

УДК 62.50  
ББК Ж 30

## ГЛОБАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕУСТОЙЧИВОГО МАЯТНИКА С МАХОВИЧНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ <sup>1</sup>

Андриевский Б. Р. <sup>2</sup>

*(Институт проблем машиноведения Российской академии наук,  
Санкт-Петербург)*

*Решается задача глобальной стабилизации неустойчивого состояния равновесия маятника с маховичным приводом. Рассматриваемая система состоит из физического маятника с маховиком на конце, ось вращения которого параллельна оси вращения маятника. Маховик приводится в движение электрическим двигателем постоянного тока, управляемым от компьютера. Предложен и численно исследован переключающийся алгоритм управления. На начальной стадии работы алгоритма (при значительных отклонениях от заданного состояния неустойчивого равновесия) происходит раскачивание маятника по энергетическому алгоритму скоростного градиента. При попадании состояния маятника в заданную окрестность происходит переключение алгоритма на стабилизацию маятника. Стабилизация осуществляется алгоритмом управления со скользящим режимом. Представлены результаты численного моделирования, показывающие эффективность предложенного алгоритма и возможность достижения цели управления при относительно малой величине управляющего напряжения.*

Ключевые слова: стабилизация, неустойчивый маятник, энерге-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №06-08-01386 и научной программы Президиума РАН №22 «Процессы управления» (проект 1.8).

<sup>2</sup> Андриевский Борис Ростиславич, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, (bandri@yandex.ru).

тический метод, скоростной градиент, скользящие режимы, переключающийся алгоритм.

## **Введение**

Задачи управления колебательными механическими системами имеют значительный теоретический интерес и возрастающее практическое значение. Для проведения научных исследований и учебного процесса в области мехатроники и систем автоматического управления разрабатывается лабораторное оборудование, методическое, алгоритмическое и программное обеспечение. Широкое распространение находят лабораторные маятниковые учебно-исследовательские установки. Маятниковые системы характеризуются существенно нелинейной динамикой, что позволяет изучать и наглядно демонстрировать достаточно сложные нелинейные эффекты, такие как неустойчивость, хаос, синхронизацию, эффект Зоммерфельда, раскрывает необходимость применения современных подходов к управлению, таких как ляпуновские и энергетические методы, нейросетевые и нечеткие системы и других, см. [2, 15, 16, 19, 21, 22, 25].

Настоящая статья посвящена задаче управления маятником с инерционным маховиком: требуется привести маятник в верхнее (неустойчивое) положение и стабилизировать в этом положении при произвольных начальных условиях при ограниченном управлении. Рассматриваемая конструкция состоит из маятника и расположенного на нем маховика. Маховик приводится во вращение управляемым электродвигателем. Управление движением маятника осуществляется за счет изменения направления и скорости вращения инерционного маховика, что в свою очередь достигается изменением вращения приводного двигателя под действием управляющего напряжения питания в цепи якоря. Это напряжение задается в соответствии с поступающими от компьютера командами и ограничено по модулю. Рассматривается задача приведения маятника в вертикальное (неустойчивое) положение и стабилизации в этом положении при произвольном начальном состоянии системы, например — когда маятник вначале находится в нижнем

(устойчивом) положении, а маховик не вращается.

Такая механическая система описана в ряде публикаций (например [6, 7, 21, 24, 25]) и входит в лабораторное оборудование некоторых российских и зарубежных университетов. В качестве примера на рис.1 приведена фотография маятника с маховиком, поставляемого фирмой *Mechatronics Systems Inc.* Эта установка входит в Учебно-исследовательский комплекс «Манипуляционные и маятниковые системы» Санкт-Петербургского Межвузовско-академического центра коллективного пользования «Мехатронные и мобильные комплексы». Другим примером является маятниковая лабораторная установка Института механики МГУ, описанная в [6, 7].



Рис. 1. Фото маятниковой установки с инерционным маховиком

В работе [24] рассматриваются два метода синтеза алгоритмов управления (раскачки и стабилизации) маятника с маховиком: *линеаризация обратной связью и пассивфикация*<sup>3</sup>. В [24] показано, что рассматриваемая система локально линеаризуема обратной связью с помощью некоторого локального диффеоморфизма в пространстве состояний и нелинейной обратной связи.

<sup>3</sup> Описание этих методов можно найти в [8].

Для стабилизации неустойчивого состояния маятника рассматривается также метод модального управления по линеаризованной модели. Для раскачки маятника в работе [24] используется *энергетический подход* в сочетании с частичной линеаризацией обратной связью и обеспечения пассивности нуль-динамики полученной системы. Для переключения между режимами раскачки и стабилизации используется коммутация соответствующих алгоритмов.

В [7] аналогичная маятниковая система используется как устройство для тестирования алгоритма стабилизации неустойчивых объектов ограниченным по модулю управлением. В [7] разработаны и экспериментально исследованы алгоритмы стабилизации неустойчивого состояния равновесия рассматриваемой системы при «малых» (около  $20^\circ$ ) начальных отклонениях от этого состояния. Предложенный в статье [7] метод применим к линейным объектам управления, передаточные функции которых имеют один положительный полюс, а вещественные части остальных полюсов отрицательны. Этот метод обеспечивает максимально возможную область притяжения состояния равновесия при заданном ограничении на управление. Закон управления имеет вид линейной обратной связи с насыщением. В [7] показано, что такой вид управления обеспечивает стабилизацию состояния равновесия для всех начальных условий, при которых попадание в это состояние возможно в принципе (в этом смысле авторы [7] говорят об «оптимальности» предложенного управления), но формирование сигнала управления значительно менее трудоемко, чем при синтезе управления оптимального по быстродействию. Метод работы [7] может найти применение в разных задачах стабилизации неустойчивых объектов, например — при управлении многоступенчатыми ракетами на начальных участках работы каждой ступени, когда угловые возмущения особенно велики.

