(t). \tag{8}$$

Тогда, дифференцируя $\hat{d}(t)$, в силу (7) и n-го уравнения системы, получаем:

$$\begin{aligned} &\dot{\hat{d}}(t) = k(bu(t) + d(t) - k(x_n(t) - x_f(t))) - \\ &-k(bu(t) - u_f(t)) = k(-k(x_n(t) - x_f(t)) + u_f(t)) + \\ &+kd(t) = -k\hat{d}(t) + kd(t) = -k\left(\hat{d}(t) - d(t)\right), \\ &\hat{d}(t_0) = -u(t_0), \end{aligned} \tag{9}$$

а значит, сигнал $\hat{d}(t)$ является фильтрованным возмущением, доступным для вычисления/измерения.

4.2. ОГРАНИЧЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ И ВЫХОДА ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ДОПУЩЕНИЯ 2

Введем замены

$$u(t) = \Phi_u(v), \tag{10a}$$

$$y(t) = \Phi_y(\varepsilon_y, t), \tag{10b}$$

где $v(t) \in \mathbb{R}$ – это фиктивное управление; $\Phi_u \colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ – гладкая аппроксимация функции насыщения на уровне $\pm u_{UB}$; $\Phi_y \colon \mathbb{R} \times [t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ удовлетворяет требованиям теоремы 1.

С учетом (10a) и (10b) система (1) принимает вид

$$\begin{aligned} &\dot{\varepsilon}_y(t) = \left(\frac{\partial \Phi_y(\varepsilon_y, t)}{\partial \varepsilon_y}\right)^{-1} \left(x_2(t) - \frac{\partial \Phi_y(\varepsilon_y, t)}{\partial t}\right), \\ &\vdots \\ &\dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t), \\ &\dot{x}_n(t) = b\Phi_u(v) + d(t). \end{aligned} \tag{11}$$

Теперь наша цель состоит в том, чтобы получить уравнение, более явно связывающее управление и переменную $\varepsilon_y(t)$. С этой целью и мотивируясь [9] применим к $\varepsilon_y(t)$ дифференциальный оператор $(s+\lambda)^{n-1}[.]$, $s{:}=\frac{d}{dt}$, $\lambda > 0$:

$$\sigma(t) = (s+\lambda)^{n-1}[\varepsilon_y(t)] = (s+\lambda)^{n-1}\left[\Phi_y^{-1}(y,t)\right],$$

где величина $\sigma(t)$ измеряема, поскольку может быть рассчитана по состояниям системы.

Дифференцируя переменную $\sigma(t)$ по времени, можем получить

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(t) &= \frac{\partial \Phi_y^{-1}(y,t)}{\partial y}\left[\dot{x}_n(t) + \epsilon(x_1,\ldots x_n,t)\right] = \\ &= \frac{\partial \Phi_y^{-1}(y,t)}{\partial y}\left[b\Phi_u(v) + d(t) + \epsilon(x_1,\ldots x_n,t)\right],\end{aligned} \tag{12}$$

где в слагаемом $\epsilon(x_1,\ldots x_n,t) := \epsilon(t)$ сосредоточены все остальные частные производные функции $\Phi_y^{-1}(y,t)$.

Поскольку $\varepsilon_y(t) = \frac{1}{(s+\lambda)^{n-1}}[\sigma(t)]$, $\lambda > 0$, то из ограниченности $\sigma(t)$ следует ограниченность $\varepsilon_y(t)$, а задача управления системой n-го порядка сведена к задаче управления системой первого порядка.

Стабилизацию переменной $\sigma(t)$ осуществим с помощью следующего сигнала:

$$v(t) = K\sigma(t) - b^{-1}\hat{d}(t), \tag{13}$$

в котором $K < 0$ и с обратным знаком используется вычисляемая на основании (7) оценка возмущения.

Для исследования закона управления (10a)+(13) рассмотрим представление нелинейной функции $\Phi_u(v)$ в виде линейной $\Phi_u(v) = \rho(v)v$ с нелинейным угловым коэффициентом $\rho(v)$ [2].

Тогда, с учетом равенства

$$\begin{aligned}\Phi_u(v) &= \Phi_u(v) \pm \rho(K\sigma)K\sigma(t) = \\ &= \rho(K\sigma)K\sigma(t) + \Phi_u(v) - \Phi_u(K\sigma),\end{aligned}$$

система (12) может быть представлена в следующем виде:

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{\partial \Phi_y^{-1}(y,t)}{\partial y}\left[b\rho(K\sigma)K\sigma(t) + \psi(t)\right], \tag{14}$$

где $\psi(t) := b\left[\Phi_u(v) - \Phi_u(K\sigma)\right] + d(t) + \epsilon(x_1,\ldots x_n,t)$.

