УДК 517.977
ББК 22.193

МЕТОД НЕЛОКАЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ В ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ТЕРМИНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

Булдаев А.С.[2], Трунин Д.О.[3]
(Бурятский государственный университет, Улан-Удэ)

Разработан новый подход к решению полиномиальных по состоянию задач оптимального управления с терминальными ограничениями. Предлагаемый метод обеспечивает нелокальное улучшение управления с выполнением всех терминальных ограничений на каждой итерации, не использует процедуру слабого или игольчатого варьирования управления и имеет возможность строго улучшать неоптимальные управления, удовлетворяющие принципу максимума.

Ключевые слова: задача оптимального управления, терминальные ограничения, нелокальное улучшение.

1. Введение

В работах [1, 2, 6] в классе линейных и полиномиальных по состоянию задач оптимального управления без функциональных ограничений были построены методы нелокального улучшения, основанные на нестандартных формулах приращения функционала без остаточных членов разложений. Отсутствие операции

---

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 07-01-90101, 08-01-00945).*

[2] *Александр Сергеевич Булдаев, доктор физико-математических наук, профессор (buldaev@mail.ru).*
[3] *Дмитрий Олегович Трунин, ассистент (hint@rambler.ru).*

слабого или игольчатого варьирования управлений на каждой итерации и возможность улучшения управлений, удовлетворяющих принципу максимума, обуславливают повышенную эффективность построенных методов.

В данной статье предлагается метод нелокального улучшения допустимых управлений в полиномиальных по состоянию задачах оптимального управления с терминальными ограничениями. Нелокальность улучшения управления с учетом выполнения всех ограничений обеспечивается ценой решения специальной краевой задачи, которая существенно проще краевой задачи принципа максимума. Разработанный метод имеет возможность улучшать управления, удовлетворяющие принципу максимума, за счет неединственности решения краевой задачи улучшения.

2. Постановка задачи

Рассматривается специальная полиномиальная по состоянию и линейная по управлению задача оптимального управления с одним терминальным ограничением:

(1) $\dot{x} = A(x,t)u + b(x,t),\ \ x(t_0) = x^0,\ u = u(t) \in U,\ \ t \in T = \left[t_0,\ t_1\right],$

(2) $\Phi(u) = \left\langle c, x(t_1) \right\rangle \to \min,$

(3) $x_1(t_1) = x_1^1,$

в которой $x = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ – вектор состояния; $u = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t))$ – вектор управления; интервал T фиксирован, $x^0 \in R^n$, $x_1^1 \in R$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ заданы, причем $c_1 = 0$. Матричная функция $A(x, t)$ и вектор-функция $b(x, t)$ предполагаются полиномиальными по x степени $l \geq 1$ и непрерывными по t на множестве $R^n \times T$.

В качестве доступных управлений рассматривается множество V кусочно-непрерывных функций со значениями в выпуклом компактном множестве $U \subset R^m$:

$$V = \left\{ u \in PC^m(T) : u(t) \in U,\ t \in T \right\}.$$

Для каждого доступного управления $v \in V$ обозначим решение задачи Коши (1) при $u = v(t)$ через $x(t, v)$, $t \in T$.

Определим множество допустимых управлений

$$W = \left\{ u \in V : x_1(t_1, u) = x_1^1 \right\}.$$

Общая полиномиальная по состоянию и линейная по управлению задача оптимального управления с функциональными ограничениями-равенствами, в которой функционалы, задающие цель и ограничения, имеют соответственно вид

$$\Phi_0(u) \to \min, \ \ \Phi_i(u) = 0, \ \ i = 1,...,s, \ \ s \geq 1,$$

$$\Phi_i(u) = \varphi_i(x(t_1)) + \int_T (d_i(x,t) + \langle g_i(x,t), u \rangle) dt, \ i = 0,...,s,$$

сводится к задаче вида (1)-(3) с возможным увеличением размерности вектора состояния и степени полиномиальности.

Предполагается, что функции $\varphi_i(x)$, $i = 0, \ldots, s$ являются многочленами степени $l_1 \geq 1$ на R^n, функции $d_i(x, t)$, $g_i(x, t)$, $i = 0, \ldots, s$, полиномиальны по x степени $l_1 \geq 1$ и непрерывны по t на $R^n \times T$.

Для задачи (1)-(3) функция Понтрягина с сопряженной переменной $p \in R^n$ имеет вид

$$H(p,x,u,t) = H_0(p,x,t) + \langle H_1(p,x,t), u \rangle,$$

где $H_0(p,x,t) = \langle p, \ b(x,t) \rangle$, $H_1(p,x,t) = A(x,t)^T p$.