В предлагаемой статье рассматривается задача стабилизации маятника в верхнем положении при *произвольных* начальных условиях. Как и в работе [24], здесь используется коммутация

алгоритмов решения частных подзадач: приведения угла отклонения маятника в некоторую окрестность требуемого состояния равновесия и стабилизации данного состояния. Для достижения первой цели в работе строится алгоритм скоростного градиента [12, 13] с энергетической целевой функцией [2, 4, 11]. Для достижения второй цели применяется регулятор со скользящим режимом. Кроме того, что в данной статье, в отличие от работы [7], решается задача управления при произвольных начальных условиях. Используемый в данной статье метод управления ранее частично изложен в работе [1].

Сведения о конструкции маятниковой системы с инерционным ротором и ее математическая модель приведены в разделе 2. В разделе 3 рассматривается подзадача-1 — приведение маятника в заданную окрестность требуемого состояния. Подзадаче-2 — стабилизации маятника в верхнем положении — посвящен раздел 4. В разделе 5 описывается алгоритм коммутации, и приводятся результаты численного исследования работы системы управления с переключающимся алгоритмом. Там же рассматривается задача управления при априорной неопределенности параметров маятниковой системы. Для решения этой задачи в применении к системе нелинейных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, предложен и численно исследован алгоритм идентификации с неявной настраиваемой моделью.

## **1. Конструкция и математическая модель маятника**

Следуя работе [7], дадим краткое описание конструкции маятника Института механики МГУ и приведем его математическую модель. Рассматривается однозвенный маятник, снабженный маховиком (рис. 1, 2). Маятник может совершать вращение в вертикальной плоскости. Его ось вращения расположена горизонтально и закреплена на неподвижном основании, а ось вращения маховика находится на маятнике. Эти оси параллельны между собой. Маховик приводится во вращение электродвигателем постоянно-го тока, который вместе с редуктором смонтирован на маятнике.

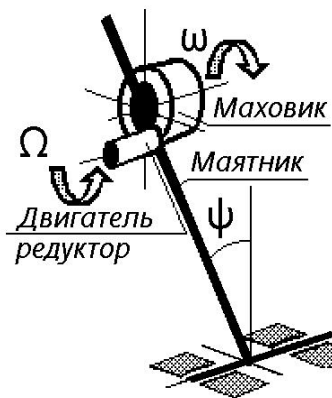


Рис. 2. Схематическое изображение маятниковой установки

Управление двигателем выполняется через интерфейсные устройства от персонального компьютера. Для измерения углов поворота маятника и маховика предусмотрены импульсные датчики.

Уравнения динамики маятника с маховиком приведены в работе [7] и имеют вид

$$(1) \quad \begin{cases} J\chi\ddot{\psi} + (J_r + \chi J_m)\dot{\omega} = (M b + m h)g\chi \sin \psi, \\ (J_r + \chi J_m)\chi\ddot{\psi} + (J_r + \chi^2 J_m)\dot{\omega} = \chi T, \end{cases}$$

где  $\psi$  — угол крена маятника;  $\omega$  — скорость вращения маховика относительно маятника;  $J_m$  — момент инерции маховика относительно его главной оси (оси вращения);  $J_r$  — момент инерции ротора электродвигателя;  $J = J_v + J_r + J_m + mh^2$  — полный момент инерции системы маятник–маховик–двигатель, где через  $J_v$  обозначен момент инерции маятника относительно его оси вращения;  $g$  — ускорение свободного падения;  $M$ ,  $m$  — массы маятника и двигателя;  $b$ ,  $h$  — расстояния от оси вращения до центров масс маятника и маховика (с ротором двигателя);  $T$  — момент электромагнитных сил, приложенных к ротору двигателя;  $\chi$  — коэффициент редукции,  $\omega = \chi\Omega$ , где  $\Omega$  — скорость вращения ротора двигателя. С учетом противо-ЭДС реакции

якоря, величину момента  $T$  можно приближенно (пренебрегая электромагнитной постоянной времени) представить в виде

$$(2) \quad T = c_1 u - c_2 \omega \chi^{-1},$$

где  $u$  — управляющее напряжение в цепи якоря двигателя;  $c_1$ ,  $c_2$  — параметры двигателя.

Уравнения (1), (2) описывают нелинейную динамическую систему третьего порядка с переменными состояниями  $\{\psi, \dot{\psi}, \omega\}$  и входным управляющим воздействием  $u$ . Вертикальному (неустойчивому) положению равновесия соответствует значение  $\psi^* = 0$  (точнее,  $\psi^* = \pm 2\pi n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ).

Нетрудно заметить, что линеаризация (1), (2) относительно верхнего положения равновесия приводит к неустойчивой системе третьего порядка с одним положительным вещественным корнем. Очевидно, что линеаризованная система не может быть стабилизирована ограниченным по величине управлением при произвольном начальном угле крена. Специфика нелинейной динамики маятника позволяет, однако, такую стабилизацию осуществить. Для этого используем описанные ниже алгоритмы решения отдельных подзадач, связанные через алгоритм коммутации.

## **2. Алгоритмы приведения состояния маятника в заданную область**

Рассмотрим задачу приведения маятника в окрестность требуемого состояния равновесия при произвольных начальных условиях, одновременно требуя, чтобы скорость его движения в верхней точке была близка к нулю. Для синтеза алгоритма используем метод скоростного градиента с энергетической целевой функцией, кратко описанный ниже.

