

## ВЛИЯНИЕ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ НА ИНТЕГРАЛЬНЫЙ РИСК СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ РИСКА В СЛУЧАЕ ЗВЕЗДООБРАЗНОЙ СТРУКТУРЫ

Широкий А. А.<sup>1</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Работа посвящена исследованию влияния структуры сложной системы на ее интегральный риск. При решении задач управления рисками часто возникает необходимость учесть структурные эффекты, к каковым чаще всего относят перенос риска и распространение отказов. В настоящем исследовании обсуждается влияние положения элементов защищаемой системы внутри фиксированной звездообразной структуры на ее интегральный риск. Показано, что задача оптимального с точки зрения минимизации риска размещения элементов в такой структуре не может быть точно решена эвристическими методами. Предложен алгоритм ее решения с ограниченной погрешностью. Для случая равенства ожидаемых ущербов при успешной атаке элемента системы рассчитаны верхние оценки относительной погрешности решения задачи оптимального размещения элементов системы при использовании предложенного алгоритма, а также предложена методика быстрой оценки рисков для систем со звездообразной структурой. Наконец, для частного случая, когда риски элементов находятся в определенном соотношении, найдено точное решение задачи оптимального размещения элементов. Полученные результаты будут в дальнейшем использованы для решения аналогичной задачи в более сложных структурах — в частности, древовидных, — с последующим обобщением на случай сложных сетей произвольной топологии.*

Ключевые слова: сложные системы, риск, структура системы, управление рисками, алгоритмы минимизации риска, задача оптимального размещения элементов.

### 1. Введение

Многие сложные системы реального мира, такие как электросети, Интернет, транспортные сети и сети сложных информационных систем, проявляют при случайных сбоях или преднамеренных атаках свойства, обусловленные их структурой. Для описания этих свойств исследователи часто используют модели

<sup>1</sup> Александр Александрович Широкий, к.ф.-м.н., с.н.с. ([shiroky@ipu.ru](mailto:shiroky@ipu.ru)).

управления рисками на основе сложных сетей. При этом можно сфокусироваться как на структуре системы в целом, так и на количественных оценках рисков и (или) ожидаемых потерь при наступлении неблагоприятного события неопределенности. Также следует отметить, что эти явления могут рассматриваться как в статике, так и в динамике. В таблице 1 представлена классификация структурных свойств и перечислены применяемые при их изучении модели и методы.

*Таблица 1. Модели и методы исследования свойств, обусловленных структурой сложной системы, проявляемых при случайных сбоях или преднамеренных атаках*

	Статический подход	Динамический подход
Свойства сложной сети	Топологические метрики Статистические метрики	Синхронизация Консенсус
Оценка рисков и убытков	Надежность Уязвимость	Каскадные сбои

При рассмотрении собственных свойств сети в статике предметом исследования является изменение ее свойств при удалении вершин или ребер. Для описания свойств используются различные топологические или статистические метрики. Среди первых наиболее часто используются показатели центральности (центральность по степени, посредничеству, близости или собственному вектору [16, 22, 26]), эффективности (характеристическая длина пути [4, 7, 21]) и кластеризации (коэффициент кластеризации [23, 30, 34]). Среди вторых часто встречается самоорганизующаяся критичность [6, 13, 32].

При динамическом подходе обычно изучаются явления сходимости траекторий узлов (синхронизация [11, 24, 35], консенсус [5, 17, 33]), а также инструменты управления ими [12, 27, 28].

В случае изучения сложных сетей, отражающих реальные объекты, появляется потребность в количественной оценке ущерба, возникающего в результате реализации неблагоприятного события неопределенности. При рассмотрении сети в статике к таковым относятся надежность и уязвимость [9, 12, 29]. Надежность показывает, в какой степени сеть способна противостоять тако-

му событию без ухудшения ее производительности. Уязвимость, в свою очередь, определяется как способность сети непрерывно функционировать при случайных сбоях или преднамеренных атаках.

Рассмотрение сети в динамике предполагает изучение сценария, когда нарушение функционирования одного узла приводит к снижению надежности и повышению уязвимости связанных узлов. Последовательный отказ нескольких узлов может вызвать каскадный сбой [14, 20, 31].

Связанным классом задач являются задачи распределения ресурса для управления рисками. Как правило, их формулировки являются вариациями классической задачи торга (Nash bargaining problem, [18]). Базовые концепции ее решения были сформированы самим Нэшем [19], позднее было получено монотонное решение на основе альтернативной системы аксиом [15]. Эти решения с разнообразными модификациями применяются для управления рисками и сегодня (см., например, [2, 10]).

Схожий аксиоматический подход можно применить для анализа рисков в динамической системе. При этом, как правило, задача тем или иным способом сводится к статической. Например, в работе [8] решается задача управления экономическими рисками для конечного множества предприятий при различных сценариях. В работе [1] решается задача управления рисками в сложной системе с заданным взаимным влиянием элементов с помощью анализа сходящихся многошаговых когнитивных игр. Тем не менее подобные вышеприведенным работы встречаются крайне редко. Причиной этого, по всей видимости, является трудоемкость синтеза алгоритмов решения, обеспечивающих монотонность, т.е. гарантирующих, что выделение ресурса для снижения риска одного элемента не приведет к увеличению значения риска для другого элемента вследствие влияния структуры.

Настоящая работа посвящена исследованию влияния положения элементов защищаемой системы в заданной структуре на интегральный риск системы. В предшествующих работах [3, 25] исследовались простые цепные структуры. Здесь обсуждаются

более сложные звездообразные структуры с одновершинным периметром. Главным результатом работы является алгоритм решения задачи псевдо-оптимального размещения элементов защищаемой системы в структуре типа «звезда с  $t$  лучами» с элементами равной «стоимости» (иными словами, величины ожидаемого ущерба для всех элементов системы полагаются равными).

Структура изложения материала в работе следующая. В разделе 2 вводятся необходимые определения и формулируется общая постановка задачи. Раздел 3 содержит обсуждение нескольких возможных эвристических подходов к ее решению в частном случае равенства ущербов и контрпримеры к ним. В разделе 4 предложен ряд разумных с точки зрения практики ограничений, позволяющих получить приближенное к оптимальному решение для случая элементов с равными ущербами. Верхние оценки погрешности решения строятся в разделе 5. В разделе 6 предложена методика быстрой оценки рисков систем со звездообразной структурой. Наконец, в разделе 7 приведено точное решение для случая, когда ожидаемые ущербы элементов различны, но их риски находятся в некотором заданном соотношении.

## 2. Постановка задачи

Предположим, что защищаемая система включает в себя  $n$  элементов (объектов произвольной природы)

$$s_1, \dots, s_n \in S, n \in \mathbb{N}.$$

Предположим также, что каждому элементу поставлены в соответствие два числа:

$p_i^0 \in (0, 1]$  – удельная вероятность успешной атаки  $i$ -го элемента;

$u_i > 0, u \in \mathbb{R}^+$  – ущерб, который будет нанесен, если  $i$ -й элемент будет успешно атакован.

Определение 1. Удельным локальным риском  $i$ -го элемента назовем величину

$$\rho_{s_i}^0 = u_i p_i^0.$$

Зададим структуру

$$W = \langle G(V, E), T \rangle, T \subseteq V,$$

где  $G(V, E)$  – ориентированный граф со множеством вершин  $V$  и множеством дуг  $E$ , а  $T$  – подмножество  $V$ , называемое периметром. В настоящей работе рассматриваются структуры с периметром, включающим в себя ровно одну вершину.

Будем считать, что заданная структура ограничивает возможности атакующего по выводу из строя элементов системы: любая атака должна начинаться с узла-периметра, а последующие атакуемые элементы – быть достижимыми из него (иначе говоря, должен существовать простой путь, соединяющий вершину-периметр с целевой вершиной, причем все входящие в него вершины, за исключением целевой, должны быть успешно атакованы).

Определение 2. Структурой типа «звезда с  $m$  лучами» будем называть такую структуру  $W_m = \langle G(V, E), T \rangle$ , что

$$V = \left\{ \{v_0\} \cup \bigcup_{b=1}^m \bigcup_{l=1}^{l_b} \{v_{bl}\} \right\},$$

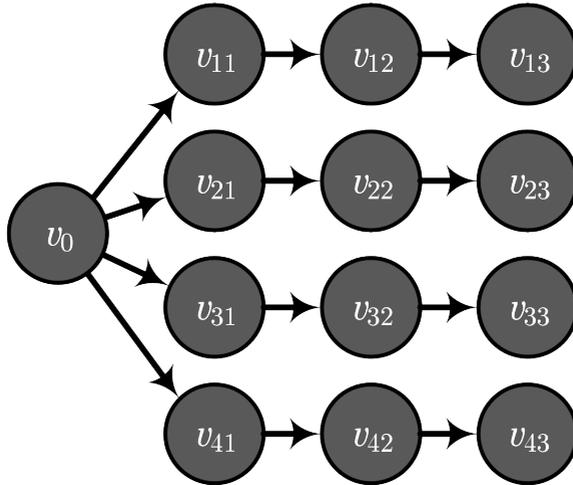
$$E = \left\{ \bigcup_{b=1}^m \left\{ (v_0, v_{b1}) \cup \bigcup_{l=2}^{l_b} (v_{b(l-1)}, v_{bl}) \right\} \right\},$$

$$T = \{v_0\}.$$

Здесь  $l_b \in \mathbb{N}$  – число вершин в  $b$ -м луче, представляющем собой простую цепь с началом в вершине  $v_{b1}$ . Для всех таких вершин периметр  $v_0$  является смежной вершиной. В общем случае  $l_b$  не ограничены. На рис. 1 приведен пример звездообразной структуры с четырьмя лучами длины 3 каждый.

