УДК 007
ББК 22.213

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Чечурин Л. С.[1]
(*Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»*)

Предлагаются достаточные алгебраические условия устойчивости систем управления с периодически нестационарным коэффициентом усиления обратной связи. Результат получен на основе теоремы Харитонова для интервальных полиномов и достаточного критерия Бонджиорно для нестационарных систем. Эффективность метода иллюстрируется примером.

Ключевые слова: линейные периодически нестационарные системы, устойчивость, теорема Харитонова

1. Введение

Один из важных разделов теории робастных систем управления относится к анализу линейных стационарных систем, параметры которых неизвестны, но принадлежат определенным интервалам. Если описание такой системы получено в форме характеристического полинома $D(p)$ с интервальными коэффициентами, то вопрос о робастности характеристического полинома имеет решение в форме необходимого и достаточного критерия устойчивости – теоремы Харитонова. Робастность

[1] *Леонид Сергеевич Чечурин, кандидат технических наук, доцент (cepreu4@gmail.com).*

проверяется гурвицевостью четырех определенным образом составленных полиномов [3]. На комплексной плоскости при частоте ω^* каждому такому полиному соответствует угловая точка прямоугольника семейства возмущенных годографов $D(j\omega^*)$. Далее критерий Михайлова гарантирует, что устойчивость всех четырех полиномов будет означать и устойчивость всего семейства. Поскольку устойчивость можно проверить алгебраическими критериями, мы получаем алгебраический критерий робастной устойчивости интервальных стационарных систем. Тот факт, что из четырех годографов ближайшим к началу координат будет только один, позволяет после дополнительных построений и вовсе свести проверку робастности к анализу одного годографа (критерий Цыпкина-Поляка). Отметим также обобщение анализа В. Л. Харитонова на случай полиномов с комплексными интервальными коэффициентами (см., например, [6]). Несмотря на достигнутые значительные результаты, направление исследования интервальных систем продолжает оставаться в центре внимания, поскольку содержит ряд не имеющих простого решения задач. Современный и детальный обзор состояния дел в этой области можно найти в [2].

С инженерной точки зрения кажется полезным иметь возможность оценить робастность в случае, когда у интервальной системы снимается предположение о стационарности. Ограничимся случаем, когда коэффициент усиления обратной связи может изменяться внутри указанного интервала по некоторому неизвестному периодическому закону (см. рис. 1, слева). Системы рассматриваемого класса достаточно широко распространены, кроме того, к такому описанию сводятся и некоторые случаи описания систем в форме дифференциальных уравнений с периодическими нестационарными коэффициентами. Обычно это означает переход к качественно другому классу систем – периодически нестационарным, где анализ устойчивости проводится специфическими и достаточно сложными инструментами [1].

В работе показывается, как на основании достаточного критерия устойчивости Бонджиорно можно построить простой достаточный алгебраический критерий устойчивости указанного класса нестационарных систем в форме модифицированной теоремы Харитонова. Критерий имеет и простую графическую интерпретацию, позволяющую непосредственно иллюстрировать эффект периодического изменения интервального параметра.

Опубликованная в [5] идея существенно доработана, снабжена комментариями, примером расчета границы устойчивости и сравнением результата с полученным из известного критерия и из численного эксперимента.

2. Построение критерия

Рассмотрим систему управления, описываемую уравнением в операторной форме:

(1) $N(p)x(t) + M(p)[a(t)x(t)] = 0,$

где $N(p)$, $M(p)$ – полиномы оператора дифференцирования p, $a(t)$ – периодически нестационарный параметр, т.е.

$$N(p) = b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \ldots + b_1 p + b_0,$$

(2) $M(p)=c_{n-1}p^{n-1} + c_{n-2}p^{n-2} + \ldots + c_1 p + c_0,$

$$a(t) = a_0 + a_{\sim}(t),$$

где a_0 – постоянная составляющая (среднее значение) параметра, $a_{\sim}(t)$ – ограниченная центрированная периодическая составляющая, т.е. $|a_{\sim}(t)| \le a$.