### **2.1. Метод скоростного градиента с энергетической целевой функцией**

Большинство задач, возникающих при синтезе нелинейных систем управления, относятся к задачам стабилизации и слежения. В таких задачах цель управления можно выразить через отклонение текущего состояния объекта  $x(t)$  от некоторой задан-

ной (например, с помощью эталонной модели) траектории  $x_*(t)$ . В настоящее время растет интерес к другим задачам управления хаотическими и периодическими колебаниями, которые не приводятся непосредственно к традиционным задачам стабилизации и слежения. Характерным примером является задача раскочки колебаний маятника [14, 15, 20, 26]. Для решения таких задач нашел применение *энергетический подход* [20]. В ряде работ [2, 4, 11, 17, 18] на основе сочетания с *методом скоростного градиента* [12, 13] дано развитие и обобщение этого подхода. Приведем основные положения метода.

Рассмотрим объект управления, заданный уравнениями состояния

$$(3) \quad \dot{x} = F(x, u, t), \quad t \geq 0,$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния объекта,  $u \in \mathbb{R}^m$  — вектор входных (управляющих) переменных,  $F(\cdot) : \mathbb{R}^{n+m+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывно дифференцируемая по  $x$  вектор-функция. Требуется найти закон управления  $u(t) = U\{x(s), u(s) : 0 \leq s \leq t\}$ , обеспечивающий выполнение следующей цели управления:

$$(4) \quad Q_t \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

где  $Q_t$  — некоторый целевой функционал,  $Q_t = Q(x(s), u(s) : 0 \leq s \leq t)$ .

Для синтеза алгоритма скоростного градиента (*СГ-алгоритма*) для локального целевого функционала  $Q_t = Q(x(t), t)$ , заданного через гладкую скалярную целевую функцию  $Q(x, t) \geq 0$ , используем функцию  $\omega(x, u, t)$ , представляющую собой скорость изменения  $Q_t$  в силу системы (3). Нетрудно видеть,

что  $\omega(x, u, t) \triangleq (\nabla_x Q)^T F(x, u, t)$ . В соответствии с методом скоростного градиента [12, 13] сигнал управления должен изменяться в направлении антиградиента функции  $\omega(x, u, t)$  по  $u$ . *Комбинированные* СГ-алгоритмы, в которых сочетаются интегральная и сигнальная составляющие, имеют вид [5, 13]:

$$(5) \quad \frac{d}{dt}(u + \psi(x, u, t)) = -\Gamma \nabla_u \omega(x, u, t),$$



где  $\psi(\cdot)$  — некоторая функция, удовлетворяющая условию псевдоградиентности  $\psi^T \nabla_u \omega \geq 0$ ,  $\Gamma$  — симметричная неотрицательно определенная  $m \times m$ -матрица коэффициентов усиления ( $\Gamma = \Gamma^T \geq 0$ ). Основными частными видами алгоритма (5) являются СГ-алгоритм в дифференциальной форме [12, 13]

$$(6) \quad \dot{u}(t) = -\Gamma \nabla_u \omega(x, u, t), \quad \Gamma = \Gamma^T > 0$$

и СГ-алгоритм в конечной форме

$$(7) \quad u = \psi(x, u, t),$$

из которого в свою очередь получаются следующие «пропорциональный» и релейный алгоритмы:

$$(8) \quad u = -\Gamma \nabla_u \omega(x, u, t), \quad \Gamma = \Gamma^T > 0,$$

$$(9) \quad u = -\Gamma_1 \operatorname{sign}(\nabla_u \omega(x, u, t)), \quad \Gamma_1 = \operatorname{diag}\{\gamma_i\}, \quad \gamma_i > 0,$$

(здесь функция  $\operatorname{sign}(z)$  от вектора  $z$  понимается поэлементно).

Основная идея, лежащая в основе алгоритмов (5)-(9) состоит в уменьшении функции  $\dot{Q}$  вдоль траекторий замкнутой системы. В результате при достаточно большом  $t$  и при выполнении ряда дополнительных условий имеет место  $\dot{Q} < 0$  и целевая функция  $Q_t$  убывает.

Совместим метод скоростного градиента с энергетическим подходом, взяв в качестве целевой функции  $Q(x, t)$  меру отклонения энергии управляемого процесса от заданного значения. Следуя [4, 11, 17], продемонстрируем применение этого приема для задач управления энергией колебаний консервативных систем.

Консервативные модели возникают во многих технических приложениях, когда силы вязкого или кулоновского трения в системе пренебрежимо малы. Примерами консервативных систем служат идеальный ротор (маховик), физический маятник, конический маятник, космический аппарат вдали атмосферы. Такие модели можно представить в канонической гамильтоновой форме:

$$(10) \quad \dot{p} = -\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T + Bu, \quad \dot{q} = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^T,$$

где  $p, q \in \mathbb{R}^n$  — векторы обобщенных координат и импульсов,  $n$  — число степеней свободы;  $H = H(p, q)$  — гамильтониан (полная энергия системы), который считаем непрерывно дифференцируемой функцией своих аргументов;  $u = u(t)$  — входное управляющее воздействие (обобщенная сила);  $B(p, q)$  —  $m \times n$  матричная функция,  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \leq n$ .

Определим цель управления как асимптотическое стремление полной энергии системы  $H(p, q)$  к заданному значению  $H_*$ :  $\lim_{t \rightarrow \infty} H(p(t), q(t)) = H_*$ . Эту цель можно представить в виде (4),

если принять  $x = \text{col}\{p, q\}$ , и задать целевую функцию

$$(11) \quad Q(p, q) = \frac{1}{2}(H(p, q) - H_*)^2.$$

Согласно описанной выше схеме скоростного градиента, вычислим функцию  $\dot{Q}$  — производную по времени от (11) вдоль

траекторий системы (10). Получим  $\dot{Q} = (H - H_*) \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)^T B u$ .