Рассмотрим нормальный функционал Лагранжа с множителем $\lambda \in R$:

$$L(u,\lambda) = \langle c, x(t_1) \rangle + \lambda \left(x_1(t_1) - x_1^1 \right).$$

В соответствии с [1, 2] для приращения функционала Лагранжа

$$\Delta_v L(u,\lambda) = L(v,\lambda) - L(u,\lambda)$$

на паре доступных управлений u^0, v имеет место формула

$$(4) \quad \Delta_v L(u^0,\lambda) = -\int_T \left\langle H_1(p(t,u^0,v,\lambda), x(t,v), t), \ v(t) - u^0(t) \right\rangle dt.$$

Здесь $p(t, u^0, v, \lambda)$, $t \in T$ – решение модифицированной сопряженной системы

(5) $\dot{p} = -H_x - \frac{1}{2!}\langle H_x, z\rangle_x - \ldots - \frac{1}{l!}\Big\langle \ldots \Big\langle \langle H_x, z\rangle_x, z\Big\rangle_x \ldots, z\Big\rangle_x$,

(6) $p_1(t_1) = -\lambda$,

(7) $p_i(t_1) = -c_i, \ \ i = \overline{2,n}$,

в которой частные производные по x подсчитываются при значениях аргументов $x = x(t, u^0)$, $u = u^0(t)$, $z = x(t, v) - x(t, u^0)$.

Отметим, что при $l = 1$ модифицированная сопряженная система совпадает со стандартной сопряженной системой и имеет вид

$$\dot{p} = -H_x(p, x, u, t).$$

Пусть $\psi(t, v, \lambda)$, $t \in T$ – решение стандартной сопряженной системы с начальными условиями (6), (7) при $x = x(t, v)$, $u = v(t)$. Очевидно, что выполняется равенство

$$p(t, v, v, \lambda) = \psi(t, v, \lambda), \ \ t \in T.$$

Для управления $u^0 \in V$ и параметра $\alpha > 0$ образуем аналогично [2, 6] вектор-функцию

$$u^\alpha(p, x, t) = P_U\left(u^0(t) + \alpha H_1(p, x, t)\right), \ p \in R^n, x \in R^n,$$

где P_U – оператор проектирования на множество U в евклидовой норме.

Функция $u^\alpha(p, x, t)$ непрерывна по совокупности (p, x) на $R^n \times R^n$ и кусочно-непрерывна по $t \in T$, причем имеет место оценка [2, 6]:

(8) $\left\langle H_1(p, x, t), \ u^\alpha(p, x, t) - u^0(t)\right\rangle \ge \frac{1}{\alpha}\left\| u^\alpha(p, x, t) - u^0(t)\right\|^2$.

Регулярный принцип максимума для допустимого управления u^0 при некотором $\lambda \in R$ с помощью отображения u^α представляется в форме

(9) $u^0(t) = u^\alpha\left(\psi(t, u^0, \lambda), x(t, u^0), t\right), \ t \in T, \ \alpha > 0$.

Для выполнения регулярного принципа максимума достаточно проверить условие (9) хотя бы для одного $\alpha > 0$.

3. Метод нелокального улучшения

Поставим задачу улучшения управления $u^0 \in W$: найти управление $v \in W$ со свойством $\Phi(v) \le \Phi(u^0)$.

Метод нелокального улучшения.

1. Для заданного $\alpha > 0$ найдем решение $(x(t), p(t))$, $t \in T$ краевой задачи

$$\dot{x} = A(x,t)u^{\alpha}(p,x,t) + b(x,t), \quad t \in T\ ,$$

$$x(t_0) = x^0\ ,\ x_1(t_1) = x_1^1\ ,$$

$$(10)\quad \dot{p} = -H_x - \frac{1}{2!}\left\langle H_x, z\right\rangle_x - \ldots - \frac{1}{l!}\left\langle \ldots\left\langle\left\langle H_x, z\right\rangle_x, z\right\rangle_x \ldots, z\right\rangle_x\ ,$$

$$p_i(t_1) = -c_i\ ,\quad i = \overline{2,n}\ ,$$

где частные производные по x подсчитываются при значениях аргументов $x = x(t, u^0)$, $u = u^0(t)$, и $z = x(t) - x(t, u^0)$.

2. Сформируем управление

$$v(t) = u^{\alpha}(p(t), x(t), t),\ t \in T.$$

Предположим, что решение $(x(t), p(t))$, $t \in T$ краевой задачи (10) (возможно, не единственное) существует на T. Понятно, что $x(t) = x(t, v)$, $t \in T$ и $v \in W$.