Достаточные условия устойчивости системы (14) и достижения цели (3) сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. *Пусть выполнены допущения 1–2 и:*

УТ2.1 *для* $\Phi_y(\varepsilon_y, t)$ *выполнены* ***У1-У3*** *и* $\frac{\partial \Phi_y^{-1}(y,t)}{\partial y} > 0$ *для всех* $t \geqslant t_0$*;*

УТ2.2 *выполнены секторные условия:*

а) для всех $\sigma(t) \in \mathcal{S}$ *верно*

$$0 > \sup_{\sigma \in \mathcal{S}/0} (\rho(K\sigma) bK) \geqslant \rho(K\sigma) bK,$$

где $\mathcal{S} = \{\sigma(t) \in \mathbb{R}\colon\ |\sigma(t)| \leqslant \sigma_{max}\}$*;*

б) при $\sigma(t) = 0$ *верно* $\rho(K\sigma) bK\sigma(t) = b\Phi_u(K\sigma) = 0$*;*

УТ2.3 *для всех* $\sigma(t) \in \mathcal{S}$ *верно*

$$\psi(t) \in \Psi = \left\{\psi(t) \in \mathbb{R}\colon\ |\psi(t)| \leqslant \bar{\psi}\right\}.$$

Тогда если для некоторого $\delta \in \left(0, \left|\sup\limits_{\sigma \in \mathcal{S}/0} (\rho(K\sigma) bK)\right|\right)$ *верно*

$$\frac{-\overline{\psi}}{\sup\limits_{\sigma \in \mathcal{S}/0} (\rho(K\sigma) bK) + \delta} \leqslant \sigma_{max},$$

то закон (10a) + (13) *для всех* $\sigma(t_0) \in \mathcal{S}$ *обеспечивает* $u \in \mathcal{U}$, $y \in \mathcal{Y}$ *и* $\sigma(t) \in \mathcal{S}_\infty \subset \mathcal{S}$ *при* $t \to \infty$*, где*

$$\mathcal{S}_\infty = \left\{\sigma(t) \in \mathbb{R}\colon\ |\sigma(t)| \leqslant \sigma_{ssb} = \frac{-\overline{\psi}}{\sup\limits_{\sigma \in \mathcal{S}/0} (\rho(K\sigma) bK) + \delta}\right\}.$$

Доказательство. Доказательство теоремы приведено в приложении.

Теорема 2 позволяет построить алгоритм проверки выполнения цели (3) с помощью заданного закона управления:

Шаг 1. Выбрать коэффициент $K < 0$.

Шаг 2. Выбрать число $\sigma_{max} > 0$.

Шаг 3. По $\Phi_y(\varepsilon_y, t)$, $\Phi_u(v)$, $d(x, u, t)$ рассчитать *а*) $\sup\limits_{\sigma \in \mathcal{S}/0} (\rho(K\sigma) bK)$ и *б*) $\overline{\psi} > 0$.

Шаг 4. Выбрать $\delta_1 \in \left(0, \left|\sup\limits_{\sigma \in \mathcal{S}/0} \left(\rho\left(K\sigma\right) bK\right)\right|\right)$ и рассчитать параметр $\sigma_{1,ssb}$, задающий ограничение сверху на асимптотическое значение $\sigma\left(t\right)$. Если $\sigma_{1,ssb} \geqslant \sigma_{max}$, то выбрать $\delta_2 > 0$ так, что $\delta_1 > \delta_2 > 0$. Если $\sigma_{i,ssb} \geqslant \sigma_{max}$ при $i = 1{,}2,\ldots,N$, $N \to \infty$, то при заданных $\Phi_y\left(\varepsilon_y, t\right), \Phi_u\left(v\right), d\left(x, u, t\right)$ в области $\mathcal{S}$ достаточные условия устойчивости нарушены и следует вернуться на шаг 1 и перевыбрать параметр $K \in \mathbb{R}$ (увеличить по модулю) или вернуться на шаг 2 и перевыбрать параметр σ_{max} (уменьшить). Если $\sigma_{N,ssb} \leqslant \sigma_{max}$ для некоторого $N < \infty$, то закон управления (10a) + (13) обеспечивает достижение поставленной цели (3).

Проиллюстрируем функционирование предложенного алгоритма на примере.

Пример 1. Рассмотрим динамическую систему

$$\begin{aligned}&\dot{x}\left(t\right) = bu\left(t\right) + d\left(x, u, t\right),\\&d\left(x, u, t\right) = d_1 x\left(t\right) + d_0\left(t\right), b = 1,\end{aligned}$$

для которой заданы следующие целевые множества:

$$\mathcal{Y}\colon = \left\{y \in \mathbb{R}\colon -1 < y\left(t\right) < 1\right\}, \mathcal{U}\colon = \left\{u \in \mathbb{R}\colon \left|u\left(t\right)\right| \leqslant 1\right\}.$$

Для обеспечения $u \in \mathcal{U}$ и $y \in \mathcal{Y}$ зададим отображения

$$\Phi_y\left(\varepsilon_y, t\right) = \tfrac{e^{\varepsilon_y} - 1}{e^{\varepsilon_y} + 1}, \Phi_y^{-1}\left(y, t\right) = \ln\left(\tfrac{-1-y}{y-1}\right), \Phi_u\left(v\right) = \tfrac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}.$$

Для рассматриваемой системы верно $\sigma\left(t\right) = \varepsilon_y\left(t\right)$, а поэтому имеем:

$$\psi\left(t\right) = d_1 x\left(t\right) + d_0\left(t\right).$$

Шаг 1. Выберем $K = -1$.