Достаточные условия устойчивости системы (1) представленной в структурной форме с обратной связью на рис. 1 слева, где $W(p) = M(p)/N(p)$, дает частотный критерий Бонджиорно [7], имеющий ясный геометрический смысл. Для устойчивости (1) достаточно того, чтобы при устойчивости стационарной системы (устойчивости $W(j\omega)/(1 + a_0W(j\omega))$ годограф обратной частотной амплитудно-фазовой характеристики $W^{-1}(j\omega)$ не попадал внутрь окружности радиуса a с центром в точке $(–a_0, 0)$ (см. рис. 1, справа). Аналитическое условие этого, очевидно, имеет вид

(3) $|a_0 + W^{-1}(j\omega)| = |a_0 + [N(j\omega)/M(j\omega)]| \ge a.$

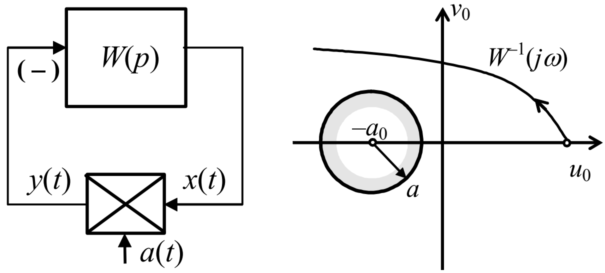

Рис. 1. Структурная схема нестационарной системы управления (слева) и иллюстрация критерия Бонджиорно (справа)

Знак равенства в правой части (3) соответствует критическому случаю, или, если рассматривается параметрическая (относительно размаха колебаний a) задача, уравнению для нахождения критического значения параметра, т.е. уравнению границы достаточной области устойчивости при изменении параметра.

Для нахождения границы допустимых в смысле устойчивости изменений параметра запишем равенство в показательной форме

(4) $W^{-1}(j\omega) = -(a_0 + ae^{j\varphi}) = -(a_0 + a\cos\varphi + ja\sin\varphi)$.

Это равносильно тому, что с учетом обозначений (2) годограф

$$D(j\omega) = N(j\omega) + M(j\omega)[a_0 + a\cos\varphi + ja\sin\varphi]$$

при некотором φ пересекает начало координат. В таком случае по крайней мере один из четырех годографов с интервальными комплексными коэффициентами

$$D(j\omega) = N(j\omega) + M(j\omega)[a_0 \pm a \pm ja]$$

не охватывает начало координат (обходит начало координат слева). Для данного случая мы можем связать этот факт с потерей устойчивости одного из полиномов семейства

(5) $D(p) = d_n p^n + d_{n-1}p^{n-1} + \ldots + d_1 p + d_0 = 0$,

коэффициенты которого имеют вид $d_i = b_i + (a_0 + a\cos\varphi + ja\sin\varphi)c_i$ и их действительные $\operatorname{Re} d_i$ и мнимые $\operatorname{Im} d_i$ части ограничены интервалами $[\alpha_i, \beta_i]$ и $[\lambda_i, \mu_i]$ соответственно, причем

$\alpha_i = b_i + (a_0 + a)c_i,$
$\beta_i = b_i + (a_0 - a)c_i,$
$\lambda_i = a,$
$\mu_i = -a.$

Необходимые и достаточные условия устойчивости интервального полинома с комплексными коэффициентами определяются теоремой Харитонова. Таким образом, доказано

Утверждение. Для устойчивости колебаний периодически нестационарной системы (1) достаточно робастной параметрической (интервальной) устойчивости по φ системы, описываемой характеристическим уравнением (5), устойчивость которой проверяется гурвицевостью восьми полиномов