Докажем свойство улучшения для выходных управлений.

Действительно, решение $p(t)$, $t \in T$ является решением системы дифференциальных уравнений (5) при $x = x(t, u^0)$, $u = u^0(t)$, $z = x(t, v) - x(t, u^0)$ и удовлетворяет краевому условию (7).

Обозначим $\bar{\lambda} = -p_1(t_1)$, тогда $p(t) = p(t, u^0, v, \bar{\lambda})$, $t \in T$.

Из формулы приращения (4) и соотношения (8) следует, что выходное управление v обеспечивает невозрастание функционала Лагранжа с оценкой

$$L(v,\bar{\lambda}) - L(u^0,\bar{\lambda}) \le -\frac{1}{\alpha}\int_T \left\| v(t) - u^0(t)\right\|^2 dt.$$

Следовательно, в силу допустимости управлений u^0, v, получаем

$$(11)\quad \Phi(v) - \Phi(u^0) \le -\frac{1}{\alpha}\int_T \left\| v(t) - u^0(t)\right\|^2 dt.$$

Рассмотрим множество управлений на выходе процедуры улучшения:

$$W(u^0) = \left\{ v \in W : v(t) = u^\alpha(p(t,u^0,v,\overline{\lambda}), x(t,v), t), \;\; t \in T \right\}.$$

Это множество характеризуется поточечным соотношением в пространстве управлений

$$v(t) = u^\alpha(p(t,u^0,v,\overline{\lambda}), x(t,v), t), \;\; t \in T.$$

Очевидным следствием этого соотношения является следующее утверждение.

Лемма. Управление $u^0 \in W(u^0)$ тогда и только тогда, когда управление $u^0 \in W$ удовлетворяет регулярному принципу максимума (9).

Таким образом, краевая задача улучшения (10) для управления $u^0 \in W$, удовлетворяющего регулярному принципу максимума, имеет хотя бы одно решение

$$x(t) = x(t,u^0), \; \psi(t) = \psi(t,u^0,\overline{\lambda}), \; t \in T,$$

где $\overline{\lambda} = -\psi_1(t_1)$.

Регулярный принцип максимума (ПМ) на языке процедуры улучшения можно сформулировать следующим образом.

ПМ. Если допустимое управление u^0 оптимально, то в регулярном случае $u^0 \in W(u^0)$.

В терминах решения краевой задачи (10) данное утверждение можно переформулировать следующим образом.

ПМ. Если допустимое управление u^0 оптимально, то в регулярном случае пара $(x(t, u^0), \psi(t, u^0, \overline{\lambda}))$, $t \in T$ является решением краевой задачи (10).

Следствие 1. Если $u^0 \in W$ не удовлетворяет регулярному принципу максимума и краевая задача (10) имеет решение, то выходное управление $v \in W(u^0)$ строго улучшает u^0 с оценкой (11).

Следствие 2. Если $u^0 \in W$ удовлетворяет регулярному принципу максимума, то в случае неединственности решения краевой задачи (10) выходное управление $v \in W(u^0)$, $v \neq u^0$ строго улучшает u^0 с оценкой (11).

Процедура нелокального улучшения позволяет сформулировать новое необходимое условие оптимальности, усиливающее регулярный принцип максимума.

Условие А. Если допустимое управление u^0 оптимально, то в регулярном случае

$$W(u^0) = \{u^0\}.$$

В терминах решения краевой задачи (10) условие А формулируется следующим образом.

Условие А. Если допустимое управление u^0 оптимально, то в регулярном случае пара $(x(t, u^0),\ \psi(t, u^0,\ \bar{\lambda}\ )),\ t \in T$ является единственным решением краевой задачи (10).

Очевидно, что регулярный принцип максимума является следствием условия А.

Выделим свойства краевой задачи (10), упрощающие ее по сравнению с краевой задачей принципа максимума.

1. В задаче (10) уравнения для сопряженных переменных являются полиномиальными степени $(l - 1)$ по x и линейными по p.
2. В задаче (10) правые части для фазовых переменных являются непрерывными по совокупности аргументов (p, x) на $R^n \times R^n$.

Предложенная процедура указывает на принципиальную возможность осуществления нелокального улучшения в рассматриваемом классе задач с сохранением всех терминальных ограничений. Трудоемкость построения улучшающего управления с выполнением всех терминальных ограничений определяется трудоемкостью решения непрерывной краевой задачи улучшения. Подчеркнем нелокальность улучшения: улучшаемое и улучшающее управления не связаны параметром близости.

Процедура имеет возможность улучшения управлений, удовлетворяющих принципу максимума, за счет неединственности решения краевой задачи улучшения.