Шаг 2. Поскольку $\sigma\left(t\right) = \varepsilon_y\left(t\right)$, то число σ_{max} примем равным максимальному значению функции $\varepsilon_y\left(t\right)$ на некотором подмножестве $\overline{\mathcal{Y}}$ множества $\mathcal{Y}$, т.е.

$$\sigma_{max} = \sup_{y \in \overline{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{Y}} \Phi_y^{-1}\left(y,t\right) =$$

$$= \sup_{y \in \overline{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{Y}} \ln\left(\frac{-1-y}{y-1}\right) \leqslant \ln\left(\frac{-1-0{,}9}{0{,}9-1}\right) \simeq 2{,}944.$$

Шаг 3. По имеющимся данным рассчитываем

$$\sup_{\sigma\in\mathcal{S}/0}\left(\rho\left(K\sigma\right)bK\right) = bK\inf_{\sigma\in\mathcal{S}/0}\left(\rho\left(K^{\top}\xi\right)\right) =$$
$$= bK\frac{\tanh\left(K\sigma_{max}\right)}{K\sigma_{max}} = -0{,}3377.$$

Для возмущения по теореме о среднем значении справедливо неравенство

$$|\psi\left(t\right)| = \left|d\left(t\right) + b\left(\Phi_u\left(v\right) - \Phi_u\left(K\sigma\right)\right)\right| = \left|d\left(t\right) - \underbrace{\tfrac{\partial\Phi_u(c)}{\partial c}}_{\leqslant L=0{,}5}\hat{d}\left(t\right)\right| =$$
$$= \left|\left(1 - \tfrac{\partial\Phi_u(c)}{\partial c}\right)d\left(t\right) - \tfrac{\partial\Phi_u(c)}{\partial c}\left(\hat{d}\left(t\right) - d\left(t\right)\right)\right| =$$
$$= \left|\left(1 - \tfrac{\partial\Phi_u(c)}{\partial c}\right)d\left(t\right) - \tfrac{\partial\Phi_u(c)}{\partial c}\tilde{d}\left(t\right)\right| \leqslant \left|d\left(t\right) - 0{,}5\tilde{d}\left(t\right)\right|,$$

где точка c располагается на отрезке, соединяющем точки $v\left(t\right)$ и $K\sigma\left(t\right)$, а ошибка $\tilde{d}\left(t\right)$, на основании (9), удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\tilde{d}}\left(t\right) = -k\tilde{d}\left(t\right) - \dot{d}\left(t\right),$$

а значит, и неравенству

$$\left|\tilde{d}\left(t\right)\right| \leqslant e^{-k(t-t_0)}\left|\tilde{d}\left(t_0\right)\right| + k^{-1}\sup_{t}\sup_{y\in\overline{\mathcal{Y}}\subset\mathcal{Y}}\dot{d}\left(t\right).$$

Предположим, что $k > 0$ выбрана так, что $d\left(t\right) \gg 0{,}5\tilde{d}\left(t\right)$ в $\overline{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{Y}$, а тогда для $|\psi\left(t\right)|$ на множестве $\mathcal{S}$ (эквивалентно на $\overline{\mathcal{Y}}$) имеем:

$$|\psi\left(t\right)| \leqslant |d\left(t\right)| = |d_1 x\left(t\right) + d_0\left(t\right)|.$$

Положим

а) $d_1 = 0$, $d_0\left(t\right) = 1{,}2$,

б) $d_1 = 0$, $d_0\left(t\right) = 0{,}95$.

Шаг 4. Выберем $\delta = 10^{-3}$, а тогда имеем:

а) $\frac{-\overline{\psi}}{\sup\limits_{\sigma\in\mathcal{S}/0}(\rho(K\sigma)bK)+\delta} = \frac{-1{,}2}{-0{,}3377+10^{-3}} = 3{,}5635 \geqslant \sigma_{max}$,

б) $\frac{-\overline{\psi}}{\sup\limits_{\sigma\in\mathcal{S}/0}(\rho(K\sigma)bK)+\delta} = \frac{-0{,}95}{-0{,}3377+10^{-3}} = 2{,}8211 \leqslant \sigma_{max}$.

Таким образом, согласно теореме 2, для а) достаточные условия устойчивости нарушены и закон управления (10а) + (13) может не обеспечивать достижение цели (3). С другой стороны, для б) достаточные условия выполнены и закон (10а) + (13) гарантирует (3).

На рис. 1 приведены результаты моделирования системы управления (10а) + (13) для ситуаций а) и б) при $k = 10$.

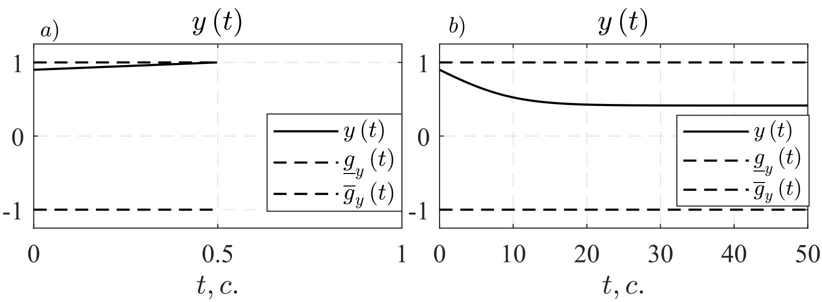

Рис. 1. Результаты моделирования системы управления (10а) + (13) *для ситуаций а) и б)*

Результаты моделирования иллюстрируют полученные теоретические выводы и демонстрируют, что для б) цель выполнена, а для а) условие (3) нарушается, выход $y(t)$ покидает целевое множество $\mathcal{Y}$, из-за чего происходит разрыв в сигнале $\varepsilon_y(t) = \Phi_y^{-1}(y, t)$, а моделирование не может быть продолжено для $t > 0{,}5$ с.