$$\begin{aligned}
&D_1^+(p) = (\alpha_0 + j\lambda_0) + (\alpha_1 + j\mu_1)p + (\beta_2 + j\mu_2)p^2 + (\beta_3 + j\lambda_3)p^3 + \\
&\qquad + (\alpha_4 + j\lambda_4)p^4 + (\alpha_5 + j\mu_5)p^5 + \ldots, \\
&D_2^+(p) = (\alpha_0 + j\mu_0) + (\beta_1 + j\mu_1)p + (\beta_2 + j\lambda_2)p^2 + (\alpha_3 + j\lambda_3)p^3 + \\
&\qquad + (\alpha_4 + j\mu_4)p^4 + (\beta_5 + j\mu_5)p^5 + \ldots, \\
&D_3^+(p) = (\beta_0 + j\lambda_0) + (\alpha_1 + j\lambda_1)p + (\alpha_2 + j\mu_2)p^2 + (\beta_3 + j\mu_3)p^3 + \\
&\qquad + (\beta_4 + j\lambda_4)p^4 + (\alpha_5 + j\lambda_5)p^5 + \ldots, \\
&D_4^+(p) = (\beta_0 + j\mu_0) + (\beta_1 + j\lambda_1)p + (\alpha_2 + j\lambda_2)p^2 + (\alpha_3 + j\mu_3)p^3 + \\
&\qquad + (\beta_4 + j\mu_4)p^4 + (\beta_5 + j\lambda_5)p^5 + \ldots, \\
&D_1^-(p) = (\alpha_0 + j\lambda_0) + (\beta_1 + j\lambda_1)p + (\beta_2 + j\mu_2)p^2 + (\alpha_3 + j\mu_3)p^3 + \\
&\qquad + (\alpha_4 + j\lambda_4)p^4 + (\beta_5 + j\lambda_5)p^5 + \ldots, \\
&D_2^-(p) = (\alpha_0 + j\mu_0) + (\alpha_1 + j\lambda_1)p + (\beta_2 + j\lambda_2)p^2 + (\beta_3 + j\mu_3)p^3 + \\
&\qquad + (\alpha_4 + j\mu_4)p^4 + (\alpha_5 + j\lambda_5)p^5 + \ldots, \\
&D_3^-(p) = (\beta_0 + j\lambda_0) + (\beta_1 + j\mu_1)p + (\alpha_2 + j\mu_2)p^2 + (\alpha_3 + j\lambda_3)p^3 + \\
&\qquad + (\beta_4 + j\lambda_4)p^4 + (\beta_5 + j\mu_5)p^5 + \ldots, \\
&D_4^-(p) = (\beta_0 + j\mu_0) + (\alpha_1 + j\mu_1)p + (\alpha_2 + j\lambda_2)p^2 + (\beta_3 + j\lambda_3)p^3 + \\
&\qquad + (\beta_4 + j\mu_4)p^4 + (\alpha_5 + j\mu_5)p^5 + \ldots .
\end{aligned} \tag{6}$$

3. Обсуждение

Геометрический смысл сформулированного утверждения лучше всего пояснить на частном случае, когда $M(p) = 1$. Тогда можно прямо указать возмущения стационарного характеристического полинома, вызванные снятием условия стационарности одного из его коэффициентов. Пусть у полинома $D(p)$ свободный член является интервальным стационарным

(7) $D(p, a)=d_n p^n + \ldots + d_1 p + a = 0,$

$\underline{a} \leq a \leq \overline{a}.$

Устойчивость интервального полинома определятся по теореме Харитонова, однако из-за того, что неопределенный параметр только один, возможно непосредственно построить семейство годографов Михайлова. Для частоты ω сечение семейства годографов есть отрезок между $D(j\omega, \underline{a})$ и $D(j\omega, \overline{a})$, параллельный действительной оси. Эта ситуация приведена на рис. 2, где a_0 – центр интервала $[\underline{a}, \overline{a}]$.

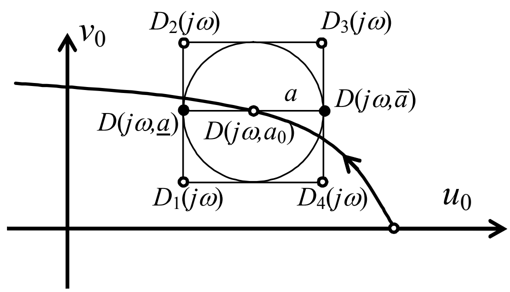

Рис. 2. Построение семейства возмущенных годографов Михайлова для одного интервального коэффициента