В случае, когда краевая задача улучшения не имеет решения, рассматриваемая процедура не действует и следует перейти к другим методам улучшения.

4. Вычислительные аспекты

Для решения краевой задачи (10) может быть применен подход возмущений, разработанный в [1].

Проиллюстрируем этот метод для квадратичной ($l = 2$) по состоянию задачи (1)-(3).

Соответствующая краевая задача улучшения имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = A(x,t)u^{\alpha}(p,x,t) + b(x,t), \quad t \in T\ , \\
&x(t_0) = x^0\ ,\ x_1(t_1) = x_1^1\ , \\
(12)\quad &\dot{p} = -H_x(p, x(t,u^0), u^0(t), t) - \\
&-\frac{1}{2}H_{xx}(p, x(t,u^0), u^0(t), t)\left(x - x(t,u^0)\right), \\
&p_i(t_1) = -c_i\ ,\quad i = \overline{2,n}\ .
\end{aligned}
$$

Введем возмущенную краевую задачу с параметром $\varepsilon \in [0,\ 1]$:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = A(x,t)u^{\alpha}(p,x,t) + b(x,t), \quad t \in T\ , \\
&x(t_0) = x^0\ ,\ x_1(t_1) = x_1^1\ , \\
(13)\quad &\dot{p} = -H_x(p, x(t,u^0), u^0(t), t) - \\
&-\frac{\varepsilon}{2}H_{xx}(p, x(t,u^0), u^0(t), t)\left(x - x(t,u^0)\right), \\
&p_i(t_1) = -c_i\ ,\quad i = \overline{2,n}\ .
\end{aligned}
$$

Исходная краевая задача (12) соответствует значению параметра возмущения $\varepsilon = 1$. При $\varepsilon = 0$ задача называется невозмущенной и имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = A(x,t)u^{\alpha}(p,x,t) + b(x,t), \quad t \in T \\
&x(t_0) = x^0\ ,\ x_1(t_1) = x_1^1\ , \\
(14)\quad &\dot{p} = -H_x(p, x(t,u^0), u^0(t), t)\ , \\
&p_i(t_1) = -c_i\ ,\quad i = \overline{2,n}\ .
\end{aligned}
$$

При этом сопряженная система совпадает со стандартной сопряженной системой.

Решение невозмущенной задачи (14) сводится к решению алгебраического уравнения с одним неизвестным.

Действительно, для параметра $a \in R$ обозначим через $p^{\alpha}(t, a)$, $t \in T$, решение задачи Коши

$$\dot{p} = -H_x(p, x(t,u^0), u^0(t), t),$$

$$p_1(t_1) = a, \quad p_i(t_1) = -c_i, \quad i = \overline{2,n}.$$

Рассмотрим задачу Коши с непрерывной правой частью:

$$\dot{x} = A(x,t)u^{\alpha}(p^{\alpha}(t,a), x, t) + b(x,t), \quad t \in T,$$

$$x(t_0) = x^0.$$

Пусть $x^{\alpha}(t, a)$, $t \in T$ – решение этой системы. Пара $(x^{\alpha}(t, a)$, $p^{\alpha}(t, a))$, $t \in T$ является решением невозмущенной краевой задачи (14) тогда и только тогда, когда выполняется условие

(15) $x_1^{\alpha}(t_1, a) = x_1^1$.

Таким образом, невозмущенная краевая задача сводится к алгебраическому уравнению (15) относительно параметра $a \in R$.

Представим уравнение (15) в операторной форме:

$$G^{\alpha}(a) = 0.$$

Для решения данного уравнения можно применить метод локализации корней с последующим применением метода бисекции [5]. При условии обоснования непрерывности оператора G^{α} на интервале локализации, метод бисекции обеспечивает глобальную сходимость к решению.

Для решения возмущенной краевой задачи (13) при $\varepsilon \in (0, 1]$ аналогично [1] можно применить следующий итерационный процесс с индексом $k \geq 0$:

$$\dot{x}^{k+1} = A(x^{k+1}, t)u^{\alpha}(p^{k+1}, x^{k+1}, t) + b(x^{k+1}, t), \quad t \in T,$$

$$x^{k+1}(t_0) = x^0, \; x_1^{k+1}(t_1) = x_1^1,$$

(16) $$\dot{p}^{k+1} = -H_x(p^{k+1}, x(t,u^0), u^0(t), t) -$$

$$-\frac{\varepsilon}{2} H_{xx}(p^k(t), x(t,u^0), u^0(t), t)\left(x^k(t) - x(t,u^0)\right),$$

$$p_i^{k+1}(t_1) = -c_i, \quad i = \overline{2,n}.$$

В качестве начального приближения $(x^0(t), p^0(t))$, $t \in T$, при $k = 0$ можно выбрать решение невозмущенной задачи (14).