Определение 3. Если для структуры атаки  $W_m = \langle G(V, E), T \rangle$  существует взаимно однозначное отображение  $M : V \rightarrow S$ , то будем называть его отображением структуры  $W_m$  на множество  $S$ .

*Определение 4.* Взаимно однозначное отображение  $M^{-1} : S \rightarrow V$ , обратное ранее определенному отображению  $M : V \rightarrow S$ , будем называть размещением элементов  $S$  в структуре  $W_m$ .



*Рис. 1.* Звездообразная структура с четырьмя лучами, каждый из которых имеет длину 3

Заметим, что критерием существования такого отображения будет являться совпадение числа вершин в графе  $G(V, E)$  с числом  $n$  элементов защищаемой системы. Если число вершин бесконечно, то множество  $S$  должно быть счетным.

*Определение 5.* Локальным риском элемента защищаемой системы, размещенного в вершине  $v_{bl}$  структуры типа «звезда с  $t$  лучами», будем называть величину

$$\rho_{M(v_{bl})} = u_{M(v_{bl})} \prod_{v \in \langle v_0, v_{bl} \rangle} p_{M(v)},$$

где  $\langle v_0, v_{bl} \rangle$  – простой путь, соединяющий вершину-периметр  $v_0$  с вершиной  $v_{bl}$ .

Локальный риск элемента, размещенного в вершине  $v_0$ , равен его удельному локальному риску. Отметим, что в рассматри-

ваемом случае простой путь всегда существует и является единственным.

Определение 6. *Интегральным риском системы со множеством защищаемых элементов  $S$ , размещенным в структуре атаки типа «звезда с  $m$  лучами»  $W_m$  с помощью взаимно однозначного отображения  $M^{-1} : S \rightarrow W_m$ , будем называть величину*

$$\rho(S, W_m, M^{-1}) = \rho_{M(v_o)} + \sum_{b=1}^m \sum_{l=1}^{l_b} \rho_{M(v_{bl})}.$$

Отметим, что поскольку локальные риски в смысле определения 5 уже учитывают положение элемента в структуре системы, значение интегрального риска является простой суммой локальных рисков. Это, в частности, позволяет при необходимости легко рассчитать промежуточные значения интегрального риска для произвольных подсистем (подструктур).

Пусть защищаемая система включает в себя множество элементов  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , с соответствующими им вероятностями успешной атаки  $P = \{p_{s_1}, p_{s_2}, \dots, p_{s_n}\}$  и ущербами  $U = \{u_{s_1}, u_{s_2}, \dots, u_{s_n}\}$ . Предположим, что ожидаемая атака имеет структуру типа «звезда с  $m$  лучами»  $W_m = \langle G(V, E), T \rangle$ , причем  $\sum_{b=1}^m l_b = n - 1$ . Тогда задача минимизации интегрального риска защищаемой системы состоит в поиске такого размещения элементов  $S$  в структуре  $W_m$ , что

$$(1) \quad \rho(S, W_m, M^{-1}) \rightarrow \min.$$

Для частного случая  $m = 1$  решение в общем виде приведено в работе [25]. Однако уже для  $m = 2$  найти критерий упорядоченности вершин, обеспечивающий минимизацию интегрального риска, не удастся. Поэтому далее мы сформулируем ряд предположений, позволяющих решить эту задачу для реальных систем с приемлемой точностью. Но вначале рассмотрим несколько эвристических подходов к решению задачи (1), являющихся естественным обобщением результата, полученного в работе [25], но не позволивших получить точное решение.

### 3. Эвристические алгоритмы решения задачи минимизации интегрального риска

Положим, что ожидаемые ущербы в случае успешной атаки элементов системы равны, т.е.

$$u_{s_i} = u \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Тогда задача (1) принимает вид

$$(2) \quad \rho(S, W_m, M^{-1}) = u \left( p_{M(v_0)} + \sum_{b=1}^m \sum_{l=1}^{l_b} \prod_{v \in \langle v_0, v_{bl} \rangle} p_{M(v)} \right) \rightarrow \min.$$

Исходя из общих соображений, оптимальным видится такое размещение элементов, что чем выше вероятность успешной атаки, тем дальше от периметра должен располагаться элемент. Это хорошо согласуется с результатом, полученным ранее в работе [25] для простой цепной структуры. Напомним его.

*Определение 7.* Будем говорить, что узлы  $s_i, s_j \in S$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $i \neq j$ , нестрого упорядочены по возрастанию (убыванию) локального риска, и записывать  $s_i \preceq s_j$  ( $s_i \succcurlyeq s_j$ ), если при заданной структуре атаки  $W_1$  (в смысле определения 2) для любых размещений  $M_1^{-1}, M_2^{-1}$  таких, что

$$\exists p_1, q_1, p_2, q_2 : \begin{cases} p_1 < q_1, \\ p_2 > q_2, \end{cases}$$

$$s_i = M_1(v_{p_1}) = M_2(v_{p_2}), \quad s_j = M_1(v_{q_1}) = M_2(v_{q_2}),$$

выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \rho(S, W_1, M_1^{-1}) &\leq \rho(S, W_1, M_2^{-1}) \\ \left( \rho(S, W_1, M_1^{-1}) \geq \rho(S, W_1, M_2^{-1}) \right). \end{aligned}$$

**Утверждение 1.** Пусть  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\forall i < n$

$$s_i \preceq s_{i+1} \Leftrightarrow \frac{u_i}{u_{i+1}} \leq \frac{p_{i+1}^0 (1 - p_i^0)}{p_i^0 (1 - p_{i+1}^0)};$$

$$s_i \succcurlyeq s_{i+1} \Leftrightarrow \frac{u_i}{u_{i+1}} \geq \frac{p_{i+1}^0 (1 - p_i^0)}{p_i^0 (1 - p_{i+1}^0)}.$$

В рассматриваемом частном случае равенства ущербов это утверждение означает, что удельные вероятности успешной атаки размещенных элементов должны возрастать (точнее не убывать) с удалением от периметра.

Сформулируем следующее

**Утверждение 2.** Для каждого минимизирующего интегральный риск размещения  $M^{-1} : S \rightarrow V$  выполняется следующее: если для произвольных  $b, c, l : b, c \in \{1, \dots, m\}, l \in \mathbb{N}$  в структуре  $W_m$  существуют вершины  $M(v_{bl}), M(v_{c(l+1)})$ , то  $P_{M(v_{bl})} \leq P_{M(v_{c(l+1)})}$ .

Доказав это утверждение, можно упростить задачу, изолированно рассматривая подмножества вершин, находящиеся от периметра на фиксированном расстоянии. К сожалению, это утверждение неверно. Рассмотрим достаточно простой контрпример для структуры атаки с двумя лучами.

Пусть защищаемая система включает в себя множество  $S = \{s_i\}_{i=1}^{11}$  элементов со следующими удельными вероятностями успешной атаки:

$$p_1^0 = p_2^0 = 0,01,$$

$$p_3^0 = p_4^0 = p_5^0 = p_6^0 = 0,3,$$

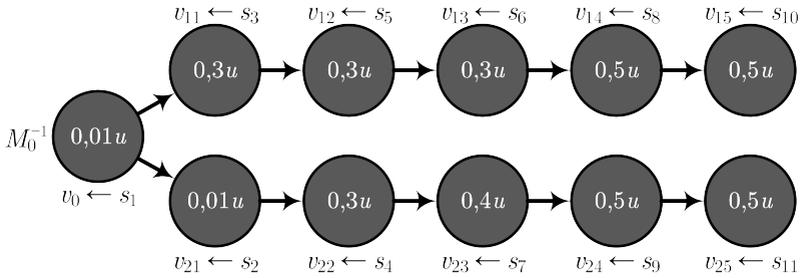
$$p_7^0 = 0,4,$$

$$p_8^0 = p_9^0 = p_{10}^0 = p_{11}^0 = 0,5.$$

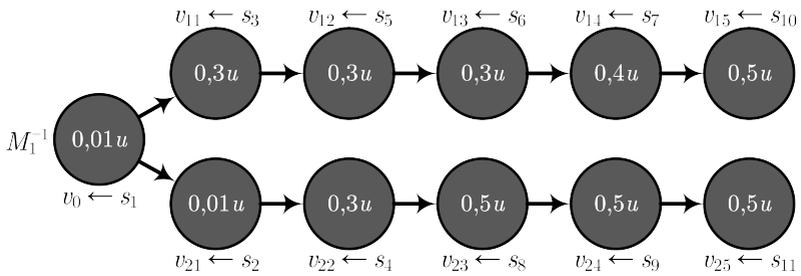
Зададим структуру  $W_2$  с  $l_1 = l_2 = 5$ .