Предположим теперь, что $a = a(t) = a_0 + a_{\sim}(t)$. Отнесем a_0 к стационарной части полинома, обозначим его $D(p,a_0)$ и применим критерий Бонджиорно в такой формулировке: для устойчивости (7) достаточно, чтобы на произвольной частоте ω окружность с центром $D(j\omega, a_0)$ и радиусом a не охватывала начало координат (рис. 2). Если вместо окружности использовать описанный около нее квадрат с параллельными осям сторонами, то условия критерия усиливаются, однако мы получаем возможность оценить робастность по теореме Харитонова. Нетрудно видеть, что в данном случае (один интервальный комплексный коэффициент), условия устойчивости сводятся к гурвицевости не восьми, а лишь четырех полиномов $D_{1\text{-}4}(p)$ (6). Рисунок явным образом иллюстрирует принципиальный факт: если интервальность коэффициента характеристического полинома для систем такого вида вызывает возмущения годографа вдоль одной лишь оси, то допущение к этому его нестационарности – уже вдоль двух. Иными словами, вопрос достаточной устойчивости системы, описываемой линейным дифференциальным уравнением с переменным коэффициентом, может быть сведен к вопросу устойчивости стационарного характеристического полинома с (неопределенным по фазе) комплексным коэффициентом.

В случае, когда $M(p)$ является полиномом, критерий остается работоспособным, однако переход к анализу устойчивости с характеристическим полиномом $D(p)$ уже не будет так нагляден, т.к. переменный коэффициент $a(t)$ и его производные войдут в него сложным образом.

Приведенные математические манипуляции дают возможность лучше понять эффект от снятия предположения о стационарности интервального коэффициента усиления обратной связи с точки зрения теории управления. Если линейная динамическая система может быть представлена в форме системы с обратной связью, условие ее устойчивости может быть установлено критерием Найквиста, проверяющим наличие в системе баланса фаз и амплитуд (случай пересечения точки $(-1, 0)$ на комплексной плоскости годографа Найквиста). Интервальность коэффициента усиления обратной связи приведет возмущению годографа разомкнутой системы, проявляющемуся в неравномерном переносе вдоль действительной оси. Нестационарность же этого коэффициента вызовет возмущение годографа уже в обоих направлениях, т.е. вносит в разомкнутую систему дополнительный сдвиг по фазе.

Сформулированный критерий является глобальным, т.е. оценивает устойчивость любых возможных колебаний системы (1). Однако на практике характерные частоты колебаний системы часто предсказуемы. Во-первых, это резонансные частоты $D(j\omega, a_0)$, точнее, резонансная частота, соответствующая преобладающему пику амплитудно-частотной характеристики $|W(j\omega)/(1 + a_0W(j\omega)|$, или частота, определяющая $\|W(j\omega)/(1 + a_0W(j\omega))\|_\infty$. Во-вторых, если частота изменения параметра $a(t)$ задана и равна Ω, то это частоты первого $\Omega/2$, второго Ω, третьего $3\Omega/2$ и т. д. параметрических резонансов системы. В таком случае имеет смысл привести формулировку упрощенного «точечного» критерия устойчивости, сводящегося к проверке гурвицевости четырех полиномов с действительными коэффициентами.

Пусть левая часть (3) достигает минимума на частоте ω_p. Что означает, что на этой частоте годограф $a_0 + W^{-1}(j\omega)$ ближе всего к началу координат, или, что то же самое, на годографе $W(j\omega)/(1 + a_0W(j\omega))$ различим резонанс. Таким образом, для выполнения (3) достаточно его справедливости для частоты ω_p.

Рассмотрим колебания на интересующей нас частоте ω_p. Используем, следуя [4], замену $p = j\omega_p$ и $j = p/\omega_p$, тогда равенство (4) переписывается в виде

$$W^{-1}(p) + [a_0 + a\cos\varphi + (ap/\omega_p)\sin\varphi] = 0,$$

откуда с учетом обозначений (2) следует характеристическое уравнение

$$(8)\quad D(p) = N(p) + M(p)[a_0 + a\cos\varphi + (ap/\omega_p)\sin\varphi] = \\ = d_n p^n + d_{n-1}p^{n-1} + \ldots + d_1p + d_0 = 0.$$

Коэффициенты характеристического полинома, в отличие от (5), действительны и определяются для $i = 1, \ldots, n$

$$(9)\quad d_i = b_i + (a_0 + a\cos\varphi)c_i + (c_{i-1}a/\omega_p)\sin\varphi = \\ = b_i + a_0c_i + a(c_i^2 + c_{i-1}^2\omega_p^{-2})^{1/2}\sin(\varphi + \mathrm{arctg}\, c_i/c_{i-1}\omega_p)$$