На каждой итерации процесса (16) решается задача, по трудоемкости аналогичная невозмущенной (14).

Условия сходимости итерационного процесса (16) при фиксированном значении параметра $\varepsilon \in [0, 1]$ к решению возмущенной краевой задачи при достаточно малых $\alpha > 0$ обосновываются аналогично [1].

Расчет возмущенных задач начинается с расчета исходной краевой задачи, соответствующей значению параметра возмущения $\varepsilon = 1$. Если соответствующий итерационный процесс (16) не сходится, то уменьшают значение параметра ε до значения, обеспечивающего сходимость алгоритма (16) при достаточно малых $\alpha > 0$. Далее полученное решение возмущенной задачи принимается в качестве начального приближения алгоритма (16) и значение параметра возмущения ε увеличивают. Такими действиями можно улучшить практическую сходимость алгоритма возмущений при выборе достаточно малых $\alpha > 0$.

На практике итерационный процесс возмущений (16) продолжается до первого улучшения целевого функционала

$$\Phi(u^k) \le \Phi(u^0), \quad u^k(t) = u^\alpha(p^k(t), x^k(t), t), \ t \in T, \ k \ge 0.$$

Далее расчет повторяется для краевой задачи улучшения нового управления.

Таким образом, в целом формируется метод возмущений для решения рассматриваемого класса полиномиальных задач оптимального управления, который обеспечивает нелокальное улучшение управлений с сохранением всех терминальных ограничений на каждой итерации.

5. Примеры

Пример 1. Улучшение управления, удовлетворяющего принципу максимума.

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\dot{x}_1 = u,\ \ \dot{x}_2 = -\frac{1}{2}x_1^{\ 2},\ \ |u(t)| \le 1,\ t \in T = [0,\ \pi],$$

$$x_1(0) = 0,\ \ x_2(0) = 0,$$

$$\Phi(u) = x_2(\pi) \to \min,\quad x_1(\pi) = 0\ .$$

В данном случае

$$H = p_1 u - \frac{1}{2}p_2 x_1^{\ 2},\ \ H_0 = -\frac{1}{2}p_2 x_1^{\ 2},\ H_1 = p_1\,.$$

Поставим задачу улучшения допустимого управления $u^0(t) \equiv 0$, которому соответствуют фазовые траектории $x_1(t, u^0) \equiv 0$, $x_2(t, u^0) \equiv 0$, $t \in T$ и значение целевого функционала $\Phi(u^0) = 0$.

Тогда отображение u^α с параметром $\alpha > 0$ принимает вид

$$u^\alpha(p,x,t) = \begin{cases} 1, & \alpha p_1 > 1, \\ -1, & \alpha p_1 < -1, \\ \alpha p_1, & -1 \le \alpha p_1 \le 1. \end{cases}$$

Положим значение параметра проектирования $\alpha = 1$ и применим процедуру нелокального улучшения. Соответствующая краевая задача улучшения, имеющая вид

$$\dot{x}_1 = u^\alpha(p,x,t),\ \ \dot{x}_2 = -\frac{1}{2}x_1^{\ 2},$$

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ \ x_1(\pi) = 0\ ,$$

$$\dot{p}_1 = p_2 x_1,\ \ \dot{p}_2 = 0,\quad p_2(\pi) = -1\ ,$$

сводится к краевой задаче меньшей размерности:

$$\dot{x}_1 = u^\alpha(p,x,t)\ ,\ \ x_1(0) = 0,\ \ x_1(\pi) = 0\ ,$$

$$\dot{p}_1 = -x_1\ .$$

Отметим, что пара $(p_1(t) \equiv 0, x_1(t) = x_1(t, u^0) \equiv 0)$ является решением краевой задачи. Таким образом, допустимое управление u^0 удовлетворяет регулярному принципу максимума с множителем Лагранжа $\overline{\lambda} = 0$. При этом управление u^0 является особым.

Покажем, что существует решение краевой задачи улучшения, отличное от указанного. Подберем решение, соответствующее условию $|p_1(t)| \le 1$, $t \in T$.

В этом случае краевая задача улучшения принимает вид

$$\dot{x}_1 = p_1, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1(\pi) = 0,$$

$$\dot{p}_1 = -x_1.$$

Очевидно, что данная краевая задача имеет решения вида

$$x_1(t) = C\sin t, \quad p_1(t) = C\cos t, \quad t \in T,$$

где C – произвольная постоянная, $|C| \le 1$.