**Контрпример 1.** Вначале построим размещение  $M_0^{-1}$ , удовлетворяющее одновременно условиям из утверждений 1 и 2 (рис. 2а). Получим

$$\rho(S, W_2, M_0^{-1}) = 1452,35u \cdot 10^{-5}.$$



а)



б)

Рис. 2. Пример размещения, для которого а) выполнены утверждения 1 и 2; б) выполнено утверждение 1, а утверждение 2 не выполнено, но при этом значение интегрального риска меньше

Теперь построим размещение  $M_1^{-1}$ , отличающееся от  $M_0^{-1}$  тем, что  $M_1^{-1}(v_{23}) = M_0^{-1}(v_{14})$ , а  $M_1^{-1}(v_{14}) = M_0^{-1}(v_{23})$  (рис. 2б). Получим

$$\rho(S, W_2, M_1^{-1}) = 1448,825u \cdot 10^{-5} < < 1452,35u \cdot 10^{-5} = \rho(S, W_2, M_0^{-1}).$$

Получившееся размещение (рис. 2б) удовлетворяет критерию упорядоченности вершин в смысле утверждения 1, но не утверждению 2. Поскольку оно обеспечивает меньшее значение интегрального риска, утверждение 2 неверно.●

Заметим, что вероятности успешной атаки элементов, отображенных в вершины  $v_{11}$  и  $v_{21}$ , довольно сильно отличаются (в примере выше – в тридцать раз). Таким образом, значения интегрального риска, подсчитанные для лучей в отдельности, значительно различаются, что и вызывает иллюстрируемый контр-примером эффект. Отсюда естественным образом возникает идея строить размещение итеративно, постепенно удаляясь от центра, так чтобы промежуточные значения интегральных рисков в подструктурах-лучах были примерно равными. Для рассматриваемой системы таковым будет отображение  $M_2^{-1}$  (рис. 3).

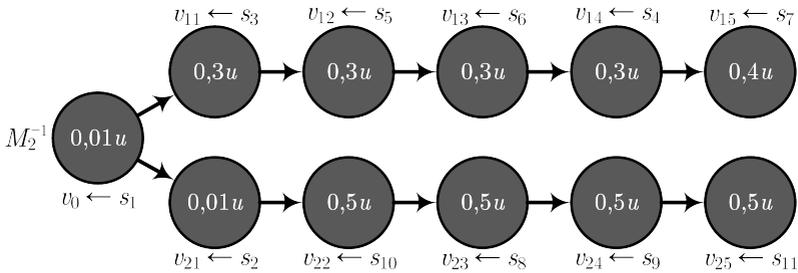


Рис. 3. Пример размещения, выравнивающего промежуточные значения интегрального риска, полученные по мере удаления от периметра

Рассчитаем для него значение интегрального риска. Получим

$$\begin{aligned} \rho(S, W_2, M_2^{-1}) &= 1447,715u \cdot 10^{-5} < \\ &< 1448,825u \cdot 10^{-5} = \rho(S, W_2, M_1^{-1}), \end{aligned}$$

что даже меньше, чем для отображения  $M_1^{-1}$ . Однако построенное отображение также не является решением задачи (2), поскольку имеет место

**Контрпример 2.** Построим размещение  $M_3^{-1}$  (рис. 4), отличающееся от  $M_2^{-1}$  тем, что

$$M_3^{-1}(v_{22}) = M_2^{-1}(v_{15}), \quad M_3^{-1}(v_{15}) = M_2^{-1}(v_{22}).$$

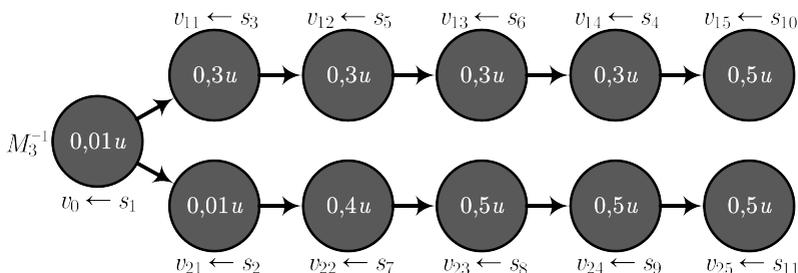


Рис. 4. Пример размещения, не обеспечивающего минимальную разность промежуточных значений интегральных рисков, рассчитываемых в процессе построения размещения, но являющегося решением задачи (2)

Рассчитаем для него значение интегрального риска. Получим

$$\begin{aligned} \rho(S, W_2, M_3^{-1}) &= 1446,65u \cdot 10^{-5} < \\ &< 1447,715u \cdot 10^{-5} = \rho(S, W_2, M_2^{-1}). \end{aligned}$$

Таким образом, предложенная эвристика также не обеспечивает решение задачи (2).•

В заключение попытаемся построить критерий предпочтения для оптимального в смысле минимизации интегрального риска размещения элементов в подмножестве вершин, находящихся на фиксированном расстоянии  $j$  от периметра, т.е. в  $\{v_{bj}\}_{b=1}^m$ . Произвольно выберем из этого множества две вершины  $v_{pj}$  и  $v_{qj}$ . Проверим, при каких условиях для минимизирующего интегральный риск отображения  $M^{-1} : S \rightarrow V$  будет выполнено неравенство

$$p_{M(v_{pj})}^0 \leq p_{M(v_{qj})}^0.$$

Для удобства записи обозначим  $p = p_{M(v_{pj})}^0$ ,  $q = p_{M(v_{qj})}^0$ . Для остальных вершин вместо  $p_{M(v_{bl})}^0$ ,  $b < m, l < l_b, b, l, l_b \in \mathbb{N}$ , будем писать  $p_{lb}$ , а вместо  $p_{M(v_0)}^0 - p_0$ . Также введем обозначение для интегрального риска подструктуры, являющейся простой цепью

и включающей себя вершины  $v_{bl}, v_{b(l+1)}, \dots, v_{bl_b}$  :

$$\rho(p_{bl}, \dots, p_{bl_b}) = u \sum_{i=l}^{l_b} \prod_{k=l}^i p_{M(v_{ik})}^0.$$

Посчитаем разность  $\Delta$  величин интегрального риска для случаев, когда в вершины  $v_{pj}, v_{qj}$  отображены элементы с удельными вероятностями успешной атаки соответственно  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  (случай 1), и наоборот (случай 2). Напомним, что  $\mathbf{p} \leq \mathbf{q}$ .

$$\begin{aligned} \Delta &= up_0 \left( p_{p1} \dots p_{p(j-1)} \mathbf{p} + p_{p1} \dots p_{p(j-1)} \mathbf{p} \rho(p_{p(j+1)}, \dots, p_{pl_p}) + \right. \\ &\quad + p_{q1} \dots p_{q(j-1)} \mathbf{q} + p_{q1} \dots p_{q(j-1)} \mathbf{q} \rho(p_{q(j+1)}, \dots, p_{pl_q}) - \\ &\quad - p_{p1} \dots p_{p(j-1)} \mathbf{q} + p_{p1} \dots p_{p(j-1)} \mathbf{q} \rho(p_{p(j+1)}, \dots, p_{pl_p}) - \\ &\quad \left. - p_{q1} \dots p_{q(j-1)} \mathbf{p} - p_{q1} \dots p_{q(j-1)} \mathbf{p} \rho(p_{q(j+1)}, \dots, p_{pl_q}) \right) = \\ &= up_0 (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \left( p_{p1} \dots p_{p(j-1)} (1 + \rho(p_{p(j+1)}, \dots, p_{pl_p})) - \right. \\ &\quad \left. - p_{q1} \dots p_{q(j-1)} (1 + \rho(p_{q(j+1)}, \dots, p_{pl_q})) \right). \end{aligned}$$

Если  $\Delta \leq 0$ , то значение интегрального риск будет меньше при размещении, как в случае 1. Иначе – как в случае 2. В силу того, что  $\mathbf{p} - \mathbf{q} \leq 0$ , а  $u, p_0 > 0$ , это неравенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} &p_{p1} \dots p_{p(j-1)} \left( 1 + \rho(p_{p(j+1)}, \dots, p_{pl_p}) \right) - \\ &\quad - p_{q1} \dots p_{q(j-1)} \left( 1 + \rho(p_{q(j+1)}, \dots, p_{pl_q}) \right) \geq 0 \iff \\ (3) \quad &\iff \frac{p_{p1} \dots p_{p(j-1)}}{p_{q1} \dots p_{q(j-1)}} \geq \frac{1 + \rho(p_{q(j+1)}, \dots, p_{pl_q})}{1 + \rho(p_{p(j+1)}, \dots, p_{pl_p})}. \end{aligned}$$

Полученное соотношение (3) говорит нам о том, что оптимальное размещение элементов в подмножестве вершин  $\{v_{bj}\}_{b=1}^m$  зависит от того, какие элементы размещены в вершинах, расположенных к периметру относительно рассматриваемых как ближе,

так и дальше. Таким образом, итеративное построение оптимального размещения невозможно и точное решение задач (1) и (2), по всей видимости, достигается только полным перебором размещений.