и $d_0 = b_0 + (a_0 + a\cos\varphi)c_0$. Таким образом, коэффициенты d_i ограничены и имеют максимальные $\overline{d}_i$ и минимальные $\underline{d}_i$ значения, причем для $i = 1, \ldots, n$

$$(10)\quad \overline{d}_i = b_i + a_0c_i + a(c_i^2 + c_{i-1}^2\omega_p^{-2})^{1/2}, \\ \underline{d}_i = b_i + a_0c_i - a(c_i^2 + c_{i-1}^2\omega_p^{-2})^{1/2},$$

а для $i = 0$

$\underline{d}_0 = b_0 + a_0c_0 - ac_0, \quad \overline{d}_0 = b_0 + a_0c_0 + ac_0.$

Фазу φ можно считать неопределенностью системы. Таким образом, для устойчивости колебаний периодически нестационарной системы (1) достаточно робастной параметрической (интервальной) устойчивости по φ системы, описываемой характеристическим уравнением (8), устойчивость которой проверяется гурвицевостью четырех полиномов

$$\begin{aligned} &D_1(p) = \underline{d}_0 + \underline{d}_1p + \overline{d}_2p^2 + \overline{d}_3p^3 + \underline{d}_4p^4 + \underline{d}_5p^5 + \dots, \\ (11)\quad &D_2(p) = \underline{d}_0 + \overline{d}_1p + \overline{d}_2p^2 + \underline{d}_3p^3 + \underline{d}_4p^4 + \overline{d}_5p^5 + \dots, \\ &D_3(p) = \overline{d}_0 + \overline{d}_1p + \underline{d}_2p^2 + \underline{d}_3p^3 + \overline{d}_4p^4 + \overline{d}_5p^5 + \dots, \\ &D_4(p) = \overline{d}_0 + \underline{d}_1p + \underline{d}_2p^2 + \overline{d}_3p^3 + \overline{d}_4p^4 + \underline{d}_5p^5 + \dots. \end{aligned}$$

4. Пример

Проведем анализ устойчивости динамической системы, описанной характеристическим полиномом

$D(p) = b_2p^2 + b_1p + b,$

где b принадлежит интервалу $[\underline{b}, \overline{b}]$. Пусть b_0 – центр этого интервала, а A – его полудлина, т.е. $b \in [b_0 - A, b_0 + A]$.

Задача эквивалентна анализу устойчивости колебательного звена с обратной связью, имеющей интервальный коэффициент усиления рис. 3, где $a \in [-A, A]$.

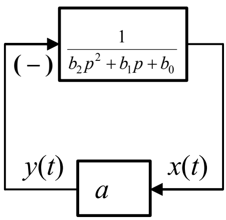

Рис. 3. Структурная схема интервальной системы с обратной связью

Если исследуемая система стационарна, то интервальность коэффициента породит необходимость рассмотреть семейство характеристических полиномов или семейство годографов

Михайлова. В данном случае они строятся сдвигом невозмущенного годографа $D(j\omega, b_0)$ вдоль действительной оси на значения от $-A$ до A. Определим устойчивость системы. Формальное применение для этого теоремы Харитонова в данном случае потребует проверки гурвицевости лишь двух простых полиномов

$$D_1(p) = b_0 - A + b_1p + b_2p^2$$

и

$$D_3(p) = b_0 + A + b_1p + b_2p^2.$$

Теперь снимем условие стационарности коэффициента b, оставив прежними границы его изменения. В соответствии с критерием Бонджиорно в форме (3), для устойчивости достаточно выполнения на любой частоте условия

$$|D(j\omega, b_0)| = |b_0 + b_1j\omega + b_2(j\omega)^2| \geq A.$$

Минимум левой части достигается на (резонансной) частоте

$$\omega_p = \frac{\sqrt{4b_2b_0 - b_1^2}}{2b_2},$$

его значение $|D(j\omega_p, b_0)|$ дает достаточное граничное значение для A:

$$(12)\ A < \frac{b_1}{2b_2}\sqrt{4b_2b_0 - \frac{3}{4}b_1^2}\ .$$

С другой стороны, разрешимость (соответствующего случаю равенства) уравнения границы устойчивости, очевидно, могла бы быть истолкована как наличие такого φ, при котором выполняется

$$D(j\omega, \varphi) = b_0 + b_1j\omega + b_2(j\omega)^2 + A\cos\varphi + jA\sin\varphi = 0.$$