СГ-алгоритмы (8), (9) принимают тогда вид:

$$(12) \quad u = -\gamma(H - H_*)B^T \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right),$$

$$(13) \quad u = -\gamma \text{sign} \left( (H - H_*)B^T \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right) \right).$$

Далее в статье метод скоростного градиента с энергетической целевой функцией используется для приведения маятника в окрестность заданного (вертикального) положения при произвольных начальных условиях с помощью ограниченного управления в обратной связи.

## 2.2. Синтез и исследование СГ-алгоритма с энергетической целевой функцией

Рассмотрим сначала задачу приведения маятника в заданную окрестность требуемого состояния равновесия. Получим закон управления, при котором из произвольного начального состояния маятник приобретает энергию колебаний, соответствующему верхнему (неустойчивому) состоянию равновесия. Используем для этого управление энергией колебаний и воспользуемся описанным в предыдущем параграфе методом. Получим алгоритмы скоростного градиента, взяв в качестве целевой функции (4) квадрат отклонения полной энергии системы  $H(x)$  от заданного значения  $H_*$  [4, 17, 23].

Кинетическая энергия  $E$  рассматриваемой механической системы находится из выражения [7]

$$(14) \quad E = 0,5(J_v \dot{\psi}^2 + J_r(\dot{\psi} + \Omega)^2 + J_m(\dot{\psi} + \omega)^2 + mh^2\dot{\psi}^2),$$

ее потенциальная энергия  $\Pi(\psi)$  имеет вид

$$(15) \quad \Pi(\psi) = (Mb + mh)g \cos \psi.$$

Таким образом, полная энергия  $H = H(\psi, \dot{\psi}, \omega) = E(\psi, \dot{\psi}, \omega) + \Pi(\psi)$  определяется выражением

$$(16) \quad \begin{aligned} H(\psi, \dot{\psi}, \omega) = & (Mb + mh)g \cos \psi + 0,5(J + J_m + mh^2)\dot{\psi}^2 + \\ & + (J_r\chi^{-1} + 2J_m)\omega\dot{\psi} + (J_m + 0,5J_r\chi^{-2})\omega^2. \end{aligned}$$

Выберем в качестве целевой функции  $Q$  квадрат отклонения полной механической энергии системы  $H$  от ее заданного значения  $H^*$ :

$$(17) \quad Q(\psi, \dot{\psi}, \omega) = 0,5(H(\psi, \dot{\psi}, \omega) - H^*)^2.$$

Согласно общей схеме скоростного градиента, найдем скорость изменения во времени функции  $Q(\psi, \dot{\psi}, \omega)$  в силу системы (1), (2). Получим

$$(18) \quad \begin{aligned} \dot{Q}(\psi, \dot{\psi}, \omega) = & -(H(\psi, \dot{\psi}, \omega) - H^*) \cdot ((Mb + mh)g\dot{\psi} \sin \psi + \\ & + (J + J_m + mh^2)\ddot{\psi}\dot{\psi} + (J_r\chi^{-1} + 2J_m)(\ddot{\psi}\omega + \dot{\psi}\dot{\omega}) + \\ & + (2J_m + J_r\chi^{-2})\dot{\omega}). \end{aligned}$$

Алгоритмы скоростного градиента в пропорциональной и релейной формах получаются в виде

$$(19) \quad u = \gamma(H^* - H) \sigma(\dot{\psi}, \omega) \text{ – пропорциональная форма,}$$

$$(20) \quad u = \gamma \operatorname{sign}((H^* - H) \sigma(\dot{\psi}, \omega)) \text{ – релейная форма,}$$

где использовано обозначение  $\sigma(\dot{\psi}, \omega) = \partial \dot{H}(\psi, \dot{\psi}, \omega) / \partial u$ . Для вычисления функции  $\sigma(\dot{\psi}, \omega)$  требуется разрешить уравнения системы (1), (2) относительно старших производных, что будет сделано численно в следующем параграфе. На практике может оказаться полезной кусочно-линейная форма алгоритма (пропорциональный алгоритм с насыщением):

$$(21) \quad u = \gamma \operatorname{sat}(K(H^* - H) \sigma(\dot{\psi}, \omega)),$$

где  $\operatorname{sat}(\cdot)$  – функция насыщения, а  $K$  – некоторый (достаточно большой) коэффициент передачи. При  $K \rightarrow \infty$  алгоритм (21) переходит в релейный алгоритм (20). Заметим, что ограничение на управление в алгоритмах (20), (21) явно выражается через параметр  $\gamma$ , а именно, выполнено неравенство  $|u(t)| \leq \gamma$ . При использовании пропорциональной формы алгоритма (19) параметр  $\gamma$  должен быть подобран с учетом области возможных значений переменных состояния системы.

В дальнейшем используем следующие числовые значения [7]:

$$M = 1 \text{ кг}, \quad m = 3 \text{ кг}, \quad b = 0,1 \text{ м}, \quad h = 0,13 \text{ м}, \quad J = 0,12 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$J_m = 0,03 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad J_r = 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad J_v = 3,92 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$\chi = 0,1, \quad c_1 = 8 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м/В}, \quad c_2 = 7,6 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}.$$

Подстановкой числовых значений в (16) получим

$$\Pi(\psi) = 4,81 \cos \psi,$$

$$(22) \quad H(\psi, \dot{\psi}, \omega) = 4,81 \cos \psi + 0,1 \dot{\psi}^2 + 0,06 \omega \dot{\psi} + 0,035 \omega^2.$$

Разрешим уравнения маятника (1), (2) относительно старших производных. Получим следующую модель (для краткости записи приведены числовые значения параметров в системе единиц СИ):

$$(23) \quad \begin{cases} \ddot{\psi} - 6,14\omega - 50,1 \sin \psi = -6,46 u, \\ \dot{\omega} + 23,8\omega + 38,8 \sin \psi = 25 u. \end{cases}$$

При линеаризации модели (23) относительно  $\psi^* = 0$  получим систему, имеющую собственные числа  $\lambda = \{-24, 2, -6, 0, 6, 5\}$ .