Поскольку число возможных перестановок элементов выражается через факториал, такой перебор практически невозможен даже для систем с относительно небольшим числом элементов. Поэтому далее мы будем искать возможность приближенного решения задачи (2) вычислительно простым алгоритмом с некоторой оцениваемой сверху погрешностью.

#### **4. Приближенное решение задачи оптимального размещения элементов системы в заданной структуре**

Как и в прошлом параграфе, будем рассматривать частный случай равенства величин ожидаемого ущерба, т.е. решать задачу (2). С точки зрения практики, выражение

$$(4) \quad p_{M(v_0)} + \sum_{b=1}^m \sum_{l=1}^{l_b} \prod_{v \in \langle v_0, v_{bl} \rangle} p_{M(v)}$$

можно интерпретировать как величину, характеризующую защищенность системы в целом. Потребуем, чтобы даже для бесконечного числа элементов величина (4) оставалась конечной. Для этого введем понятие предельно допустимого удельного локального риска.

*Определение 8. Предельно допустимым удельным локальным риском элемента защищаемой системы при структуре атаки  $W_m = \langle G(V, E), T \rangle$  будем считать величину*

$$(5) \quad \rho_{max}^0 = \frac{u}{1 + \sqrt{m}}.$$

Отметим, что если  $\forall i \rho_i^0 = \rho_{max}^0, i \in \{1, \dots, n\}, n < \infty$ , то

$$p_{M(v_0)} + \sum_{b=1}^m \sum_{l=1}^{l_b} \prod_{v \in \langle v_0, v_{bl} \rangle} p_{M(v)} = \frac{1}{u} \left( \rho_{max}^0 + \sum_{b=1}^m \sum_{l=1}^{l_b} \prod_{v \in \langle v_0, v_{bl} \rangle} \rho_{max}^0 \right) < 1,$$

а при  $n = \infty$  это выражение равно единице. Содержательно введенное ограничение отражает практически разумное соображение, что чем больше элементов включает система, тем лучше должен быть защищен каждый элемент в отдельности.

Теперь выясним, как ведет себя интегральный риск при постепенном усложнении структуры защищаемой системы. В простейшем случае, когда система состоит из единственного элемента  $s_1$ , его размещение в структуре  $W_1 = \langle G(V = \{v_0\}, E = \emptyset), T = \{v_0\} \rangle$  единственно, и интегральный риск системы при заданных ограничениях не превышает величины  $\frac{u}{2}$ .

Если же в защищаемой системе  $n$  элементов, а структура состоит из  $m = n - 1$  лучей, включающих в себя по одной дуге, то верхняя оценка интегрального риска, вносимого элементом  $v_0$ , равна

$$(6) \quad \rho_{max}^0 = \frac{u}{1 + \sqrt{n-1}},$$

а вклад элементов, отображенных в вершины  $v_{b1}, b = \overline{1, n-1}$ , составит не более чем

$$(7) \quad u(n-1) \left( \frac{\rho_{max}^0}{u} \right)^2 = \frac{u(n-1)}{(1 + \sqrt{n-1})^2}.$$

Заметим, что при  $n \rightarrow \infty$  выражение (6) стремится к нулю, а выражение (7) – к  $u$ . Далее для удобства будем говорить, что луч имеет длину  $k$ , если путь от вершины-периметра до висячей вершины луча включает в себя ровно  $k$  дуг.

Наконец, рассмотрим вариант структуры атаки с  $m = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  лучами, где запись  $\lfloor x \rfloor$  здесь и далее означает выделение целой

части числа  $x$ . В случае четных  $n$  один из лучей будет иметь длину 1, а остальные – 2. Для нечетных  $n$  все лучи будут иметь длину 2. Верхняя оценка интегрального риска, вносимого элементами, отображенными в вершины  $v_{b2}$ ,  $b = \overline{1, m}$ , составит

$$\frac{m}{u^2} (\rho_{max}^0)^3 = \frac{um}{(1 + \sqrt{m})^3}.$$

Эта величина при  $n, m \rightarrow \infty$  тоже стремится к нулю.

Отсюда следует два важных вывода. Во-первых, чем больше лучей имеет структура, тем меньшее влияние на интегральный риск системы оказывают элементы, отображенные в вершины  $v_{bl}$  с  $l \geq 2$ . Во-вторых, при  $m \geq 4$  прирост риска на множестве вершин  $\{v_{bl}\}_{b=1}^m$ ,  $l \geq 3$ , не превышает пяти процентов от максимально возможного значения. Конкретные величины для небольших значений  $m$  и  $l$  приведены в таблице 2.

Таблица 2. Верхние оценки прироста риска в структуре с  $m$  лучами на подмножествах вершин, удаленных от периметра на 1–3 дуги, а также соответствующие верхние оценки величин интегрального риска (в скобках); округление до четвертого знака с избытком

Число лучей $m$	$\rho_{max}^0$	Подмножество вершин			
		$\{v_0\}$	$\{v_{b1}\}_{b=1}^m$	$\{v_{b2}\}_{b=1}^m$	$\{v_{b3}\}_{b=1}^m$
1	$\frac{u}{2}$	0,5 $u$ (0,5 $u$ )	0,25 $u$ (0,75 $u$ )	0,125 $u$ (0,875 $u$ )	0,625 $u$ (0,9375 $u$ )
2	$\frac{u}{1+\sqrt{2}}$	0,4143 $u$ (0,4143 $u$ )	0,3432 $u$ (0,7574 $u$ )	0,1422 $u$ (0,8995 $u$ )	0,0589 $u$ (0,9584 $u$ )
3	$\frac{u}{1+\sqrt{3}}$	0,3661 $u$ (0,3661 $u$ )	0,402 $u$ (0,768 $u$ )	0,1472 $u$ (0,9151 $u$ )	0,0539 $u$ (0,969 $u$ )
4	$\frac{u}{1+\sqrt{4}}$	0,3334 $u$ (0,3334 $u$ )	0,4445 $u$ (0,7778 $u$ )	0,1482 $u$ (0,926 $u$ )	0,0494 $u$ (0,9754 $u$ )
5	$\frac{u}{1+\sqrt{5}}$	0,3091 $u$ (0,3091 $u$ )	0,4775 $u$ (0,7865 $u$ )	0,1476 $u$ (0,9341 $u$ )	0,0456 $u$ (0,9797 $u$ )

Заметим, что для вершины-периметра, а также вершин  $\{v_{b1}\}_{b=1}^m$ , находящихся на расстоянии одной дуги от него, решение задачи оптимального размещения элементов защищаемой

системы тривиально в силу необходимости выполнения критерия упорядоченности элементов, доказанного в [25]. А именно, в периметр в рассматриваемом частном случае следует поместить элемент с минимальным удельным локальным риском (минимальной вероятностью успешной атаки), а в вершины  $\{v_{b1}\}_{b=1}^m - m$  элементов из оставшихся с наименьшим удельным локальным риском, начиная с номера  $b$ , соответствующего самому длинному лучу.

Таким образом, наибольший интерес с точки зрения практики представляет решение задачи оптимального размещения элементов защищаемой системы в подмножестве вершин структуры атаки, которые от периметра отделяет две дуги, т.е.  $\{v_{b2}\}_{b=1}^m$ .

Отметим также, что величина

$$(8) \quad \frac{mt}{(1 + \sqrt{m})^n}$$

для фиксированных значений  $n \geq 4$  (т.е. соответствующих подмножествам  $\{v_{b3}\}_{b=1}^m$ ,  $\{v_{b4}\}_{b=1}^m$  и т.д.) монотонно убывает с ростом  $m$ . В то же время первая производная выражения (8) при  $n = 3$  имеет корень  $m = 4$ , поэтому верхняя оценка прироста риска достигает максимума в случае, если структура атаки имеет 4 луча.

Этот факт позволяет в дальнейшем ограничиться рассмотрением именно таких структур как «наименее благоприятных» в смысле поиска оптимального размещения элементов для минимизации интегрального риска. Величины отклонения от оптимального решения будут максимальны именно при  $m = 4$ .

Для приближенного решения задачи (2) предлагается использовать следующий алгоритм.

1. Выбрать элемент с наименьшим удельным локальным риском и поместить его в вершину-периметр  $v_0$ .

2. Из оставшихся выбрать  $m$  элементов с наименьшими удельными локальными рисками и разместить их в вершинах  $\{v_{b1}\}_{b=1}^m$  так, чтобы длины соответствующих этим вершинам лучей находились в обратной зависимости от удельного локального риска, отображенного в вершину элемента.