Таким образом, при выполнении всех предпосылок теоремы 2 предлагаемый закон управления (10а) + (13) с заданными параметрами гарантирует нахождение управления и выхода в заданных множествах при всех начальных условиях из допустимой области $\mathcal{S}$. Одним из основных ограничений подхода является необходимость формирования такого множества $\mathcal{Y}$, чтобы существовало управление из множества $\mathcal{U}$, позволяющее обеспечить $y \in \mathcal{Y}$. Вторым ограничением подхода, по мнению авторов, является вычислительная трудоемкость проверки условий теоремы 2 при $n \geqslant 2$. Однако из результатов теоремы 2 нетрудно получить следующее следствие.

***Следствие* 1.** *Для любого $K < 0$ существует допустимая область $\mathcal{S}$ и класс допустимых возмущений Ψ, таких, что $\mathcal{S}_\infty \subset \mathcal{S}$ и поставленная цель* (3) *выполнена.*

Это следствие несколько ослабляет второе ограничение подхода и позволяет использовать предлагаемый закон управления в практических задачах, грубо говоря, в предположении о том, что реализующееся возмущение в области $\mathcal{S}$ не нарушает условия устойчивости из теоремы 2.

***Замечание* 3.** Теорема 2 содержит лишь только достаточные условия устойчивости системы (14), поэтому их нарушение еще не означает нарушение условий (3).

***Замечание* 4.** Из доказательства теоремы 2 и вида правой части системы (14) может сложиться впечатление, что роль компенсационной компоненты закона управления (13) незначительна. Однако в действительности, как видно из примера 1, компенсационная компонента позволяет уменьшить $\overline{\psi}$, а следовательно условия теоремы могут оказаться выполнены в более широком множестве $\mathcal{S}$.

***Замечание* 5.** Как следует из определения углового коэффициента $\rho\,(v)$, для любого $\overline{\psi} < \infty$ обеспечить выполнение условия $\mathcal{S}_\infty \subset \mathcal{S}$ возможно путем совместного увеличения K и u_{UB}. В частности, при $u_{UB} \to \infty$ (т.е. в отсутствие ограничений на управление) для любого $\overline{\psi} < \infty$ найдется K такое, что $\mathcal{S}_\infty \subset \mathcal{S}$ и поставленная цель выполнена.

4.3. ОГРАНИЧЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ И ВЫХОДА ПРИ НАРУШЕНИИ ДОПУЩЕНИЯ 2

Согласно результатам теоремы 2, поставленная цель (3) достижима при $\frac{\partial \Phi_y^{-1}(y,\,t)}{\partial y} > 0$ для всех $t \geqslant t_0$. Выполнение этого неравенства зависит от удовлетворения допущения 2, выбранных параметров $K < 0$, $k > 0$ и начальных условий. Если допущение 2 не выполняется, то это неравенство не может быть выполнено для всех $t \geqslant t_0$ независимо от параметров управления и начальных условий, а поставленная цель недостижима: для $y \in \mathcal{Y}$ необходим больший ресурс управления u_{UB}. Более того, при $y \in \mathbb{R} \backslash \mathcal{Y}$ в сигнале управления возможны сингулярности, вызванные разрывами в сигнале $\varepsilon_y(t) = \Phi_y^{-1}(y, t)$, используемом в управлении.

Очевидное решение этих проблем – это перевыбор $\underline{g}_y(t), \overline{g}_y(t)$ в определении множества $\mathcal{Y}$, т.е. изменение цели управления на достижимую с учетом имеющегося ресурса управления. Однако удержать регулируемый выход в множестве $\mathcal{Y}$ может быть невозможно только на коротких интервалах времени, соответствующих интервалам насыщения управления. Поэтому рационально вместо глобального изменения целевого множества выполнять его расширение на этих интервалах.

Для реализации этой идеи введем в рассмотрение расширенное множество:

$$\mathcal{Y}_e := \left\{ y \in \mathbb{R} \colon \underline{g}_y(t) - \eta_e(t) < y(t) < \overline{g}_y(t) + \eta_e(t) \right\}, \tag{15}$$

где $\eta_e(t)$ – сигнал расширения.

Мотивируясь результатами работ [12, 14, 20, 23, 24, 28, 30, 31], сигнал расширения зададим следующим образом:

$$\dot{\eta}_e(t) = \tfrac{1}{\tau}\left(\mu s(t) - \eta_e(t)\right), \; \eta_e(t_0) = 0, \tag{16}$$

где

$$s(t) = \left| \mathrm{sat}\big|_{-u_{UB}+\Delta}^{u_{UB}-\Delta} \{u(t)\} - \mathrm{sat}\big|_{-u_{UB}+2\Delta}^{u_{UB}-2\Delta} \{u(t)\} \right|,$$

и $\tau > 0$ – постоянная времени фильтра; $\mathrm{sat}|_{-u_{UB}+\Delta}^{u_{UB}-\Delta} \{u(t)\}$, $\mathrm{sat}|_{-u_{UB}+2\Delta}^{u_{UB}-2\Delta} \{u(t)\}$ – функции насыщения на уровнях $\pm(u_{UB} - \Delta)$ и $\pm(u_{UB} - 2\Delta)$ соответственно; $\mu > 0$ – эмпирический коэффициент пропорциональности между $\Delta > 0$ и необходимой величиной расширения множества $\mathcal{Y}$ (чем больше $\mu > 0$, тем сильнее $\mathcal{Y}_e$ отличается от $\mathcal{Y}$ на интервалах насыщения управления).