Подстановкой выражений для  $\ddot{\psi}$ ,  $\dot{\omega}$  из (23) и числовых значений коэффициентов получим

$$\begin{aligned} \dot{Q}(\psi, \dot{\psi}, \omega) = & (H(\psi, \dot{\psi}, \omega) - H^*) ((0, 23\dot{\psi} + 1, 36\omega) u - 1, 29\omega^2 + \\ & + 0, 34\omega \sin \psi + 2, 88\dot{\psi} \sin \psi - 0, 217\omega\dot{\psi}). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$(24) \quad \frac{\partial \dot{Q}}{\partial u} = (H(\psi, \dot{\psi}, \omega) - H^*) \cdot (0, 23\dot{\psi} + 1, 36\omega).$$

Таким образом, сигнал  $\sigma(\dot{\psi}, \omega)$  в алгоритмах управления (19)–(21) численно равен  $\sigma(\dot{\psi}, \omega) = 0, 23\dot{\psi} + 1, 36\omega$ . Общий коэффициент в выражении для  $\sigma$  можно вынести за скобки и далее не учитывать.

Промоделируем процесс раскачки колебаний по алгоритму (16), (20) при нижнем начальном положении маятника ( $\psi(0) = \pi$ ) и нулевых начальных значениях скоростей вращения. Используя (22) получим, что верхнему положению маятника при отсутствии вращения соответствует полная энергия, численно равная  $H = 4, 81$  Дж. Это значение используем в качестве заданного  $H^* = 4, 81$  Дж. Примем  $\gamma = 16$  В. Результаты моделирования представлены на рис. 3, 4. Как видно из графиков, энергия системы быстро приходит в окрестность заданного состоя-

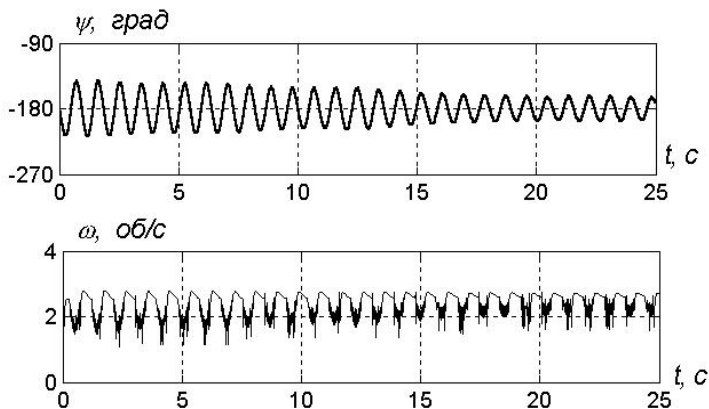


Рис. 3. Раскачка маятника по алгоритму (16), (20) при  $\gamma = 16 \text{ В}$ ,  $H^* = 4,81 \text{ Дж}$

ния, однако требуемой раскачки колебаний не происходит: основная часть энергии переходит во вращательное движение маховика, который раскручивается до средней скорости около  $15 \text{ с}^{-1} \approx 2,4 \text{ об/с}$ . На рис. 4 показана также составляющая энергии  $H_\psi(\psi, \dot{\psi}) = (M b + m h) g \cos \psi + 0,5(J + J_m + m h^2) \dot{\psi}^2$ , соответствующая энергии маятника без учета вращения маховика. Заметим, что при меньших значениях  $\gamma$  по данному алгоритму не удастся получить заданной энергии из-за ее рассеяния.

Полученные результаты показывают, что СГ-алгоритм (при достаточном уровне управления) приводит к требуемому значению полной энергии колебаний, но эта энергия не распределяется требуемым образом, а переходит в основном во вращательную энергию ротора. При  $\psi(0) \approx 0$  наблюдается сложное колебательное движение, при котором ротор вращается то в одну, то в другую сторону, однако верхнее положение равновесия по-прежнему не является притягивающим.

Модифицируем алгоритм управления, используя вместо полной энергии колебаний парциальную энергию, включающую только составляющую  $H_\psi$ .

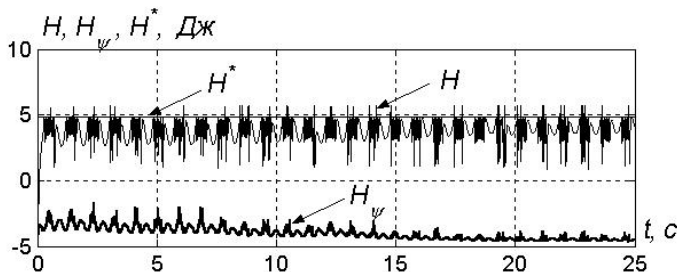


Рис. 4. Изменение энергии колебаний по алгоритму (16), (20) при  $\gamma = 16$  В,  $H^* = 4,81$  Дж.