3. Для каждого из подмножеств вершин  $\{v_{b2}\}_{b=1}^m$ ,  $\{v_{b3}\}_{b=1}^m, \dots$  последовательно выбирать по  $k \leq m$  элементов с наименьшими удельными локальными рисками из оставшихся и размещать их в вершинах соответствующего подмножества произвольным образом.

В следующем параграфе мы построим верхние оценки погрешности решения задачи (2) этим алгоритмом.

### 5. Верхние оценки погрешностей решения задачи оптимального размещения элементов

Для получения оценок погрешности решения задачи оптимального размещения элементов в структуре типа «звезда с  $m$  лучами» проведем численный эксперимент, состоящий в следующем. Будем последовательно генерировать структуры атаки с числом лучей  $m$  от 2 до 11, каждый из которых имеет длину 3. Зададим следующие ограничения:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 1; \\ p_{M(v_0)}^0 \leq p_{M(v_{bl})}^0 \quad \forall b \in \{1, \dots, m\}, l < l_b; \\ p_{M(v_0)}^0 > 0; \\ p_{M(v_{bl})}^0 > 0 \quad \forall b \in \{1, \dots, m\}, l \leq l_b; \\ p_{M(v_0)}^0 \leq \frac{1}{1 + \sqrt{m}}; \\ p_{M(v_{bl})}^0 \leq \frac{1}{1 + \sqrt{m}} \quad \forall b \in \{1, \dots, m\}, l < l_b; \\ p_{M(v_{l_b})}^0 \leq \sum_{l=l_b}^{\infty} \left( \frac{1}{1 + \sqrt{m}} \right)^{l+1}. \end{array} \right.$$

Далее будем генерировать выражения интегрального риска для всех размещений, получаемых путем перестановок элементов, отображенных в подмножества  $\{v_{b1}\}_{b=1}^m$ , а затем – отдельно – в  $\{v_{b2}\}_{b=1}^m$ . Вслед за этим рассмотрим все возможные модули разности этих выражений и для каждого из них проведем

поиск глобального максимума. Разделив получившееся значение на минимум интегрального риска из этих двух вычитаемых друг из друга выражений, мы получим относительную разность между ними. Максимум этих разностей даст нам численную оценку относительной погрешности решения задачи оптимального размещения элементов защищаемой системы в заданной структуре.

Результаты эксперимента сведены в таблицу 3. Они показывают, что величина относительной погрешности варьируется в небольших пределах. В частности, увеличение относительной погрешности решения задачи (2) на вершинах, расположенных на расстоянии двух дуг от периметра, составляет 6,07% в наименее благоприятном случае.

Таблица 3. Численные оценки относительной погрешности решения задачи оптимального размещения элементов в подмножествах вершин структуры атаки, округление до четвертого знака с избытком (\* – недостоверное значение вследствие переполнения)

Число лучей $m$	Подмножество вершин				
	$\{v_0\}$	$\{v_{b1}\}_{b=1}^m$	$\{v_{b2}\}_{b=1}^m$	$\{v_{b3}\}_{b=1}^m$	$\{v_{b4}\}_{b=1}^m$
2	0,2072	0,0583	0,0132	0,0037	0,0012
3	0,1548	0,0434	0,0088	0,0022	0,0007
4	0,2	0,0607	0,0107	0,0024	0,0006
5	0,1709	0,0515	0,0085	0,0018	0,0005
6	0,1899	0,0607	0,0091	0,0018	0,0004
7	0,1707	0,0542	0,0078	0,0015	0,0003
8	0,1807	0,0601	0,008	0,0014	0,0003
9	0,1667	0,0551	0,0071	0,0012	0,0002
10	0,1726	0,0593	0,0072	0,0012	*
11	0,1619	0,0553	0,0065	0,001	*

Заметим, что приросты относительной погрешности для структур с четным числом лучей всегда больше таковых для структур с нечетным числом лучей, большим на единицу. Этот эффект объясняется следующим образом. Допустим, мы имеем оптимальное размещение  $M_0^{-1} : S \rightarrow V$ . Тогда внутри каждого

подмножества  $\{v_{bl}\}_{b=1}^m \in V$  для фиксированного  $l$  выполняется критерий (3).

Поскольку это критерий попарного сравнения, то мы можем упорядочить и пронумеровать отображенные в рассматриваемое подмножество элементы номерами от 1 до  $k \leq m$  (некоторые  $v_{bl}$  могут не существовать). Для того чтобы построить отображение  $M^{-1} : S \rightarrow V$  с максимально возможным отклонением (приростом) интегрального риска, полученного перестановками элементов внутри подмножества  $\{v_{bl}\}_{b=1}^m \in V$ , достаточно разместить в нем элементы в обратном порядке.

При этом для нечетных  $k$  элемент с номером  $\lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor$  останется на своем месте, а число попарных перестановок будет таким же, как и для  $(k - 1)$ -го элемента. В силу ранее введенного ограничения (5) на максимальное значение удельного локального риска вклад каждой из таких попарных перестановок будет уменьшаться с ростом значения  $k$ .

Следует отметить, что поскольку риск не может быть равен нулю, верхняя оценка прироста интегрального риска с удалением от периметра всегда превышает верхнюю оценку относительной погрешности, рассчитанную на том же удалении. Первые, в свою очередь, вычисляются как  $u \left( \frac{1}{1 + \sqrt{m}} \right)^{l+1}$ , а бесконечная сумма таких слагаемых сходится:

$$\sum_{l=0}^{\infty} u \left( \frac{1}{1 + \sqrt{m}} \right)^{l+1} = \frac{u}{\sqrt{m}}.$$

Начиная с  $m = 3$  относительная погрешность при произвольном неоптимальном размещении элементов защищаемой системы в вершинах, отделенных от периметра тремя и более дугами, не превышает двух процентов и снижается с увеличением числа лучей в структуре атаки.

Отметим также, что во всех случаях максимум относительной погрешности достигается в случае, когда в системе одновременно присутствуют как элементы с очень маленьким риском (вероятность успешной атаки таких элементов в эксперименте будет равна машинному эпсилон), так и элементы с максимально

допустимым риском. В связи с этим была проведена еще одна серия экспериментов с ограничением разброса рисков.

Определение 9. *Остаточным удельным риском для защищаемой системы, включающей в себя множество элементов  $s_1, \dots, s_n \in S, n \in \mathbb{N}$ , будем называть величину*

$$\rho_{res} : \rho_{s_i}^0 \geq \rho_{res} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Вычислим верхние оценки относительной погрешности решения задачи оптимального размещения элементов системы в заданной структуре при значениях остаточного удельного риска  $\frac{\rho_{max}^0}{1000}$ ,  $\frac{\rho_{max}^0}{100}$  и  $\frac{\rho_{max}^0}{10}$ . Результаты приведены в таблице 4.

*Таблица 4. Численные оценки относительной погрешности решения задачи оптимального размещения элементов в подмножествах вершин структуры атаки при заданном пороге остаточного риска, округление до четвертого знака с избытком*

Число вершин $m$	Подмножество вершин					
	$\{v_{b1}\}_{b=1}^m$			$\{v_{b2}\}_{b=1}^m$		
	Остаточный риск			Остаточный риск		
	$\frac{\rho_{max}^0}{1000}$	$\frac{\rho_{max}^0}{100}$	$\frac{\rho_{max}^0}{10}$	$\frac{\rho_{max}^0}{1000}$	$\frac{\rho_{max}^0}{100}$	$\frac{\rho_{max}^0}{10}$
2	0,2064	0,1995	0,1398	0,0581	0,0565	0,0417
3	0,1542	0,1489	0,1041	0,0432	0,0419	0,0301
4	0,1993	0,193	0,1379	0,0605	0,0587	0,0425
5	0,1702	0,1647	0,1168	0,0513	0,0497	0,0354
6	0,1893	0,1834	0,1322	0,0605	0,0586	0,0419
7	0,1701	0,1646	0,1178	0,054	0,0522	0,0368
8	0,1801	0,1745	0,1265	0,0599	0,0579	0,041
9	0,1661	0,1609	0,1158	0,0549	0,053	0,0371
10	0,172	0,1668	0,1214	0,059	0,057	0,0401
11	0,1613	0,1563	0,113	0,055	0,0531	0,0369

При ограничении  $\rho_{res} = \frac{\rho_{max}^0}{1000}$  значения погрешностей мало отличаются от случая, когда остаточный риск специально не ограничен, т.е.  $\rho_{s_i}^0 > 0$ . Но при поднятии границы остаточного 200

риска величина относительной погрешности заметно снижается. Так, если  $\rho_{s_i}^0 \geq \frac{\rho_{max}^0}{10}$ , то при любом размещении элементов защищаемой системы в вершинах  $\{v_{b2}\}_{b=1}^m$  интегральный риск будет превышать минимальный менее чем на 5%.