Для пояснения механизма расширения введем множества $\mathcal{U}_{2\Delta} \subset \mathcal{U}_{\Delta} \subset \mathcal{U}$:

$$\mathcal{U}_{2\Delta} \colon = \{u \in \mathbb{R} \colon \left|u\left(t\right)\right| \leqslant u_{UB} - 2\Delta\},$$
$$\mathcal{U}_{\Delta} \colon = \{u \in \mathbb{R} \colon \left|u\left(t\right)\right| \leqslant u_{UB} - \Delta\}.$$

Если $u \in \mathcal{U}_{2\Delta}$, то $s\left(t\right) = 0, \eta_e\left(t\right) = 0$ и множество $\mathcal{Y}$ не подвергается расширению. Если $u \in \mathcal{U}_{\Delta}$ или $u \in \mathcal{U} \backslash \mathcal{U}_{\Delta}$, то $0 < s\left(t\right) \leqslant \Delta$ и имеем $0 < \eta_e\left(t\right) \leqslant \mu\Delta$. Таким образом, в целом получаем, что $\mathcal{Y}_e$ совпадает (асимптотически) с $\mathcal{Y}$ на интервалах, когда $\left|u\left(t\right)\right| < \left(u_{UB} - 2\Delta\right)$, и отличается (асимптотически), когда ресурса управления оказывается недостаточно. Поскольку $y\left(t_0\right) \in \mathcal{Y}$ и $u\left(t_0\right) \in \mathcal{U}$ (допущение 1), то по определению $s\left(t\right)$ и при достаточно малом $\tau > 0$ расширение целевого множества происходит раньше, чем выполнение условий $y \in \partial\mathcal{Y}$ или $u \in \partial\mathcal{U}$ (при $\tau \to 0$ имеем $\eta_e\left(t\right) = 0$, если $u \in \mathcal{U}_{2\Delta}$, и $\eta_e\left(t\right) = \mu\Delta$, если $u \in \mathcal{U} \backslash \mathcal{U}_{2\Delta}$). На основании результатов теоремы 2 цель $y \in \mathcal{Y}_e$ и $u \in \mathcal{U}$ обеспечивает закон управления (10a)+(13) с той лишь только разницей, что в **У1** преобразование $\Phi_y\left(\varepsilon_y, t\right)$ должно удовлетворять условию

$$\underline{g}_y\left(t\right) - \eta_y\left(t\right) < \Phi\left(\varepsilon_y, t\right) < \overline{g}_y\left(t\right) + \eta_y\left(t\right),$$

а не $\underline{g}_y\left(t\right) < \Phi\left(\varepsilon_y, t\right) < \overline{g}_y\left(t\right)$.

Недостатком предложенного алгоритма расширения является консерватизм, связанный с возможностью настройки только на два режима ($\eta_e\left(t\right) = 0$ и $\eta_e\left(t\right) \to \mu\Delta$).

Замечание 6. Вообще говоря, коэффициент τ в (16) не может бы произвольным. Его значение должно быть меньше числа $\kappa^{-1} > 0$, где κ – это максимальная скорость расхождения выхода: $\left\|y\left(t\right)\right\| \leqslant Me^{\kappa(t-t_0)}$. Выполнение такого условия гарантирует расширение целевого множества раньше, чем выход системы попадет на границу целевого множества.

Замечание 7. Сигнал $\epsilon\left(t\right)$ в (12) зависит от производных сигнала расширения $\eta_e\left(t\right)$. Начиная со второй, такие производные могут быть неограничены из-за негладкости величины $s\left(t\right)$.

С практической точки зрения это не является проблемой, поскольку точки разрыва (почти всегда) составляют множество меры нуль. Однако для формальной корректности результатов теоремы 2 необходимо в (16) вместо sat-функции использовать ее допредельные гладкие аппроксимации.

5. Численные эксперименты

Рассмотрим систему второго порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= bu + d, \\ y &= x_1. \end{aligned} \tag{17}$$

Придадим состояниям в (17) следующий смысл. Будем считать, что $x_1(t) := \xi_1(t) - r(t)$ – это ошибка слежения некоторой физической величиной $\xi_1(t)$ за дифференцируемым задающим воздействием $r(t)$. Именно в такой постановке может быть решено большое число задач управления на практике. В этом случае возмущение $d(t)$ обязательно содержит слагаемое $\ddot{r}(t)$.

Множества $\mathcal{U}$ и $\mathcal{Y}$ зададим следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mathcal{U} := \{u \in \mathbb{R}\colon\ |u(t)| \leqslant 1\}, \\ &\mathcal{Y} := \{y \in \mathbb{R}\colon\ -0{,}25 - \eta_y(t) < y(t) < 0{,}25 + \eta_y(t)\}. \end{aligned}$$

Таким образом, множества $\mathcal{U}$ и $\mathcal{Y}$ формализуют следующее инженерное *техническое задание*: при выполнении допущения 2 с помощью управления $u(t)$, не превосходящего по модулю единицу, обеспечить слежение переменной $\xi_1(t)$ за дифференцируемым заданием $r(t)$ с динамической ошибкой $x_1(t)$, по модулю не превосходящей $0{,}25$.