Иными словами, речь идет об устойчивости полинома с комплексным коэффициентом

$$D(p, \varphi) = b_2p^2 + b_1p + b,$$
$$b = b_0 + A\cos\varphi + jA\sin\varphi.$$

Очевидно, изменения действительной и комплексной частей коэффициента связаны, однако для решения вопроса устойчивости достаточно будет считать их независимыми и воспользоваться теоремой Харитонова для интервальных полиномов с комплексными коэффициентами. Соответственно, для устойчивости достаточно гурвицевости четырех полиномов

$$D_1(p) = b_0 - A - jA + b_1p + b_2p^2,$$
$$D_2(p) = b_0 - A + jA + b_1p + b_2p^2,$$
$$D_3(p) = b_0 + A - jA + b_1p + b_2p^2,$$
$$D_4(p) = b_0 + A + jA + b_1p + b_2p^2.$$

Для рассматриваемого случая граница устойчивости по A определится лишь одним полиномом $D_2(p)$, из которого можно получить напрямую алгебраическое условие устойчивости

(13) $-b_1 \pm \mathrm{Re}\,(b_1^2 - 4b_0b_2 + 4Ab_2 - j4b_2A)^{1/2} < 0.$

Наконец, получим «точечную» оценку для частоты $\omega_{\text{р}}$. При этом годограф возмущенного полинома имеет вид (8):

$$D(j\omega, \varphi) = b_0 + A\cos\varphi + (b_1 + A\sin\varphi/\omega_{\text{р}})j\omega + b_2(j\omega)^2 = 0.$$

Последнее означает, что на некоторой частоте ω возмущения годографа $D(j\omega, \varphi)$ пересекают начало координат. Для того, чтобы этого не произошло, в соответствии с критерием Михайлова, достаточно, чтобы при любом φ был устойчив полином

$$D(p, \varphi) = d_2p^2 + d_1p + d_0,$$

где

$$d_2 = b_2,$$
$$d_1 = b_1 + A\sin\varphi/\omega_{\text{р}},$$
$$d_0 = b_0 + A\cos\varphi.$$

Коэффициенты d_1 и d_0 стационарны, принадлежат интервалам $d_0 \in [b_0 - A, b_0 + A]$, $d_1 \in [b_1 - A/\omega_{\text{р}}, b_1 + A/\omega_{\text{р}}]$ и связаны через φ. Для применения теоремы Харитонова будем считать их независимыми и проверим (более) достаточное условие устойчивости нестационарной системы, сформулированное, однако, в алгебраической форме: требуется гурвицевость четырех полиномов

$$D_1(p) = b_0 - A + (b_1 - A/\omega_{\text{р}})p + b_2p^2,$$
$$D_2(p) = b_0 - A + (b_1 + A/\omega_{\text{р}})p + b_2p^2,$$
$$D_3(p) = b_0 + A + (b_1 + A/\omega_{\text{р}})p + b_2p^2,$$
$$D_4(p) = b_0 + A + (b_1 - A/\omega_{\text{р}})p + b_2p^2.$$

В данном случае допустимая достаточная граница для A находится из этого условия (также по одному полиному) немедленно:

(14) $A < b_1\omega_р = \dfrac{b_1}{2b_2}\sqrt{4b_2b_0 - b_1^2}$.

Сравнение в явном виде с (12) показывает степень консервативности новой оценки.

Проведем примерный расчет, задавшись следующими значениями параметров: $b_2 = 1$, $b_1 = 0,1$, $b \in [1 - A, 1 + A]$. При стационарном b, очевидно, полином устойчив для любого $A < 1$. При $b = b(t)$ имеем

$$\omega_р = \frac{\sqrt{4 - 0,1^2}}{2} \approx 0,99875\ (\textit{рад/с}),$$

и достаточную оценку по (12):

$$A < \left| D(j\omega_р, b_0) \right| = \frac{b_1}{2b_2}\sqrt{4b_2b_0 - \frac{3}{4}b_1^2} \approx 0,09991.$$

Достаточная оценка по (13):

$$A < 0,0944$$

Достаточная оценка по (14):

$$A < \frac{b_1}{2b_2}\sqrt{4b_2b_0 - b_1^2} \approx 0,09987.$$

Численный эксперимент, проведенный в пакете *Matlab*, показывает, что устойчивость данной нестационарной системы теряется в форме возбуждения первого параметрического резонанса лишь при $A > 0,16$ для наихудшего в смысле устойчивости закона изменения $a(t)$ – меандра с частотой $2\omega_р$. Разъяснение этого эффекта и методику уточнения границы устойчивости на основе метода гармонической стационаризации дано в [5].