### 2.3. Модифицированные алгоритмы: управление по парциальной энергии

Как и выше, получим СГ-алгоритмы управления колебаниями на базе энергетического подхода, однако при записи целевой функции используем не полную механическую энергию системы  $H(\psi, \dot{\psi}, \omega)$ , а парциальную составляющую:

$$(25) \quad H_\psi(\psi, \dot{\psi}) = (Mb + mh)g \cos(\psi) + 0,5(J + J_m + mh^2)\dot{\psi}^2,$$

характеризующую энергию колебаний маятника с неподвижным маховиком. Зададим новую целевую функцию в виде

$$(26) \quad Q(\psi, \dot{\psi}) = 0,5 (H_\psi(\psi, \dot{\psi}) - H^*)^2.$$

Вычисляя, как и выше, производную по времени от функции  $Q(\psi, \dot{\psi})$  в силу системы (1), (2), получим

$$(27) \quad \dot{Q} = (H_\psi(\psi, \dot{\psi}) - H^*) (\alpha_1 \sin \psi \cdot \dot{\psi} + (\alpha_2 u + \alpha_3 \omega + \alpha_4 \sin \psi) \dot{\psi}),$$

где  $\alpha_i, i = 1, \dots, 4$  – некоторые коэффициенты, зависящие от параметров системы. Вычисляя частную производную от  $\dot{Q}$  по управлению  $u$  и с учетом того, что  $\alpha_2 < 0$ , получим следующие

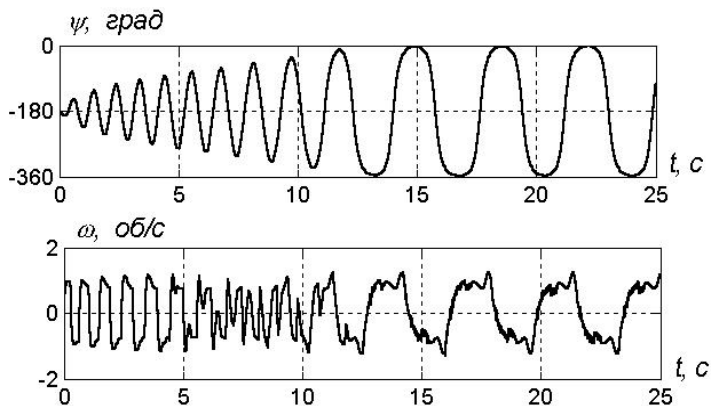


Рис. 5. Приведение маятника в верхнее положение по алгоритму (25), (29) при  $\gamma = 6 \text{ В}$ ,  $H^* = 4,81 \text{ Дж}$

алгоритмы маятника приведения маятника в заданное состояние:

$$(28) \quad u = \gamma(H_\psi - H^*) \dot{\psi} \text{ — пропорциональная форма,}$$

$$(29) \quad u = \gamma \operatorname{sign}((H_\psi - H^*) \dot{\psi}) \text{ — релейная форма.}$$

Приведем результаты моделирования системы (1), (2) с алгоритмом (25), (29). Результаты моделирования при уровне управляющего воздействия  $\gamma = 6 \text{ В}$  представлены на рис. 5, 6. Из рисунков видно, что модифицированный алгоритм обеспечивает выполнение цели управления — приведения маятника в верхнее состояние равновесия с малой скоростью движения. Как показывают результаты моделирования, амплитуда управляющего напряжения по предложенному ниже алгоритму значительно (в два раза) меньше амплитуды управления по алгоритму работы [7].

### 3. Алгоритм стабилизации

Для стабилизации маятника в верхнем положении и, одновременно, прекращения вращения маховика, воспользуемся конечной формой (7) СГ-алгоритма. Синтез алгоритма выполним



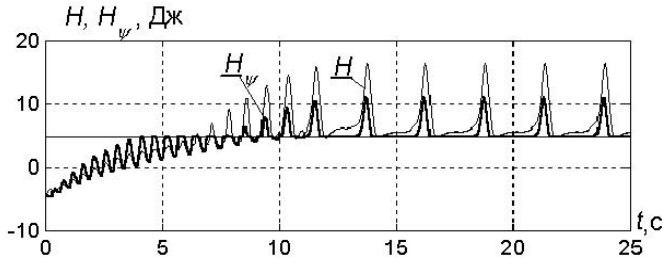


Рис. 6. Изменение энергии колебаний по алгоритму (25), (29) при  $\gamma = 6$  В,  $H^* = 4,81$  Дж.

по линеаризованной модели системы, обеспечивая возникновение (в некоторой окрестности требуемого состояния равновесия) устойчивых скользящих режимов. Используем известную методику синтеза, изложенную в [10] (см. также [3]).

Линеаризуем уравнения (23) относительно точки  $\psi^* = 0$  (в силу линейности (23) по  $\omega$  и  $u$ , значения  $\omega^*$  и  $u^*$  не существенны). Относительно вектора  $x = \text{col}\{\Delta\psi, \Delta\dot{\psi}, \Delta\omega\}$  отклонений от заданного состояния равновесия получим уравнения состояния  $\dot{x} = Ax + Bu$  с матрицами

$$(30) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 50,1 & 0 & 6,14 \\ -38,8 & 0 & -23,8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -6,46 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

Предполагая, что весь вектор состояния  $x$  в (30) доступен измерению, найдем вектор  $g \in \mathbb{R}^3$  так, чтобы числитель  $B(s)$  передаточной функции  $W(s) = g^T(pI - A)^{-1}B$  был заданным гурвицевым многочленом. В качестве «эталонного» используем многочлен Баттерворта [9]. Полагая  $g_1 = 1$ , получим  $B(s) = (-6,46g_2 + 25g_3)s^2 - (6,46 + 0,25g_2)s - 0,25 - 10^3g_3$ . Приравнявая коэффициенты приведенной формы многочлена  $B(s)$  заданному многочлену Баттерворта  $D(s) = s^2 + 1,4\Omega_0s + \Omega_0^2$ , при  $\Omega_0 = 5 \text{ с}^{-1}$  получим  $g_2 = 0,23 \text{ с}$ ,  $g_3 = 0,023 \text{ с}$ . Таким образом, получаем следующий алгоритм