Для обеспечения $y \in \mathcal{Y}$ и $u \in \mathcal{U}$ зададим отображения

$$\begin{gathered} \Phi_y(\varepsilon_y, t) = \tfrac{(0{,}25+\eta_y)e^{\varepsilon_y} - 0{,}25 - \eta_y}{e^{\varepsilon_y}+1},\ \Phi_u(v) = \tfrac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}, \\ \Phi_y^{-1}(y, t) = \ln\left(\tfrac{-1-4\eta_y-4y}{4y-4\eta_y-1}\right),\ \tfrac{\partial \Phi_y^{-1}(y,\,t)}{\partial y} = \tfrac{32\eta_y+8}{(4\eta_y+1)^2-16y^2}, \\ \tfrac{\partial^2 \Phi_y^{-1}(y,\,t)}{\partial y \partial y} = \tfrac{256y(4\eta_y+1)}{((4\eta_y+1)^2-16y^2)^2}. \end{gathered}$$

Скалярная переменная $\sigma(t)$ в рассматриваемом случае может быть вычислена по следующей формуле:

$$\sigma(t) = (s+\lambda)\left[\Phi_y^{-1}(y,t)\right] = \frac{\partial\Phi_y^{-1}(y,t)}{\partial y}x_2 + \frac{\partial\Phi_y^{-1}(y,t)}{\partial t} +$$
$$+\lambda\Phi_y^{-1}(y,t) = \frac{\partial\Phi_y^{-1}(y,t)}{\partial y}x_2 + \lambda\varepsilon_y(t)$$

и описывается дифференциальным уравнением (14), в котором

$$\epsilon(x_1,x_2,t) = \left(\frac{\partial\Phi_y^{-1}(y,t)}{\partial y}\right)^{-1}\frac{\partial^2\Phi_y^{-1}(y,t)}{\partial y\partial y}x_2 + \lambda x_2.$$

Параметры системы и закона управления выберем следующим образом:

$$b = 1,\ \lambda = 1,\ K = -1,\ k = 10,$$
$$r(t) = 0,\ x_1(t_0) = -0{,}2,\ x_2(t_0) = 0,$$
$$d(t) = \begin{cases} -0{,}1u - 0{,}5x_1 + 0{,}4\sin(0{,}5\pi t) + 0{,}8,\ \forall t \leqslant 15, \\ 0{,}8\left(-0{,}1u - 0{,}5x_1 + 0{,}4\sin(0{,}5\pi t) + 0{,}8\right),\ \forall t \geqslant 15. \end{cases}$$

На рис. 2 приведены переходные процессы по $u(t)$, $y(t)$ при $\eta_y(t) = 0$ и $\eta_y(t) := (16)$, где $\mu = 300$, $\tau = 2$, $\Delta = 0{,}005$.

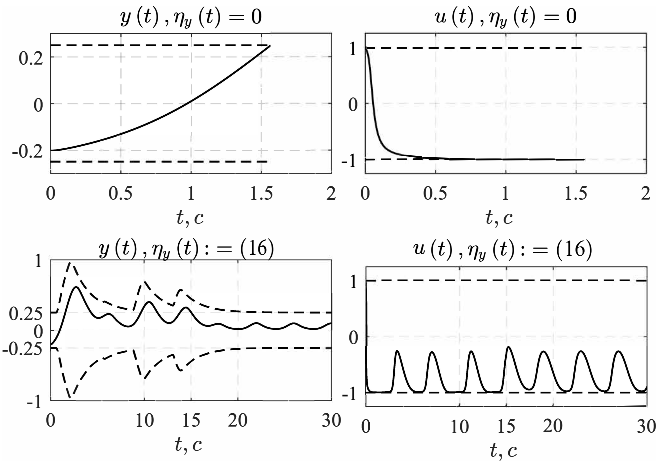

Рис. 2. Переходные процессы по $u(t)$, $y(t)$ при $\eta_y(t) = 0$ и $\eta_y(t)$, формируемом согласно (16)

При использовании $\eta_y(t) = 0$ из-за дефицита ресурса управления в момент времени $t = 1{,}6$ выход $y(t)$ покидает целевое множество $\mathcal{Y}$, из-за чего происходит разрыв в сигнале

$\varepsilon_y(t) = \Phi_y^{-1}(y, t)$, а моделирование не может быть продолжено для $t > 1{,}6$ с. С другой стороны, при использовании $\eta_y(t) := (16)$ за счет расширения целевого множества удалось обеспечить $y \in \mathcal{Y}$ для всех $t \geqslant 0$ и тем самым устранить разрыв в сигнале $\varepsilon_y(t) = \Phi_y^{-1}(y, t)$. Заметим, что после уменьшения амплитуды возмущения в момент времени $t = 15$ ресурса управления становится достаточно и расширенное множество совпадает с исходным.

6. Заключение

На основе результатов [1, 3, 15] для класса одномерных систем, имеющих произвольную относительную степень и устойчивую внутреннюю динамику, предложен простой закон управления, позволяющий обеспечить компенсацию параметрической неопределенности и сигнальных возмущений совместно с нахождением регулируемой переменной и управления в заданных множествах. Достоинством подхода является сохранение устойчивости системы при дефиците ресурса управления и нарушении допущения 2. Недостатком подхода является трудоемкость априорной проверки условий устойчивости из теоремы 2 при $n \geqslant 2$. Однако значимость этого недостатка несколько снижается благодаря следствию из теоремы 2. Теоретические результаты работы могут быть рекомендованы к практическому использованию, например, в задачах управления пространственными и угловыми координатами твердых тел (см. замечание 1).