## 6. Методика быстрой оценки рисков систем со звездообразной структурой

Рассмотрим вопрос об оценке рисков некоторой сложной системы, включающей в себя множество защищаемых элементов  $S$ , размещенных в структуре типа «звезда с  $m$  лучами»  $W_m$ . Предположим, что нам неизвестны как удельные вероятности успешной атаки каждого из защищаемых элементов, так и значения ущербов, наносимых злоумышленником в случае успешной атаки какого-либо элемента. В то же время будем считать, что нам известны ограничивающие вероятность успешной атаки величины  $p_{min}$  и  $p_{max}$  такие, что

$$0 < p_{min} \leq p_i^0 \leq p_{max} < 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда при  $m = 1$  оценка интегрального риска  $\rho_1$  данной системы будет иметь следующий вид:

$$\rho_1^- = u \sum_{l=1}^n (p_{min})^l \leq \rho_1 \leq u \sum_{l=1}^n (p_{max})^l = \rho_1^+,$$

где  $u$  – некоторая оценка «среднего» ущерба. Заметим, что при  $p_{max} \leq \frac{1}{2}$  эти суммы будут конечны даже для системы со счетным множеством защищаемых элементов.

Теперь предположим, что структура системы включает в себя два луча с примерно одинаковыми длинами  $l_1$  и  $l_2$ , т.е.

$$|l_1 - l_2| \leq 1, \quad l_1 + l_2 + 1 = n.$$

Тогда величину интегрального риска  $\rho_2$  такой системы можно оценить снизу и сверху через  $p_{min}$  и  $p_{max}$  соответственно. Запи-

шем вначале выражение для нижней оценки:

$$\rho_2^- = u \left( p_{min} + 2p_{min} \cdot \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (p_{min})^l + p_{min} \left( n - 1 - 2 \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right) (p_{min})^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right) = u \left( p_{min} + 2 \sum_{l=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (p_{min})^l + \left( n - 1 - 2 \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right) (p_{min})^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \right).$$

Величина  $n - 1 - 2 \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  будет равна нулю для нечетных  $n$  и единице – для четных. При этом в первом случае мы получим два луча одинаковой длины, а во втором их длины будут отличаться на единицу. Выражение для верхней оценки будет иметь тот же вид с точностью до замены  $p_{min}$  на  $p_{max}$ .

Теперь запишем выражение для нижней оценки интегрального риска системы со структурой, включающей в себя произвольное конечное число лучей  $m$ :

$$\rho_m^- = u \left( p_{min} + m \sum_{l=2}^{\lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor + 1} (p_{min})^l + \left( n - 1 - m \left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor \right) (p_{min})^{\lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor + 2} \right).$$

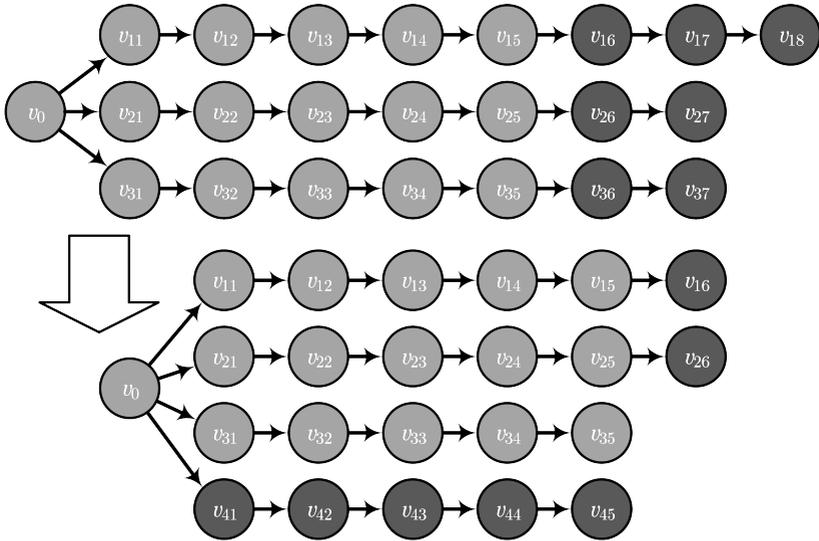
Оценим, насколько изменяется оценка при увеличении числа лучей до  $(m + 1)$ . Для этого запишем выражение для нижней оценки интегрального риска для такой структуры:

$$\begin{aligned} \rho_{m+1}^- = & u \left( p_{min} + (m+1) \sum_{l=2}^{\lfloor \frac{n-1}{m+1} \rfloor + 1} (p_{min})^l + \left( n-1 - \right. \right. \\ & \left. \left. - (m+1) \left\lfloor \frac{n-1}{m+1} \right\rfloor \right) (p_{min})^{\lfloor \frac{n-1}{m+1} \rfloor + 2} \right) = u \left( p_{min} + \right. \\ & \left. + m \sum_{l=2}^{\lfloor \frac{n-1}{m+1} \rfloor + 1} (p_{min})^l + \sum_{l=2}^{\lfloor \frac{n-1}{m+1} \rfloor + 1} (p_{min})^l + \left( n-1 - \right. \right. \\ & \left. \left. - (m+1) \left\lfloor \frac{n-1}{m+1} \right\rfloor \right) (p_{min})^{\lfloor \frac{n-1}{m+1} \rfloor + 2} \right). \end{aligned}$$

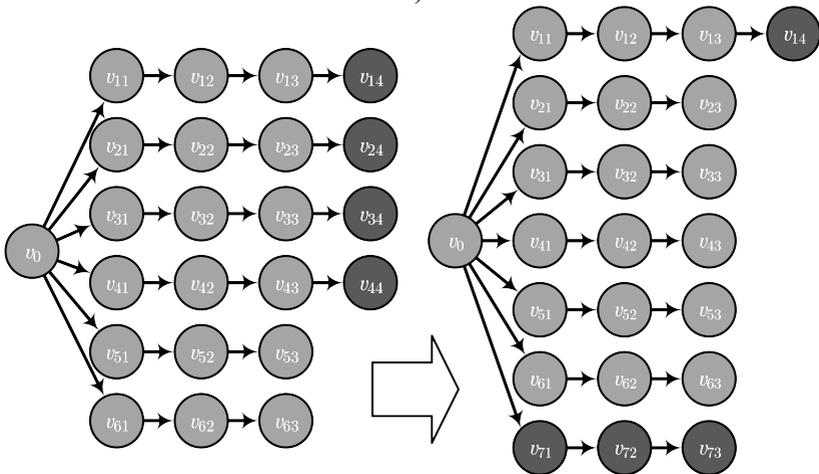
Алгебраически оценить величину  $|\rho_{m+1}^- - \rho_m^-|$  достаточно сложно, поэтому посмотрим, что происходит при переходе от звезды с  $m$  лучами к звезде с  $(m+1)$  лучами визуально (рис. 5). Напомним, что под интегральным риском мы понимаем сумму локальных рисков элементов защищаемой системы. Конкретные значения локальных рисков зависят от положения элементов в структуре, но при построении верхней и нижней оценки значения удельных локальных рисков одинаковы для всех элементов.

Значения локальных же рисков будут тем выше, чем меньше значение второго индекса у вершины. При этом у вершин с одинаковыми вторыми индексами значения локальных рисков будут равны. При добавлении нового  $(m+1)$ -го луча в структуре появляются  $\left\lfloor \frac{n-1}{m+1} \right\rfloor$  вершин  $v_{(m+1)1}, v_{(m+1)2}, \dots, v_{(m+1)\lfloor \frac{n-1}{m+1} \rfloor}$ .

Вершины с индексами от  $v_{11}$  до  $v_{m\lfloor \frac{n-1}{m+1} \rfloor}$  будут присутствовать как в структуре с  $m$  лучами, так и в новой, с добавленным дополнительным лучом. Остальные вершины будут иметь в структуре с  $m$  лучами вторые индексы, большие  $\left\lfloor \frac{n-1}{m+1} \right\rfloor$ , при этом  $n-1-(m+1) \left\lfloor \frac{n-1}{m+1} \right\rfloor$  из них будут иметь одинаковые индексы в обеих структурах (и, соответственно, одинаковые локальные риски).



а)



б)

Рис. 5. а) Переход от структуры типа «звезда с 3 лучами» к структуре «звезда с 4 лучами» при сохранении числа вершин; б) то же – от структуры «звезда с 6 лучами» к структуре «звезда с 7 лучами»

Эти рассуждения приводят нас к тому, что верхние и нижние оценки интегрального риска монотонно возрастают с ростом числа лучей в структуре. Заметив, что

$$\forall z = \text{const}, l > 1 \quad (p_{\min})^l - (p_{\min})^{l+z} \leq (p_{\max})^l - (p_{\max})^{l+z},$$

получаем, что величина  $\rho_m^+ - \rho_m^-$  при  $p_{\min} < p_{\max}$  также монотонно возрастает с ростом  $m$ . При  $p_{\min} = p_{\max}$  достигается равенство верхней и нижней оценок.