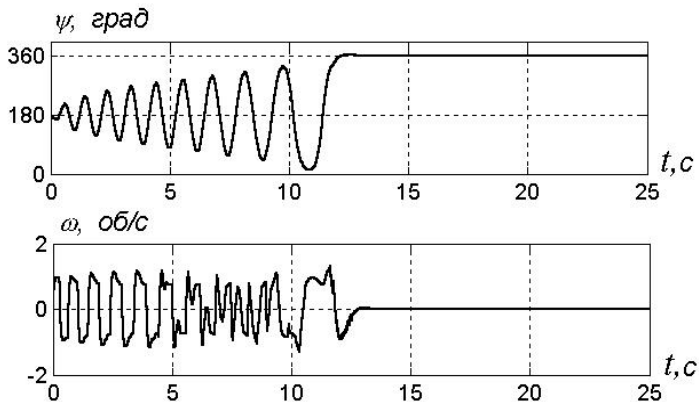


Рис. 7. Раскачка и стабилизация маятника по комбинированному алгоритму (25), (29), (31) при  $\gamma = 6 \text{ В}$

для стабилизации маятника в верхнем состоянии равновесия с одновременной остановкой вращения маховика:

$$(31) \quad u = -\gamma \operatorname{sign} \sigma, \quad \sigma = g_1(\psi \bmod 2\pi) + g_2\dot{\psi} + g_3\omega,$$

где  $g_1 = 1$ ,  $g_2 = 0,23$ ,  $g_3 = 0,023$ .

#### 4. Комбинированный алгоритм управления

Для переключения алгоритма управления с (25), (29) на (31) используем условие  $\operatorname{abs}(\psi \bmod 2\pi) < \Delta_\psi$ .

Рассмотрим совместную работу алгоритмов (25), (29) и (31). Выберем порог переключения  $\Delta_\psi = 40^\circ$ . Результаты моделирования представлены на рис. 7, 8. Как видно из рисунков, происходит раскачка колебаний, их амплитуда и энергия возрастают, в заданной области происходит переключение алгоритма и стабилизация маятника относительно неустойчивого состояния равновесия. Соответствующая фазовая траектория системы в пространстве  $\{\psi, \omega, \dot{\psi}\}$  представлена на рис. 9. На этом же рисунке показана поверхность заданного уровня парциальной энергии  $H_\psi$ .

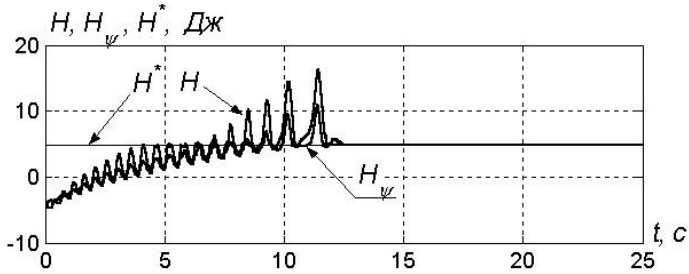


Рис. 8. Изменение энергии колебаний по алгоритму (25), (29), (31)

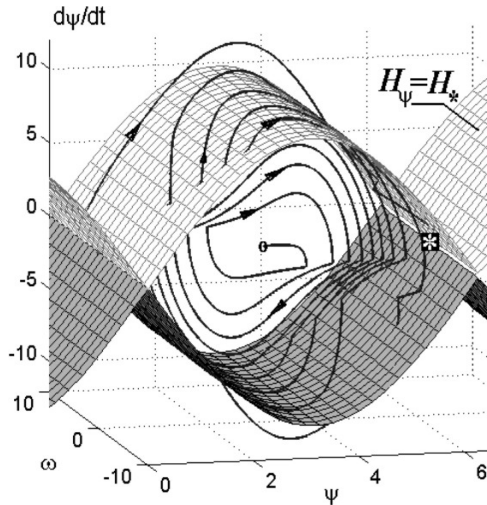


Рис. 9. Фазовая траектория. Начальное состояние — o (точка устойчивого равновесия), конечное состояние — \* (точка неустойчивого равновесия)

## 5. Заключение

В статье представлен и исследован комбинированный алгоритм стабилизации маятника, управляемого через инерционный маховик, в верхнем положении при произвольных начальных условиях. При этом решаются частные подзадачи: приведения маятника в некоторую окрестность требуемого состояния равновесия и стабилизации в этом состоянии. Для достижения первой цели в работе строится алгоритм скоростного градиента с энергетической целевой функцией, использующей парциальную энергию. Для достижения второй цели применяется регулятор со скользящим режимом. Применение предложенного метода, в отличие от метода работы [7], позволило решить задачу стабилизации при произвольных начальных условиях и, кроме того, потребовало по сравнению с указанной работой в два раза меньшего уровня управления.

## Литература

1. АНДРИЕВСКИЙ Б. Р. *Стабилизация перевернутого маятника с инерционным маховиком в качестве движителя* / Управление в физико-технических системах. Под ред. А. Л. Фрадкова. СПб.: Наука, 2004. – С. 52-71.
2. *Управление мехатронными вибрационными установками* / Б. Р. Андриевский, И. И. Блехман, Ю. А. Борцов и др. Под ред. И. И. Блехмана и А. Л. Фрадкова. СПб.: Наука, 2001. – 278 с.
3. АНДРИЕВСКИЙ Б. Р., ФРАДКОВ А. Л. *Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке МАТЛАВ*. СПб.: Наука, 1999. – 467 с.
4. АНДРИЕВСКИЙ Б. Р., ГУЗЕНКО П. Ю., ФРАДКОВ А. Л. *Управление нелинейными колебаниями механической системы по методу скоростного градиента* // Автоматика и телемеханика. – 1996. – Том 57, №6. – С. 4-17.
5. АНДРИЕВСКИЙ Б. Р., СТОЦКИЙ А. А., ФРАДКОВ А. Л. *Алгоритмы скоростного градиента в задачах адаптации*