Приложение

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим квадратичную форму

$$V = \tfrac{1}{2}\sigma^2.$$

Производная V в силу **УТ2.1-УТ2.3** удовлетворяет неравенству

$$\dot{V} \leqslant \tfrac{\partial \Phi_y^{-1}(y,\, t)}{\partial y} \left[\sup_{\sigma \in \mathcal{S}/0} \left(\rho\left(K\sigma\right) bK\right) \sigma^2 + |\sigma|\, \overline{\psi} \right],$$

где при любом $0 > \sup\limits_{\sigma \in \mathcal{S}/0} \left(\rho\left(K\sigma\right) bK\right)$ и всех $\sigma\left(t\right) \in \mathcal{S}/\mathcal{S}_\infty$ верно

$$\dot{V} \leqslant -\delta \frac{\partial \Phi_y^{-1}(y,t)}{\partial y} \sigma^2 < 0,$$

и при $\sigma\left(t\right) \in \mathcal{S}_\infty$ верно

$$\dot{V} \geqslant 0,$$

а тогда, если справедливо включение $\mathcal{S}_\infty \subset \mathcal{S}$, то имеем $\sigma\left(t\right) \in \mathcal{S}$ для всех $t \geqslant t_0$ и $\sigma\left(t\right) \in \mathcal{S}_\infty$ при $t \to \infty$ [4]. Поскольку $\varepsilon_y\left(t\right) = \frac{1}{(s+\lambda)^{n-1}}\left[\sigma\left(t\right)\right]$, $\lambda > 0$, то в этом случае переменная $\varepsilon_y\left(t\right)$ ограничена. Из ограниченности $\varepsilon_y\left(t\right)$ по теореме 1 следует выполнение условия $y \in \mathcal{Y}$. С другой стороны, по определению (10а) имеем $u \in \mathcal{U}$. Следовательно, поставленная цель (3) выполнена.

Литература

1. ФУРТАТ И.Б., ГУЩИН П.А. *Управление динамическими объектами с гарантией нахождения регулируемого сигнала в заданном множестве* // Автоматика и телемеханика. – 2021. – №4. – С. 121–139.
2. ФУРТАТ И.Б., ГУЩИН П.А., КОПЫСОВА Е.А. *Нелинейные законы управления, построенные на базе линейных с использованием нечетных функций* // Управление большими системами. – 2023. – Вып. 102. – С. 58–75.
3. ФУРТАТ И.Б., ГУЩИН П.А., НГУЕН Б.Х. *Управление динамическими системами при ограничениях на входные и выходные сигналы* // Автоматика и телемеханика. – 2023. – №4. – С. 45–63.
4. ХАЛИЛ Х.К. *Нелинейные системы*. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. – 830 с.
5. ЦЫКУНОВ А.М. *Робастное управление с компенсацией возмущений*. – М.: Физматлит, 2012. – 300 с.
6. BECHLIOULIS C.P., THEODORAKOPOULOS A., ROVITHAKIS G.A. *Output feedback stabilization with prescribed performance for uncertain nonlinear systems*

in canonical form // Proc. of the 52nd IEEE Conf. on Decision and Control. – Florence: IEEE, 2013. – P. 5084–5089.

7. BECHLIOULIS C.P., ROVITHAKIS G.A. *Adaptive control with guaranteed transient and steady state tracking error bounds for strict feedback systems* // Automatica. – 2009. – Vol. 45, No. 2. – P. 532–538.
8. BECHLIOULIS C.P., ROVITHAKIS G.A. *A low-complexity global approximation-free control scheme with prescribed performance for unknown pure feedback systems* // Automatica. – 2014. – Vol. 50, No. 4. – P. 1217–1226.
9. BECHLIOULIS C.P., ROVITHAKIS G.A. *Prescribed performance adaptive control of SISO feedback linearizable systems with disturbances* // Proc. of 16th Mediterranean Conf. on Control and Automation. – Corsica: IEEE, 2008. – P. 1035–1040.
10. BECHLIOULIS C.P., ROVITHAKIS G.A. *Robust adaptive control of feedback linearizable MIMO nonlinear systems with prescribed performance* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2008. – Vol. 53, No. 9. – P. 2090–2099.
11. BECHLIOULIS C.P., ROVITHAKIS G.A. *Robust partial-state feedback prescribed performance control of cascade systems with unknown nonlinearities* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2011. – Vol. 56, No. 9. – P. 2224–2230.
12. BIKAS L.N., ROVITHAKIS G.A. *Prescribed performance under input saturation for uncertain strict-feedback systems: A switching control approach* // Automatica. – 2024. – Vol. 165. – P. 111663.
13. BU X. *Prescribed performance control approaches, applications and challenges: A comprehensive survey* // Asian Journal of Control. – 2023. – Vol. 25, No. 1. – P. 241–261.
14. FOTIADIS F., ROVITHAKIS G.A. *Input-constrained prescribed performance control for high-order mimo uncertain nonlinear systems via reference modification* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2024. – Vol. 69, No. 5. – P. 3301–3308.
15. FURTAT I.B., GUSHCHIN P.A., NGUYEN B.H. *Nonlinear*

control providing the plant inputs and outputs in given sets // European Journal of Control. – 2024. – Vol. 76. – P. 100944.