Таким образом, например, допустимое управление $v(t) = \cos t$ с соответствующими фазовыми траекториями $x_1(t, v) = \sin t$, $x_2(t, v) = \dfrac{1}{8}(\sin 2t - 2t)$, $t \in T$, строго улучшает исходное особое управление u^0: $\Phi(v) = -\dfrac{\pi}{4} < \Phi(u^0) = 0$.

Пример 2. Рассматривается линейная по состоянию задача оптимизации рекламной стратегии фирмы [7]:

$$\dot{x} = au(1-x) - bx, \; x(0) = x^0, \quad u(t) \in \left[0,\, u^+\right], \; t \in T = [0,\, t_1],$$

$$\int_T e^{-rt}(cx - u)dt \to \max,$$

$$x(t_1) = x^1.$$

Здесь $x = x(t)$ – количество произведенного товара (объем выпуска); a, b, c, r, x^1 – постоянные параметры. Управление $u(t) \in [0, u^+]$, $t \in T$ определяет расходы фирмы на рекламу товара.

Ставится задача максимизации суммарной прибыли фирмы за период времени T с учетом расходов на рекламу.

Для удобства задача преобразовывалась к терминальной форме

$$\dot{x}_1 = au(1-x_1) - bx_1, \quad \dot{x}_2 = e^{-rt}(u - cx_1), \quad t \in \left[0,\, t_1\right],$$

$$x_1(0) = x^0, \; x_2(0) = 0, \; u(t) \in \left[0,\, u^+\right],$$

$$\Phi_0(u) = x_2(t_1) \to \min,$$

$$\Phi_1(u) = x_1(t_1) - x^1 = 0.$$

Расчеты проводились при следующих значениях параметров задачи:

$a = 2$, $b = 0{,}5$, $c = 2$, $r = 1$, $x^0 = 0{,}75$, $x^1 = 0{,}75$, $u^+ = 1$, $t_1 = 1$.

Для решения задачи применялись разработанный метод нелокального улучшения (МНУ) и известный метод штрафов, состоящий в решении последовательности квадратичных по состоянию задач без ограничений с квадратичным по состоянию целевым функционалом

$$\Phi(u) = \Phi_0(u) + \gamma\Phi_1^{\,2}(u),$$

где $\gamma > 0$ – параметр штрафа.

Для расчета вспомогательных задач без ограничений в методе штрафов применялись следующие алгоритмы:

1) метод условного градиента (МУГ) [3] с параметрическим поиском улучшающего управления по правилу золотого сечения;

2) метод игольчатой линеаризации (МИЛ) [6], в котором параметрический поиск улучшающего управления производится методом золотого сечения.

В качестве начального приближения во всех методах выбиралось $u^0(t) \equiv 1$.

Численное решение фазовых и сопряженных задач Коши производилось методом Рунге-Кутта переменного (5-6) порядка и шага. Абсолютная погрешность численного интегрирования задач Коши задавалась равной 10^{-10}. Значения вычисленных управляющих, фазовых и сопряженных переменных в процессе расчета запоминались в узлах заданной равномерной сетки с шагом d дискретизации, равным 0,001, на интервале $T = [0, 1]$. В промежутках между соседними узлами сетки значение управления принималось постоянным и равным значению в левом узле.

Точность решения вспомогательной задачи параметрического поиска улучшающего управления в методах МИЛ и МУГ с помощью процедуры золотого сечения определялась сужением интервала локализации точки минимума функционала по параметру в 10^6 раз по сравнению с начальным интервалом.

Метод возмущений для решения краевой задачи улучшения в МНУ применялся до первого улучшения управления. Для решения вспомогательного алгебраического уравнения в методе возмущений применялся алгоритм бисекции с точностью 10^{-6}.

Практическим критерием остановки расчета задачи во всех методах являлось условие

$$\left|\Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^k)\right| \le M \left|\Phi(u^k)\right|,$$

где $k \ge 0$ – номер итерации, $M = 10^{-6}$.

Эффективность методов оценивалась суммарным количеством расчетных фазовых и сопряженных задач Коши. Сравнительные качественные и количественные результаты расчетов представлены в таблице 1.

В таблице 1 введены следующие обозначения: Φ_0^* – расчетное значение целевого функционала задачи; Φ_1^* – расчетное значение модуля терминального функционала; N – суммарное количество фазовых и сопряженных задач Коши. В примечании указано значение параметра штрафа γ (для МИЛ и МУГ) и проекционного параметра α (для МНУ).

Расчетное управление во всех методах с точностью до десятых долей единицы времени является кусочно-постоянным с точкой переключения в момент $t = 0{,}5$ с минимального значения на максимальное.