### 7. Решение задачи оптимального размещения элементов с различными значениями ущербов

Ранее мы рассматривали частный случай, когда ущерб от успешной атаки элементов оценивается одинаково, т.е.  $u_{s_i} = u \forall i \in \{1, \dots, n\}$ . Предположим, что ущербы различны. В то же время потребуем, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$(9) \quad \frac{1 - p_{s_i}^0}{u_{s_i} p_{s_i}^0} = \frac{1 - p_{s_j}^0}{u_{s_j} p_{s_j}^0} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что для структур вида

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ G \left( V = \{v_0, v_{11}, \dots, v_{1l_1}\}, \right. \right. \\ E &= \left. \left. \left( (v_0, v_{11}) \cup \bigcup_{l=2}^{l_1} (v_{1(l-1)}, v_{1l}) \right) \right\}, \\ T &= \{v_0\} \left. \right\}, \quad 2 < l_1 \leq n - 1 \end{aligned}$$

соотношение (9) обеспечивает равенство интегральных рисков для любого набора отображений

$$\mathbf{M}^{-1} = \left\{ M_t^{-1} : \tilde{S} \rightarrow V \right\}_{j \in J}, \quad \tilde{S} \subseteq S,$$

где  $J$  – некоторое множество индексов. Покажем, что для таких элементов существует точное решение задачи (1).

Вначале заметим, что любая структура типа «звезда с  $m$  лучами» может быть разбита на  $m$  структур вида  $W_1$  следующим образом. Пусть  $W_m = \langle G(V, E), T \rangle$  определена как в определении 2. Тогда определим подструктуры

$$\begin{aligned} W_1^1 &= \langle G(V_1, E_1), T_1 \rangle, \\ W_1^2 &= \langle G(V_2, E_2), T_2 \rangle, \\ &\dots, \\ W_1^m &= \langle G(V_m, E_m), T_m \rangle, \end{aligned}$$

причем для  $b = 1$

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v_0\} \cup \bigcup_{l=1}^{l_1} \{v_{1l}\}, \\ E_1 &= \left\{ (v_0, v_{11}) \cup \bigcup_{l=2}^{l_1} (v_{1(l-1)}, v_{1l}) \right\}, \\ T_1 &= \{v_0\}, \end{aligned}$$

а для остальных  $b = \overline{2, m}$

$$V_b = \bigcup_{l=1}^{l_b} \{v_{bl}\}, \quad E_b = \bigcup_{l=2}^{l_b} \{(v_{b(l-1)}, v_{bl})\}, \quad T_b = \emptyset.$$

Тогда

$$V = \bigcup_{b=1}^m V_b, \quad E = \bigcup_{b=1}^m E_b, \quad T = T_1 = \bigcup_{b=1}^m T_b$$

и можно записать

$$W_m = \bigcup_{b=1}^m W_1^b.$$

Для заданного отображения  $M : V \rightarrow S$  в силу его взаимной однозначности можно найти такое разбиение множества защищаемых элементов

$$S_1, \dots, S_m, \quad S_b \subset S \quad \forall b \in \overline{1, m}, \quad S_b \cap S_d = \emptyset \quad \forall b, d \in \overline{1, m} : b \neq d,$$

что

$$V = \bigcup_{b=1}^m M^{-1}(S_b)$$

и величину  $\rho(S, W_m, M^{-1})$  можно записать как

$$\rho(S, W_m, M^{-1}) = \rho(S_1, W_1^1, M^{-1}) + p_{M(v_0)}^0 \sum_{b=2}^m \rho(S_b, W_1^b, M^{-1}).$$

Теперь покажем, что при выполнении соотношения (9) для любого такого размещения  $M^{-1} : S \rightarrow V$ , что

$$p_{M(v_0)}^0 = \min_{i=1, n} \{p_{s_i}^0\},$$

будет достигаться минимум величины  $\rho(S, W_m, M^{-1})$ . Для удобства перенумеруем защищаемые элементы так, чтобы

$$p_i^0 \leq p_{i+1}^0 \quad \forall i < n, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Тогда  $p_{M(v_0)}^0 = p_1^0$  и

$$\rho_1 = \rho(S, W_m, M^{-1}) = \rho(S_1, W_1^1, M^{-1}) + p_1^0 \sum_{b=2}^m \rho(S_b, W_1^b, M^{-1}).$$

Теперь рассмотрим другое размещение  $M'^{-1}$ , получающееся из  $M^{-1}$  перестановкой двух элементов –  $s_1$  и любого другого  $s_k$ ,  $1 < k \leq n$ , т.е.

$$\begin{aligned} M^{-1}(s_1) &= M'^{-1}(s_k), \quad M^{-1}(s_k) = M'^{-1}(s_1), \\ M^{-1}(s_i) &= M'^{-1}(s_i) \quad \forall i \neq k, \quad i \leq n, \quad i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Не умаляя общности, будем считать, что  $M'^{-1}(s_k)$  находится в структуре  $W_1^1$ .

Запишем выражение для значения интегрального риска для размещения  $M'^{-1}$ :

$$\rho_k = \rho(S, W_m, M'^{-1}) = \rho(S_1, W_1^1, M'^{-1}) + p_k^0 \sum_{b=2}^m \rho(S_b, W_1^b, M'^{-1}).$$

Заметим, что в силу соотношения (9)

$$\rho \left( S_1, W_1^b, M'^{-1} \right) = \rho \left( S_1, W_1^b, M^{-1} \right) \quad \forall b \in \{1, \dots, m\}.$$

Поскольку  $p_1^0 \leq p_k^0$ , то и  $\rho_1 \leq \rho_k$ , что означает, что размещение  $M^{-1}$  является решением задачи (1).

## 8. Заключение

В настоящей работе предложен алгоритм решения задачи псевдо-оптимального размещения элементов защищаемой системы в структуре типа «звезда с  $m$  лучами» в частном случае равенства ущербов при успешной атаке различных элементов. В то время как задача оптимального размещения в общем случае может быть решена только полным перебором, предложенный алгоритм позволяет решить ее за линейное время с некоторой оцениваемой погрешностью, зависящей от числа лучей в структуре атаки. Верхние оценки погрешностей решения были экспериментально рассчитаны для небольших структур, состоящих из 2–11 лучей, включающих в себя 2–5 элементов каждый. Выбранные для расчётов параметры структур были, с одной стороны, ограничены доступной вычислительной мощностью, а с другой – точностью машинного представления чисел с плавающей запятой. В то же время даже такой небольшой эксперимент наглядно демонстрирует, что относительная погрешность уменьшается с увеличением числа лучей в структуре сверх четырех. Таким образом, для получения верхних оценок погрешностей такого эксперимента достаточно.

Полученные оценки были уточнены для случая положительно ограниченных минимальных удельных (остаточных) рисков. Кроме того, был предложен метод экспресс-оценки рисков систем с рассматриваемой структурой в ситуации, когда Защитник не знает ни значений собственных вероятностей успешной атаки элементов, ни значений ожидаемого ущерба от них. В то же время он, предположительно, знает значения остаточного и предельного рисков, а также способен представить себе некоторую

среднюю величину ущерба. Было исследовано поведение разности верхней и нижней оценок интегрального риска и установлено, что она увеличивается с ростом числа лучей в структуре системы. Отметим, что относительная погрешность предложенного выше алгоритма неоптимального размещения элементов уменьшается с увеличением количества лучей в «звезде». Таким образом, чем сложнее оценить риск системы, тем лучше работает алгоритм.

Наконец, приведено точное решение задачи оптимального размещения элементов системы в заданной структуре с различными величинами ущербов, но с ограничением (9) на соотношении их собственных рисков. А именно, отношение вероятности того, что элемент не будет успешно атакован, к величине его собственного риска должно быть одинаковым для всех элементов системы. По сути, это условие отражает естественное требование: чем выше ожидаемый ущерб элементу, тем лучше он должен быть защищен. Выполнение этого условия делает элементы нейтральными по отношению к их положению внутри луча, т.е. их перестановка не влияет на интегральный риск соответствующей подсистемы, состоящей только из этого луча.

Решение проблемы состоит в том, чтобы поместить элемент с наименьшей собственной вероятностью успешной атаки в общую для всех лучей вершину-периметр. Это решение не интуитивно, поскольку этот элемент также будет иметь максимальное значение ожидаемого урона среди всех элементов системы. Однако это решение обеспечивает достижение минимального интегрального риска. Приведенный пример иллюстрирует, что собственная вероятность успешной атаки элемента (и, соответственно, безопасность элемента) важнее, чем ожидаемый ущерб, когда речь заходит о периметре.

Полученные результаты могут быть использованы при управлении рисками в сложных сетях. Проведенные численные эксперименты позволяют сделать обоснованный вывод о том, что следует сосредоточиться в первую очередь на снижении уязвимости периметра, а также узлов, непосредственно доступных

из него. Узлы, расположенные дальше, не оказывают существенного влияния на уровень риска системы в целом. Предложенный в работе алгоритм позволяет решать задачу минимизации интегрального риска с любой наперед заданной точностью для систем, имеющих структуру типа «звезда» с одновершинным периметром. В дальнейшем планируется обобщить предложенный алгоритм для систем с древовидной структурой и, в перспективе, с произвольной топологией.