16. GLUSHCHENKO A., LASTOCHKIN K., ABRAMENKOV A. et al. *Robust Attitude Control of Underwater Unmanned Vehicle with Estimation and Compensation of Matched Uncertainty* // Proc. of the 5th Int. Conf. on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). – Lipetsk: IEEE, 2023. – P. 58–63.
17. GLUSHCHENKO A., LASTOCHKIN K. *Neural network-based direct model reference adaptive control of quadrotor attitude* // Proc. of the 16th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). – Moscow: IEEE, 2022. – P. 1–4.
18. GLUSHCHENKO A., LASTOCHKIN K. *Neural Network Based Parameter Uncertainty Compensation to Solve Quadrotor Trajectory Tracking Problem* // Proc. of the 4th Int. Conf. on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). – Lipetsk: IEEE, 2022. – P. 443–448.
19. ISIDORI A. *Nonlinear control systems: an introduction*. – Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1985. – 312 p.
20. JI R., LI D., MA J. et al. *Saturation-tolerant prescribed control of MIMO systems with unknown control directions* // IEEE Trans. on Fuzzy Systems. – 2022. – Vol. 30, No. 12. – P. 5116–5127.
21. SUN K., QIU J., KARIMI H.R. et al. *A novel finite-time control for nonstrict feedback saturated nonlinear systems with tracking error constraint* // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics: Systems. – 2019. – Vol. 51, No. 6. – P. 3968–3979.
22. TORNAMBE A. *High-gain observers for non-linear systems* // Int. Journal of Systems Science. – 1992. – Vol. 23, No. 9. – P. 1475–1489.
23. TRAKAS P.S., BECHLIOULIS C.P. *Adaptive Performance Control for Input Constrained MIMO Nonlinear Systems* // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics: Systems. –

2024. – P. 1–8. Early Access.

24. TRAKAS P.S., BECHLIOULIS C.P. *Approximation-free adaptive prescribed performance control for unknown SISO nonlinear systems with input saturation* // Proc. of the 61st Conf. on Decision and Control (CDC). – Cancun: IEEE, 2022. – P. 4351–4356.
25. UTKIN V., POZNYAK A., ORLOV Y.V. et al. *Road map for sliding mode control design*. – Berlin/Heidelberg, Germany: Springer International Publishing, 2020. – 127 p.
26. WEI C., CHEN Q., LIU J. et al. *An overview of prescribed performance control and its application to spacecraft attitude system* // Proc. of Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering. – 2021. – Vol. 235, No. 4. – P. 435–447.
27. WEN C., ZHOU J., LIU Z. et al. *Robust adaptive control of uncertain nonlinear systems in the presence of input saturation and external disturbance* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2011. – Vol. 56, No. 7. – P. 1672–1678.
28. XIE H., JING Y., DIMIROVSKI G.M. et al. *Adaptive fuzzy prescribed time tracking control for nonlinear systems with input saturation* // ISA Trans. – 2023. – Vol.143. – P. 370–384.
29. YANG Y., TAN J., YUE D. *Prescribed performance tracking control of a class of uncertain pure-feedback nonlinear systems with input saturation* // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics: Systems. – 2018. – Vol. 50, No. 5. – P. 1733–1745.
30. YAO Y. ET AL. *Flexible prescribed performance output feedback control for nonlinear systems with input saturation* // IEEE Trans. on Fuzzy Systems. – 2024. – P. 1-10. Early Access.
31. YONG K., CHEN M., SHI Y. et al. *Flexible performance-based robust control for a class of nonlinear systems with input saturation* // Automatica. – 2020. – Vol. 122. – P. 109268.
32. ZHENG Z., FEROSKHAN M. *Path following of a surface vessel with prescribed performance in the presence of input saturation and external disturbances* // IEEE/asmE Trans. on Mechatronics. – 2017. – Vol. 22, No. 6. – P. 2564–2575.

33. ZHOU J., WEN C. *Robust adaptive control of uncertain nonlinear systems in the presence of input saturation* // IFAC Proc. Volumes. – 2006. – Vol. 39, No. 1. – P. 149–154.

PLACEMENT OF INPUT AND OUTPUT IN GIVEN SETS FOR ONE CLASS OF SYSTEMS

Anton Glushchenko, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Dr.Sc., Docent, Leading Researcher (aiglush@ipu.ru).
Konstantin Lastochkin, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Junior Researcher, postgraduate student (lastconst@ipu.ru).

Abstract: In [3, 15], a control method providing the nonlinear plant inputs and outputs in given sets is proposed. The main theorems of these studies are valid for SISO and MIMO systems with arbitrary relative degree. However, constructive algorithms for control law design are proposed for systems with unit relative degree only. In this study, the above-mentioned results are extended to a class of SISO systems with arbitrary relative degree and stable internal dynamics. For such a class of systems, a new control law providing the plant inputs and outputs in given sets is proposed that ensures compensation of both parametric uncertainty and exogeneous perturbation. In such a solution, the control signal boundedness is guaranteed explicitly by using a smooth nonlinearity in the control law, which prelimitly approximates the saturation function, and when the control signal amplitude is not enough to keep the system output in a given set, the proposed solution dynamically changes the given set for the system output, which allows one to avoid the feedback signal discontinuities. The theoretical results are validated via numerical experiments and can be applied, for example, to control position and Euler angles of solid bodies.

Keywords: predefined performance, given input and output sets, control saturation, disturbance rejection, stability.

УДК 519.7
ББК 15.21

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии И.Б. Фуртатом.

Поступила в редакцию 21.11.2024.
Дата опубликования 31.01.2025.