Таблица 1

Метод	Φ_0^*	Φ_1^*	N	Примечание
МУГ	–0,5883189	$7{,}9371\times10^{-5}$	3639	100
МИЛ	–0,5885496	$4{,}3197\times10^{-5}$	1218	100
МНУ	–0,5882504	$1{,}6391\times10^{-5}$	64	10

В рамках рассматриваемой задачи разработанный метод нелокального улучшения показывает существенно лучший результат по эффективности расчета, в том числе по показателю суммарной трудоемкости, который включает пробные расчеты по подбору параметров, обеспечивающих сходимость методов (параметр штрафа в методах МУГ, МИЛ и проекционный параметр для МНУ).

Пример 3. Рассматривается квадратичная по состоянию задача оптимального введения иммуноглобулинов в рамках простейшей модели иммунного процесса при вирусном заболевании [4] (без запаздывания):

$$\dot{x}_1 = h_1 x_1 - h_2 x_1 x_2 - u x_1 ,$$

$$\dot{x}_2 = h_4 (x_3 - x_2) - h_8 x_1 x_2 ,$$

$$\dot{x}_3 = h_3 x_1 x_2 - h_5 (x_3 - 1) ,$$

$$\dot{x}_4 = h_6 x_1 - h_7 x_4 ,$$

$$x_1(0) = x_1^0 > 0 , \quad x_2(0) = 1 , \quad x_3(0) = 1 , \quad x_4(0) = 0 , \ t \in T = [0,\ t_1] ,$$

$$\Phi_0(u) = x_1(t_1) \to \min ,$$

$$\int_T x_4(t)dt - m = 0 , \quad m > 0 .$$

Переменная $x_1 = x_1(t)$ характеризует инфекционное начало (вирус), переменные $x_2 = x_2(t)$, $x_3 = x_3(t)$ – защитные силы организма (антитела, плазмоклетки), $x_4 = x_4(t)$ – степень поражения организма, $h_i > 0$, $i = 1, \ldots, 8$ – постоянные коэффициенты. Управление $u(t) \in [0,\ \bar{u}\ ]$, $t \in T = [0, t_1]$ характеризует интенсивность введения иммуноглобулинов, нейтрализующих вирус.

Начальные условия имитируют ситуацию заражения организма малой начальной дозой вирусов x_1^0 в начальный момент времени $t_0 = 0$. Управление $u(t) \equiv 0$ соответствует отсутствию управляющего воздействия.

Значения коэффициентов для имитации острого вирусного заболевания взяты из работы [4] и имеют следующие значения

$h_1 = 2$, $h_2 = 0{,}8$, $h_3 = 10^4$, $h_4 = 0{,}17$,

$h_5 = 0{,}5$, $h_6 = 10$, $h_7 = 0{,}12$, $h_8 = 8$, $m = 0{,}1$

Начальная доза заражения x_1^0 моделировалась значением 10^{-6}.

При данном наборе параметров единица времени соответствует одним суткам. Максимальная интенсивность введения иммуноглобулинов моделировалась значением $\bar{u}$ = 0,5. Временной интервал T выбирался равным 20 суткам: $t_1 = 20$.

Ставится задача с помощью введения иммуноглобулинов добиться минимальной концентрации вирусов к концу курса лечения на заданном интервале времени при ограничении суммарной нагрузки поражения организма.

Интегральное условие введением дополнительной переменной по правилу

$$\dot{x}_5 = x_4, \quad x_5(0) = 0$$

сводилось к терминальному условию

$$\Phi_1(u) = x_5(t_1) - m = 0 .$$

Для решения поставленной задачи применялись методы МУГ, МИЛ и МНУ, которые использовались для расчета задачи в предыдущем примере.

В качестве начального приближения во всех методах выбиралось $u(t) \equiv 0$.

Абсолютная точность решения фазовых и сопряженных задач Коши методом Рунге-Кутта переменного (5-6) порядка и шага задавалась равной 10^{-10}. Шаг равномерной сетки, в узлах которой запоминались значения вычисленных управляющих, фазовых и сопряженных переменных в процессе расчета выбирался равным 0,001.

Точность решения вспомогательной задачи параметрического поиска улучшающего управления в методах МИЛ и МУГ с помощью процедуры золотого сечения и точность решения вспомогательного алгебраического уравнения в методе возмущений для решения краевой задачи улучшения метода МНУ принимались равными 10^{-5}.

Отметим, что применение известного метода стрельбы [5] для решения краевой задачи улучшения в методе МНУ приводило к вычислительной неустойчивости расчета, обусловленной различием характерных времен изменения переменных в модели на два порядка и достаточно большим интервалом времени T.