Полученные на данный момент результаты не предполагают широкого применения на практике. Они могут быть использованы, например, для управления рисками в небольших компьютерных сетях, но такие проблемы обычно возникают при защите крупных сетей со сложной топологией. Тем не менее они являются основой для перехода к изучению более сложных структур. Более подробно практические аспекты предполагается обсудить в дальнейших работах, посвященных управлению рисками в сложных сетях произвольной топологии.

### ***Литература***

1. КАЛАШНИКОВ А.О., АНИКИНА Е.В. *Управление информационными рисками сложной системы с использованием механизма «когнитивной игры»* // Вопросы кибербезопасности. – 2020. – № 4(38). – С. 2–10.
2. КАЛАШНИКОВ А.О., АНИКИНА Е.В. *Управление рисками сложной сети на основе обобщенной арбитражной схемы* // Вопросы кибербезопасности. – 2022. – № 1(47). – С. 95–101.
3. ШИРОКИЙ А.А. *Учет влияния структуры сложной системы при управлении рисками* // Управление большими системами: сборник трудов. – 2024. – Вып. 107. – С. 88–106.
4. BLOCH F., JACKSON M.O., TEBALDI P. *Centrality measures in networks* // Soc Choice Welf. – 2023. – Vol. 61. – P. 413–453. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s00355-023-01456-4>

5. BODKHE U., MEHTA D., TANWAR S. et al. *A survey on decentralized consensus mechanisms for cyber physical systems* // IEEE Access. – 2020. – No. 8. – P. 54371–54401.
6. CAJUEIRO D.O., ANDRADE R.F. *Controlling self-organized criticality in complex networks* // Eur. Phys. J. B. – 2010. – Vol. 77, No. 2. – P. 291–296.
7. CHEN B., CAO L. *An optimized algorithm for calculating the average path length of complex network* // Proc. of the 10th Int. Symposium on Computational Intelligence and Design (ISCID) Hangzhou, China, 9–10 December 2017. – Vol. 1. – P. 334–337.
8. CHEN C., IYENGAR G., MOALLEMI C.C. *An axiomatic approach to systemic risk* // Manag. Sci. – 2013 – Vol. 59, No. 6. – P. 1373–1388.
9. CRIADO R., ROMANCE M. *Structural vulnerability and robustness in complex networks: different approaches and relationships between them* // Handbook of optimization in complex networks. – New York, NY: Springer, 2012. – P. 3–36.
10. DEGEFU D.M., HE W., YUAN L. *Monotonic bargaining solution for allocating critically scarce transboundary water* // Water Resour. Manag. – 2017. – Vol. 31, No. 9. – P. 2627–2644.
11. DING D., TANG Z., WANG Y. et al. *Secure synchronization of complex networks under deception attacks against vulnerable nodes* // Appl. Math. Comput. – 2021. – Vol. 399. – e126017.
12. FREITAS S., YANG D., KUMAR S. et al. *Graph Vulnerability and Robustness: A Survey* // IEEE Trans. Knowl. Data Eng. – 2022. – Vol. 35, No. 6. – P. 5915–5934.
13. HOFFMANN H., PAYTON D.W. *Optimization by self-organized criticality* // Sci. Rep. – 2018. – Vol. 8, No. 1. – P. 1–9.
14. JALILI M., PERC M. *Information cascades in complex networks* // J. Complex Netw. – 2017. – Vol. 5, No. 5. – P. 665–693.

15. KALAI E., SMORODINSKY M. *Other solutions to Nash's bargaining problem* // *Econometrica*. – 1975. – Vol. 43, No. 3. – P. 513–518.
16. KANYOU C., KOUOKAM E., EMVUDU Y. *Structural network analysis: Correlation between centrality measures* // *Proc. of the African Conf. on Research in Computer Science (CARI) Yaounde, Dschang, Cameroon, 22 September – 3 October 2022*. – hal-03714191.
17. KOCAREV L. (Ed.) *Consensus and synchronization in complex networks*. – Berlin/Heidelberg, Germany: Springer, 2013.
18. NASH Z. *The bargaining problem* // *Econometrica*. – 1950. – Vol. 18, No. 2. – P. 155–162.
19. NASH Z. *Two-person cooperative games* // *Econometrica*. – 1953. – Vol. 21, No. 1. – P. 128–140.
20. NOWZARI C., PRECIADO V.M., PAPPAS G.J. *Analysis and control of epidemics: A survey of spreading processes on complex networks* // *IEEE Control Syst. Mag.* – 2016. – Vol. 36, No. 1. – P. 26–46.
21. PU H., LI Y., MA C. *Topology analysis of Lanzhou public transport network based on double-layer complex network theory* // *Physica A*. – 2022. – Vol. 592. – e126694.
22. SAXENA A., IYENGAR S. *Centrality measures in complex networks: A survey* // *arXiv preprint*. – 2020. – arXiv:2011.07190.
23. LIU X., ZHANG M., FIUMARA G. et al. *Complex Network Hierarchical Sampling Method Combining Node Neighborhood Clustering Coefficient with Random Walk* // *New Gener. Comput.* – 2022. – Vol. 40, No. 3. – P. 765–807.
24. RADULESCU A., EVANS D., AUGUSTIN A.-D. et al. *Synchronization and Clustering in Complex Quadratic Networks* // *Neural Comput.* – 2024. – Vol. 36, No. 1. – P. 75–106.

25. SHIROKY A., KALASHNIKOV A. *Mathematical Problems of Managing the Risks of Complex Systems under Targeted Attacks with Known Structures* // Mathematics. – 2021. – No. 9(19). – e2468.
26. SIMAS T., CORREIA R.B., ROCHA L.M. *The distance backbone of complex networks* // J Complex Netw. – 2021. – Vol. 9, No. 6. – cnab021.
27. SUAREZ O.J., VEGA C.J., ELVIRA-CEJA S. et al. *Sliding-mode pinning control of complex networks* // Kybernetika. – 2018. – Vol. 54, No. 5. – P. 1011–1032.
28. XING W., SHI P., AGARWAL R.K. et al. *A survey on global pinning synchronization of complex networks* // J. Franklin Inst. – 2019. – Vol. 356, No. 6. – P. 3590–3611.
29. WANG C., XIA Y. *Robustness of complex networks considering attack cost* // IEEE Access. – 2020. – No. 8. – P. 172398–172404.
30. WANG H., WANG J., LIU Q. et al. *Identifying key spreaders in complex networks based on local clustering coefficient and structural hole information* // New J. Phys. – 2023. – Vol. 25, No. 12. – e123005.
31. WANG S., LIU J. *Designing comprehensively robust networks against intentional attacks and cascading failures* // Inf. Sci. – 2019. – No. 478. – P. 125–140.
32. WANG Y., FAN H., LIN W. et al. *Growth, collapse and self-organized criticality in complex networks* // Sci. Rep. – 2016. – Vol. 6, No. 1. – P. 1–12.
33. ZHANG Q., TSENG L.. *Fault-tolerant Consensus in Anonymous Dynamic Network* // arXiv preprint. – 2024. – arXiv:2405.03017.
34. ZHAO J., WANG Y., DENG Y. *Identifying influential nodes in complex networks from global perspective* // Chaos Solitons Fractals. – 2020. – Vol. 133. – e109637.
35. ZHAO L.H., WEN S., LI C. et al. *A Recent Survey on Control for Synchronization and Passivity of Complex Networks* // IEEE Trans. Netw. Sci. Eng. – 2022. – No. 9. – P. 4235–4254.

## **IMPACT OF INTERNAL CONFIGURATION ON OVERALL RISK IN COMPLEX SYSTEMS, EXAMINED THROUGH THE RISK REDUCTION PROBLEM IN A SYSTEM OF STAR-SHAPED STRUCTURE**

**Alexander Shiroky**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., Senior researcher (shiroky@ipu.ru).

*Abstract: This paper explores how the internal structure of a complex system affects its overall risk. Addressing risk management challenges often requires considering structural effects such as risk transfer and failure propagation. The study examines how the positioning of elements within a predefined star-shaped structure affects the overall risk of the system. The author shows that analytically solving the issue of optimal element placement to minimize risk in this configuration is not feasible and introduces an algorithm with bounded errors to tackle this problem. When considering equal expected damages from a potential attack on any element, the author provides upper bounds for the relative error of the proposed algorithm and suggests a method for quick risk assessment in systems with a “star” configuration. Additionally, he has derived an exact solution for the optimal placement problem when the risks of the elements share a specific ratio. The obtained results will be used in further research for the resolution of an ambiguous problem in more intricate structures, particularly tree-like structures, with subsequent generalization to complex networks of arbitrary topology.*

**Keywords:** complex systems, risk, system’s structure, risk control, risk minimizing algorithms, problem of optimal elements placement.

УДК 519

ББК 22.18

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.О. Калашиниковым.*

*Поступила в редакцию 25.10.2024.*

*Дата опубликования 31.01.2025.*