Интересно сравнить на данном примере приведенный в [1] алгебраический достаточный критерий устойчивости для интервальных нестационарных систем. Для рассматриваемого примера в принятых обозначениях он запишется как

$$\alpha + A\rho R < 0,$$

где α – действительная часть ближайшего к мнимой оси корня $D(j\omega, b_0)$; ρ – модуль наибольшего корня $D(j\omega, b_0)$; R – сумма модулей вычетов $W(p) = 1/D(p, b_0)$. В нашем примере α=–0,05, $\rho = 1$, $R \approx 1{,}0012$, соответственно, приближенно получаем, что для устойчивости системы достаточно выполнения

$$A < 0{,}049,$$

что в практически в два раза осторожнее предлагаемых в статье оценок.

5. Выводы

В работе сформулирован алгебраический достаточный критерий устойчивости класса систем управления с интервальным нестационарным коэффициентом усиления обратной связи и класса сводящихся к такому представлению некоторых систем, описываемых дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами. Несмотря на бо́льшую по сравнению с критерием Бонджиорно консервативность, он кажется представляющим интерес для теории и практики. Во-первых, оценка устойчивости колебаний нестационарной системы проводится проверкой гурвицевости нескольких стационарных полиномов. Это, помимо упрощения оценки устойчивости, указывает приложение обобщения теоремы Харитонова об устойчивости интервальных полиномов с комплексными коэффициентами. Во-вторых, критерий позволяет наглядно оценить то, какой «ущерб» устойчивости может нанести нестационарность коэффициента усиления обратной связи, а также оценить допустимый в смысле устойчивости интервал его изменения.

Автор благодарит А. А. Трембу за ряд замечаний и советов.

Литература

1. *Нестационарные системы автоматического управления: анализ, синтез и оптимизация* / Под ред. К. А. Пупкова,

Н. Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2007. – 631 с.
2. ПОЛЯК Б. Т., ЩЕРБАКОВ П. С. *Робастная устойчивость и управление*. М.: Наука, 2002. – 303 с.
3. ХАРИТОНОВ В. Л. *Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений* // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 1, вып. 11. – С. 2086-2088.
4. ХЛЫПАЛО Е. И. *Расчет и проектирование нелинейных корректирующих устройств в автоматических системах*. Л.: Энергоиздат, 1982. – 272 с.
5. ЧЕЧУРИН Л. С. *Устойчивость нестационарных систем управления с периодически изменяющимися коэффициентами* // Изв. вузов. Приборостроение. – 2007. – Т. 50, №. 10. – С. 23-25.
6. BHATTACHARYYA S. P., CHAPELLAT H., KEEL L. H. *Robust Control: the Parametric Approach.* – Upper Saddle River: Prentice Hall PTR, 1995. – 625 p.
7. BONGIORNO, J. J., JR. *An extension of the Nyquist-Barkhausen stability criterion to linear lumped parameter systems with time-varying elements*, IEEE Trans. – 1963. – AC-8, P. 166-172

ALGEBRAIC SUFFICIENT STABILITY CONDITION FOR PERIODICAL TIME-VARIANT CONTROL SYSTEMS

Leonid Chechurin, St.Petersburg State Polytechnical University, St.Petersburg, Cand.Sc., Dept. Head (cepreu4@gmail.com).

Abstract: Algebraic sufficient stability condition for periodical time-variant control systems is given. The result is based on Kharitonov Theorem for interval systems and Bongiorno sufficient condition for time-variant system stability. The efficiency of the method is illustrated by an example.

Keywords: linear periodical time-variant systems, stability, Kharitonov theorem.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии П.С. Щербаковым