Практическим критерием остановки расчета задачи во всех методах выбиралось условие

$$\left|\Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^k)\right| \le M \left|\Phi(u^k)\right|, \ \Phi(u) = \Phi_0(u) + \gamma\Phi_1^{\,2}(u) ,$$

где $k \ge 0$ – номер итерации, $M = 10^{-5}$.

Трудоемкость методов оценивалась количеством затраченных расчетных задач Коши. Сравнительные качественные и количественные результаты расчетов представлены в таблице 2, где Φ_0^* – расчетное значение целевого функционала задачи; Φ_1^* – расчетное значение терминального функционала; N – суммарное количество задач Коши. В примечании указывается значение параметра штрафа γ (для МИЛ и МУГ) и проекционного параметра α (для МНУ).

Таблица 2

Метод	Φ_0^*	Φ_1^*	N	Примечание
МУГ	$2{,}686698\times10^{-19}$	$1{,}85486\times10^{-5}$	464	10^{-10}
МИЛ	$1{,}142279\times10^{-20}$	$5{,}84472\times10^{-5}$	167	10^{-10}
МНУ	$1{,}172261\times10^{-20}$	$1{,}53479\times10^{-5}$	88	1000

Выбор относительно малых значений параметра штрафа γ связан с малыми характерными значениями целевого функционала. Подбор достаточно большого проекционного параметра α определялся из условия повышения скорости сходимости метода и производился с точностью до порядка, начиная с $\alpha = 1$.

Расчетное управление с точностью до суток во всех методах является кусочно-постоянной функцией с точкой переключения с максимального значения на минимальное в момент $t = 5$ и обратного переключения в момент $t = 14$.

Сравнительные результаты расчетов показывают, что в рамках модельной задачи управления иммунным процессом построенный метод позволяет достигнуть заметного снижения трудоемкости решения по сравнению с известными локальными методами улучшения МИЛ и МУГ.

6. Заключение

Построенный метод реализует нелокальное улучшение допустимых управлений без процедуры слабого или игольчатого варьирования с выполнением всех терминальных ограничений.

Нелокальность улучшения достигается ценой решения непрерывной краевой задачи, которая существенно проще краевой задачи принципа максимума. Используемый подход возмущений сводит краевую задачу улучшения к последовательности чередующихся задач Коши для фазовых и сопряженных переменных.

В целом разработан новый метод возмущений для решения рассматриваемого класса полиномиальных задач оптимального управления, характеризуемый следующими свойствами.

1. Выполнение всех терминальных ограничений на каждой итерации улучшения.
2. Нелокальность улучшения управления.
3. Отсутствие трудоемкой операции слабого или игольчатого варьирования при поиске улучшающего управления.
4. Возможность улучшения управлений, удовлетворяющих принципу максимума.

Эти свойства являются существенными факторами повышения эффективности решения и получения практически реализуемых управлений нелинейных задач оптимального управления с терминальными ограничениями.

Литература

1. БУЛДАЕВ А. С. *Нелокальное улучшение управляемых процессов методом возмущений*. – Сер.: Оптимизация и управление. – Вып. 10. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2004. – 52 с.
2. БУЛДАЕВ А. С. *Проекционные процедуры нелокального улучшения линейно управляемых процессов* // Известия вузов. Математика. – 2004. – №1. – С. 18-24.
3. ВАСИЛЬЕВ О. В. *Лекции по методам оптимизации*. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 1994. – 340 с.
4. МАРЧУК Г. И. *Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и алгоритмы*. – М.: Наука, 1991. – 304 с.

5. САМАРСКИЙ А. А., ГУЛИН А. В. *Численные методы*. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
6. СРОЧКО В. А. *Итерационные методы решения задач оптимального управления*. – М.: Физматлит, 2000. – 160 с.
7. SETHI S. P., THOMSON G. L. *Optimal control theory. Applications to management science*. – USA, Boston, 1981. – 370 p.

METHOD OF NON-LOCAL IMPROVEMENT IN POLYNOMIAL OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH TERMINAL CONSTRAINTS

Alexander Buldaev, Buryat State University, Ulan-Ude, Doctor of Science, professor (buldaev@mail.ru).
Dmitry Trunin, Buryat State University, Ulan-Ude, assistant (hint@rambler.ru).

Abstract: A new approach is designed to solve polynomial in state optimal control problems with terminal constraints. The proposed method provides the non-local control improvement with all terminal constraints satisfied on each iteration without needle or weak variation and has an opportunity to improve extreme controls.

Keywords: optimal control problem, terminal constraints, non-local improvement.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии С.Н.Васильевым