- и управления* // Автоматика и телемеханика. – 1988. – №12. – С. 3-39.
6. БЕЗНОС А. В., ГРИШИН А. А., ЛЕНСКИЙ А. В., ОХОЦИМСКИЙ Д. Е., ФОРМАЛЬСКИЙ А. М. *Управление при помощи маховика маятником с неподвижной точкой подвеса* // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2004. – №1. – С. 27-38.
  7. ГРИШИН А. А., ЛЕНСКИЙ А. В., ОХОЦИМСКИЙ Д. Е. И ДР. *О синтезе управления неустойчивым объектом. Перевернутый маятник* // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2002. – №5. – С. 14-24.
  8. МИРОШНИК И. В., НИКИФОРОВ В. О., ФРАДКОВ А. Л. *Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами*. СПб.: Наука, 2000. – 550 с.
  9. ПЕРВОЗВАНСКИЙ А. А. *Курс теории автоматического регулирования*. Учеб. пособие. М.: Наука, 1986.
  10. УТКИН В. И. *Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления*. М.: Наука, 1981.
  11. ФРАДКОВ А. Л. *Кибернетическая физика. Принципы и примеры*. СПб.: Наука, 2003. – 208 с.
  12. ФРАДКОВ А. Л. *Схема скоростного градиента и ее применение в задачах адаптивного управления* // Автоматика и телемеханика. – 1979. – №9. – С. 90-101.
  13. ФРАДКОВ А. Л. *Адаптивное управление в сложных системах*. М.: Наука, 1990. – 292 с.
  14. AKULENKO L. D. *Parametric control of oscillations and rotations of physical pendulum* // J. Appl. Math. and Mech. – 1991. – Vol. 57, №2. – P. 82-91.
  15. ÅSTRÖM K. J., FURUTA K. *Swinging up a pendulum by energy control* // Automatica. – 2000. – Vol. 36, №2. – P. 287-295.
  16. FRADKOV A. L., ANDRIEVSKY B. R., BOYKOV K. B. *Nonlinear excitability analysis with application to two-pendulum system* // Proc. 21st IASTED Conf. «Modeling, Identification and Control» (MIC 2002), Innsbruck, 18-21 Feb,

- 2002, IASTED, ACTA Press. – P. 374-379.
17. FRADKOV A. L. *Swinging control of nonlinear oscillations* // Intern. J. Control. – 1996. – Vol. 64, №6. – P. 1189-1202.
  18. FRADKOV A. L., POGROMSKY A. YU. *Introduction to control of oscillations and chaos*. – Singapore: World Scientific, 1998.
  19. LENCI S., REGA G. *Numerical control of impact dynamics of inverted pendulum through optimal feedback strategies* // J. Sound Vib. – 2000. – Vol. 236, №3. – P. 505-527.
  20. MORI S., NISHIHARA H., FURUTA K. *Control of unstable mechanical systems. Control of pendulum* // Int. J. Control. – 1976. – Vol. 23, №5. – P. 673-692.
  21. SCHMID CHR. *An autonomous self-rising pendulum. Invited paper* / Proc. European Control Conference ECC'99. – Karlsruhe, 1999.
  22. SHIRIAEV A., POGROMSKY A., LUDVIGSEN H. ET AL. *On global properties of passivity-based control of an inverted pendulum* // Int. J. Robust. Nonlin. Contr. – 2000. – Vol. 10, №4. – P. 283-300.
  23. SHIRIAEV A. S., EGELAND O., LUDVIGSEN H., FRADKOV A. L. *VSS-version of energy-based control for swinging up a pendulum* // Syst., Control Let. – 2001. – Vol. 44, №1. – P. 45-56.
  24. SPONG M. W., CORKE P., LOZANO R. *Nonlinear control of the Reaction Wheel Pendulum* // Automatica. – 2001. – Vol. 37. – P. 1845-1851.
  25. SPONG M., TSAO T.-CH. *Mechatronics education at the university of Illinois* / Proc. 14th World Congress of IFAC. Beijing, 1999, №M-6a-01-1.
  26. WIKLUND M., KRISTENSON A., ÅSTRÖM K. *A new strategy for swinging up an inverted pendulum* / Prepr. 12th IFAC World Congress. – 1993. – Vol. 9. – P. 151-154.

## GLOBAL STABILIZATION OF THE UNSTABLE REACTION-WHEEL PENDULUM

**Boris Andriesky**, Institute for Problems of Mechanical Engineering of RAS, Dr.Sc., Leading Research Fellow (Saint Petersburg, 61, V.O. Bolshoy Av., +7 812 321-4766, bandri@yandex.ru).

*Abstract: The paper deals with the problem of the Reaction Wheel Pendulum stabilization about unstable (inverted) position for arbitrary initial conditions. Considered mechanical system consists of a physical pendulum with a symmetric disk attached to the end of the pendulum, which is free to spin about an axis parallel to the axis of rotation of the pendulum. The disk is actuated by a DC-motor. The coupling torque generated by the angular acceleration of the disk is used to control of the pendulum. The switching control law is proposed to swinging up the pendulum and balancing it about the inverted position. The nonlinear swinging up control law is proposed ensuring global stabilization of thr pendulum about inverted position. The Energy-based Speed-gradient (EBSG) control scheme is used to designing the swinging-up controller. The modification of the EBSG method is proposed to ensure attainability of the inverted position of the pendulum for all initial states of the system. The balance controller is designed on the basis of The sliding-mode Variable Structure Control approach is used for designing the balance controller. The parameter estimation procedure based on Kalman Filtering concept is developed to cope with a-priory parametric uncertainty. Numerical simulation results are presented showing achievement of the posed control goal by means of the control action of small magnitude.*

**Keywords:** stabilization, inverted pendulum, energy-based approach, speed-gradient, sliding mode, switching algorithm.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Л.Б. Рапопортом.*